

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

GIUSEPPE GEMIGNANI

Digressione sui campi ordinati

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 16,
n° 2 (1962), p. 143-157

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1962_3_16_2_143_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DIGRESSIONE SUI CAMPI ORDINATI

Nota di GIUSEPPE GEMIGNANI (a Pisa).

In una Sua recente nota K. A. Gravett [4] esponeva un teorema di immersione per gli spazi vettoriali dotati di una valutazione.

Successivamente [5] usava questo risultato per dare una elegante dimostrazione del classico teorema di struttura dei gruppi abeliani ordinati dovuto a H. Hahn; in questa dimostrazione si osserva che ogni gruppo ordinato possiede una valutazione naturale definita dall'ordinamento e può pensarsi immerso in uno spazio vettoriale valutato sul campo dei razionali.

Nella presente nota si adopera il metodo di Gravett per studiare la struttura dei campi ordinati. Dopo avere premesso alcune generalità si studia l'insieme delle valutazioni di un campo ordinato K che rispettano l'ordinamento e che vengono perciò chiamate *coerenti*. Si osserva che esse costituiscono un insieme ordinato dotato di minimo (la valutazione naturale) in corrispondenza biunivoca e monotona con l'insieme dei sottogruppi isolati del gruppo dei valori della valutazione naturale di K . I campi residui di queste valutazioni sono isomorfi a certi sottocampi di K che vengono caratterizzati. Nel numero 4 si dà un teorema di struttura per il gruppo addittivo di un campo ordinato completo rispetto alla propria valutazione naturale. Infine nel n. 5 si dà un analogo teorema per il gruppo moltiplicativo (ordinato) degli elementi positivi di K .

Prima di iniziare la trattazione premettiamo un breve elenco di concetti e di notazioni di cui faremo uso nel seguito.

Sia $\Delta = (E, <)$ un insieme ordinato (totalmente ordinato); E è un insieme di elementi e $<$ è una relazione di ordine definita su E . Chiameremo *duale* di Δ (e indicheremo con Δ^*) l'insieme ordinato $\Delta^* = (E, >)$.

Un segmento di un insieme ordinato $\Delta = (E, <)$ è un sottoinsieme F di E non necessariamente distinto dall'insieme vuoto tale che $a < b \in F$ implica $a \in F$.

Un gruppo ordinato $\Gamma = (G, <)$ è una coppia di enti il primo dei quali G è un gruppo abeliano (indicato qui addittivamente), il secondo è una rela-

zione di ordine, tale che $a < b$ implica $a + c < b + c$ ($a, b, c \in G$). La relazione di ordine $<$ determina (ed è determinata da) il sottoinsieme $\Pi(\Gamma)$ degli elementi di G che sono > 0 ; $\Pi(\Gamma)$ è un sottoinsieme addittivamente chiuso tale che $0 \notin \Pi(\Gamma)$ e tale che $a \notin \Pi(\Gamma)$ implica $-a \in \Pi(\Gamma)$. Se $\Gamma = (G, <)$ è un gruppo ordinato e G' è una immagine omomorfa di G in un omomorfismo σ di nucleo $F \subseteq G$, allora esiste un gruppo ordinato $\Gamma' = (G', <)$ tale che $\sigma a \leq \sigma b$ ogniqualvolta sia $a < b$ se e solo se F è un sottogruppo isolato di G , cioè se e solo se $\Pi(\Gamma) \cap F$ è un segmento di $\Pi(\Gamma)$. Un omomorfismo siffatto verrà talvolta denominato omomorfismo ordinato.

Un campo ordinato è una coppia $(C, <)$ ove C è un campo e $<$ una relazione di ordine tali che, detto S il gruppo addittivo di C ,

- 1) $(S, <)$ è un gruppo ordinato;
- 2) $\Pi(S)$ è un insieme moltiplicativamente chiuso.

Un gruppo ordinato Γ dicesi *archimedeo* se, qualunque siano $a, b \in \Gamma - \{0\}$, è $n|a| > |b|$ ⁽¹⁾ per un opportuno intero positivo n .

Per ogni gruppo ordinato archimedeo Γ esiste un isomorfismo ordinato di Γ nel gruppo addittivo dei reali. In particolare se C è un campo ordinato archimedeo esiste un isomorfismo di C (come campo) nel campo dei reali.

1. Sia A un campo di integrità, G un A -modulo, Δ un insieme ordinato. Una valutazione di G ad insieme di valori Δ è una applicazione v di $G - \{0\}$ su tutto Δ tale che:

$$a) v(x + y) \geq \min(v(x), v(y)) \quad x, y \in G$$

$$b) v(ax) = v(x) \quad x \in G; 0 \neq a \in A.$$

La applicazione v si completa definendo $v(0) = \infty > \delta$ per ogni $\delta \in \Delta$. La coppia (G, v) ove G è un A -modulo e v una valutazione di G chiamasi un A -modulo valutato.

Sia Δ un insieme ordinato, $\{L_\delta; \delta \in \Delta\}$ un insieme di A -moduli; indichiamo con $W(\Delta, \{L_\delta\})$ l'insieme delle applicazioni x di Δ in $\bigcup_{\delta \in \Delta} L_\delta$ tali che:

$$a) x(\delta) \in L_\delta$$

b) il sottoinsieme Nx di Δ formato dai $\delta \in \Delta$ per cui $x(\delta) \neq 0$ sia bene ordinato.

Con $\mathcal{F}(\Delta, \{L_\delta\})$ indichiamo poi il sottoinsieme di $W(\Delta, \{L_\delta\})$ formato dagli x per cui Nx è finito.

⁽¹⁾ Secondo l'uso corrente abbiamo posto $|a| = \max\{a, -a\}$.

$W(A, \{L_\delta\})$ è dotato di una struttura naturale di A -modulo definita da:

$$(x + y)(\delta) = x(\delta) + y(\delta) \quad x, y \in W(A, \{L_\delta\})$$

$$(ax)(\delta) = ax(\delta) \quad a \in A.$$

$\mathcal{F}(A, \{L_\delta\})$ risulta allora un sotto- A -modulo di $W(A, \{L_\delta\})$. Chiameremo $W(A, \{L_\delta\})$ *somma lessicografica* di $\{L_\delta; \delta \in \Delta\}$; $\mathcal{F}(A, \{L_\delta\})$ è la somma diretta degli L_δ . Se inoltre, per ogni $\delta \in \Delta$, $al = 0$ ($a \in A, l \in L_\delta$) implica $a = 0$ o $l = 0$, allora è definita una valutazione di $W(A, \{L_\delta\})$ come A -modulo ad insieme di valori Δ

$$v(x) = \min_{\delta \in N_x} \delta \quad x \in W(A, \{L_\delta\})$$

Sia G un A -modulo, v una valutazione di G avente Δ come insieme dei valori, T un insieme bene ordinato privo di elemento massimo; una applicazione di T in G ($t \rightarrow a_t$) dicesi una successione v -Cauchy se, ogniqualvolta $r, s, t \in T$ sono tali che $r < s < t$, sia $v(a_r - a_s) < v(a_s - a_t)$. Se $\{a_t; t \in T\}$ è una successione v -Cauchy, posto $\delta_t = v(a_t - a_{t+1})$ per ogni $t \in T$, si ha $v(a_t - a_s) = \delta_t$ per ogni $s > t$. Un elemento ξ di G dicesi v -limite della successione v -Cauchy $\{a_t; t \in T\}$ se, per ogni $t \in T$ è $v(a_t - \xi) = \delta_t$. Diremo poi che G è v -completo se per ogni successione v -Cauchy di G esiste in G almeno un v -limite.

Sia C un campo, G un C -modulo, v una valutazione di G ad insieme di valori Δ . Sussiste la seguente proposizione dovuta a K. A. H. Gravett.

1.1 Siano A_δ e B_δ i sotto- C -moduli di G , costituiti dagli $a \in G$ per cui è $v(a) \geq \delta$ e $v(a) > \delta$ ($\delta \in \Delta$) rispettivamente e sia σ_δ l'omomorfismo di A_δ di nucleo B_δ . Esiste allora un isomorfismo τ_δ di $C_\delta = A_\delta/B_\delta$ in A_δ tale che $\sigma_\delta \circ \tau_\delta a = a$ per ogni $a \in C_\delta$. Inoltre esiste un isomorfismo τ di $\mathcal{F}(\Delta; \{C_\delta\})$ in G tale che per ogni $\delta \in \Delta$ è $\tau_\delta a = \tau a$ per ogni $a \in C_\delta$; infine esiste un isomorfismo σ di G in $W(\Delta, \{C_\delta\})$ tale che $\sigma \circ \tau a = a$ per ogni $a \in \mathcal{F}(\Delta, \{C_\delta\})$; ed è $G = (A, \{C_\delta\})$ se e solo se G è v -completo.

Sia G un gruppo ordinato che indicheremo addittivamente, $\Delta(G)$ l'insieme quoziente di $G - \{0\}$ modulo la relazione \equiv (di equivalenza archimedeo): $a \equiv b$ se è $n|a| > |b|$ e $m|b| > a$ per opportuni interi positivi n ed m .

Ordinato $\Delta(G)$ in guisa tale che la applicazione naturale u di $G - \{0\}$ su $\Delta(G)$ sia monotona non crescente, la u è una valutazione di G come Z -modulo⁽²⁾

(2) Qui e nel seguito indicheremo con Z l'anello degli interi razionali.

che chiameremo la valutazione *naturale* di G . Il gruppo G è *archimedeo* se e solo se $\Delta\{G\}$ consta di un solo elemento.

Sia Γ un insieme ordinato, $\{L_\gamma; \gamma \in \Gamma\}$ un insieme di gruppi ordinati. Il gruppo $W(\Gamma, \{L_\gamma\})$ può essere dotato della struttura di gruppo ordinato definendo l'insieme dei positivi $\Pi(W)$:

$$x \in \Pi(W) \quad \text{se } x(v(x)) > 0.$$

Chiameremo $W(\Gamma; \{L_\gamma\})$ e $\mathcal{F}(\Gamma, \{L_\gamma\})$, così ordinati, rispettivamente *somma lessicografica ordinata* e *somma diretta ordinata di $\{L_\gamma\}$* ; L_γ verrà chiamato *addendo diretto di indice γ* . Inoltre se $\{L_\gamma; \gamma \in \Gamma\}$ è un insieme di gruppi ordinati $v(x) = \min_{\delta \in N\alpha} \delta$ è una valutazione di $W(\Gamma, \{L_\gamma\})$ come \mathbb{Z} -modulo.

Se, per ogni $\gamma \in \Gamma$, L_γ è isomorfo al gruppo additivo R dei reali, indicheremo il gruppo ordinato $W(\Gamma; \{L_\gamma\})$ con $W(\Gamma)$.

Inoltre:

1.2 LEMMA. *Sia Γ un insieme ordinato, $\{L_\gamma; \gamma \in \Gamma\}$ un insieme di gruppi ordinati archimedei. Allora $\Delta(W(\Gamma; \{L_\gamma\}))$ è isomorfo a Γ (come insieme ordinato).*

DIM. Siano $x, y \in W(\Gamma; \{L_\gamma\}) - \{0\}$. Sia u la valutazione naturale di W , v la valutazione:

$$v(x) = \min_{\delta \in N\alpha} \delta.$$

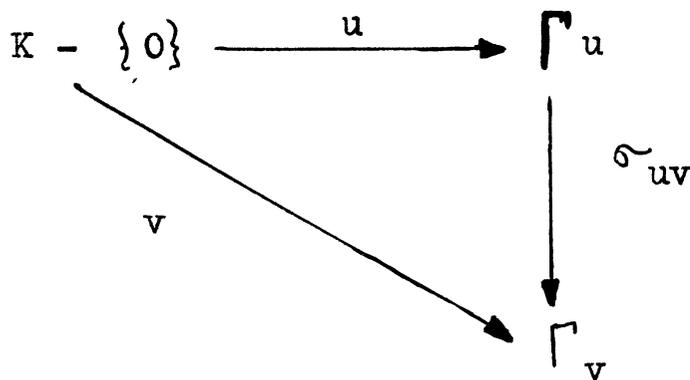
Supposto allora $v(x) = v(y) = \delta$, è $x(\delta) \equiv y(\delta) \in L_\delta$, onde per opportuni interi positivi n ed m , $n|x(\delta)| > |y(\delta)|$ e $m|y(\delta)| > |x(\delta)|$. Pertanto, essendo $|x|(\delta) = |x(\delta)|$ e $|y|(\delta) = |y(\delta)|$, si ha $n|x| > |y|$ e $m|y| > |x|$.

Supposto invece $v(x) > v(y)$, è $|y| > nx$ per ogni intero positivo n , onde $u(x) > u(y)$. La u e la v sono perciò equivalenti, onde $\Delta(W(\Gamma; \{L_\gamma\}))$ è isomorfo a Γ , C. V. D.

1.3 LEMMA. *Sia H un sottogruppo isolato del gruppo ordinato G . Allora G è la somma diretta ordinata di H e G/H ; inoltre $\Delta(G/H)$ è isomorfo come insieme ordinato ad un segmento Δ_1 di $\Delta(G)$ e $\Delta(H)$ è isomorfo a $\Delta(G) - \Delta_1$.*

DIM. Sia σ l'omomorfismo naturale (ordinato) di G su G/H . Poichè G/H è un gruppo abeliano libero, esiste un isomorfismo τ di G/H in G tale che $\sigma \circ \tau a = \tau a$ per ogni $a \in G/H$. Inoltre è $\tau G/H \cap H = \{0\}$; pertanto è $G = H \oplus G/H$. Essendo infine H un sottogruppo isolato di G , G risulta somma diretta ordinata di H e G/H ; le altre asserzioni sono banali.

2. Sia K un campo ordinato, u e v valutazioni di K (come campo) aventi Γ_u e Γ_v rispettivamente come gruppi di valori. Diremo che u precede v e scriveremo $u \leq v$ se esiste un omomorfismo ordinato σ_{uv} di Γ_u su Γ_v tale che il diagramma:



sia commutativo. Se $u \leq v$, allora $R_u \subseteq R_v$ e viceversa; la relazione $<$ è transitiva ed è simultaneamente $u \leq v$ e $v \leq u$ se e solo se u e v sono equivalenti. Se $u \leq v$ l'omomorfismo σ_{uv} ha come immagine tutto Γ_v . Una valutazione v di K verrà detta *coerente* se ogniqualvolta sia $0 < a < b$, si abbia $v(a) \geq v(b)$ ⁽³⁾.

2.1 TEOREMA. Sia K un campo ordinato, u una valutazione coerente; allora ogni $v > u$ è coerente. Inoltre:

2.2 La valutazione naturale ω del gruppo additivo ordinato K è una valutazione di K come campo ed è coerente.

2.3 v è coerente se e solo se R_v è un sottogruppo isolato di K ; ed anche se e solo se $v \geq \omega$.

2.4 Se u e v sono coerenti, allora esse sono paragonabili.

2.5 v è coerente se e solo se P_v è un sottogruppo isolato di R_v .

DIM. Sia u coerente; allora se $0 < a < b$ ($a, b \in K$), è $u(a) \geq u(b)$, onde $v(a) = \sigma_{uv} u(a) \geq \sigma_{uv} u(b) = v(b)$.

⁽³⁾ E' forse opportuno osservare che il caso di una valutazione v tale che $a > b > 0$ implichi $v(a) \geq v(b)$ non si presenta se non con la valutazione banale.

Detta poi ω la valutazione naturale del gruppo ordinato K , si ha che dall'essere $\omega(a) = \omega(a')$ e $\omega(b) = \omega(b')$ consegue $\omega(ab) = \omega(a'b')$ come subito si verifica.

Definendo allora $\omega(a) + \omega(b) = \omega(ab)$ si dà a $\Delta(K)$ una struttura di gruppo ordinato; la ω risulta così una valutazione di K come campo ed è coerente.

Sia v coerente. Allora $0 < b < a \in R_v$ implica $b \in R_v$, onde R_v è un sottogruppo isolato di K . Viceversa sia R_v una schiera valutante ed un sottogruppo isolato di K . Allora $R_v \supseteq R_\omega$: infatti se $0 < a \in R_v$ è $a < n1$ per un opportuno intero positivo n . Ma è $n1 \in R_v$, onde $a \in R_\omega$. Pertanto è $\omega \leq v$, onde, per 2.1 e 2.2 v è coerente. Ciò prova completamente la 2.3. Siano poi u e v coerenti e sia $R_u \not\subseteq R_v$; esiste allora un $a > 0$ tale che $a \in R_u$, ma $a \notin R_v$. Allora, per ogni $b \in R_v$ e positivo, è $b < a$, onde $R_v \subseteq R_u$.

Infine sia v coerente. Allora P_v è un sottogruppo isolato di R_v . Viceversa sia P_v un sottogruppo isolato di R_v . Allora se $0 < b < a \in R_v$ e supposto, per esempio, $a \notin P_v$, supponiamo per assurdo $b \notin R_v$; allora è $0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \in P_v$, onde $\frac{1}{a} \in P_v$ e $a \notin R_v$; per 2.3 consegue che v è coerente, C. V. D.

2.6 COROLLARIO. *Una valutazione v di K è coerente se e solo se il suo campo residuo K_v è ordinato in guisa tale che sia ordinato l'omomorfismo naturale σ di R_v su K_v .*

DIM. Sia v coerente; poichè il nucleo P_v di σ è isolato, può ordinarsi K_v in guisa tale che σ sia un omomorfismo ordinato di gruppi addittivi. Inoltre $R_v \cap \Pi(K)$ è moltiplicativamente chiuso; quindi è moltiplicativamente chiuso $\Pi(K_v) \cup \{0\} = \sigma(R_v \cap \Pi(K))$ e K_v risulta un gruppo ordinato. Da 2.5 segue poi immediatamente che se σ è un omomorfismo ordinato di gruppi addittivi ordinati, la v è coerente, C. V. D.

Con le stesse notazioni si ha poi:

2.7 TEOREMA. *Sia v una valutazione coerente di K , $T(v)$ l'insieme delle valutazioni coerenti di K che sono $< v$ ove si considerino non distinte due valutazioni equivalenti. Esiste allora una corrispondenza biunivoca e monotona tra gli elementi di $T(v)$ e le valutazioni coerenti di K_v (a meno di equivalenza), tale che se u e z sono valutazioni corrispondenti di K e di K_v rispettivamente, la u è composta mediante la v e la z .*

DIM. Sia $u \in T(v)$; detto σ l'omomorfismo naturale di R_v su K_v , σR_u è una schiera valutante isolata di K_v . La u risulta allora composta mediante la v e la valutazione z di K_v tali che $R_z = \sigma R_u$. La corrispondenza

così definita è biunivoca e $u_1 < u_2 < v$ implica che u_i è composta con v e z_i ($i = 1, 2$) essendo $z_1 < z_2$, C. V. D.

Da 2.7 segue immediatamente il seguente

2.8 COROLLARIO. *L'insieme delle valutazioni coerenti di un campo ordinato K ha lo stesso tipo d'ordine dell'insieme dei sottogruppi isolati del gruppo dei valori Γ_ω della sua valutazione naturale.*

Il tipo d'ordine dell'insieme delle valutazioni coerenti del campo ordinato K verrà chiamato *rango* di K .

2.9 LEMMA. *Sia Φ un sottogruppo isolato di Γ_ω . Allora l'insieme \mathcal{L} dei sottocampi L di K tali che $\omega(L - \{0\}) \subseteq \Phi$ ammette un elemento massimo K_Φ .*

DIM. Intanto \mathcal{L} non è vuoto, in quanto contiene il sottocampo fondamentale di K . Poi \mathcal{L} è induttivo; supposto, per assurdo, che L ed M siano elementi massimali distinti di \mathcal{L} è $L(M) \in \mathcal{L}$, C. V. D.

2.10 COROLLARIO. *L'insieme dei sottocampi archimedei di K ammette un elemento massimo K_0 .*

DIM. Basta supporre, in 2.9, $\Phi = \{0\}$.

2.11 TEOREMA. *Sia v una valutazione coerente di K . Allora il suo campo residuo K_v è isomorfo ad un sottocampo di K . Un sottocampo H è isomorfo a K_v per una opportuna valutazione coerente v di K se e soltanto se: 1) $\omega(H - \{0\}) = \Phi$ è un sottogruppo isolato di Γ_ω ; 2) $H \supseteq K_0$; 3) H è ω -chiuso in K .*

DIM. Sia v coerente, Φ il nucleo dell'omomorfismo naturale di Γ_ω su Γ_v . Un sottocampo H di K è $\subseteq R_v$ se e solo se $\omega(H - \{0\}) \subseteq \Phi$; per 2.9 esiste allora un massimo sottocampo K_Φ di R_v .

Detto σ l'omomorfismo naturale di R_v su K_v , si ha, $K_\Phi \cong \sigma K_\Phi \subseteq K_v$. D'altra parte la v è una valutazione di K come K_Φ -modulo, e per 1.1 esiste un isomorfismo τ di K_v in R_v come K_Φ -moduli tale che $\sigma \circ \tau = \text{Identità}$ in K_v ; τ risulta un isomorfismo di anelli: infatti se $a \in K_v$ è $\tau a \in P_v$ se e solo se $\sigma \circ \tau a = 0$ cioè se e solo se $a = 0$; d'altra parte per $a, b \in K_v$ è $\tau(ab) = (\tau a)(\tau b) \in P_v$ onde $\tau(ab) = (\tau a)(\tau b)$.

Si ha quindi $\tau K_v \subseteq K_\Phi$, onde $\sigma K_\Phi = K_v$. Inoltre $\omega(K_\Phi - \{0\}) = \Phi$; infatti sia $\delta \in \Phi$ e proviamo che è $\omega(c) = \delta$ per un $c \in K_\Phi$. Si può supporre $\delta < 0$; sia $a \in R_v$ tale che $\omega(a) = \delta$; allora $a' = \tau \sigma a \in K_\Phi$ ed è $a - a' \in P_v \subseteq P_\omega$. Pertanto $\omega(a - a') > \omega(a)$ onde $\omega(a') = \omega(a)$, perchè se fosse $\omega(a') \neq \omega(a)$, sarebbe $\omega(a - a') = \min(\omega(a), \omega(a')) < 0$. Poi $K_\Phi \supseteq H_0$, altrimenti sarebbe

$R_v \supset K_0(K_\Phi) \supset K_\Phi$. È inoltre evidente che K_Φ è ω -chiuso in K , giacchè se esistesse in K una immediata estensione H di K_Φ , sarebbe $\omega(H - \{0\}) = \Phi$.

Sia ora H un sottocampo di K soddisfacente le ipotesi 1), 2) e 3). Sia R_v la minima schiera valutante isolata contenente H ; allora la v ad essa associata è coerente. La restrizione di ω ad H ha il campo residuo isomorfo a K_0 ; se esistesse un sottocampo L di R_v contenente propriamente H , L sarebbe una immediata estensione di H il quale per ipotesi è ω -chiuso. Pertanto H è il massimo sottocampo di R_v , onde H è isomorfo a K_v , C. V. D..

I sottocampi soddisfacenti le condizioni 1), 2) e 3) del 2.11 saranno chiamati *componenti* di K ; nel seguito i sottocampi componenti verranno identificati (quando ciò sia lecito e non dia luogo ad equivoci) con i campi residui della valutazione coerente ad essi rispettivamente associata, mediante identificazione di elementi corrispondenti.

Dal teorema 2.11 seguono i seguenti corollari.

2.12. *Se u e v sono valutazioni coerenti di K ed è $u < v$, allora $K_u \subset K_v$.*

DIM. Se fosse $K_u \not\subset K_v$, $K_u(K_v)$ sarebbe una estensione immediata di K_v . Inoltre, essendo $u < v$, il nucleo ψ dell'omomorfismo naturale di Γ_ω su Γ_u è contenuto propriamente nel nucleo Φ dell'omomorfismo naturale di Γ_ω su Γ_v . Per 2.11 non può quindi essere $K_u = K_v$. Ne segue $K_u \subset K_v$, C. V. D..

2.13. COROLLARIO. *Ogni schiera valutante isolata R_v di K è somma diretta (come gruppo addittivo) del suo ideale massimo P_v e del suo massimo sottocampo K_v .*

DIM. Sia $a \in R_v$; allora (con le notazioni di 2.11), $a - \tau\sigma a \in P_v$, C. V. D..

2.14. COROLLARIO. *Siano u e v valutazioni coerenti di K e sia $u < v$. Allora la u è composta mediante la v e la propria restrizione \bar{u} a K_v .*

DIM. Sia σ l'omomorfismo di R_v di nucleo P_v . Allora per ogni $a \in R_u$ esiste un $a' \in R_u = R_u \cap K_v$, tale che $\sigma a = \sigma a'$; infatti è $a = a' + p$ con $a' \in K_v$ e $p \in P_v$ univocamente determinati. Ma è $p \in R_u$, onde $a' \in R_u \cap K_v$. Pertanto $\sigma R_u = \sigma R_u$, C. V. D..

Sia v una valutazione coerente di K , K_v il massimo sottocampo di R_v , Γ_v il suo gruppo di valori. Per ogni $\delta \in \Gamma_v$, sia $R_v^{(\delta)}$ il K_v -modulo degli elementi $k \in K$ tali che $v(k) \geq \delta$, $P_v^{(\delta)}$ il sotto- K_v -modulo di $R_v^{(\delta)}$ formato dai $k \in K$ per i quali è $v(k) > \delta$. Allora:

2.15. TEOREMA. *Per ogni $\delta \in \Gamma_\omega$, $R_v^{(\delta)}/P_v^{(\delta)}$ è isomorfo (come K_v -modulo) a K_v .*

DIM. Scelto in $R_v^{(\delta)} - P_v^{(\delta)}$ un elemento μ_δ , per ogni $a \in R_v^{(\delta)}$ si ha $\frac{a}{\mu_\delta} \in R_v$, onde per 2.10, $\frac{a}{\mu_\delta} = k + p$, con $k \in K_v$ e $p \in P_v$ univocamente determinati da a . Posto $\varrho a = k$, ϱ è un omomorfismo di $R_v^{(\delta)}$ (come K_v -modulo) su tutto K_v . Inoltre $\varrho a = 0$ se e solo se $a \in P_v^{(\delta)}$, onde $K_v \cong R_v^{(\delta)} / P_v^{(\delta)}$, C. V. D..

Da 2.15, tenendo conto di 1.1, si ha allora (con le stesse notazioni) il seguente:

2.16. COROLLARIO. Sia K un campo ordinato, ω la sua valutazione naturale, K_0 il suo massimo sottocampo archimedeo. Esiste allora un isomorfismo σ di K (come K_0 -modulo) in $W(\Gamma_\omega, K_0)$ ordinato e tale che $\sigma K \supseteq \mathcal{F}(\Gamma_\omega, C)$.

2.17. TEOREMA. Sia K_v un sottocampo componente di K ; allora K è algebricamente chiuso in K_v .

DIM. Sia $a \in K$ ($a \neq 0$) algebrico su K_v ; allora per opportuni $b_0, b_1, \dots, b_{n-1} \in K_v$ si ha

$$a^n = b_{n-1}a^{n-1} + b_{n-2}a^{n-2} + \dots + b_1a + b_0;$$

ciò comporta $v(a) = 0$. Infatti se $v(a) \neq 0$ è $nv(a) = \min_{\substack{i=0 \\ i=n-1}} (i v(a))$.

Allora $a \in R_v$, onde, per 2.13, $a = k + p$, con $k \in K_v$ e $p \in P_v$. Si ha quindi:

$$(k + p)^n = b_{n-1}(k + p)^{n-1} + \dots + b_1(k + p) + b_0$$

e p risulta algebrico su K_v , onde, non potendo essere $v(p) = 0$, è $p = 0$ e $a \in K_v$, C. V. D..

3. Sia K un campo ordinato, \mathcal{H} il gruppo moltiplicativo ordinato formato dagli elementi di $\Pi(K)^{(4)}$; si ha evidentemente:

3.1. LEMMA. Sia v una valutazione coerente di K , \mathcal{E}_v il sottogruppo isolato di \mathcal{H} formato dagli $e \in \Pi(K)$ che sono unità di R_v . Allora la restrizione di v a $\Pi(K)$ è un omomorfismo ordinato di \mathcal{H} su Γ_v^* di nucleo \mathcal{E}_v .

Indichiamo poi con \mathcal{H}_v il gruppo moltiplicativo ordinato di K_v , con \mathcal{J}_v il sottoinsieme di \mathcal{E}_v formato dagli $a \in \mathcal{E}_v$ tali che $a - 1 \in P_v$. Allora:

(4) Nel seguito chiameremo \mathcal{H} brevemente il gruppo moltiplicativo ordinato di K .

3.2. Sia v una valutazione coerente di K , σ l'omomorfismo naturale di R_v su K_v ; allora la restrizione di σ ad \mathcal{E}_v è un omomorfismo ordinato di \mathcal{E}_v su tutto \mathcal{H}_v , di nucleo \mathcal{I}_v .

DIM. La restrizione di σ ad \mathcal{E}_v è certamente un omomorfismo di \mathcal{E}_v come gruppo moltiplicativo; inoltre σ è ordinato, ed è su tutto \mathcal{H}_v . Infine $a \in \mathcal{E}_v$ è tale che $\sigma a = 0_{\mathcal{H}_v} = 1_{K_v}$, se e soltanto se $a - 1 \in P_v$, C. V. D..

Da 3.1 e 3.2, tenendo conto di 1.3 si ha il seguente:

3.3. COROLLARIO. Sia v una valutazione coerente di K . Allora \mathcal{H} è isomorfo alla somma diretta ordinata dei gruppi \mathcal{I}_v , \mathcal{H}_v , Γ_v^* .

DIM. Per 3.1 \mathcal{H} è isomorfo alla somma diretta ordinata dei gruppi ordinati \mathcal{E}_v e Γ_v^* . Per 3.2 \mathcal{E}_v è isomorfo alla somma diretta ordinata di \mathcal{I}_v e \mathcal{H}_v , onde l'asserto.

E supponendo in particolare che v sia la valutazione naturale ω di K si ha che \mathcal{H} risulta la somma diretta ordinata dei gruppi \mathcal{I}_ω , \mathcal{H}_ω , Γ_ω^* .

Allo scopo di analizzare più dettagliatamente la struttura di \mathcal{H} è quindi opportuno esaminare la struttura di \mathcal{I}_ω . A tale scopo dimostriamo il seguente:

3.4. TEOREMA. $\Delta(\mathcal{I}_\omega)$ è isomorfo come insieme ordinato a $\Pi(\Gamma_\omega)$.

DIM Sia ϱ la applicazione di $\mathcal{I}_\omega - \{1\}$ su tutto $\Pi(\Gamma_\omega)$

$$\varrho a = \omega(a - 1) \quad a \in \mathcal{I}_\omega.$$

Si osservi che se $a \in \Pi(\mathcal{I}_\omega)$ ed n è intero positivo si ha

$$a^n - 1 = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (a - 1)^k \leq \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (a - 1).$$

Detta ora φ la valutazione naturale di \mathcal{I}_ω , supponiamo $\varphi(a_1) = \varphi(a_2)$ ($a_1, a_2 \in \mathcal{I}_\omega$); si ha allora, per opportuni interi positivi n_1 ed n_2 , $a_1^{n_1} > a_2$ ($i \neq j$; $i, j = 1, 2$), onde $\sum_{k=1}^{n_1} \binom{n_1}{k} (a_1 - 1)^k > (a_2 - 1)$, da cui $\omega(a_1 - 1) = \omega(a_2 - 1)$, cioè $\varrho(a_1) = \varrho(a_2)$.

Supposto invece $\varphi(a_1) > \varphi(a_2)$, è $a_1^n < a_2$ per ogni intero positivo n , onde $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (a_1 - 1)^k < a_2 - 1$ per ogni n ; pertanto $\omega(a_1 - 1) > \omega(a_2 - 1)$, cioè $\varrho(a_1) > \varrho(a_2)$.

Infine, osservando che $\varrho(a^{-1}) = \varrho(a)$ per ogni $a \in \mathcal{I}_\omega - \{1\}$ si conclude che ϱ è una valutazione di \mathcal{I}_ω come \mathbb{Z} -modulo equivalente alla valutazione naturale φ , C. V. D..

4. Sia Δ un gruppo abeliano ordinato, C un campo ordinato archimedeo. Allora :

4.1. LEMMA. *Esiste un campo ordinato F la cui valutazione naturale ω ha il gruppo di valori Γ_ω e il campo residuo K_ω rispettivamente isomorfi a Δ e C .*

DIM. Sia $S = \mathcal{F}(\Delta; \{C_\delta = C; \delta \in \Delta\})$. Il gruppo ordinato S può essere dotato della struttura di anello ordinato, definendo il prodotto di due elementi $x, y \in S$ con la regola :

$$(xy)(\delta) = \sum_{\alpha+\beta=\delta} x(\alpha)y(\beta) \quad \alpha, \beta, \delta \in \Delta.$$

Allora S risulta un campo di integrità; il campo quoziente F di S , ordinato in modo naturale $\left(\Pi(F) \ni \frac{a}{b} \text{ se } ab \in \Pi(S) \right)$, verifica la proprietà richiesta, C. V. D..

Indicheremo il campo F , costruito nella dimostrazione di 4.1, con $F(\Delta, C)$

4.2. LEMMA *Sia K un campo ordinato, Γ_ω e C rispettivamente il gruppo dei valori ed il campo residuo della sua valutazione naturale. Allora K possiede un sottocampo isomorfo ad $F(\Gamma_\omega, C)$.*

DIM. Da 3.1 si ha $\mathcal{H} = \mathcal{C}_\omega \oplus \Gamma_\omega^*$; detto λ l'isomorfismo proiezione di Γ_ω^* in \mathcal{H} , poniamo $\mu_\delta = \lambda(-\delta)$ per ogni $\delta \in \Gamma_\omega$. Allora $\omega(\mu_\delta) = -\delta$ e $\mu_\delta \mu_\gamma = \mu_{\delta+\gamma}$ ($\delta, \gamma \in \Gamma_\omega$). Sia τ_δ l'isomorfismo di C in $R_\omega^{(\delta)}$ tale che $\tau_\delta c = c \mu_\delta$ per ogni $c \in C$; infine sia τ l'isomorfismo di $S = \mathcal{F}(\Gamma_\omega; \{C_\delta = C; \delta \in \Gamma_\omega\})$ tale che $\tau x = \sum_{\delta \in N_x} \tau_\delta x(\delta)$ per ogni $x \in S$; τ è un isomorfismo ordinato di S in K come C -modulo e come anello. Pertanto si può estendere l'isomorfismo τ al campo quoziente di S , onde l'asserto.

L'isomorfismo τ di $\mathcal{F}(\Gamma_\omega, C)$ in K di cui al 4.2 genera un isomorfismo di K in $W(\Gamma_\omega, C)$ che estende l'isomorfismo di immersione di $\mathcal{F}(\Gamma_\omega, C)$ in $W(\Gamma_\omega, C)$. Chiameremo ρ isomorfismo canonico del campo ordinato K .

4.3. TEOREMA. *Sia G un gruppo ordinato completo rispetto alla propria valutazione naturale. Allora G è isomorfo al gruppo addittivo di un campo ordinato K se e solo se :*

- 1) $\Delta(S)$ è isomorfo (come insieme ordinato) ad un gruppo ordinato.
- 2) per ogni $\delta \in \Delta(S)$, $A_\delta/B_\delta^{(5)}$ è isomorfo (come Z -modulo) al gruppo addittivo di un campo ordinato archimedeo C .

(5) Il significato di A_δ e B_δ è quello attribuito loro in 1.1.

DIM. La necessità delle condizioni 1) e 2) consegue da 2.2 e da 2.15.

Siano allora Γ e C rispettivamente un gruppo ordinato e un campo ordinato archimedeo e sia $G = W(\Gamma, C)$. Sia \mathcal{A} l'insieme dei sottogruppi G' di G per ciascuno dei quali esiste un campo ordinato H di cui G' sia immagine nel proprio isomorfismo canonico; identificando allora, come di consueto, gli elementi di un siffatto campo ordinato con i corrispondenti elementi di G , \mathcal{A} risulta un insieme di campi, ordinato rispetto alla relazione $H < K$ se K è prolungamento ordinato di H ; inoltre \mathcal{A} è un insieme induttivo. A norma del lemma di Zorn esiste quindi in \mathcal{A} un elemento massimale K . Il campo K non possiede immediate estensioni rispetto alla propria valutazione naturale; pertanto K è ω -completo e, per 1.1, $K = G$, C.V.D..

4.4. TEOREMA. *Sia K un campo ordinato, completo rispetto alla propria valutazione naturale ω e siano Γ_ω e C rispettivamente il gruppo dei valori ed il campo residuo di ω . Esiste allora una corrispondenza biunivoca tra l'insieme U delle valutazioni coerenti v di $K^{(6)}$ e l'insieme dei sottogruppi isolati Φ di Γ_ω tale che $R_v = W(\Pi(\Gamma_\omega) \cup \Phi, C)$ ogniqualvolta v e Φ sono corrispondenti. Ed in tal caso il campo residuo K_v di v è isomorfo a $W(\Phi, C)$.*

DIM. Sia $v \in U$ e sia Φ il nucleo dell'omomorfismo di Γ_ω su Γ_v : $\omega(a) \rightarrow v(a)$ per ogni $a \in K - \{0\}$. Allora è $\omega(R_v - \{0\}) = \Pi(\Gamma_\omega) \cup \Phi$; onde, identificando elementi corrispondenti nell'isomorfismo canonico di K su tutto $W(\Gamma_\omega, C)$ si ha $R_v \subseteq S = W(\Pi(\Gamma_\omega) \cup \Phi, C)$. D'altra parte R_v è un sottogruppo isolato di S ed è $\Delta(R_v) = \Delta(S) = \Pi(\Gamma_\omega) \cup \Phi$. Per 1.1 si ha quindi $R_v = S$. Inoltre le unità di S sono tutti e soli gli elementi a di R_v tali che $\omega(a) \in \Phi$, onde $P_v = W(\Pi(\Gamma_\omega) - (\Phi), C)$. Infine per 2.11 è $K_v = W(\Phi, C)$.

Viceversa sia Φ un sottogruppo isolato di Γ_ω . Detto τ l'omomorfismo di Γ_ω di nucleo Φ e posto $v(a) = \tau \omega(a)$, v è una valutazione coerente di ω , tale che $R_v = W(\Pi(\Gamma_\omega) \cup \Phi, C)$, C.V.D..

5. — Le considerazioni svolte nei numeri precedenti consentono di studiare più dettagliatamente la struttura del gruppo moltiplicativo ordinato \mathcal{H} di un campo ordinato K . Per quanto visto nel n. 3 è sufficiente studiare la struttura dell'addendo diretto \mathcal{I}_ω di \mathcal{H} costituito dagli $u \in \Pi(K)$ per cui è $\omega(u - 1) \in P_\omega$. Nel seguito supporremo sempre K completo rispetto alla propria valutazione naturale ω . Sia $u \in \mathcal{I}_\omega$ e sia C il massimo sottocampo archimedeo di K . Posto $y = u - 1$, indichiamo con D l' ω -chiusura di $C(y)$ in K ; D è ω -completo. La restrizione di ω a D è una valutazione discreta

(6) A meno di equivalenza.

di rango 1; pertanto per ogni $\alpha \in \mathcal{O}$ la serie $\sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} y^i$ ha una (ed unica) ω -sommata in D che indichiamo con $u^{(\alpha)}$.

Si ha allora evidentemente:

- 5.1 $u^{(\alpha)} u^{(\beta)} = u^{(\alpha+\beta)} \quad \forall u \in \mathcal{I}_\omega; \forall \alpha, \beta \in \mathcal{O}$
 5.2 $u^{(n)} = u^n \quad \forall u \in \mathcal{I}_\omega; \forall n \in \mathbb{Z}$
 5.3 $(u^{(\alpha)})^{(\beta)} = u^{(\alpha\beta)} \quad \forall u \in \mathcal{I}_\omega; \forall \alpha, \beta \in \mathcal{O}$
 5.4 $u_1^{(\alpha)} u_2^{(\alpha)} = (u_1 u_2)^{(\alpha)} \quad \forall u_1, u_2 \in \mathcal{I}_\omega; \forall \alpha \in \mathcal{O}$

Si ha poi:

5.5 LEMMA. *Sia K un campo ordinato completo. Allora \mathcal{I}_ω è completo rispetto alla propria valutazione naturale φ .*

DIM. Sia $\{a_\tau; \tau \in T\}$ una successione φ -Cauchy di \mathcal{I}_ω . Allora $\varrho < \sigma < \tau$ ($\varrho, \sigma, \tau \in T$) implica

$$\varphi\left(\frac{a_\sigma}{a_\varrho}\right) < \varphi\left(\frac{a_\tau}{a_\varrho}\right) \text{ cioè } \omega\left(\frac{a_\varrho - a_\sigma}{a_\varrho}\right) < \omega\left(\frac{a_\varrho - a_\tau}{a_\varrho}\right),$$

onde, essendo $\omega(a_\lambda) = 0$ per ogni $\lambda \in T$, la successione $\{a_\tau; \tau \in T\}$ è ω -Cauchy. Sia a un suo ω -limite; allora per $\varrho < \sigma \in T$ è $\omega(a - a_\varrho) = \omega(a_\sigma - a_\varrho)$, cioè $\omega\left(1 - \frac{a}{a_\varrho}\right) = \omega\left(1 - \frac{a_\sigma}{a_\varrho}\right)$, ne segue $\omega\left(1 - \frac{a}{a_\varrho}\right) > 0$, da cui $\frac{a}{a_\varrho} \in \mathcal{I}_\omega$ e quindi $a \in \mathcal{I}_\omega$. Inoltre $\varphi\left(\frac{a}{a_\varrho}\right) = \varphi\left(\frac{a_\sigma}{a_\varrho}\right)$ per $\varrho < \sigma \in T$ ed a risulta pertanto φ -limite di $\{a_\varrho; \varrho \in T\}$, C.V.D.

5.6 LEMMA. *Sia K un campo ordinato completo contenente un sottocampo isomorfo al campo reale R . Allora \mathcal{I}_ω è isomorfo a $W(\Pi(\Gamma_\omega), R)$.*

DIM. Le applicazioni $(u_1, u_2) \rightarrow u_1 u_2$ e $(\alpha, u) \rightarrow u^{(\alpha)}$ di $\mathcal{I}_\omega \times \mathcal{I}_\omega$ e di $R \times \mathcal{I}_\omega$ in \mathcal{I}_ω , danno ad \mathcal{I}_ω per 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4, la struttura di R -modulo.

Sia $\delta \in \Pi(\Gamma_\omega)$.

Indicando con A_δ e B_δ i sottogruppi (isolati) di \mathcal{I}_ω formati dagli $a \in \mathcal{I}_\omega$ per cui è rispettivamente $\varphi(a) \geq \delta$ e $\varphi(a) > \delta$, A_δ e B_δ sono anche sotto- R -moduli di \mathcal{I}_ω , onde $C_\delta = A_\delta/B_\delta$ è un gruppo ordinato archimedeo ed un R -modulo. Pertanto è $C_\delta \cong R$ e, per 1.1, $\mathcal{I}_\omega \cong W(\Pi(\Gamma_\omega), R)$, C.V.D..

5.7 TEOREMA. *Sia K un campo ordinato completo, C il suo massimo sottocampo archimedeo.*

Allora $\mathcal{J}_\omega = W(\Pi(\Gamma_\omega), C)$.

Dim. Per 4.3, $W(\Gamma_\omega, R)$ possiede la struttura di campo ordinato completo, prolungamento ordinato di K ; pertanto l'immersione di K in $W(\Gamma_\omega, R)$ induce un isomorfismo σ di \mathcal{J}_ω in $W(\Pi(\Gamma_\omega), R)$. Per ogni $\delta \in \Pi(\Gamma_\omega)$ sia $u_\delta \in \mathcal{J}_\omega$ tale che $(\sigma u_\delta)(\delta) = \delta$, $(\sigma u_\delta)(\gamma) = 0$ per ogni $\gamma \in \Pi(\Gamma_\omega) - \{\delta\}$.

Indicando ancora con A_δ e B_δ i sotto $-C-$ moduli di \mathcal{J}_ω , costituiti dagli $a \in \mathcal{J}_\omega$ per cui è rispettivamente $\varphi(a) \geq \delta$ e $\varphi(a) = \delta$, poniamo $C_\delta = A_\delta/B_\delta$. Allora è $C \subseteq C_\delta \subseteq R$ e $\sigma \mathcal{J}_\omega = W(\Pi(\Gamma_\omega); \{C_\delta; \delta \in \Pi(\Gamma_\omega)\})$. Sia $u_{\delta, \alpha}$ ($\delta \in \Pi(\Gamma_\omega)$, $\alpha \in C_\delta$) l'elemento di \mathcal{J}_ω tale che $(\sigma u_{\delta, \alpha})(\delta) = \alpha$ e $(\sigma u_{\delta, \alpha})(\gamma) = 0$ per ogni $\gamma \neq \delta$; è $u_{\delta, \alpha} = u_\delta^{(\alpha)}$.

Si ha allora $\frac{u_\delta^{(\alpha)} - 1}{u_\delta - 1} = \sum_{i=1}^{\infty} \binom{\alpha}{i} y^{i-1} = \alpha + \sum_{i=2}^{\infty} \binom{\alpha}{i} y^{i-1}$; pertanto è, per 2.11, $\alpha \in K \cap R = C$, onde $C_\delta = C$ per ogni $\delta \in \Pi(\Gamma_\omega)$ da cui l'asserto.

BIBLIOGRAFIA

1. N. BOURBAKI, « *Algèbre* », cap. I-VI, Paris, Hermann.
2. A. H. CLIFFORD, « *Note on Hahn's theorem on ordered abelian groups* », Proc. Am. Math. Soc. 5 (1954) 860-3.
3. K. A. H. GRAVETT, « *Note on a result of Krull* », Proc. Cambridge Phil. Soc.
4. K. A. H. GRAVETT, « *Valued linear spaces* », Quart J. of Math (Oxford) (2) 6 (1955), 309-14.
5. K. A. H. GRAVETT, « *Ordered abelian groups* », Quart. J. of Math (Oxford) (2) 8 (1957) 57-63.
6. H. HAHN, « *Über die Nichtarchimedischen Grossensysteme* », Sitz. der K. Akad. der Wiss., Math. Nat. Kl. 116 (1907) 601-55.
7. M. HAUSNER and J. G. WENDEL, « *Ordered vector spaces* », Proc. Am. Math. Soc. 3 (1952) 977-82.
8. W. KRULL, « *Allgemeine Bewertungstheorie* », J. für Math. 167 (1932) 160-96.
9. T. LEVI-CIVITA, « *Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici* », Atti Ist. Veneto di Sc. lett. ed arti S. VII, T. IV (1892-93) 1765-815.
10. O. F. G. SHILLING, « *The theory of valuations* » Am. Math. Soc., New York, 1950.
11. VAN der WAERDEN, « *Modern algebra* », New York, Ungar, 1950.