ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

JINDŘICH NEČAS

Sur l’existence de la solution classique du problème de Poisson pour les domaines plans

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 16, nº 3 (1962), p. 285-296

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1962_3_16_3_285_0>

SUR L'EXISTENCE DE LA SOLUTION CLASSIQUE DU PROBLEME DE POISSON POUR LES DOMAINES PLANS

JINDŘICH NEČAS, Prague-Nancy

Introduction.

Nous nous intéressons aux équations aux dérivées partielles du type elliptique de l'ordre $2k$. On considère des domaines plans, bornés, dont chaque point de la frontière est sommet d'un triangle, le même pour tous les points en question, placé à l'extérieur de Ω. L'opérateur différentiel D a la forme

$$\sum_{|i|,\,|j|\leq k} (-1)^{|i|} D^i (a_{ij} D^j).$$

Le résultat central: Soit Ω le domaine considéré, soit u la solution faible de l'équation $Du = f$, soit $u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = \dots \frac{\partial^{k-1} u}{\partial \nu^{k-1}} = 0$ à la frontière au sens généralisé. Alors sous certaines conditions sur f (il suffit par exemple $f \in L_2(\Omega)$) et a_{ij}, la solution u avec ses dérivées jusqu'à l'ordre $k-1$ est continue sur la fermeture de Ω.

Si la frontière est assez régulière, les résultats de ce genre sont bien connus pour dimension quelconque. Cela découle des théorèmes de Sobolev (cfr. E. Gagliardo [1]) et des estimations « à priori » démontrées par plusieurs auteurs (cfr. par exemple S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg [2]).

En abandonnant la condition sur la régularité de la frontière, ce résultat est connu pour dimension quelconque, mais seulement pour $k = 1$. Pour le démontrer, on peut se servir des méthodes classiques de G. Tautz (cfr. G. Tautz [3]). En ce cas les conditions sur les coefficients a_{ij} sont très sévères. Ce résultat est valable si l'on suppose seulement $a_{ij} \in L_\infty(\Omega)$ ce qui découle des résultats de C. B. Morrey (cfr. C. B. Morrey [4]).

Notre méthode est analogue à l'idée utilisée au livre de R. Courant et D. Hilbert [5] où on considère l'équation de Laplace. On s'appuie sur les résultats de L. Nirenberg [6] sur la régularité de la solution à l'intérieur du domaine.

A la dernière partie de cet article on considère les opérateurs polyharmoniques. Modifiant un résultat de M. Nicolesco [7], on obtient pour le problème de Dirichlet des résultats plus forts.

1. **Lemmes.** On désigne par E_2 l'espace euclidien, $X = [x_1, x_2]$ le point générique.

Soit i le vecteur $[i_1, i_2]$ où $0 \leq i_1$, $0 \leq i_2$ sont des entiers, soit $|i| = i_1 + i_2$. Alors on écrit $D^i u = \dfrac{\partial^{|i|} u}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2}}$.

Soit Ω un ouvert quelconque. On désigne par $W_p^{(k)}(\Omega)$, $p \geq 1$, $k \geq 0$ un entier, l'espace des fonctions complexes qui sont avec toutes leurs dérivées (au sens des distributions) jusqu'à l'ordre k de p ème puissance sommables sur Ω. On introduit dans $W_p^{(k)}(\Omega)$ la norme par

$$|u|_{W_p^{(k)}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |i| \leq k} \int_\Omega |D^i u|^p \, dX \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.1}$$

Les espaces $W_p^{(k)}(\Omega)$ sont complets, séparables. Pour $p = 2$, on obtient l'espace de Hilbert.

On désigne par $C^{(k)}(\bar{\Omega})$ l'espace des fonctions, continues sur la fermeture de Ω avec toutes leurs dérivées jusq'à l'ordre k. On munit $C^{(k)}(\bar{\Omega})$ par la norme

$$|u|_{C^{(k)}(\bar{\Omega})} = \sum_{0 \leq |i| \leq k} \max_{X \in \bar{\Omega}} |D^i u(X)|. \tag{1.2}$$

Soit $0 < \mu \leq 1$. On désigne par $C^{(k),\mu}(\bar{\Omega})$ l'espace des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$ avec toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre k. On suppose les dérivées de l'ordre k μ höldériennes. On munit $C^{(k),\mu}(\bar{\Omega})$ par la norme :

$$|u|_{C^{(k),\mu}(\bar{\Omega})} = |u|_{C^{(k)}(\bar{\Omega})} + \sum_{|i|=k} \sup_{\substack{X, Y \in \bar{\Omega} \\ X \neq Y}} \frac{|D^i u(X) - D^i u(Y)|}{|X - Y|^\mu}. \tag{1.3}$$

On désigne par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment continûment différentiables avec support compact dans Ω.

Par $\overset{\circ}{W}{}_p^{(k)}(\Omega)$ on désigne l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ moyennant la norme de $W_p^{(k)}(\Omega)$.

Nous utilisons dans la suite les théorèmes de Sobolev sur l'immersion, pour le cas spécial de dimension $n = 2$. (cfr. par exemple [1]).

PROPOSITION 1.1 — *Soit Ω un domaine borné avec la frontière $\dot{\Omega}$ une variété indéfiniment continûment différentiable de dimension $n-1$, Ω étant d'un seul côté de $\dot{\Omega}$. Soit $u \in W_p^{(k)}(\Omega)$ et $kp < 2$.*

Alors $W_p^{(k)}(\Omega) \subset W_2^{(0)}(\Omega)$ pour $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{k}{2}$ algébriquement e topologiquement.

Soit $kp = 2$. Alors on a pour n'importe quel $q > 1$: $W_p^{(k)}(\Omega) \subset W_q^{(0)}(\Omega)$ algébriquement et topologiquement.

Soit $kp > 2$. Soit l entier, $l < k - \dfrac{2}{p} \leq l + 1$.

Posons $\mu = k - \dfrac{2}{p} - l$ dans le cas où $k - \dfrac{2}{p} < l + 1$, soit $0 < \mu < 1$ pour $k - \dfrac{2}{p} = l + 1$.

Alors $W_p^{(k)}(\Omega) \subset C^{(l),\mu}(\overline{\Omega})$ algébriquement et topologiquement

Soit $l < k$. Alors la transformation identique de $W_p^{(k)}(\Omega)$ dans $W_p^{(l)}(\Omega)$ est complètement continue.

Soit Ω un domaine borné. On désigne par $D = (-1)^{|i|} \sum\limits_{0 \leq |i|, |j| \leq k} D^i (a_{ij} D^j)$.

On suppose $a_{ij} \in W_\infty^{(0)}(\Omega)$. Désormais on suppose que D soit P-elliptique (elliptique pour le problème de Poisson):

$$(1.4) \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \Longrightarrow \left| \int_\Omega \overline{a_{ij}} D^i \varphi D^j \overline{\varphi}\, dX \right| \geq \alpha \, |\varphi|^2_{W_2^{(k)}(\Omega)} .$$

On désigne par $W_2^{(-k)}(\Omega)$ l'espace des fonctionnelles sur $\mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)$.

Soient $f \in W^{(-k)}(\Omega)$, $u \in W_2^{(k)}(\Omega)$. On dit que $Du = f$ faiblement si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \Longrightarrow B(\varphi, u) = \displaystyle\int_\Omega \overline{a_{ij}} D^i \varphi D^j \overline{u}\, dX = f(\varphi)$.

Soit $u \in W_2^{(k)}(\Omega)$. On dit que $u = \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \ldots = \dfrac{\partial^{k-1} u}{\partial \nu^{k-1}} = 0$ sur $\dot{\Omega}$ si $u \in \mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)$. Ici $\dfrac{\partial^i u}{\partial \nu^i}$ sont les dérivées selon la normale extérieure.

Soit $f \in W_2^{(-k)}(\Omega)$, $u \in \mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)$ et $Du = f$.

Alors on dit que u résout le problème de Poisson : $Du = f$ dans Ω, $u = \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \ldots = \dfrac{\partial^{k-1} u}{\partial \nu^{k-1}} = 0$ sur $\dot{\Omega}$.

Il est bien connu (cfr. per exemple E. Magenes, G. Stampacchia [8]):

PROPOSITION 1.2. — *Soit Ω borné, D opérateur P-elliptique, $f \in W_2^{(-k)}(\Omega)$. Alors il existe précisément une solution u du probléme de Poisson et on a*

$$(1.5) \qquad |u|_{W_2^{(k)}(\Omega)} \leq C |f|_{W_2^{(-k)}(\Omega)} \,.$$

On désigne dans la suite par $K(X, r)$ la boule, centrée au point X et du rayon r.

Il est démontré dans [6] (quoique l'auteur annonce pour simplifier le résultat un peu plus faible en remplaçant la condition $a_{ij} \in C^{(0),1}(\overline{\Omega})$ par $a_{ij} \in C^{(1)}(\overline{\Omega})$):

PROPOSITION 1.3. — *Soit $K_r = K(0, r)$. Soit $0 \leq l < k$.*
Soient $a_{ij} \in C^{(\chi_i - 1),1}(\overline{K}_1)$ où $\chi_i = \max(1, |i| - l)$.
L'opérateur D soit P-elliptique. Soit $f \in W_2^{(-l)}(\Omega)$ et u la solution faible de $Du = f$.
Alors $u \in W_2^{(2k-l)}(K_r)$ pour $r < 1$ et on a:

$$(1.6) \qquad |u|_{W_2^{(2k-l)}(K_r)} \leq C(r, |a_{ij}|_{C^{(\chi_i-1),1}(\overline{K}_1)}, \alpha) \,.\, [|u|_{W_2^{(k)}(K_1)} + |f|_{W_2^{(-l)}(K_1)}] .$$ (1)

Nous démontrerons maintenant:

THÉORÈME 1. — *Soit $K_r = K(0, r)$, $r_0 \leq 1$. Soit $0 \leq l < k$. L'opérateur D soit P-elliptique, $a_{ij} \in C^{(\chi_i - 1),1}(\overline{K}_{r_0})$, $\chi_i = \max(1, |i| - l)$. Soit $f \in W_2^{(-l)}(K_{r_0})$, u la solution faible de $Du = f$.*
Alors $u \in C^{(k-1)}(\overline{K}_r)$ pour $r < r_0$ et on a:

$$(1.7) \qquad \sum_{|i| \leq k-1} |D^i u(0)| \leq C(|a_{ij}|_{C^{(\chi_i-1),1}(\overline{K}_{r_0})}, \alpha) \,.\, \left[r^{k-l} |f|_{W_2^{(-l)}(K_r)} + \sum_{|i| \leq k} r^{|i|-k} \left(\int_{K_r} |D^i u|^2 \, dX \right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

DÉMONSTRATION. — Posons $Y = \dfrac{X}{r}$, $v(Y) = u(rY)$. Désignons par $\widetilde{D}^i$ le symbole de la dérivée en cartes Y.

---

(1) α est la constante de P-ellipticité Cfr. (1.4).

Il existe maintenant $w \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(l)}(K_r)$ de sorte que $f(\varphi) = \int\limits_{K_r} \sum\limits_{|i| \leq l} D^i \varphi D^i \bar{w}\, dX$ et que $|f|_{W_2^{(-l)}(K_r)} = |w|_{W_2^{(l)}(K_r)}$. Posons pour $|i| \leq l : D^i w = f_i, g_i(Y) = r^{2k-|i|} f_i(rY), b_{ij}(Y) = r^{2k-(|i|+|j|)} \cdot a_{ij}(rY)$. On a pour $\psi \in \mathcal{D}(K_1)$:

(1.8)
$$\int\limits_{K_1} \overline{b_{ij}}\, \widetilde{D}^i \psi\, \widetilde{D}^j \bar{v}\, dY = \int\limits_{K_1} \sum_{|i| \leq l} \widetilde{D}^i \psi\, \bar{g}_i\, dY.$$

On obtient que l'opérateur $(-1)^{|i|} \widetilde{D}^i (b_{ij} \widetilde{D}^j)$ est P-elliptique sur K_1, avec la constante α. Il est évident que $|b_{ij}|_{C^{(\chi_i-1),1}(\overline{K_1})} \leq |a_{ij}|_{C^{(\chi_i-1),1}(\overline{K}_{r_0})}$. Utilisons maintenant la proposition 1.3 pour l'opérateur $(-1)^{|i|} \widetilde{D}^i(b_{ij} \widetilde{D}^j)$ et $r = \frac{1}{2}$. Ayant $k > l$, on obtient en vertu du (1.8) et tenant compte de la proposition 1.1 : $v \in C^{(k-1)}(\overline{K}_{\frac{1}{2}})$ et l'inégalité :

(1.9)
$$\sum_{|i| \leq k-1} |\widetilde{D}^i v(0)| \leq C^* \cdot C\left(\frac{1}{2}, |a_{ij}|_{C^{(\chi_i-1),1}(\overline{K}_{r_0})}, \alpha\right) \cdot$$
$$\cdot \left[\left(\int\limits_{K_1} \sum_{|i| \leq l} |g_i|^2\, dY\right)^{\frac{1}{2}} + |v|_{W_2^{(k)}(K_1)}\right].$$

C^* est la norme de l'opérateur identique de $W_2^{(k-l+2)}(K_{\frac{1}{2}})$ dans $C^{(k-1)}(K_{\frac{1}{2}})$. En revenant à la variable X on tire de (1.9) l'inégalité (1.7).

2. La continuité de la solution.

Il nous sera utile le théorème de J. L. Lions (cfr. [8]):

PROPOSITION. 2.1. — *Soient A, B, C les espaces de Banach, $A \subset B \subset C$ algébriquement et topologiquement. La transformation identique de A dans B est complètement continue.*

Alors a chaque $\varepsilon > 0$ correspond $\lambda(\varepsilon)$ de sorte que

(2.1)
$$\forall u \in A \Longrightarrow |u|_B \leq \varepsilon\, |u|_A + \lambda(\varepsilon)\, |u|_C.$$

Soit Ω un domaine borné. On dit que Ω jouit de la propriété du coin de l'éxtérieur (et on l'écrit $\Omega \in K_{ext}$) si : il existe un triangle ouvert, fixe, disons T, avec le sommet S privilégié de manière que pour chaque X de $\dot{\Omega}$, on peut placer T dans compl. Ω de manière que $X = S$.

Théorème 2. — *Soit $\Omega \in K_{ext}$, D opérateur P elliptique, $a_{ij} \in C^{(0),1}(\overline{\Omega})$, pour $|i| = k$, soit $f \in W_2^{(-k+1)}(\Omega)$.*

Alors la solution faible u du problème de Poisson appartient à $C^{(k-1)}(\overline{\Omega})$, $D^i u(X) = 0$ pour $X \in \dot{\Omega}$, $|i| \leq k-1$ et on a:

$$|u|_{C^{(k-1)}(\overline{\Omega})} \leq C\,|f|_{W_2^{(-k+1)}(\Omega)} \,. \tag{2.2}$$

Démonstration. — On a pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\int_\Omega \sum_{|i|=|j|=k} \overline{a_{ij}}\, D^i \varphi D^j \overline{u}\, dX + \lambda \int_\Omega \varphi\, \overline{u}\, dX = \tag{2.3}$$

$$= f(\varphi) + \lambda \int_\Omega \varphi\, \overline{u} d\,X - \int_\Omega \sum_{\substack{0 \leq |i| \leq k-1 \\ 0 \leq |j| \leq k}} \overline{a_{ij}} D^i \varphi D^j \overline{u} dX - \int_{\dot{\Omega}} \sum_{\substack{|i|=k \\ 0 \leq |j| \leq k-1}} \overline{a_{ij}}\, D^i \varphi D^j \overline{u}\, d\,X.$$

Par intégration per partes, on peut diminuer d'un l'ordre des dérivées de φ au dernier terme du (2.3). Tenant compte de la proposition 2.1, on peut trouver $\lambda > 0$ si grand, que l'operateur $\widetilde{D} = \sum_{|i|=|j|=k} (-1)^{|k|} D^i (a_{ij} D^j) + \lambda$ est P-elliptique.

Alors on a pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\int_\Omega \sum_{|i|=|j|=k} \overline{a_{ij}}\, D^i \varphi D^j \overline{u}\, dX + \int_\Omega \lambda \varphi\, \overline{u}\, dX = \widetilde{f}(\varphi)$$

où $\widetilde{f} \in W_2^{(-k+1)}(\Omega)$. Tenant compte du théorème 1 on a $u \in C^{(k-1)}(\overline{\Omega}')$ où $\overline{\Omega}' \subset \Omega$.

Soient $X_m \in \Omega$, $X_m \longrightarrow X_0 \in \dot{\Omega}$. Soit d_m la distance du point X_m de $\dot{\Omega}$. Soit $Y_m \in \dot{\Omega}$ choisi de sorte que $|X_m - Y_m| = d_m$. Placons le triangle T dans compl Ω de manière que $Y_m = S$. Introduisons les cartes $[y_1, y_2] = Y$ de manière que $Y = 0$ corresponde à Y_m, l'axe y_2 coincide avec l'axe de T, $y_2 > 0 \Longrightarrow [0, y_2] = Y \in \text{compl}\, \Omega$.

On fait correspondre à chaque X de $K\left(X_m, \dfrac{d_m}{2}\right)$ le point X^3 de $\dot{T}$ destiné par la condition que la carte y_1 de $X^3 - X$ soit zéro. On prend X^3 sur le côté de T qui contient Y_m.

On a: il existe $d > 0$ de sorte que pour $d_m \leq d$, X^3 est déterminé, et une costante $c_1 > 0$ de sorte qu'il vaut:

$$X \in K\left(X_m\,,\ \frac{d_m}{2}\right) \Longrightarrow |\ X - X^3\ | \leq c_1 \frac{d_m}{2}. \tag{2.4}$$

On désigne par X^1, X^2 des intersections de la droite, donnée par X, X^3, avec $\dot{K}\left(X_m\,,\ \frac{d_m}{2}\right)$.

On pose $X^i = [y_{10}\,,\ y_{2i}]$. On ordonne X^i de manière que $y_{21} < y_{22} < y_{23}$.

Utilisant l'inégalité de Hardy (cfr. [9[), on obtient pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\int_{y_{21}}^{y_{22}} |\ \varphi(y_{10}\,,\eta)|^2\ |\ X - X^3\ |^{-2}\ d\eta \leq 4 \int_{-\infty}^{y_{23}} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}(y_{10}\,,\ \eta)\right|^2 d\eta. \tag{2.5}$$

En vertu du (2.4), il découle de (2.5):

$$\frac{1}{C_1^2\ d_m^2} \int_{y_{21}}^{y_{22}} |\ \varphi\,(y_{10}\,,\ \eta)\ |^2\ d\eta < \int_{-\infty}^{y_{23}} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\,(y_{10}\,,\ \eta)\right|^2 d\eta. \tag{2.6}$$

Par intégration en y_{10} on obtient pour φ

$$\frac{1}{C_1^2\ d_m^2} \int\limits_{K\left(X_m\,,\ \frac{d_m}{2}\right)} |\ \varphi\ |^2\ dY \leq \int\limits_{E\left(X_m\,,\ \frac{d_m}{2}\right)} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\right|^2 dY \tag{2.7}$$

où $E\left(X_m\,,\ \frac{d_m}{2}\right)$ est l'ensemble des points Y de Ω choisi de manière que la droite destinée par Y et par la direction de l'axe y_2, coupe $K\left(X_m\,,\ \frac{d_m}{2}\right)$.

u étant dans $\overset{\circ}{W}{}_2^{(k)}(\Omega)$ on parvient à l'inégalité

$$\sum_{|i|\leq k} \left(\frac{d_m}{2}\right)^{|i|-k} \left(\ \int\limits_{K\left(X_m\,,\ \frac{d_m}{2}\right)} |\ D^i u\ |^2\ dX\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\ |\ u\ |_{W_2^{(k)}\left(E\left(X_m\,,\ \frac{d_m}{2}\right)\right)}. \tag{2.8}$$

En utilisant (1.7) pour $\widetilde{f}$, opérateur $\widetilde{D}$ et $K\left(X_m\,,\ \frac{d_m}{2}\right)$, on obtient en vertu de (2.8): $\lim\limits_{m\to\infty} D^i u\,(X_m) = 0$ pour $|\ i\ | \leq k - 1$.

Pour démontrer (2.2), on utilise le théorème du graphe fermé.

3. Problème de Dirichlet.

Soit $u_0 \in W_2^{(k)}(\Omega)$. On dit de u de $W_2^{(k)}(\Omega)$ qu'elle résout le problème de Dirichlet $Du = 0$ dans Ω, $u = u_0$, $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \dfrac{\partial u_0}{\partial \nu}, \dots \dfrac{\partial^{k-1} u}{\partial \nu^{k-1}} = \dfrac{\partial^{k-1} u_0}{\partial \nu^{k-1}}$ sur $\dot{\Omega}$ si $Du = 0$ faiblement, $u - u_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(k)}(\Omega)$.

Du théorème 2, il suit:

THÉORÈME 3. — *Soient $\Omega \in K_{ext}$, D opérateur* P*-elliptique avec $a_{ij} \in C^{(0),1}(\overline{\Omega})$ pour $|i| = k$. Soit $u_0 \in W^{(k+1)}(\Omega)$.*

Alors u, la solution faible du problème de Dirichlet appartient à $C^{(k-1)}(\overline{\Omega})$, on a $D^i u(X) = D^i u_0(X)$ pour $X \in \dot{\Omega}$ et $|i| \leq k - 1$ et

$$|u|_{C^{(k-1)}(\overline{\Omega})} \leq C\, |u_0|_{W_2^{(k+1)}(\Omega)} . \tag{3.1}$$

La démonstration découle immédiatement du fait que $u - u_0$ résout le problème de Poisson avec $f \in W^{(-k+1)}(\Omega)$ où $|f|_{W_2^{(-k+1)}(\Omega)} \leq C\, |u_0|_{W_2^{(k+1)}(\Omega)}$.

Une question naturelle se pose. Est-ce que ne suffit pas pour le théorème 3 seulement $u_0 \in W_2^{(k)}(\Omega) \cap C^{(k-1)}(\overline{\Omega})$?

Nous résolvons cette question affirmativement pour l'opérateur $D = (-1)^k \Delta^k$ où Δ est l'opérateur de Laplace.

Nous démontrerons dans ce but:

PROPOSITION 3.1. — *Soit u la fonction k-harmonique dans $K(0, R)$.*

Alors pour $0 < r \leq R$, il existe une fonction $G(r, Y)$, continue pour $0 < r \leq R$, $|Y| \leq r$ (en r et Y simultanément), $|G(r, Y)| < c_1$ *où c_1 ne dépend pas de r et Y, de manière qu'on a*

$$u(0) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{|Y|<r} G(r, Y)\, u(Y)\, dY. \tag{3.2}$$

DÉMONSTRATION. — On modifie un peu le procédé de M. Nicolesco [7]. Dans [7], pour la fonction en question, on a introduit (nous nous bornons naturellement au cas $n = 2$):

$$\mu_0(r) = \frac{1}{2\pi r}\int\limits_{\dot K(0,r)} u(Y)\,dS,$$

(3.3)
$$\mu_1(r) = \frac{2}{r^2}\int\limits_0^r \varrho\mu_0(\varrho)\,d\varrho\,, \ldots$$

$$\mu_s(r) = \frac{2}{r^2}\int\limits_0^r \varrho\mu_{s-1}(\varrho)\,d\varrho.$$

On trouve

(3.4)
$$\mu_s(r) = u(0) + \sum_{i=1}^{k-1} a_i\left(\frac{1}{1+i}\right)^s r^{2i}(\Delta^i u)_{X=0}\,,$$

où $a_i = \dfrac{1}{2^{i+k}\,i\,!\,k\,!}$.

Ecrivant les relations (3.4) pour $s = 0, 1, \ldots k-1$, on peut en calculer $u(0)$ en éliminant $r^{2i}(\Delta^i u)_{X=0}$, $i = 1, 2, \ldots k-1$. La matrice du système (3.4) (pour $s = 0, 1 \ldots k-1$) est régulière.

Nous modifions un peu la définition (3.3) en posant

$$\mu_0(\varepsilon, r) = \mu_0(r),$$

$$\mu_1(\varepsilon, r) = \mu_1(r),$$

(3.5)
$$\mu_2(\varepsilon, r) = \frac{2}{r^2(1-\varepsilon^2)}\int\limits_{r\varepsilon}^r \varrho\mu_1(\varepsilon, \varrho)\,d\varrho, \ldots$$

$$\mu_s(\varepsilon, r) = \frac{2}{r^2(1-\varepsilon^2)}\int\limits_{r\varepsilon}^r \varrho\mu_{s-1}(\varepsilon, \varrho)\,d\varrho.$$

On peut calculer $\mu_s(\varepsilon, r)$ à l'aide de $\mu_s(r), \mu_s(\varepsilon r), \ldots \mu_s(\varepsilon^s r)$ et utilisant (3.4) on obtient:

(3.6)
$$\mu_s(\varepsilon, r) = u(0) + \sum_{i=1}^{k-1} a_i(s, \varepsilon)\left(\frac{1}{1+i}\right)^s r\,(\Delta u)_{X=0}\,.$$

Evidemment $a_i(s, \varepsilon) \to a_i$ pour $\varepsilon \to 0$, alors pour $\varepsilon > 0$, assez petit, la matrice de (36) est régulière. On obtient de cette manière:

(3.7)
$$u(0) = \sum_{s=0}^{k-1} c_s\,\mu_s(\varepsilon, r).$$

De (3.7) on tire :

$$u(0) = \frac{2}{r^2(1-\varepsilon^2)} \int_{r\varepsilon}^{r} \sum_{s=0}^{k-1} c_s \, \mu_s(\varepsilon, \varrho) \cdot \varrho \, d\varrho. \tag{3.8}$$

Il ne s'agit maintenant que de changer l'ordre de l'intégration pour obtenir (3.2).

Remarquons, que pour $\varepsilon = 0$, cette conclusion est fausse.

De la proposition 3.1 il suit immédiatement :

PROPOSITION 3.2. — *Soit $v \in C^{(0)}(\overline{K(0, R)})$. On désigne per $\omega(r)$, module de continuité. Alors*

$$\left| v(0) - \frac{1}{\pi r^2} \int_{|Y|<r} G(r, Y)\, v(Y)\, dY \right| \leq c\, \omega(r). \tag{3.9}$$

Nous sommes maintenant en même de démontrer :

THÉORÈME 4. — *Soient $\Omega \in K_{ext'}$, $D = (-1)^k \Delta^k$. Soit $u_0 \in W_2^{(k)}(\Omega) \cap C^{(k-1)}(\overline{\Omega})$.*

Alors la solution faible du problème de Dirichlet appartient à $C^{(k-1)}(\overline{\Omega})$, $D^i u(X) = D^i u_0(X)$ pour $X \in \dot{\Omega}$, $|i| \leq k-1$, $(-1)^k \Delta^k u = 0$ au sens classique et on a

$$|u|_{C^{(k-1)}(\overline{\Omega})} \leq c\,[|u_0|_{C^{(k-1)}(\overline{\Omega})} + |u_0|_{W_2^{(k)}(\Omega)}]. \tag{3.10}$$

DÉMONSTRATION. Posons $u = u_0 + w$, alors w est la solution du problème de Poison et on a pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \Longrightarrow$

$$\int_\Omega \sum_{i_1+i_2=k} \frac{k!}{i_1!\,i_2!} \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2}} \frac{\partial^k \overline{w}}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2}} \, dX = -\int_\Omega \sum_{i_1+i_2=k} \frac{k!}{i_1!\,i_2!} \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2}} \cdot \frac{\partial^k \overline{u}_0}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2}} \, dX, \tag{3.11}$$

alors

$$|w|_{W_2^{(k)}(\Omega)} \leq c\, |u_0|_{W_2^{(k)}(\Omega)} \, .$$

La fonction u est indéfiniment continûment différentiable à l'intérieur de Ω, $(-1)^k \Delta^k u = 0$ au sens classique : cela est démontré par plusieurs auteurs. (cfr. par exemple [6]).

Soient alors $X_m \in \Omega$, $X_m \to X \in \dot{\Omega}$. On répète maintenant la démonstration du théorème 2.2 avec quelques modifications : on obtient alors que

$$\left(\frac{2}{d_m}\right)^2 \int\limits_{K\left(X_m, \frac{d_m}{2}\right)} | D^i w |^2 \, dX \to 0 \quad \text{pour} \quad X_m \to X, \ | i | = k - 1.$$

D'autre part, en vertu des propositions 3.1 et 3.2 on a

$$D^i u (X_m) = \frac{4}{\pi d_m^2} \int\limits_{|Y| < \frac{d_m}{2}} G\left(\frac{d_m}{2}, Y\right) D^i u (Y_m + Y) \, dX \tag{3.12}$$

et

$$D^i u_0 (X_m) = \frac{4}{\pi d_m^2} \int\limits_{|Y| < \frac{d_m}{2}} G\left(\frac{d_m}{2}, Y\right) D^i u_0 (X_m + Y) \, dY + F\left(X_m, \frac{d_m}{2}\right) \tag{3.13}$$

où $F\left(X_m \frac{d_m}{2}\right) \to 0$ pour $m \to \infty$.

La fonction $G(r, Y)$ étant bornée indépendante de r et Y, on obtient

$$| D^i u (X_m) - D^i u_0 (X_m) | \leq \left| F\left(X_m, \frac{d_m}{2}\right) \right| + \frac{c}{d_m} \left(\int\limits_{K\left(X_m, \frac{d_m}{2}\right)} | D^i w |^2 \, dY \right)^{\frac{1}{2}},$$

d'où suit que $D^i u \in C(\overline{\Omega})$. (Pour $| i | = k - 1$). En ce qui concerne les dérivées de u de l'ordre inférieur de $k - 1$, elles appartiennent à $C(\overline{\Omega})$ en vertu de la proposition 1.1. En effet, on peut appliquer cette proposition à w (qui prolongé par zéro au complément de Ω appartient à $K(0, A)$ pour A assez grand).

(3.10) est la conséquence du théorème sur le graphe fermé.

Remarquons à la fin de cet article, qu'on peut par la méthode utilisée, démontrer les résultats, en substituant les espaces $W_2^{(-k+1)}(\Omega)$ par $W_p^{(-l)}(\Omega)$, p, l choisi convenablement. Il ne faut que s'appuyer sur lés résultats de F. E. Browder [10].

Il est évident qu'on ne peut pas utiliser directement cette méthode pour dimension $n \geq 3$. Alors, la question naturelle se pose, si l'on peut modifier cette méthode afin qu'elle soit utilisable pour $n \geq 3$.

Si l'on veut examiner que la solution faible est classique en satisfaction de l'équation différentielle, il ne faut qu'utiliser les théorèmes sur la régularité à l'intérieur du domaine, démontrés par plusieurs auteurs (cfr. par exemple F. D. Browder [10]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. GAGLIARDO : *Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili.* Ricerche di matematica, vol. VII, (1958), 102-137.

[2] S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG : *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions* I. Comm. on pure and appl. mathematics, vol. XII, (1959), 623-727.

[3] G. TAUTZ : *Reguläre Randpunkte beim verallgemeinerten Dirichletschen Problem*, Math. Zeit., 39, 532-559, (1935).

[4] C. B. MORREY : *Second Order Elliptic Equations in Several Variables and Hölder Continuity,* Math. Zeitschrift, 72, 146-164, (1959).

[5] R. COURANT, D. HILBERT : *Methoden der mathematischen Physik,* Springer (1931).

[6] L. NIRENBERG : *Remarks on Strongly Elliptic Partial Differential Equations.* Comm. on pure and appl. math. vol. VIII, (1955), 649-675.

[7] M. NICOLESCO : *Les fonctions polyharmoniques,* Herrmann, (1936).

[8] E. MAGENES, G. STAMPACCHIA : *I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico.* Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Ser. III, vol. XII, Fasc. III, (1958), 247-358.

[9] G. A. HARDY. Y. E. LITTLEWOOD, G. POLYA : *Inequalities,* (1934).

[10] F. E. BROWDER : *Functional Analysis and Partial Differential Equations* II, Mathematische Annalen 145, (1962), 81-226.