Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

André Haefliger

Variétés feuilletées

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 16, nº 4 (1962), p. 367-397

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1962_3_16_4_367_0>

VARIÉTÉS FEUILLETÉES(*)

par ANDRÉ HAEFLIGER (Genève)

Le but de ces huit leçons est d'exposer, sans prétendre être complet, les principaux résultats (à vrai dire fort peu nombreux) de la théorie des variétés feuilletées créée par C. Ehresmann et G. Reeb. Sans viser à la généralité la plus grande, nous nous efforcerons de bien dégager, par des exemples et dans les démonstrations, les notions fondamentales, celle d'holonomie par exemple qui est due à C. Ehresmann et qui est à la base de toute la théorie.

Les 3 références de base sont

G. Reeb, *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées,* Act. Sc et Ind., Hermann, Paris, 1952.

C. Ehresmann et Shih W. S., *Sur les espaces feuilletés : théorème de stabilité,* C. R. Acad. Sc, Paris, 243 (1956), 344-6.

A. Haefliger, *Structures feuilletées et ...*, Comm. Math. Helv. 32, 1958, 248-329.

1. Définitions et exemples.

Disons qu'une application d'un ouvert d'un espace numérique réel dans un autre est de classe r, où $r = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots, \infty$ ou ω, si elle est continue lorsque $r = 0$, si elle est r fois continûment différentiable lorsque r est un entier > 0 ou ∞, si elle est analytique réelle lorsque r est le symbole ω.

Un homéomorphisme local de R^n (c. à d. un homéomorphisme d'un ouvert de l'espace numérique réel R^n de dimension n sur un ouvert de R^n) est dit de classe r si il est de classe r ainsi que son inverse.

Une variété de dimension n de classe r est un espace topologique V, séparé sauf mention explicite du contraire, muni d'un ensemble de cartes

(*) Il presente lavoro riproduce il ciclo di conferenze tenute dall'Autore durante il corso C.I.M.E. sulla « Topologia differenziale » svoltosi ad Urbino dal 2 all'11 luglio 1962.

qui sont des homéomorphismes d'ouverts de R^n sur ouverts de V, les changements de cartes étant des homéomorphismes de classe r de R^n.

Les notions d'applications de classe r ou d'homéomorphismes locaux de classe r s'étendent naturellement au cas des variétés de classe r.

Une application f d'un espace topologique X dans un espace topologique Y est localement un homéomorphisme si tout point de X possède un voisinage ouvert appliqué homéomorphiquement par f sur un ouvert de Y.

1.1. DÉFINITION D'UN FEUILLETAGE À L'AIDE DES CARTES. — Identifions l'espace numérique réel R^n de dimension n au produit $R^p \times R^{n-p}$; désignons par $x = (x_1, \dots, x_p)$ les p premières coordonnées de R^n et par $y = (y_1, \dots y_{n-p})$ les $n-p$ dernières coordonnées.

L'exemple le plus simple d'une structure feuilletée de codimension p sur R^n est celle dont les feuilles sont les $(n-p)$ — plans parallèles au sous-espace linéaire défini par $x = 0$. Un homéomorphisme local h de classe r de cette structure $\mathcal{F}_0$ est un homéomorphisme local de R^n qui préserve localement les feuilles: au voisinage de tout point (x, y) où h est défini, l'homéomorphisme $h(x, y) = (x', y')$ s'exprime par des équations de la forme:

$$(1) \qquad \begin{cases} x' = h_1(x) \\ y' = h_2(x, y). \end{cases}$$

Remarquons que h_1 est un homéomorphisme local de R^p de classe r.

Sur une variété V de dimension n et de classe r, une structure feuilletée (ou feuilletage) $\mathcal{F}$ de classe r et de codimension p, ou de dimension $n-p$, est définie par un ensemble maximal (atlas complet) de cartes h_i qui sont des homéomorphismes de classe r d'ouverts U_i de R^n sur des ouverts de V et qui vérifie les deux propriétés:

(i) les buts $h_i(U_i)$ des cartes h_i forment un recouvrement de V,

(ii) les changements de cartes $h_j^{-1} h_i$ sont des homéomorphismes locaux de R^n de classe r qui sont localement de la forme (1).

On dira aussi que le feuilletage $\mathcal{F}$ est topologique, différentiable ou analytique suivant que $r = 0$, $0 < r \leq \infty$ ou $r = \omega$.

En restreignant la forme des changements de cartes, on peut définir encore des structures plus précises. Par exemple une structure feuilletée sera dite *orientée* (ou *transversalement orientée*) si les changements de cartes sont de la forme (1), avec la condition supplémentaire que l'homéomorphisme local h_1 de R^p conserve l'orientation. Elle sera dite *transversalement analytique* si h_1 est analytique.

On a également la notion de feuilletage analytique complexe en remplaçant dans la définition précédente R^n par l'espace numérique complexe C^n, les changements de cartes étant supposés analytiques complexes.

Il est clair aussi que l'on pourrait plus généralement remplacer dans la définition précédente $R^n = R^p \times R^{n-p}$ par le produit $B \times F$ de deux espaces topologiques quelconques, les changements de cartes étant toujours de la forme (1).

Toute structure feuilletée de classe r sur V induit d'une manière évidente une telle structure sur tout ouvert de V.

1.2. Les applications distinguées. — Soit $\mathcal{F}$ une structure feuilletée de codimension p sur V, définie par un atlas complet formé de cartes h_i et soit π la projection naturelle de $R^n = R^p \times R^{n-p}$ sur le premier facteur R^p. Les applications continues f d'ouverts de V dans R^p qui sont localement de la forme πh_i^{-1} sont appelées les *applications distinguées de* $\mathcal{F}$.

Les applications distinguées forment un ensemble d'applications f_i de classe r (et de rang p si $r > 0$) d'ouverts V_i de V dans R^p verifiant les deux propriétés :

a) les V_i forment un recouvrement de V

b) une application f d'un ouvert U de V dans R^p est distinguée si et seulement si, pour toute autre application distinguée $f_i : V_i \longrightarrow R^p$ et tout point $z \in U \cap V_i$, il existe un homéomorphisme local h de classe r de R^p tel que

$$(1') \qquad f = h f_i \qquad \text{au voisinage de } z.$$

Dans le cas d'une structure feuilletée orientée, l'homéomorphisme local h de (1') est astreint à conserver l'orientation de R^p.

Remarquons que les applications distinguées caractérisent complètement la structure $\mathcal{F}$ et nous les utiliserons constamment dans la suite.

Soit f une application d'une variété V de classe r dans une varieté V' de classe r qui est localement un homéomorphisme de classe r. Soit $\mathcal{F}'$ un feuilletage de classe r sur V'. Les applications d'ouverts de V dans R^p obtenues en composant f avec les applications distinguées de $\mathcal{F}'$ sont des applications distinguées d'un feuilletage $\mathcal{F}$ sur V appelé *l'image réciproque par f de* $\mathcal{F}'$.

Remarque. La considération des applications distinguées conduit à la généralisation naturelle suivante.

Soit B un espace topologique auxiliaire muni d'un pseudogroupe Γ de transformations. Une Γ-structure feuilletée sur un espace topologique X est définie par une famille d'applications continues d'ouverts V_i de V dans

B vérifiant les deux conditions précédentes, l'homéomorphisme loca h dans (1′) devant être un élément de Γ.

L'avantage de cette définition est de mettre l'accent sur la structure transverse aux feuilles (celle de B muni de Γ) qui est, comme le montre l'expérience, souvent plus importante que celle des feuilles.

1.3. LES FEUILLES. — Soit T_0 la topologie de $R^n = R^p \times R^{n-p}$ qui est le produit de la topologie discrète de R^p par la topologie naturelle de R^{n-p}. Les composantes connexes de R^n suivant T_0 sont précisément les feuilles de $\mathcal{F}_0$, c'est à dire les plans $x =$ constante, munis de leur topologie naturelle. Les automorphismes locaux h de $\mathcal{F}_0$ sont aussi des homéomorphismes pour la topologie T_0 d'après (1). Il existe donc une topologie T unique sur V telle que chaque carte h_i soit un homéomorphisme de U_i sur $h_i(U_i)$ pour les topologies induites par T_0 et T respectivement.

Par définition *les feuilles de la structure $\mathcal{F}$ sont les composantes connexes de V relativement à cette topologie T* (*appelée la topologie des feuilles*). Les feuilles de $\mathcal{F}$ sont donc des sous-variétés de V de dimension $n-p$ qui sont de classe r si $\mathcal{F}$ est de classe r.

La topologie T des feuilles peut être aussi définie par les applications distinguées: une base de T est formée par les images réciproques des points de R^p par les diverses applications distinguées.

L'espace quotient de V par la relation d'équivalence ϱ dont les classes sont les feuilles de $\mathcal{F}$ est appelé *l'espace des feuilles de $\mathcal{F}$*. Remarquons que ϱ est une relation d'équivalence *ouverte* (les feuilles rencontrant un ouvert de V forment un ouvert de V); en effet, elle est engendrée par les relations d'équivalence locales ouvertes ϱ_i dont les classes sont les feuilles des structures feuilletées induites par $\mathcal{F}$ sur les buts des cartes h_i. Il en résulte que l'adherence d'un sous-ensemble de V qui est réunion de feuilles est elle-même réunion de feuilles de $\mathcal{F}$.

Nous utiliserons souvent la notion de *sous-variété transverse à un feuilletage*. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de classe r et de codimension p sur V. Une sous-variété W de classe r de V (ou une variété W munie d'une application j de classe r dans V) est dite transverse à $\mathcal{F}$ si la restriction à W (ou la composition avec f) de toute application distinguée de $\mathcal{F}$ est localement un homéomorphisme de classe r dans R^p. Ainsi pour $r > 0$, en tout point z de V, l'espace tangent à W en z est complémentaire à l'espace tangent à la feuille passant par z.

Une feuille F est dite *propre* si la topologie induite sur F par la topologie de V est la même que la topologie induite sur F par la topologie des feuilles T.

D'après ce qui précède, une feuille est propre si et seulement s'il existe une petite sous-variété transverse au feuilletage coupant F en un seul point.

Une feuille F est *fermée* si c'est un sous-espace fermé de V (muni de sa topologie usuelle). Une feuille propre est fermée si et seulement si tout compact situé dans une sous-variété transverse coupe F en un nombre fini de points, et réciproquement.

PROPOSITION. *Toute feuille fermée d'un feuilletage défini sur une variété V à base dénombrable est aussi propre* ([7]).

Un exemple montre que sur une variété à base non dénombrable, une feuille peut remplir toute la variété.

Le lemme suivant est essentiellement démontré dans Chevalley [1] (voir aussi [7], p. 4).

LEMME. *Si V est à base dénombrable, toute feuille d'un feuilletage sur V est également à base dénombrable.*

La proposition se démontre alors en remarquant que si la feuille fermée F n'était pas propre, elle couperait une sous-variété transverse suivant un ensemble fermé parfait. Or un ensemble parfait n'est pas dénombrable, ce qui contredit le fait que F est à base dénombrable.

Pour plus de propriétés relevant de la topologie générale des feuilletages, voir Reeb [11] Chapitre A et [12].

1.4. ORIENTATION D'UN FEUILLETAGE. — Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension p défini sur V. Les applications distinguées de $\mathcal{F}$ définies au voisinage d'un point z de V se répartissent en deux classes, ainsi définies : deux applications distinguées f et g sont dans la même classe si l'homéomorphisme local h de R_p tel que $g = hf$ au voisinage de z, est de degré 1 en $f(z)$. Chacune de ces classes est appelée un *germe d'orientation de $\mathcal{F}$ au point z.*

Munissons l'ensemble V^* des germes d'orientation de $\mathcal{F}$ d'une topologie en décidant qu'un sous-ensemble U^* de V^* est un élément d'une base de cette topologie si U^* est l'ensemble des germes d'orientation définis par une application distinguée aux différents points de sa source. La projection de V^* sur V associant à chaque germe d'orientation au point z, le point z lui-même, fait de V^* un revêtement à deux feuillets de V. Plus précisement, on a la

PROPOSITION. *L'espace V^* des germes d'orientation d'un feuilletage $\mathcal{F}$ sur V est un revêtement à deux feuillets de V. Le feuilletage $\mathcal{F}^*$ sur V^*,* *image réciproque de $\mathcal{F}$ par la projection de ce revêtement, est orienté. Le feuilletage $\mathcal{F}$ est orientable si et seulement si ce revêtement est trivial.*

Ainsi tout feuilletage d'une variété simplement connexe est orientable.

EXEMPLES

1.5. FEUILLETAGES SIMPLES. — Un feuilletage $\mathcal{F}$ de classe r sur une variété V est dit simple s'il existe une application f de V sur une variété W (séparée ou non) de classe r et de dimension p vérifiant la condition suivante: pour tout homéomorphisme g de classe r d'un ouvert de R^p sur un ouvert de W, l'application $g^{-1}f$ est une application distinguée de $\mathcal{F}$. Les feuilles de $\mathcal{F}$ sont alors les composantes connexes des images réciproques par f des points de W. L'espace des feuilles de $\mathcal{F}$ (cfr. 1.2) est une variété, en général non séparée, de classe r, muni d'une projection φ sur W qui est localement un homéomorphisme de classe r. Réciproquement, si l'espace des feuilles est une variété de dimension p et de classe r, alors le feuilletage est simple. On pourra prendre pour f l'application naturelle de V sur l'espace des feuilles de $\mathcal{F}$. Un feuilletage est simple si et seulement si, pour tout point z de V, il existe une application distinguée f définie dans un voisinage U de z et qui applique l'intersection non vide de toute feuille avec U sur un seul point de R^p.

Par exemple, en vertu du théorème des fonctions implicites, une application f de classe r $(r > 0)$ et de rang p de V sur une variété de classe r et de dimension p définit sur V un feuilletage simple.

Toute structure feuilletée de classe 0 et de codimension 1 du plan R^2 est simple (cf. [8]).

Sur R^n, tout feuilletage de classe 0 et de codimension 1 dont toutes les feuilles sont fermées est aussi simple (cf. 3.4 et [7]).

Une fibration de classe r sur une variété V est aussi un exemple d'un feuilletage simple ; les feuilles sont les composantes connexes des fibres. La structure induite sur tout ouvert d'un feuilletage simple est simple.

1.6. CHAMP DE PLANS COMPLÈTEMENT INTÉGRABLE. — Soit V une variété de classe $r+1 \geq 2$ et de dimension n. Soit Π un champ de q-plans de classe r sur V. Autrement dit, en chaque point x de V on se donne un sous-espace linéaire $\Pi(x)$ de dimension q de l'espace des vecteurs tangents à V en x, ce sous-espace étant une fonction de classe r de x. Le champ Π est dit complètement intégrale si, pour tout x de V, il existe une sous-variété W de classe r de V de dimension q, telle qu'en tout point y de W, l'espace tangent à W en y soit $\Pi(y)$.

Si le champ Π est donné localement par q champs de vecteurs linéairement indépendants $X_1, \ldots, X_q$ (c. à d. qu'en chaque point x où ils sont définis, les q champs X_i engendrent $\Pi(x)$), la condition de complète intégrabilité est équivalente au fait que le crochet $[X_i, X_j]$ de deux champs quelconques est une combinaison linéaire des X_k (cf. [1]). Dualement, si Π est donné localement par l'annulation de $n-q$ formes $\omega_1, \dots, \omega_{n-q}$ de degré 1, le champ Π est complètement integrable si et seulement si la différentielle extérieure $d\omega_i$ appartient à l'anneau engendré par les formes ω_j.

Si $\mathcal{F}$ est une structure feuilletée sur V de classe $r+1>1$ et de dimension q, les plans tangents aux feuilles de $\mathcal{F}$ forment un champ complètement intégrable de q-plans de classe r.

Réciproquement, un champ de classe r de q-plans complètement intégrable sur V définit une structure feuilletée $\mathcal{F}$ de classe r dont les feuilles sont les variétés intégrales maximales de ce champ. Une application distinguée de $\mathcal{F}$ est donnée par $n-q$ intégrales premières indépendantes locales.

Signalons à ce propos deux problèmes fondamentaux, mais sur lesquels rien n'est connu.

Problème d'existence. Soit V une variété munie d'un champ continu Π de q-plans de classe r. A quelles conditions existe-t-il sur V un champ de q-plans complètement intégrable de classe r et homotope à Π?

Problème d'approximation. Soit V une variété de classe ∞ munie d'un champ Π de q-plans complètement intégrable de classe r. A quelles conditions existe-t-il sur V un champ complètement intégrable de q-plans de classe $r' > r$ et approchant Π?

1.7. Classes modulo un sous-groupe. — Soit G un groupe de Lie et H un sous-groupe analytique connexe de G. Les classes à gauche de G modulo H sont les feuilles d'une structure feuilletée analytique sur G (cf. [1]). Toutes les feuilles sont isomorphes entre elles, car elles se déduisent les unes des autres par translation à gauche. Elles sont propres (cf. 1.2) si et seulement si H est un sous-groupe fermé. L'exemple le plus simple d'un sous-groupe non fermé s'obtient en prenant pour G le tore à 2 dimensions (quotient du plan R^2 par le sous-groupe des points à coordonnées entières) et pour H le sous-groupe à 1 paramètre déterminé par une droite passant par (0,0) et de pente irrationnelle.

1.8. Fibré á groupe structural discret. — Soient X et B des variétés de classe r, X étant connexe et B de dimension p. La variété X s'identifie au quotient de son revêtement universel $\widetilde{X}$ par un groupe Π d'homéomorphismes de B de classe r, qui est d'ailleurs isomorphe au premier groupe d'homotopie de B. Soit Φ une représentation de Π dans un groupe d'homéomorphismes de classe r de B. Soit V le quotient du produit $\widetilde{X} \times B$ par la relation d'équivalence qui identifie les couples (x', y') et (x, y) s'il existe un élément g de Π tel que $x' = g(x)$ et $y' = \Phi(g) y$. La variété $\widetilde{X} \times B$, muni de la projection naturelle sur V, est un revêtement de V.

La projection de $\widetilde{X} \times B$ sur $\widetilde{X}$ donne par passage au quotient une projection π de V sur X; muni de cette projection, V est un espace fibré de base X, fibre B et groupe structural discret Π (cf. [14]) ou muni d'une connexion intégrable (cf. [4]). Inversement, toute structure fibrée de classe r à groupe structural discret peut s'obtenir de cette manière.

D'autre part, V est muni d'une structure feuilletée de classe r et de codimension p dont les feuilles sont transverses aux fibres. En effet, la projection de $\widetilde{X} \times B$ sur B définit une structure feuilletée simple de classe r sur $\widetilde{X} \times B$. Le groupe Π agissant sur $\widetilde{X} \times B$ par les transformations de la forme $(x, y) \longrightarrow (g(x), \Phi(g) y)$, où $g \in \Pi$, est un groupe d'automorphismes de ce feuilletage. Par passage au quotient, on obtient sur V une structure feuilletée $\mathcal{F}_\Phi$ dont les feuilles sont les images $F(y)$, par la projection naturelle de $\widetilde{X} \times B$ sur V, des sous-variétés $\widetilde{X} \times y$, où $y \in B$. La variété V, munie de la topologie des feuilles et de la projection π sur X, est un revêtement de X; en particulier chaque feuille est un revêtement de X.

Voici un exemple spécifique d'un feuilletage de codimension un obtenu de cette manière sur une variété de dimension 3. Soit X la bouteille de Klein, quotient du plan R^2 par l'action du groupe Π engendré par les deux transformations

$$g_1 \begin{cases} x_1' = x_1 + 1 \\ x_2' = x_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad g_2 \begin{cases} x_1' = -x_1 \\ x_2' = x_2 + 1 \end{cases}$$

Ces deux générateurs sont liés par la seule relation $g_1 g_2^{-1} g_1 g_2 = \text{Identité}$. Soit Φ la représentation de Π dans le groupe des homéomorphismes du cercle S^1 qui applique g_1 sur une rotation non périodique et g_2 sur une symétrie axiale (renversant l'orientation). La construction précédente donne un feuilletage sur une variété V de dimension 3 orientable; les feuilles sont soit des rubans simples, soit des rubans de Möbius. Chaque feuille est partout dense.

D'une manière générale, l'étude des feuilletages $\mathcal{F}_\Phi$ obtenus de la manière précédente se ramène essentiellement à celle des représentations Φ du groupe fondamental Π de X dans le groupe des homéomorphismes de classe r de B.

Ainsi la feuille $F(y)$ correspond à l'orbite du point y de B selon le groupe $\Phi(\Pi)$; la feuille $F(y)$ est partout dense dans V si et seulement si l'orbite de y est partout dense dans B; la feuille $F(y)$ est propre (cf. 1.3) si la topologie de B induit sur l'orbite de y la topologie discrète. L'espace des feuilles de $\mathcal{F}_\Phi$ est le quotient de B par l'action de $\Phi(\Pi)$. Lorsque B est compact, les propriétés de stabilité de $\mathcal{F}_\Phi$ et de Φ se correspondent, etc.

Signalons que G. Reeb a fait une étude détaillée du cas où X est le tore, B le segment $[0, 1]$ et où $r \geq 2$ (cf. [13]).

1.9. Feuilletage de S^3 de codimension 1. — Voici l'exemple le plus simple et le plus classique qui est du à Reeb. Soit D^2 le disque formé des vecteurs x du plan dont la norme $|x|$ est ≤ 1. Dans le cylindre $D^2 \times R$, considérons le feuilletage dont une feuille est le bord $S^1 \times R$ du cylindre et dont les autres feuilles sont les surfaces définies par $\left(x, \dfrac{|x|^2}{1 - |x|^2} + a\right)$, où a est un paramètre réel et où $|x| < 1$.

Un tore plein T est le quotient du produit $D^2 \times R$ par la relation d'équivalence qui identifie (x, t) et $(x, t + n)$, où n est un entier quelconque; il y a correspondence biunivoque entre feuilletage de T et feuilletage de $D^2 \times R$ invariant par la translation $(x, t) \rightarrow (x, t + 1)$. Le feuilletage précédent définit donc dans le tore plein T un feuilletage dont le bord est une feuille.

En prenant deux tores pleins feuilletés comme plus haut et en les recollant le long de leur bord par un homéomorphisme qui applique les méridiens de l'un sur les parallèles de l'autre, on obtient un feuilletage de S^3. Toutes les feuilles sont propres et une seule feuille est compacte, à savoir le bord commun des deux tores.

En remplaçant la fonction $|x|^2/(1 - |x|^2)$ par une fonction convenable, on peut obtenir un feuilletage de classe ∞; nous verrons plus loin qu'il n'existe pas de feuilletage sur S^3 qui soit analytique.

En choisissant d'autres feuilletages du tore plein, le bord étant toujours une feuille, on peut varier à l'infini l'exemple de Reeb. On peut obtenir autant de feuilles compactes que l'on veut (ce sont toujours des tores d'après un théorème général d'Ehresmann (cf. [5])); dans les exemples connus, les feuilles non compactes sont homéomorphes à des plans privés d'un certain nombre de points; on peut aussi obtenir des feuilles denses dans un ouvert.

Kneser a conjecturé que tout feuilletage de S^3 de codimension 1 admet une feuille compacte. Parmi les problèmes ouverts, signalons les suivants: quels sont les noeuds dans S^3 dont le bord d'un voisinage tubulaire peut être une feuille d'un feuilletage ? On peut voir que c'est possible pour les noeuds du tore. Existe-t-il un feuilletage de S^3 avec des feuilles non compactes qui ne sont pas homéomorphes à un plan troué ?

On peut se demander aussi quelles sont les variétés compactes de dimension 3 qui peuvent être feuilletées par des surfaces. Il est toujours possible de construire un feuilletage de codimension 1 sur une variété de dimension 3 qui est un espace fibré par des cercles au sens de Seifert (avec des fibres singulières).

Remarquons encore, qu'à part le cas de S^3, on ne connait aucun feuilletage de sphères, en dehors des cas où l'on connait l'existence de fibrations.

1.10. TOURBILLONS DANS UN FEUILLETAGE. — (cf. Reeb, [11] p. 114-5). Soit D^r le disque formé des vecteurs z de R^r de norme $|z| \leq 1$. Dans le produit $S^1 \times D^{p-1} \times D^{n-p}$ formé des triples (θ, x, y), nous allons perturber le feuilletage de codimension p dont les feuilles sont les $(n-p)$ disques $\{\theta\} \times \{x\} \times D^{n-p}$ en le laissant fixe sur le bord.

En plongeant le tube $S^1 \times D^{p-1} \times D^{n-p}$ dans une variété feuilletée donnée de sorte que $S^1 \times D^{p-1} \times \{y\}$ soit transverse aux feuilles et (θ, x, D^{n-p}) soit contenu dans les feuilles pour tout θ, x, y, on pourra perturber le feuilletage à l'intérieur du tube sans le changer à l'extérieur.

Soit $\alpha(u, v)$ une fonction de classe ∞ des deux variables u et v, définie sur le carré $0 \leq |u| \leq 1$ et $0 \leq |v| \leq 1$, paire en u et v, égale à 0 au voisinage du bord et infinie aux points $u = 0$ et $|v| = 1/2$.

Dans le produit $R \times D^{p-1} \times D^{n-p}$, formé des triples (t, x, y), considerons le feuilletage de classe ∞ dont les feuilles sont les sous-variétés définies par

$$\begin{aligned} x &= x_0 \\ t &= \alpha(|x|, |y|) + t_0 \end{aligned} \qquad \text{où } x_0 \text{ et } t_0 \text{ sont des constantes}$$

et par $x = 0$, $|y| = 1/2$.

Ce feuilletage étant invariant par la translation $(t, x, y) \to (t+1, x, y)$, on en déduit par passage au quotient un feuilletage sur $S^1 \times D^{p-1} \times D^{n-p}$.

Les feuilles passant par des points où $x \neq 0$ sont des $(n-p)$-disques. Celles qui passent par des points où $x = 0$ et $|y| \neq 1/2$ sont homéomorphes à $R^+ \times S^{n-p-1}$ ou à R^{n-p} suivant que $|y| > 1/2$ ou $|y| < 1/2$. Il existe une feuille homéomorphe à $S^1 \times S^{n-p-1}$, celle qui est définie par $x = 0$ et $|y| = 1/2$. R^+ désigne la demi-droite $[0, \infty]$.

2. La notion d'holonomie.

2.1. Introduction. — Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de classe r et de codimension p sur une variété V. Soit F une feuille de $\mathcal{F}$ et soit $\pi_1(F, z)$ le groupe des classes d'homotopie des lacets de F au point z de F. L'holonomie de F est une représentation $\Phi : \pi_1(F, z) \longrightarrow G$, ou G est le groupe des germes d'homéomorphismes locaux de classe r de R^p, à l'origine 0, qui laissent fixe 0 (cf. 2.2). Cette représentation est définie à un automorphisme intérieur près de G. L'image de Φ est le groupe d'holonomie de F (défini à un conjugué près).

Cette notion fondamentale a été introduite par C. Ehresmann (elle était déjà sous-jacente dans la thèse de Reeb); elle donne à peu près tous les renseignements connus sur le voisinage d'une feuille. Par exemple le théorème de stabilité affirme que si le groupe d'holonomie d'une feuille compacte F est fini, alors il existe un voisinage de F qui est réunion de feuilles compactes. Dans le cas différentiable ou analytique, nous avons montré ([9]) que l'holonomie d'une feuille propre caractérise complètement son voisinage feuilleté (cf. 2.7).

La notion d'holonomie est bien connue dans le cas d'un système dynamique donné sur une variété par un système d'équations différentielles ordinaires. Soit F une trajectoire fermée (un cercle) et soit B_p une petite boule, centrée en $z \in F$, transverse aux trajectoires. La trajectoire partant d'un point y de B_p va recouper B_p en un point $\varphi(y)$, si y est assez proche de z; l'application $y \longrightarrow \varphi(y)$ est un homéomorphisme d'un voisinage de z dans B_p sur un voisinage de z (cet homéomorphisme est de classe r si le système donné est de classe r). L'holonomie de F est dans ce cas la représentation qui fait correspondre au générateur de $\pi_1(F, z) = Z$ le germe de φ en z. Les deux résultats cités ci-dessus sont évidents dans ce cas particulier.

2.2. Rappel sur les germes d'applications. — Soient X et Y des espaces topologiques. Deux applications continues f et f' de voisinages de $x \in X$ dans Y ont le même germe en x si leur restriction à un voisinage convenable de x coincident. Ainsi le *germe de f en x* est l'ensemble de toutes les applications f' de voisinages de x dans Y qui sont égales à f dans un voisinage de x (ce voisinage dépendant de f'). Le point x est appelé la *source* du germe de f en x, et le point $y = f(x)$ son *but*.

Si g est une application continue d'un voisinage de $f(x)$ dans un espace topologique Z, le germe de gf au point x ne dépend que des germes de f en x et de g en y et est appelé le composé de ces germes. Ainsi les germes d'homéomorphismes locaux de classe r de R^p à l'origine 0 et qui laissent fixe 0, forment un groupe.

2.3. L'ESPACE DES GERMES DISTINGUES D'UN FEUILLETAGE. — Soit $\mathcal{F}$ une structure feuilletée de classe r sur une variété V. Considérons l'ensemble $\widetilde{V}$ de tous les germes d'applications distinguées de $\mathcal{F}$ aux différents points de V (nous dirons l'ensemble des germes distingués de $\mathcal{F}$); cet ensemble $\widetilde{V}$ est muni d'une projection α sur V, celle qui fait correspondre à chaque germe distingué au point x le point x lui-même. A tout application distinguée f de $\mathcal{F}$, définie sur un ouvert U de V, correspond un relèvement $\widetilde{U}$ de U dans $\widetilde{V}$ formé de tous les germes de f aux points de U; les sous-ensembles $\widetilde{U}$ de $\widetilde{V}$ obtenus de cette manière forment la base d'une topologie sur $\widetilde{V}$. La projection α est localement un homéomorphisme.

Comme la topologie T des feuilles de $\mathcal{F}$ sur V est plus fine que la topologie de V, il existe une topologie $\widetilde{T}$ sur $\widetilde{V}$ unique (encore appelée topologie des feuilles sur $\widetilde{V}$) telle que α soit encore un homéomorphisme local lorsque $\widetilde{V}$ et V sont mnnis des topologies $\widetilde{T}$ et T.

En général, $\widetilde{V}$ muni de α n'est pas un revêtement de V.

Cependant, nous allons vérifier le fait remarquable suivant.

PROPOSITION : *L'espace $\widetilde{V}$ des germes distingués, muni de la projection source α, est un revêtement de V, lorsque $\widetilde{V}$ et V sont munis de la topologie des feuilles $\widetilde{T}$ et T.*

DEMONSTRATION. Soit $z \in V$ et soit f une application distinguée définie dans un voisinage ouvert U de z. Le sous-ensemble $U_0 = f^{-1}(x)$ de U, où $x = f(z)$, est un ouvert pour la topologie T. Tout élément de $\alpha^{-1}(U_0)$ est le germe en un point $z' \in U_0$ d'une application distinguée de la forme $h.f$, où h est un homéomorphisme local de R^p de classe r, défini au voisinage de x. Les germes de $h.f$ aux points de U_0 forment un relèvement U_h de U_0 dans $\widetilde{V}$ et c'est un ouvert pour la topologie $\widetilde{T}$. La projection α applique homéomorphiquement U_h sur U_0. D'autre part, si h' est aussi un homéomorphisme local de R^p de classe r, défini au voisinage de x, alors U_h et $U_{h'}$ n'ont de points communs que si h et h' ont le même germe en x, auquel cas ils coïncident. Ainsi $\alpha^{-1}(U_0)$ est réunion disjointe d'ouverts de $\widetilde{T}$ appliqués homéomorphiquement par α sur U_0, ce qu'il fallait démontrer.

2.4. L'HOLONOMIE D'UNE FEUILLE. — Soit G le groupe des germes d'homéomorphismes locaux de R^p de source et but l'origine (cf. 2.2). *Etant* *donné une feuille F d'une structure feuilletée $\mathcal{F}$ sur V, nous allons construire une représentation Φ de $\pi_1(F, z)$, $z \in F$, dans G, définie à un automorphisme intérieur près de G, et appelé l'holonomie de F.* Il serait plus correct de définir l'holonomie de F comme un élément de $H^1(F; G)$, le premier groupe de cohomologie de F à coefficient G (cf. [9]).

Φ sera déterminé sans ambiguité par la donnée du germe $\tilde{z}$ en z d'une application distinguée f telle que $f(z) = 0$. Soit $c:[0,1] \to F$ un lacet de F en z dont la classe d'homotopie est un élément γ de $\pi_1(F, z)$; le chemin c se relève suivant un chemin unique $\tilde{c}$, dans le revêtement $\tilde{V}$ de V, d'origine $\tilde{z}$. L'extrémité de $\tilde{c}$ est le germe $\tilde{z}'$ en z d'une application distinguée f' telle que $f'(z) = 0$. Il existe ainsi un élément unique g de G tel que $\tilde{z}' = g\tilde{z}$ (composé des germes, cf. 2.2); g ne dépend que de γ. La correspondance associant à γ l'élément g est un homomorphisme Φ de $\pi_1(F, z)$ dans G (avec la convention contraire à l'usage que si γ_1 et $\gamma_2 \in \pi_1(F, z)$, alors $\gamma_2\gamma_1$ est la classe d'homotopie d'un lacet obtenu en parcourant d'abord un lacet c_1 qui représente γ_1 et ensuite un lacet c_2 qui représente γ_2).

Si l'on était parti d'un germe distingué $\tilde{z}'$ en z, la représentation Φ construite à partir de $\tilde{z}'$ se déduirait de celle construite à partir de $\tilde{z}$ en la composant avec l'automorphisme intérieur déterminé par g, où g est l'élément de G défini par $\tilde{z}' = g\tilde{z}$.

Le groupe d'holonomie de F est le sous-groupe de G, défini à un conjugué près, image de $\pi_1(F, z)$ par Φ.

Remarque. La notion d'holonomie peut s'étendre sans aucun changement au cas de Γ-structures feuilletées (voir remarque de 1.2) qui vérifient la condition de non dégénérescence suivante: étant donnés une application distinguée f, un point z de sa source et deux éléments h et h' de Γ définis au point $f(z)$, si hf et $h'f$ ont le même germe en z, alors h et h' ont le même germe en $f(z)$.

Exemples. Dans les exemples 1.5 et 1.7, le groupe d'holonomie est toujours l'idéntité. Dans l'exemple 1.8, le groupe d'holonomie d'une feuille $F(y)$ est isomorphe au groupe des germes en y des éléments de $\Phi(\Pi)$ qui laissent fixe y. Le groupe fondamental de $F(y)$ est isomorphe au sous-groupe Π_y de Π formé des éléments g tels que $\Phi(g)y = y$. L'holonomie de $F(y)$ est équivalente à la représentation qui associe à tout élément g de Π_y le germe de $\Phi(g)$ en y. Dans l'exemple spécifique de 1.8, le groupe d'holonomie d'une feuille est l'identité ou d'ordre 2 selon que cette feuille est un ruban simple ou un ruban de Möbius.

D'une manière générale, si le group d'holonomie d'une feuille F d'un feuilletage de codimension 1 est fini, il est soit l'identité, soit d'ordre 2 suivant que F est bilatère ou non.

Pour le feuilletage classique de S^3, l'holonomie de la feuille compacte homéomorphe à un tore fait correspondre au générateur réprésenté par un méridien (resp. un parallèle) le germe à l'origine d'un homéomorphisme de R qui est l'identité sur la demi-droite négative (resp. positive) et qui n'est pas l'identité sur l'autre demi-droite. Ceci montre que le feuilletage n'est pas analytique.

2.5. INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DE L'HOLONOMIE. — Les considérations qui suivent doivent éclaircir la signification géométrique de l'holonomie d'une feuille.

Soit C un chemin dans une feuille F et soient T_0 et T_1 des sous-variétés transverses à $\mathcal{F}$ contenant $z_0 = C(o)$ et $z_1 = C(1)$. Pour tout voisinage U de C dans V, il existe un homéomorphisme Φ_C de classe r d'un voisinage de z_0 dans T_0 sur un voisinage de z_1 dans T_1 vérifiant les propriétés :

(i) *Si Φ_C est défini en $z \in T_0$, alors $\Phi_C(z)$ appartient à l'intersection de T_1 et de la feuille passant par z du feuilletage induit par $\mathcal{F}$ sur U.*

(ii) *Le germe de Φ_C en z_0 ne dépend ni de U ni du chemin C dans sa classe d'homotopie.*

(iii) *Supposons $z_0 = z_1$ et $T_0 = T_1$; soit γ la classe d'homotopie du lacet C dans F; soit $\bar{f}$ la restriction à T_0 d'une application distinguée f telle que $f(z_0) = 0$. Alors le germe de $\bar{f}\Phi_C\bar{f}^{-1}$ en 0 est l'image de γ par la représentation d'holonomie $\Phi : \pi_1(F, z_0) \to G$* (cf. 2.4).

Pour construire Φ_C, considérons une suite d'applications distinguées f_i, $i = 0, 1, \dots, r$, définies sur des ouverts V_i et une suite croissante t_i de points sur $[0, 1]$, $t_0 = 0$ et $t_r = 1$, telles que $C([t_k, t_{k+1}]) \subset V_k$. Soient T^i des sous-variétés transverses à $\mathcal{F}$ contenant $C(t_i)$ et telles que $T^0 = T_0$ et $T^r = T_1$. On peut supposer que $fC(t_i) = 0$ et que f_i est de la forme πh_i^{-1}, où h_i est une carte locale de $\mathcal{F}$ (cf. 1.3). Pour chaque $i < r$, il existe un homéomorphisme Φ_i de classe r d'un voisinage de $C(t_i)$ dans T^i sur un voisinage de $C(t_{i+1})$ dans T^{i+1} tel que, si $z_{i+1} = \Phi_i(z_i)$, z_{i+1} soit situé dans la feuille de $V_i \cap U$ passant par z_i. Alors Φ_C est le composé de tous les homéomorphismes $\Phi_0\, \Phi_1 \dots \Phi_{r-1}$.

On peut aussi construire Φ_C en construisant une application continue Ψ de $B \times I$ dans U, où B est un voisinage de z_0 dans T_0, telle que $\Psi(b, 1)$ soit contenu dans la feuille passant par b, que $\Psi(z_0, t) = C(t)$, que $\Psi(b, 0) = b$ et que $\Psi(b, 1) \in T_1$. Alors Φ_C est défini par $\Phi_C(b) = \Psi(b, 1)$.

La vérification des propriétés (ii) et (iii) découle immédiatement de 2.3 et 2.4.

COROLLAIRE. *Soit F une feuille dont le groupe d'holonomie contient un élément qui est le germe en* 0 *d'un homéomorphisme local h de R^p tel que, pour un point $x \neq 0$ de R^p, $h^m(x)$ soit défini pour tout entier m positif et que $h^m(x)$ ait* 0 *pour limite. Il existe alors une feuille, distincte de F si F est propre, dont l'adhérence contient F, et réciproquement.*

Le germe de h est l'image par l'holonomie Φ de F d'un élément $\gamma \in \pi_1(F, z)$. Soit C un lacet dans F en z qui représente γ et soit T_0 une sous-variété transverse au feuilletage et contenant z. L'homéomorphisme local Φ_C de T construit précédemment vérifie la même condition que h, à savoir il existe un point y de T_0 tel que $y^m = \Phi_C{}^m(t)$ soit défini pour tout m positif, y^m tendant vers z. Alors d'après (i), les points y^m appartiennent à une même feuille dont l'adhérence contient z, donc F d'après 1.2.

2.6. LE THÉORÈME DE STABILITÉ.

THÉORÈME. *Toute feuille compacte F dont le groupe d'holonomie est fini possède un système fondamental de vaisinages* (*ouverts ou compacts*) *qui sont réunion de feuilles compactes* ([11], [6]).

Remarquons que le groupe d'holonomie de F est toujours fini si le premier groupe d'homotopie de F est fini.

DÉMONSTRATION. Soit $\widetilde{\mathcal{F}}$ le feuilletage sur $\widetilde{V}$, image réciproque de $\mathcal{F}$ par $\alpha : \widetilde{V} \to V$. Bien que $\widetilde{V}$ soit ume variété non séparée (sauf dans le cas analytique), le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$ est particulièrement simple. En effet l'application β de $\widetilde{V}$ sur R^p associant à tout germe distingué son but, est une application distinguée globale de $\widetilde{\mathcal{F}}$ (de sorte que $\widetilde{\mathcal{F}}$ est simple au sens de 1.4).

La topologie des feuilles de $\widetilde{\mathcal{F}}$ est la topologie $\widetilde{T}$ définie dans 2.3. D'après la proposition de 2.3, chaque feuille F_0 de $\widetilde{\mathcal{F}}$ est un revêtement de la feuille $\alpha(F_0)$ de $\mathcal{F}$, munie de sa topologie de feuille. Si le groupe d'holonomie de F est fini, toute feuille F_0 de $\widetilde{\mathcal{F}}$ se projetant sur F est un revêtement à un nombre fini de feuillets de F; donc si F est compacte, F_0 l'est aussi. On est donc ramené à montrer que F_0 possède un système fondamental de voisinages dans $\widetilde{V}$ qui sont saturés par des feuilles compactes; les images par α de ces voisinages formeront le système fondamental cherché.

Soit Ω_0 un voisinage ouvert de F_0 dans V. Soit $b_0 = \beta(F_0)$. Soit W une réunion finie de compacts de $\widetilde{V}$ tel que W soit un voisinage de F_0 contenu dans Ω_0 et que $W \cap \beta^{-1}(b_0) = F_0$. Soit W_0 l'intérieur de W; le sous-ensemble $D = W - W_0$ est une réunion finie de compacts, donc

$\beta(D)$ est un compact qui ne contient pas b_0. Soit U un voisinage de b_0 ne rencontrant pas $\beta(D)$ et posons $\Phi_0 = \beta^{-1}(U) \cap W_0$.

Φ_0 est un voisinage de F_0 contenu dans Ω_0. Il est saturé par des feuilles compactes de $\tilde{\mathcal{F}}$. En effet, pour tout $z \in \Phi_0$, on a $W^0 \cap \beta^{-1}(b) = W \cap \beta^{-1}(b)$, où $b = \beta(z)$, puisque $b \notin \beta(W - W^0)$. Donc $W^0 \cap \beta^{-1}(b)$ est un ouvert pour la topologie $\tilde{T}$ qui est aussi compact et fermé, puisqu'il est réunion de compacts et que $\tilde{T}$ est séparée ; il est ainsi réunion de composantes connexes compactes de $\beta^{-1}(b)$, donc de feuilles compactes de $\tilde{\mathcal{F}}$.

Le cas différentiable. Toute feuille propre F d'un feuilletage $\mathcal{F}$ différentiable de classe $r > 0$ sur V admet un voisinage tubulaire U jouissant des propriétés suivantes : U est muni d'une projection q sur F de classe r telle que $q(x) = x$ si $x \in F$ et que chaque fibre $q^{-1}(x)$ soit une sous-variété transverse à $\mathcal{F}$. D'après le théorème de stabilité, si le groupe d'holonomie de la feuille compacte F est fini, on peut choisir U comme réunion de feuilles compactes. Nous sommes alors exactement dans la situation de l'exemple 1.8. Le théorème de stabilité peut donc s'énoncer sous une forme plus précise :

Soit F une feuille compacte à groupe d'holonomie fini d'un feuilletage différentiable. Alors F admet un système fondamental de voisinages qui sont réunions de feuilles compactes, ces feuilles étant toutes difféomorphes à des revêtements de F et leurs groupes d'holonomie étant isomorphes à des sous-groupes du groupe d'holonomie de F.

REMARQUE. Il résulte des démonstrations de Reeb (cf. [11], p. 121-4) que dans le cas topologique, les feuilles voisines de F ont des groupes fondamentaux qui sont isomorphes à des sous-groupes du groupe fondamental de F et ont aussi des groupes d'holonomie isomorphes à des sous-groupes du groupe d'holonomie de F.

2.7. L'HOLONOMIE CARACTÉRISE LE VOISINAGE FEUILLETÉ D'UNE FEUILLE. — Plaçons-nous dans la catégorie des feuilletages différentiables de classe $r > 0$ et de codimension p définis sur des variétés paracompactes. G désigne le groupe des germes à l'origine 0 des homéomorphismes de classe r de R^p laissant 0 fixe.

THÉORÈME. a) *Existence. Soit F une variété paracompacte connexe de classe r et soit Φ une représentation de $\pi_1(F, z)$ dans G. Il existe alors une variété V munie d'un feuilletage de classe r et de codimension p, possédant une feuille propre isomorphe à F et dont l'holonomie est Φ.*

b) *Unicité. Soient $\mathcal{F}_i\ (i = 1, 2)$ deux feuilletages de classe r et de codimension p sur des variétés paracompactes V_i. Supposons qu'il existe un ho-*

méomorphisme ψ de classe r d'une feuille propre F_1 de $\mathcal{F}_1$ sur une feuille propre F_2 de $\mathcal{F}_2$ de sorte que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \pi_1(F_1, z_1) \arrow[rr, "\psi^*"] \arrow[dr, "\Phi_1"'] & & \pi_1(F_2, z_2) \arrow[dl, "\Phi_2"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

soit commutatif, où Φ_i est l'holonomie de F_i, $z_2 = \Psi(z_1)$. Il existe alors un homéomorphisme Ψ de classe r d'un voisinage U_1 de F_1 sur un voisinage U_2 de F_2 prolongeant Ψ et qui est un isomorphisme des feuilletages induits sur U_i par $\mathcal{F}_i$.

La démonstration de ce théorème est élémentaire et consiste essentiellement à recoller convenablement des morceaux (cf. [9] p. 298-301 et 303-304).

Ce théorème est vrai dans le cas différentiable. Il l'est aussi dans le cas analytique (comme conséquence du théorème de GRAUERT et MORREY selon lequel toute variété analytique peut être plongée analytiquement dans un R^N). En revanche, on ne sait si *b*) est vrai dans le cas topologique.

Des théorèmes *a*) et *b*), on peut déduire, en utilisant le lemme élémentaire suivant, le théorème de stabilité dans le cas différentiable sous sa forme la plus forte (à savoir que F possède un voisinage feuilleté determiné comme dans 1.8, par une représentation Φ de $\pi_1(F, x)$ dans un groupe d'homéomorphismes de classe r d'une boule B, la correspondance associant à un élément de H son germe en O étant bijective).

LEMME. *Soit H_0 un sous-groupe fini du groupe des germes d'homéomorphismes d'un espace topologique V au point z. Il existe alors un voisinage arbitrairement petit W de z et un groupe H d'homéomorphismes de W tel que la correspondance associant à tout élément de H son germe en z soit un isomorphisme de H sur H_0.*

2.8. L'HOLONOMIE INFINITÉSIMALE. — Soit G_r le groupe des jets d'ordre r à l'origine des homéomorphismes de classe r de R^p laissant fixe 0 ; le groupe G_r est le quotient de G par le sous-groupe formé des éléments de G qui sont tangents à l'identité en 0 à l'ordre r.

Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage d'ordre $r' \geq r > 0$, l'holonomie infinitésimale d'ordre r d'une feuille F est le composé $\Phi_r : \pi_1(F, z) \longrightarrow G_r$ de l'holonomie Φ avec l'homomorphisme naturel de G sur G_r. Le groupe d'holonomie infinitésimal d'ordre r de F est l'image de Φ_r.

La considération de ce groupe permet de décider dans certains cas particuliers si le groupe d'holonomie est fini, ce qui permet alors d'appliquer le théorème de stabilité (cf. G. REEB, Remarques sur les structures feuilletées, Bull. Soc. Math. France, 87 (1959), p. 445-450).

Le théorème suivant est dû à C. Ehresmann. [Cf. 4].

THÉORÈME. *Soit F une sous-variété fermée de classe $r > 0$ d'une variété V de classe r. Pour que F admette un voisinage muni d'un feuilletage de classe r dont F est une feuille, il faut et il suffit que le fibré normal de F dans V admette un groupe structural discret.*

DÉMONSTRATION. La condition est nécessaire. Soit $f_i (i \in I)$ une famille d'applications distinguées telles que les $f_i^{-1}(O) = U_i^0$ forment un recouvrement de F. Soit E^p l'espace des vecteurs tangents à R^p en O. La différentielle de chaque f_i définit une application fibrée f_i^ν de l'espace fibré des vecteurs normaux à F, restreint à U_i^0, sur E^p. D'après la condition liant les applications distinguées, en $z \in U_i^0 \cap U_j^0$, on passe de f_i^ν à f_j^ν en composant f_i^ν avec un automorphisme linéaire de E^p qui est une fonction localement constante de z. Donc les applications f_i^ν définissent *sur le fibré des vecteurs normaux à F une structure d'espace fibré à groupe structural discret qui est justement celle qui est donnée par l'holonomie infinitésimale $\Phi_1 : \pi_1(F, z) \longrightarrow G_1$ d'ordre 1 de F.*

La condition est suffisante. Si le fibré normal N de F admet une restriction de son groupe structural à un groupe discret determinée par un homomorphisme $\Phi_1 : \pi_1(F, z) \longrightarrow G_1$, on peut appliquer la construction de 1.8. On obtient ainsi sur N un feuilletage dont F, identifié avec la section nulle, est une feuille. On peut identifier un voisinage de F dans N avec un voisinage de F dans V et obtenir ainsi un feuilletage au voisinage de F tel que l'holonomie infinitésimale d'ordre 1 de F soit donnée par Φ_1.

Par exemple, une droite projective complexe d dans le plan projectif complexe ne peut être une feuille d'un feuilletage différentiable défini au voisinage de d.

3. Feuilletages topologiques et différentiables de codimension 1.

Dans tout ce paragraphe, V désigne une variété à base dénombrable dont le premier nombre de Betti rationnel est fini. D'après 1.3, toute feuille fermée est propre.

3.1. PROPOSITION. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage topologique sur V de codimension 1 et orientable. Par tout point z de V passe une courbe transversale à $\mathcal{F}$ coupant chaque feuille fermée en un point au plus.*

La démonstration s'appuye sur deux lemmes ([7]).

LEMME 1. *Le premier nombre de Betti rationnel de V connexe étant égal à p, il existe m feuilles fermées $F_1, \dots, F_m$, où $0 \leq m \leq p$, telles que le complémentaire V_m de $\bigcup_{i=1}^{m} F_i$ soit connexe et que, si F_{m+1} est une autre feuille fermée, le complémentaire V_{m+1} de $\bigcup_{i=1}^{m+1} F_i$ ait deux composantes connexes.*

DÉMONSTRATION. Soient $F_1, \dots, F_q$, q feuilles distinctes telles que le complémentaire V_q de la réunion Φ^q des F_i, $0 \leq i \leq q$, soit connexe. La suite exacte de cohomologie à supports compacts de V relativement au sous-espace fermé Φ^q donne :

$$H^{n-1}(V) \xrightarrow{i} H^{n-1}(\Phi^q) \xrightarrow{\delta} H^n(V_q) \xrightarrow{\alpha} H^n(V) \longrightarrow H^n(\Phi^q),$$

les coefficients étant les systèmes locaux d'entiers tordus par les orientations de V, V_q et Φ_q.

Par la dualité de Poincaré, $H^n(V^q)$ et $H^n(V)$ sont isomorphes respectivement à $H_0(V^q)$ et $H_0(V)$, à coefficients entiers, c'est à dire à Z. Les groupes $H^{n-1}(V)$ et $H^{n-1}(\Phi^q)$ sont isomorphes à $H_1(V)$ et à $H_0(\Phi^q)$ resp.; ils sont donc de rang p et q resp. Comme α est un isomorphisme, i est surjectif, donc $q \leq p$. Il existe donc un entier $m \leq p$ et m feuilles $F_1, \dots, F_m$ vérifiant l'énoncé du lemme.

LEMME 2. *Si le sous-espace complémentaire à toute feuille fermée a deux composantes connexes, une transversale ne peut couper une feuille fermée en plus d'un point.*

DÉMONSTRATION. Remarquons tout d'abord que toute feuille fermés F est alors bilatère et que si une transversale T coupe F en z, les points de T situés de part et d'autre de z et assez proches de z, sont situés dans des composantes connexes distinctes du complémentaire de F. Si T recoupait F ailleurs, il existerait un point $z_1 \in F \cap T$ tel que le segment $T(z, z_1)$ d'extrémités z et z_1 sur T, ne rencontre pas F en dehors de z et z_1. Tout point z_2 de T proche de z_1 et non situé sur $T(z, z_1)$ est situé dans une autre composante connexe du complémentaire de F qu'un point z_0 situé à l'intérieur de $T(z, z_1)$. Or comme F est bilatère, toute feuille coupant $T(z, z_1)$, en un point z_0 assez proche de z, va recouper T en un point z_2 situé en dehors de $T(z, z_1)$ et proche de z_1, ce qui contredit le fait que z_0 et z_1 sont dans des composantes connexes distinctes.

Démonstration de la proposition. Soient $F_1, \ldots, F_m$ des feuilles fermées vérifiant l'énoncé du lemme 1. D'après le lemme 2, la condition du théorème est vérifiée en tout point du complémentaire des F_i. Soit maintenant T une courbe transversale coupant F_i en z seulement et ne coupant pas les autres $F_j, j \neq i$. Si T coupe une autre feuille fermée F en deux points z_0 et z_1, d'après le lemme 2, ces points sont situés de part et d'autre de z sur T et T ne peut recouper F ailleurs. Le complémentaire de F dans V'_m = complémentaire dans V des F_i) a deux composantes connexes V^+_m et V^-_m et le feuilletage $\mathcal{F}$ est transversalement orientable. Donc deux points situés à l'intérieur T_0 du segment $T(z_0, z_1)$ et situés de part et d'autre de z sont contenus dans des composantes connexes V^+_m et V^-_m distinctes. Donc T_0 ne peut rencontrer une feuille en plus de deux points et vérifie ainsi la condition du théorème.

3.2. L'ENSEMBLE DES FEUILLES FERMÉES.

THÉORÈME. *Dans un feuilletage de codimension* 1 *sur* V, *l'adhérence d'une réunion de feuilles fermées est aussi une réunion de feuilles fermées.*

Il suffit de le démontrer dans le cas où le feuilletage est orientable, sinon l'on passerait à un revêtement à deux feuillets de V (cf. 1.4). Soit F une feuille adhérente à la réunion des feuilles fermées. Pour montrer que F est fermée, il suffit de montrer que, par tout $z \in V$, passe une transversale coupant F en un seul point; par le théorème 3.1, nous savons déjà que, par z, passe une transversale coupant toute feuille fermée en un point au plus; si cette transversale coupait F en deux points, elle couperait éga lement une feuille fermée suffisamment proche de F en deux points, ce qui contredit notre hypothèse.

Voici encore une conséquence de 3.2.

THÉOREME. *Soit* V *une variété compacte connexe munie d'une structure feuilletée de codimension* 1 *et transversalement analytique* (cf. 1.1). *Alors, ou toutes les feuilles sont compactes, ou il existe au plus un nombre fini de feuilles compactes* ([9]).

D'après 3.2, l'ensemble de toutes les feuilles compactes est un compact K; les feuilles compactes dont le groupe d'holonomie est fini est un ouvert d'après le théorème de stabilité. C'est aussi un fermé, car les feuilles compactes dont le groupe d'holonomie est infini sont isolées dans K (cf. lemme 2, p. 328 de [9]; c'est ici que l'analyticité intervient).

Donc si une feuille compacte a son groupe d'holonomie fini, il en est de même de toutes les feuilles. Dans le cas contraire, il existe au plus un nombre fini de feuilles compactes.

3.3. Cas où toutes les feuilles sont fermées.

Théorème. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension* 1 *qui est orientable et dont toutes les feuilles sont fermées. Alors l'espace des feuilles est une variété de dimension* 1, *en général non separée, et orientable.*

D'après 3.1, par tout point de V passe une transversale coupant chaque feuille en un point au plus. Cela signifie que l'espace des feuilles est localement homéomorphe à une variété de dimension un.

Lorsque $\mathcal{F}$ est non orientable, alors l'espace des feuilles est une variété de dimension 1 avec un nombre fini de bord.

Lorsque toutes les feuilles sont compactes, alors l'espace des feuilles est une variété *séparée* de dimension un; en effet toute feuille a un groupe d'holonomie fini (cf. corollaire 2.5); d'après le théoréme de stabilité, deux feuilles distinctes possèdent des voisinages sans point commun qui sont réunion de feuilles. Si $\mathcal{F}$ est orientable, alors l'espace des feuilles est homéomorphe à un cercle ou à une droite suivant que V est compact ou non.

Si de plus $\mathcal{F}$ est de classe $r > 0$, les feuilles sont les fibres d'une fibration de classe r de V (cf. 2.6). Si $\mathcal{F}$ est non orientable, l'espace des feuilles est homéomorphe à un segment fermé ou semi-fermé suivant que V est compact ou non.

3.4 Existence d'une intégrale première. — Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension 1 et de classe r sur une variété V. Une intégrale première f de classe $r' \leq r$ de $\mathcal{F}$ est une application distinguée globale du feuilletage de classe r' sous-jacent à $\mathcal{F}$. Autrement dit, f est une application de classe r' de V dans R, constante sur les feuilles de $\mathcal{F}$, et telle que sa restriction à toute courbe transversale de classe r est un homéomorphisme de classe r' dans R.

L'existence d'une intégrale première f implique que l'espace des feuilles V_0 de $\mathcal{F}$ est une variété, en général non séparée, de dimension 1 et orientable (en particulier que toutes les feuilles sont fermées); de plus il existe une application f_0 de V_0 dans R définie par la condition $f_0 \pi = f$, où π est la projection naturelle de V sur V_0; f_0 est localement un homéomorphisme de classe r' de V_0 dans R.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d] \arrow[dr, "f"] & \\ V_0 \arrow[r, "f_0"'] & R \end{tikzcd}$$

Réciproquement, si l'espace des feuilles est une variété V_0 de dimension 1 et si f_0 est une fonction sur V_0 qui est localement un homéomorphisme de classe r', alors $f = f_0 \pi$ est une intégrale première de classe r'.

Le problème de la construction de f est donc ramené à celui de la construction de f_0.

Théorème. *Soit V une variété (à base dénombrable) et dont le premier nombre de Betti rationnel est nul. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension 1 sur V, orientable, de classe $r < \omega$ et dont toutes les feuilles sont fermées. Alors $\mathcal{F}$ admet une intégrale première continue. La structure feuilletée induite sur un ouvert relativement compact V' admet une intégrale première de classe r.*

Dans cet énoncé, $r \neq \omega$ (voir remarque de 4.4). Ce théorème est une généralisation d'un théorème de Kamke ([8] et [7]).

D'après 3.3, l'espace des feuilles est une variété V_0 non séparée de dimension 1 et à base dénombrable; de plus (cf. 3.1, lemme 1), le complémentaire de tout point de V_0 a deux composantes connexes. Il en résulte (cf. [8], p. 113-114) qu'il existe une application f_0 de V_0 dans R qui est localement un homéomorphisme.

Si $\mathcal{F}$ est de classe $r > 0$, il n'existe en général pas d'intégrale première globale de classe r, comme le montrent déjà les structures feuilletées les plus simples du plan (cf. [8]). Ceci provient du fait que V_0 ne vérifie pas en général la condition suivante.

Disons qu'une variété V_0 de dimension 1, non séparée, est munie d'une structure différentiable de classe *r régulière*, si pour toute fonction f de classe r définie sur un voisinage de $x \in V_0$, il existe une fonction f' de classe r définie sur V_0 telle que f et f' coincident sur un voisinage de x.

Dans [8], p. 117-8, il est démontré que si une variété V_0 vérifie la condition précédente, le complémentaire de tout point de V_0 ayant deux composantes connexes, alors il existe une fonction f_0 de V_0 dans R qui est localement un homéomorphisme de classe r. Le théorème sera donc une conséquence du lemme suivant.

Lemme. *Si l'espace des feuilles V_0 d'un feuilletage $\mathcal{F}$ de classe r et de codimension 1 sur V est une variété (éventuellement non séparée), alors l'espace des feuilles V_0' de la structure feuilletée $\mathcal{F}'$ induite sur un ouvert relativement compact V' de V est une variété munie d'une structure différentiable de classe r régulière.*

Soient π et π' les projections naturelles de V et V' sur V_0 et V_0' respectivement. L'injection i de V' dans V induit par passage aux quotients une application ψ de V_0' dans V_0 telle que $\pi i = \psi \pi'$ et qui est localement un homéomorphisme de classe r.

Soit x' un point de V_0' et soit U un voisinage ouvert separé de $x = \psi(x')$; soit F la feuille $\pi^{-1}(x)$. On peut construire dans $\pi^{-1}(U)$ un voisinage compact K de l'intersection de F avec l'adhérence $\bar{V}'$ de V', L'image par π de l'intersection de la frontière ∂K de K avec $\overline{V}'$ est un compact contenu dans U et ne contenant pas x. Soit donc L un voisinage compact, homéomorphe à un intervalle, de x contenu dans $\pi(K)$ et ne rencontrant pas $\pi(\partial K \cap \overline{V}')$. Alors $W = \pi^{-1}(L) \cap K \cap V'$ est un sous-ensemble fermé de V' qui est réunion de feuilles de $\mathcal{F}'$. En effet, pour tout $y \in L$, $\pi^{-1}(y) \cap K \cap V'$ est à la fois ouvert et fermé dans $\pi^{-1}(y) \cap V'$.

Soit f une fonction de classe r définie au voisinage de x' ; on peut construire une fonction g de classe r sur L, s'annulant au voisinage du bord de L, et telle que $g\psi$ soit égale à f au voisinage de x'. Alors la fonction sur V' égale à O en dehors de W et à $g\pi$ sur W est de classe r ; comme elle est constante sur les feuilles de $\mathcal{F}'$, elle définit par passage au quotient une fonction f' de classe r sur V_0' qui coïncide avec f au voisinage de x'.

3.5. Le théorème de stabilité globale de Reeb. — Nous ne saurions terminer ce paragraphe sans citer l'une des plus remarquables propriétés des feuilletages de codimension 1 démontrée par Reeb ([11], p. 134-140).

Théorème. *Soit V une variété compacte connexe munie d'un feuilletage de codimension* 1. *Si une feuille est compacte et a un groupe fondamental fini, alors toutes les feuilles sont compactes et ont un groupe fondamental fini.*

On peut se reporter à 3.3 pour des conséquences plus précises. L'exemple 1.10 montre que le théorème n'est plus vrai en codimension supérieure à 1.

Nous nous bornerons à esquisser une démonstration dans le cas différentiable.

D'après le théorème de stabilité 2.6, les feuilles compactes à groupe fondamental fini forment un ouvert U dans V. Comme V est connexe, il suffit de montrer qu'un composante connexe U_0 de U est aussi fermée. Toute feuille F adhérente à U_0 est aussi compacte d'après 3.2 (pour un raisonnement plus direct, cf. Reeb [11], p. 136). Il suffira donc de vérifier que son groupe fondamental est aussi fini.

Sans nuir à la généralité, nous pouvons supposer le feuilletage orientable (cf. 1.4). Soit W un voisinage tubolaire de F muni de sa projection $q : W \to F$ et assez petit pour que les fibres soient transverses aux feuilles (cf. 2.6). Toute feuille de U_0 assez proche de F sera contenue dans W et coupera chaque fibre de W en un seul point ; elle sera donc difféomorphe à F. Donc le groupe fondamental de F sera aussi fini.

Voici une application intéressante de ce théorème due également à Reeb (non publié).

THÉORÈME. *Soit V une variété simplement connexe compacte possédant un bord non vide connexe et simplement connexe. Il ne peut exister sur V un feuilletage de codimension* 1 *dont le bord de V est une feuille.*

S'il existait un tel feuilletage, toutes les feuilles seraient compactes et simplement connexes. L'espace des feuilles serait une variété de dimension 1 compacte ayant un bord réduit à un point (correspondant au bord de V), ce qui est impossible.

Par exemple, la variété $V = S^p \times D^{n-p}$, produit d'une sphère de dimension p par un disque de dimension $n - p$, est simplement connexe ainsi que son bord pour $p > 1$ et $n - p - 1 > 1$. Bien qu'il n'existe pas de feuilletage de codimension 1 sur V dont le bord est une feuille, le champ des $(n-1)$-plans tangents au bord peut se prolonger à l'intérieur de V si la caractéristique d'Euler de V est zéro, donc si p est impair.

Pour d'autres applications du théorème de stabilité globale, voir Reeb [11], p. 147.

4. Feuilletage analytique de codimension un.

4.1. Soit V une variété munie d'un feuilletage analytique $\mathcal{F}$ de codimension 1. Une courbe transversale à $\mathcal{F}$ fermée est une application continue τ du cercle S^1 dans V telle que, pour toute application distinguée f_i de $\mathcal{F}$, l'application $f_i \tau$ soit localement un homéomorphisme de S^1 dans R.

LEMME FONDAMENTAL. *Une courbe transversale fermée à un feuilletage analytique de codimension 1 sur V représente un élément d'ordre infini du groupe fondamental de V.*

Remarquons qu'une courbe transversale fermée pourrait être homologue à zéro.

Ce lemme découle immédiatement de la propriété suivante des feuilletages différentiables.

4.2. PROPOSITION. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension 1 et de classe 2 sur une variété V. Supposons qu'il existe une transversale à $\mathcal{F}$ fermée et homotope à une application constante. Il existe alors un lacet sur une feuille F telle que le germe d'homéomorphisme de R en O qui lui correspond par l'holonomie de F n'est pas celui de l'application identique, mais qui est le germe d'un homéomorphisme qui est l'identité sur* $]-\infty, 0]$ *ou sur* $[0, \infty[$.

DÉMONSTRATION. La transversale fermée est une application τ de S^1 dans V que l'on peut supposer différentiable de classe 2 et telle que, pour chaque application distinguée f_i, l'application $f_i \tau$ soit localement un homéomorphisme de classe 2 de S^1 dans R. Comme τ est homotope à une application constante, il est possible de l'étendre suivant une application $\varphi: D \longrightarrow V$ de classe 2 du disque D bordé par S^1 dans le plan.

En appliquant un théorème de Morse bien connu (cf. [6], p. 316-17), il est possible de choisir φ de sorte que, pour toute application distinguée f_i, $f_i \varphi$ soit une fonction numérique non dégénérée; cela signifie qu'en chacun de ses points singuliers (points où les dérivées partielles premières s'annulent), la matrice des dérivées partielles secondes est non singulière. On a donc sur D un nombre fini de points singuliers pour les applications $f_i \varphi$ qui sont soit du type maximum ou minimum, soit du type point selle. On peut supposer de plus (cf. [9], p. 318) que les images par φ de deux points singuliers distincts ne sont pas situés sur une même feuille dans un voisinage de $\varphi(D)$.

On peut remarquer que les applications $f_i \varphi$ sont des applications distinguées d'une Γ-structure feuilletée sur D, où Γ est le pseudogroupe des homéomorphismes locaux analytiques de R (cf. 1.2). Les feuilles de cette structure sont des courbes (pouvant contenir un point singulier) qui sont les composantes connexes des intersections de D avec les feuilles de $\mathcal{F}$. Nous allons les considérer comme trajectoires (ou réunion de trajectoires si elles contiennent un point singulier) d'un champ de vecteurs sur D.

On peut construire en effet un champ de vecteurs X sur D de classe 1, qui ne s'annule qu'aux points singuliers des applications distinguées $\varphi_i = f_i \varphi$, la différentielle de chaque φ_i appliquant X sur le champ nul de R. Ceci est possible car la structure feuilletée sur D est orientable (en effet, en tout point on a exactement deux germes d'orientation transverse, et D est simplement connexe). Nous pourrons donc utiliser les résultats de la théorie classique des courbes définies par des équations différentielles. Dans la terminologie de Poincaré [10], les points singuliers x_i que présente le champ X sont des centres (si une application distinguée présente en x_i un maximum ou un minimum) ou des cols (point selle); il y a au plus 4 trajectoires qui aboutissent à un col; de plus, deux cols distincts ne sont pas reliés par une trajectoire. On n'a pas de foyers ou de noeuds. Le cercle S^1 est un cycle sans contact, c'est à dire une courbe fermée transverse aux trajectoires.

Soit L l'ensemble des cycles limites de X sur D. Plus précisément, un élément de L est une courbe fermée l dans D qui est, ou bien une trajectoire fermée de X, ou bien la réunion d'une trajectoire de X et d'un point selle si cette trajectoire est issue et aboutit à ce point; de plus l'image par φ de l doit être un lacet situé sur une feuille F tel que l'élément du groupe d'holonomie qui lui correspond soit non rivial.

Remarquons tout d'abord que L n'est pas vide. En effet, il n'y a qu'un nombre fini de trajectoires qui aboutissent à un point singulier (point selle); en général donc, d'après le théorème de Poincaré-Bendixon (cf. [2]), une trajectoire qui coupe le bord de D a pour ensemble limite soit une trajectoire fermée C qui est un cycle limite, soit un polycycle limite qui est la réunion $C_1 \cup C_2$ d'un point selle et de deux trajectoires issues de ce point et y aboutissant. L'élément du groupe d'holonomie correspondant à $\varphi(C)$ ou au lacet obtenu en parcourant $\varphi(C_1)$ et ensuite $\varphi(C_2)$ n'est pas trivial (cf. 2.5); donc au moins l'un de ceux qui correspond aux lacets $\varphi(C_1)$ ou $\varphi(C_2)$ est non trivial.

L'ensemble L est partiellement ordonné: si $l_1, l_2 \in L$, l_2 est inférieur a l_1 si l_2 est situé à l'intérieur du domaine limité par l_1. De plus cet ensemble ordonné est inductif. Soit en effet L_0 un sous-ensemble infini de L totalement ordonné. Les éléments de L_0 ont pour limite soit une traiectoire fermée C, soit la réunion $C_1 \cup C_2$ de deux trajectoires et d'un point selle d'où elles sont issues et où elles aboutissent. L'élément du groupe d'holonomie correspondant à $\varphi(C)$ est non trivial, puisque c'est le germe en 0 d'un homéomorphisme local de R qui n'est pas l'identité au voisinage d'une suite de points tendant vers 0 (ces points correspondent aux cycles limites qui tendent vers C, cf. 2.5). Le même raisonnement montre que l'élément du groupe d'holonomie correspondant au lacet obtenu en parcourant $\varphi(C_1)$ puis $\varphi(C_2)$ n'est pas trivial; il en est donc de même pour l'élément correspondant à l'un des lacets $\varphi(C_1)$ ou $\varphi(C_2)$.

Soit donc l un élément minimal de L (un tel élément existe d'après le théorème de Zorn). Toutes les trajectoires situèes à l'intérieur du domaine D_l limité par l sont fermées; si ce n'était pas le cas, le théorème de Poincaré-Bendixon impliquerait comme tout à l'heure l'existence d'un cycle limite dans D_l, ce qui contredirait le fait que l est minimal. L'élément du groupe d'holonomie correspondant à $\varphi(l)$ est donc le germe en O d'un homéomorphisme local de R qui est l'identité sur l'une des demi-droites $[-\infty, 0]$ ou $[0, \infty[$ (cf. 2.5).

4.3. NON EXISTENCE DE FEUILLETAGE ANALYTIQUE.

THÉORÈME. *Une variété analytique compacte dont le premier groupe d'homotopie ne contient que des éléments d'ordre fini ne peut être munie d'un feuilletage analytique de codimension 1.*

Pour tout feuilletage de codimension 1 sur une variété compacte V, il existe une transversale fermée (pour plus de détails, cf. [9] p. 324, corollaire). D'après le lemme 4.1, cette transversale représente un élément d'ordre infini de $\pi_1(V)$.

Pour d'autres conséquences du lemme fondamental (existence d'une feuille compacte, ...), cf. [9], p. 324, propos. 2 et p. 326-7, théorème 3.

4.4. Existence d'une integrale première globale.

Theorème. *Soit V une variété analytique à base dénombrable dont le premier groupe d'homotopie ne contient que des éléments d'ordre fini. Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage analytique de codimension 1 sur V, toute feuille est fermée. Si $\mathcal{F}$ est orientable, $\mathcal{F}$ admet une intégrale première globale continue ; la restriction de $\mathcal{F}$ à un ouvert relativement compact admet une intégrale première de classe ∞.*

Pour montrer que toute feuille est fermée, on peut supposer que $\mathcal{F}$ est orientable en passant au besoin à un revêtement à deux feuillets de V. Or pour tout feuilletage orientable et de codimension 1 sur V, l'existence d'une courbe transversale rencontrant une feuille en deux points entraîne l'existence d'une transversale fermée (pour plus de details, cf. [9] p. 322, dernier §).

D'après le lemme fondamental, une courbe transversale ne peut donc rencontrer une feuille en plus d'un point, puisque $\pi_1(V)$ n'a que des éléments d'ordre fini. On peut donc appliquer les considérations de 3.4.

Remarque. En général, il n'existe pas d'intégrale première analytique. Il est facile de construire un exemple de feuilletage de R^n tel que l'espace V_0 des feuilles du feuilletage induit sur une boule soit une variété obtenue de la manière suivante : on prend deux droites et on les recolle le long de leur partie négative à l'aide de l'homéomorphisme $h(t) = t - t^2$, $t < 0$. Il n'existe aucune fonction analytique globale sur V_0 dont la dérivée soit partout $\neq 0$.

4.5. Feuilletage analytique avec singularites. — Soit F une variété analytique réelle. Un feuilletage analytique $\mathcal{F}$ de codimension 1 sur V, avec singularités, est défini comme précédemment par un ensemble maximal de fonctions analytiques f_i (les applications distinguées de $\mathcal{F}$) définies sur des ouverts U_i formant un recouvrement de V et vérifiant la condition : pour tout $x \in U_i \cap U_j$, il existe un homéomorphisme analytique local h_{ji}^x de R tel que $f_j = h_{ji}^x f_i$ au voisinage de x. On ne suppose plus cette fois que les applications f_i sont de rang 1.

La proposition suivante permet d'étendre aux feuilletages analytiques de codimension 1 avec singularités la plupart des propriétés des structures non singulières.

Proposition. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage analytique de codimension* 1 *avec singularités sur une variété paracompacte V. Il existe alors une variété ana-*

lytique V' paracompacte, munie d'un feuilletage analytique $\mathcal{F}'$ de codimension 1 *sans singularité, et un plongement analytique φ de V dans V' qui est une homotopie équivalence et tel que $\mathcal{F}$ soit l'image réciproque de $\mathcal{F}'$ par φ.*

Ceci signifie que les applications obtenues en composant φ avec les applications distinguées de $\mathcal{F}'$ sont des applications distinguées de $\mathcal{F}$. Cette proposition est un cas particulier de la proposition 1, p. 314 de [9].

DÉMONSTRATION. Si h est un homéomorphisme analytique d'un ouvert connexe U de R sur un ouvert de R, on désignera par $\bar{h}$ l'homéomorphisme (unique) qui peut être défini sur le plus grand intervalle contenant U et qui coïncide avec h sur U.

Si V est connexe et si une application distinguée est constante, alors toutes le sont; on peut prendre pour V' le produit de V par R. Supposons donc les applications distinguées non constantes.

Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'applications distinguées définies sur des ouverts U_i formant un recouvrement de V. Dans la réunion disjointe E des $U_i \times R$, $i \in I$, la relation $(x_i, t_i) \sim (x_j, t_j)$ si et seulement si $x_i = x_j = x$ et $t_j = \bar{h}^x_{ji} t_i$, est une relation d'équivalence. Elle est en effet réflexive et symétrique car $\bar{h}^x_{ii} =$ identité de R et $\bar{h}^x_{ij} = (\bar{h}^x_{ji})^{-1}$. Elle est aussi transitive; on a en effet $\bar{h}^x_{ki} f_i(x) = \bar{h}^x_{kj}\, \bar{h}^x_{ji} f_i(x)$, et la source de $\bar{h}^x_{kj}\, \bar{h}^x_{ji}$ est connexe comme intersection de deux intervalles; ainsi cet homéomorphisme est une restriction de $\bar{h}^x_{ki}$.

Soit donc V'' l'espace quotient de E par cette relation d'équivalence. La projection canonique g_i de $U_i \times R$ dans V'' est un homéomorphisme sur un ouvert et les applications $g_j^{-1} g_i$ sont analytiques, car $g_j^{-1} g_i(x, t) = (x, \bar{h}^x_{ji}(t))$ et $\bar{h}^x_{ji}$ ne dépend que de la composante connexe de $U_i \cap U_j$ contenant x. Donc V'' est muni d'une structure de variété analytique réelle, mais V'' n'est pas séparée. Les applications $f_i'' =$ composé de g_i^{-1} avec la projection naturelle de $U_i \times R$ sur R, sont les applications distinguées d'un feuilletage analytique $\mathcal{F}''$ de codimension 1 sans singularité sur V''.

Les graphes $(x, f_i(x))$ des applications distinguées f_i de $\mathcal{F}$ donnent un plongement φ de V dans V'' défini par $\varphi(x) = g_i(x, f_i(x))$, si $x \in U_i$. Remarquons que $\varphi f_i = f_i''$, donc $\mathcal{F}$ est l'image réciproque de $\mathcal{F}''$ par φ.

Enfin on peut construire (pour plus de détails, voir remarque p. 315 de [9]) un voisinage V' ouvert séparé de $\varphi(V)$ dans V'' qui puisse se rétracter par déformation sur $\varphi(V)$; $\mathcal{F}'$ sera alors le feuilletage induit par $\mathcal{F}''$ sur V'.

COROLLAIRE : *Le lemme fondamental* 4.1 *ainsi que le théorème* 4.4 *sont aussi valables pour les feuilletages analytiques de codimension* 1 *avec singularités.*

Le théorème 4.3 implique que tout feuilletage analytique de codimension 1 sur une variété V dont le premier groupe d'homotopie est fini admet des singularités. Remarquons qu'il existe toujours de tel feuilletage, par exemple celui qui est déterminé par une seule application distinguée, qui serait une fonction analytique non constante sur V.

4.6. Application aux formes de Pfaff analytiques complètement intégrables. — Sur une variété analytique V, soit α une forme de Pfaff (1-forme) analytique et complètement intégrable, c'est-à-dire telle que $d\alpha \wedge \alpha = 0$. Dans un ouvert U de V, une *intégrale première de classe* $r > 0$ de α est une fonction f de classe r dans U telle que $df = g\alpha$, où g est une fonction de classe r différente de zéro dans U (appelée un *facteur intégrant de classe* r).

Au voisinage d'un point x qui n'est pas un point singulier de α (c'est-à-dire un point où α ne s'annule pas), il existe toujours une intégrale première analytique; de plus, si f et f' sont deux intégrales premières analytiques définies au voisinage de x, elles sont liées par une relation analytique inversible: il existe une fonction analytique h sur un ouvert U de R dont la dérivée est partout $\neq 0$, c'est-à-dire un homéomorphisme analytique h, telle que $f' = hf$ au voisinage de x.

D'une manière générale, nous dirons qu'une *famille d'intégrales premières* f_i de α, définies sur des ouverts U_i, forment un *système cohérent*, si les U_i forment un recouvrement de V et si, pour tout $x \in U_i \cap U_j$, il existe un homéomorphisme local analytique $\overline{h}{}^x_{ji}$ de R tel que $f_j = \overline{h}{}^x_{ji} f_i$ au voisinage de x. Autrement dit, les intégrales premières f_i sont les applications distinguées d'un feuilletage analytique $\mathcal{F}$ de codimension 1 sur V (avec singularités en général). On remarquera que $\mathcal{F}$ est orientable.

Réciproquement, les applications distinguées f_i d'un feuilletage analytique $\mathcal{F}$ de codimension 1 orienté forment un système cohérent d'intégrales premières d'une 1-forme α. En effet, si $f_j = h^x_{ji} f_i$, soit g_{ji} la dérivée de h^x_{ji} par rapport au paramètre naturel de R et prise au point $f_i(x)$; c'est une fonction analytique strictement positive définie sur $U_i \cap U_j$. Comme $g_{ki} = g_{kj}\, g_{ji}$ sur $U_i \cap U_j \cap U_k$, $\{g_{ji}\}$ est un 1-cocycle qui détermine un élément de $H^1(V, \sigma^+)$, où σ^+ est le faisceau des germes de fonctions analytiques positives sur V. Or $H^1(V, \sigma^+)$ est toujours nul (cf. H. Cartan, Bull. Soc. Math. France, 85 (1957), p. 77-99). Il existe donc des fonctions analytiques strictement positives g_i définies sur un recouvrement U_i' plus fin que U_i telles que $g_{ji} = g_j/g_i$ sur $U_i' \cap U_j'$. Alors la 1-forme α sera égale à df_i/g_i sur U_i'.

En résumé, il y a correspondance biunivoque entre feuilletage analytique transversalement orientable de codimension 1 et système cohérent (maximal) d'intégrales premières des formes de Pfaff.

D'après ce que nous avons rappelé tout à l'heure, une forme de Pfaff α complètement intégrable et sans point singulier admet un système cohérent (et un seul maximal) d'intégrales premières analytiques. G. Reeb a montré ([11], p. 148 154) qu'il en était de même si dim $V > 2$ et si la forme α complètement intégrable ne présente que des points singuliers où le déterminant des dérivées partielles premières des coefficients de α est $\neq 0$.

D'après 4.5, une forme de Pfaff α sur V admet un système cohérent d'intégrales premières analytiques si et seulement s'il existe un plongement analytique φ de V dans une variété analytique V' et une forme de Pfaff α' analytique sur V' complètement intégrable et sans point singulier telle que $\alpha = \varphi^* \alpha'$.

4 4. donne le

THÉORÈME. *Soit V une variété analytique réelle connexe dont le premier groupe d'homotopie n'admet que des éléments d'ordre fini. Une forme de Pfaff sur V qui admet un système cohérent d'intégrales premières analytiques, admet une intégrale première indéfiniment différentiable sur tout ouvert relativement compact de V.*

En utilisant la remarque de 4.4, on peut construire une forme de Pfaff sur la sphère S^2 avec 4 points singuliers, qui admet un système cohérent d'intégrales premières analytiques, mais qui n'admet pas d'intégrale première analytique globale.

Reférénces

1. C. CHEVALLEY, *Theory of Lie groupes*. Princeton Univ. Press, 1946.
2. E. CODDINGTON and N. LEVINSON, *Theory of ordinary differential equations*, 1955, Intern. Series in pure and applied math.
3. C. EHRESMANN et G. REEB, *Sur les champs d'éléments de contact de dimension p complètement intégrable*, C. R. Acad. Sc. Paris, 218, 1944, p. 995-97.
4. C. EHRESMANN, *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*, Colloque de topologie de Bruxelles 1950, CBRM, p. 29-55.
5. C. EHRESMANN, *Sur la théorie des variétés feuilletées*, Rend. di Mat. et appl., Serie V, vol. X, Roma, 1951.
6. C. EHRESMANN et SHIH W. S., *Sur les espaces feuilletés: théorème de stabilité*. C. R. Acad. Sc. Paris, 243, 1956, p. 344-46.
7. A. HAEFLIGER, *Sur les feuilletages des variétés de dimension n par des feuilles fermées de dim. n-1*, Colloque de Topologie de Strasbourg, 1955.
8. A. HAEFLIGER et G. REEB, *Variétés (non séparées) à une dimension et structures feuilletées du plan*, L'enseignement mathématique, t. III, 1957, 107-25.
9. A. HAEFLIGER, *Structure feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoïdes*, Comm. Math. Helv. 32, 1958, 248-329.
10. H. POINCARÉ, *Sur les courbes définies par les équations différentielles*, Oeuvres, Tome. 1.
11. G. REEB, *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées*, Act. Sc. et Ind., Hermann, Paris, 1952.
12. G. REEB, *Sur la théorie générale des systèmes dynamiques*, Ann. Inst. Fourier, VI, 1955. 89-115.
13. G. REEB, *Sur une generalisation d'un théorème de M. Denjoy*, Ann. Inst. Fourier, 11, 1961, 185-200.
14. N. STEENROD, *The topology of fiber bundles*, Princeton Univ. Press, 1951.