ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

S. CAMPANATO

Caratterizzazione delle tracce di funzioni appartenenti ad una classe di Morrey insieme con le loro derivate prime

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 15, nº 3 (1961), p. 263-281

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1961_3_15_3_263_0>

CARATTERIZZAZIONE DELLE TRACCE DI FUNZIONI APPARTENENTI AD UNA CLASSE DI MORREY INSIEME CON LE LORO DERIVATE PRIME

di S. CAMPANATO (Genova)

Sia Ω un insieme limitato e misurabile dello spazio euclideo R^n avente per frontiera $\partial\Omega$ e diametro ϱ_0. Indichiamo con $x \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y \equiv (y_1\, y_2 \dots y_n)$ ecc. punti generici di R^n e con $I(x, \varrho)$ l'ipersfera di centro x e raggio ϱ.

Fissati due numeri reali p e λ tali che

$$p \geq 1, \qquad 0 \leq \lambda \leq n$$

indichiamo con $L^{(p,\lambda)}(\Omega)$ lo spazio delle funzioni $u(x)$ definite in Ω per le quali

$$\sup_{y\in\Omega,\varrho\in[0,\varrho_0]} \left[\frac{1}{\varrho^\lambda} \int_{I(y,\varrho)\cap\Omega} |u(x)|^p\, dx\right] < +\infty .$$

Questi spazi di funzioni sono stati introdotti da C. B. Morrey (cfr. [13] ed anche [12]) ed utilizzati in molte questioni di calcolo delle variazioni e della teoria delle equazioni ellittiche. In $L^{(p,\lambda)}(\Omega)$ si assume come norma la quantità

$$\text{(I)} \qquad \| u \|_{L^{(p,\lambda)}(\Omega)} = \left[\sup_{y\in\Omega,\varrho\in[0,\varrho_0]} \frac{1}{\varrho^\lambda} \int_{I(y,\varrho)\cap\Omega} |u(x)|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Così normalizzato $L^{(p,\lambda)}(\Omega)$ risulta uno spazio (di Banach) completo [1].

---

[1] La completezza dello spazio $L^{(p,\lambda)}(\Omega)$ si può dimostrare nel seguente modo: sia $\{u_n\}$ una successione di funzioni di $L^{(p,\lambda)}(\Omega)$ la quale è di Cauchy rispetto alla norma (I). Dall'inclusione $L^{(p,\lambda)}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ (cfr. iii) del testo) segue che $\{u_n\}$ è una successione di

Si dimostrano facilmente le seguenti relazioni di isomorfismo e di inclusione [2]:

i) $L^{(p,0)}(\Omega) \simeq L^p(\Omega)$, spazio delle funzioni di potenza p-esima sommabile in Ω nel quale si assuma come norma la quantità $\left[\int_\Omega |u|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}}$.

ii) Per ogni $p \geq 1$, $L^{(p,n)}(\Omega) \simeq L^\infty(\Omega)$, spazio delle funzioni limitate in Ω nel quale si assuma come norma la quantità $\sup_{x\in\Omega} |u(x)|$.

iii) Detti p, q, λ, λ_1, quattro numeri reali tali che $p, q \geq 1$, $0 \leq \lambda, \lambda_1 \leq n$ se

$$q \leq p \quad \text{e} \quad q(n-\lambda) \leq p(n-\lambda_1) \quad \text{allora} \quad L^{(p,\lambda)}(\Omega) \subset L^{(q,\lambda_1)}(\Omega)\ [3].$$

Dalla iii) segue in particolare che

$$L^{(p,\lambda)}(\Omega) \subset L^p(\Omega); \quad L^{(p,\lambda)}(\Omega) \subset L^{(q,\lambda)}(\Omega) \ \text{se} \ p \geq q, \quad L^{(p,\lambda_1)}(\Omega) \subset L^{(p,\lambda_2)}(\Omega) \ \text{se} \ \lambda_1 \geq \lambda_2.$$

Indichiamo con $H_1^p(\Omega)$, $p \geq 1$, lo spazio delle funzioni u definite in Ω tali che

$$u \in L^p(\Omega)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Cauchy anche in $L^p(\Omega)$, quindi, per la completezza dello spazio $L^p(\Omega)$, esiste una funzione $u \in L^p(\Omega)$ tale che $u_n \to u$ in $L^p(\Omega)$. Fissato ϱ, $0 < \varrho \leq \varrho_0$, è quindi possibile determinare un n tale che $\int_{I(y,\varrho)\cap\Omega} |u - u_n|^p\,dx < \varrho^\lambda$ qualunque sia $y \in \Omega$.

Scelto n in questo modo, dalla relazione

$$\frac{1}{\varrho^\lambda}\int_{I(y,\varrho)\cap\Omega} |u|^p\,dx \leq \frac{1}{\varrho^\lambda}\int_{I(y,\varrho)\cap\Omega} |u-u_n|^p\,dx + \frac{1}{\varrho^\lambda}\int_{I(y,\varrho)\cap\Omega} |u_n|^p\,dx \leq 1 + \|u_n\|^p_{L^{(p,\lambda)}(\Omega)}$$

tenuto conto che la successione $\{\|u_n\|_{L^{(p,\lambda)}(\Omega)}\}$ è limitata, segue che $u \in L^{(p,\lambda)}(\Omega)$.

(2) Se A e B sono due spazi di Banach, scrivendo $A \simeq B$ intenderemo che esiste un isomorfismo algebrico e topologico di A su B.

(3) Sia $u \in L^{(p,\lambda)}(\Omega)$. Indichiamo con ω la misura dell'ipersfera di raggio ϱ. Nell'ipotesi che $q \leq p$ e $p(n-\lambda_1) \geq q(n-\lambda)$, applicando la disuguaglianza di Schwarz-Hölder si ottiene

$$\left[\sup_{\substack{\varrho\in[0,\varrho_0]\\ y\in\Omega}} \frac{1}{\varrho^{\lambda_1}}\int_{I(y,\varrho)\cap\Omega} |u(x)|^q\,dx\right]^{\frac{1}{q}} \leq \omega^{\frac{p-q}{pq}}\,\varrho_0^{(\lambda-n)-(\lambda_1-n)\frac{p}{q}} \left[\sup_{\substack{\varrho\in[0,\varrho_0]\\ y\in\Omega}} \frac{1}{\varrho^{\lambda}}\int_{I(y,\varrho)\cap\Omega} |u|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

le derivate essendo intese nel senso delle distribuzioni. In $H_1^p(\Omega)$ si assume la norma

$$\text{(II)} \qquad \| u \|_{H_1^p(\Omega)} = \left\{ \| u \|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_1^n {}_i \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^p_{L^p(\Omega)} \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

È noto (cfr. ad es. [7]) che se $\partial\Omega$ è localmente lipschitziana (⁴) $H_1^p(\Omega)$ si può definire anche come il completamento rispetto alla norma (II) della classe delle funzioni continue in $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ insieme con le derivate parziali prime (classe $C_1(\bar{\Omega})$. È altresì noto (cfr. [6], [17], [18]) che per funzioni della classe $H_1^p(\Omega)$, nell'ipotesi che $\partial\Omega$ sia localmente lipschitziana, si può definire la traccia su $\partial\Omega$ e questa risulta una funzione di $L^p(\partial\Omega)$. Questa traccia può essere intesa in vari modi; per quanto ci interesserà nel seguito basta ricordare che la traccia si può intendere come limite (quasi ovunque) della funzione u lungo un sistema di assi uscenti dai punti di $\partial\Omega$ e penetranti in Ω. Intesa la traccia in questo senso la corrispondenza che così si ottiene tra le funzioni di $H_1^p(\Omega)$ e le loro tracce su $\partial\Omega$ definisce un'applicazione lineare e continua di $H_1^p(\Omega)$ in $L^p(\partial\Omega)$ la quale coincide con la traccia intesa in senso ordinario se $u \in C_1(\bar{\Omega})$.

Il problema di caratterizzare la sottoclasse di $L^p(\partial\Omega)$ delle funzioni che sono traccia di funzioni di $H_1^p(\Omega)$ è stato studiato da vari Autori (cfr. [1], [3], [4] [6] [15]).

Consideriamo ora lo spazio $H_1^{(p,\lambda)}(\Omega)$ delle funzioni $u(x)$ definite in Ω tali che

$$u \in L^{(p,\lambda)}(\Omega)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^{(p,\lambda)}(\Omega) \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

con $p \geq 1$, $0 \leq \lambda \leq n$. In $H_1^{(p,\lambda)}(\Omega)$ assumiamo come norma la quantità

$$\text{(III)} \qquad \| u \|_{H_1^{(p,\lambda)}(\Omega)} = \left\{ \| u \|^p_{L^{(p,\lambda)}(\Omega)} + \sum_1^n {}_i \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^p_{L^{(p,\lambda)}(\Omega)} \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

(⁴) Ciò significa che $\partial\Omega$ nell'intorno di ogni suo punto punto x ammette, rispetto ad un opportuno sistema di assi $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ con l'origine in x, una rappresentazione del tipo

$$\xi_n = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})$$

con f funzione definita in un intorno del punto $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{n-1} = 0$ e ivi lipschitziana, i punti per cui $\xi_n < 0$ essendo interni ad Ω e quelli per cui $\xi_n > 0$ esterni.

Con questa norma $H_1^{(p,\lambda)}(\Omega)$ risulta uno spazio (di Banach) completo ([5]). Evidentemente $H_1^{(p,\lambda)}(\Omega)$ è un sottospazio chiuso di $H_1^p(\Omega)$ (coincidente con $H_1^p(\Omega)$ se $\lambda = 0$). Quindi, nell'ipotesi che $\partial\Omega$ sia localmente lipschitziana, anche per le funzioni di $H_1^{(p,\lambda)}(\Omega)$ si può definire la traccia su $\partial\Omega$ nel senso visto precedentemente.

In questo lavoro mi propongo di caratterizzare la sottoclasse di $L^p(\partial\Omega)$ delle funzioni che sono traccia di funzioni di $H_1^{(p,\lambda)}(\Omega)$. Il risultato cui pervengo (v. n. 2), nel caso che $\lambda = 0$, coincide con la caratterizzazione data da E. Gagliardo per le tracce delle funzioni di $H_1^p(\Omega)$ (cfr. [6]).

1. — Dimostriamo in questo numero due teoremi preliminari.

Sia Γ l'ipercubo $(n-1)$-dimensionale $\{x: 0 \leq x_i \leq 1 \ (i=1,2,\dots, n-1), x_n=0\}$ e $T_i \ (i = 1, 2, \dots, n-1)$ l'insieme $\{x: 0 \leq x_j \leq 1 \ (j \neq i), 0 \leq x_i \leq 1 - x_n\}$.

DEF. *Indichiamo con* $W^{(p,\lambda)}(\Gamma)$, $p \geq 1$ e $0 \leq \lambda < n$, *lo spazio delle funzioni* $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ *definite su* Γ *tali che*

i) $\varphi \in L^{(p,\bar\lambda)}(\Omega)$ con $\bar\lambda = \max[\lambda - 1, 0]$

ii) $$\frac{\varphi(x_1,\dots,x_i+x_n,\dots,x_{n-1})-\varphi(x_1,\dots,x_{n-1})}{x_n} \in L^{(p,\lambda)}(T_i) \quad (i=1,2,\dots,n-1).$$

In $W^{(p,\lambda)}(\Gamma)$ introduciamo la seguente norma:

$$\|\varphi\|_{W^{(p,\lambda)}(\Gamma)} = \left[\|\varphi\|^p_{L^{(p,\bar\lambda)}(\Gamma)} + \sum_1^{n-1}{}_i \left\|\frac{\varphi(x_1,\dots,x_i+x_n,\dots,x_{n-1})-\varphi(x_1,\dots,x_{n-1})}{x_n}\right\|^p_{L^{(p,\lambda)}(T_i)}\right]^{\frac{1}{p}} \tag{1.1}$$

Sia Q l'ipercubo di R^n $\{x: 0 \leq x_i \leq 1, \ (i = 1, 2, \dots, n)\}$.

Per indicare un generico punto x di Q useremo nel seguito, secondo l'opportunità, anche le notazioni $(\bar x, x_n)$ e $(\overline{x^{in}}; x_i, x_n)$ dove $\bar x$ indica il punto di Γ di coordinate $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)$ e x^{in} indica il complesso delle variabili $x_1, x_2, \dots x_{i-1}, x_{i+1}, \dots x_{n-1}$. Con dx e $d\bar x$ indicheremo i differenziali $dx_1\, dx_2 \dots dx_n$ e $dx_1\, dx_2 \dots dx_{n-1}$.

Dimostriamo il teorema:

TEOREMA [I.1]. — *Se* $u \in H_1^{(p,\lambda)}(Q)$, *con* $p > 1$ *e* $0 \leq \lambda < n$, *la traccia*

([5]) Segue, con noti ragionamenti, dal fatto che $L^{(p,\lambda)}(\Omega)$ è completo e che la derivazione è un'operazione lineare e continua in $\mathcal{D}'(\Omega)$ (spazio delle distribuzioni su Ω); cfr. ad es. [10].

φ della funzione u su Γ appartiene a $W^{(p,\lambda)}(\Gamma)$ e si ha la maggiorazione (6)

$$\| \varphi \|_{W^{(p,\lambda)}(\Gamma)} \leq c_1 \| u \|_{H_1^{(p,\lambda)}(Q)} .$$

Sia $\bar{y}$ un punto di Γ (7), ϱ un valore fissato dell'intervallo $[0, \sqrt{n-1}]$ (8) e $J(\bar{y}, \varrho)$ l'intersezione di $I(\bar{y}, \varrho)$ con l'iperpiano $x_n = 0$. Per un generico $x \equiv (\bar{x}, x_n) \in Q$ tale che $\bar{x} \in J(\bar{y}, \varrho) \cap \Gamma$ si ha (9)

$$| \varphi (\bar{x}) |^p < | u (x) |^p + p \int_0^{x_n} \left\{ | u (\bar{x}, t) |^p + \left| \frac{\partial u (\bar{x}, t)}{\partial t} \right|^p \right\} dt.$$

Da cui, integrando rispetto a $\bar{x}$ su $J(\bar{y}, \varrho) \cap \Gamma$ e successivamente rispetto a x_n tra 0 e $\dfrac{\varrho}{\sqrt{n-1}}$

$$\varrho \int_{J(\bar{y},\varrho)\cap\Gamma} | \varphi (\bar{x}) |^p \, d\bar{x} < 2p \sqrt{n-1} \int_0^{\frac{\varrho}{\sqrt{n-1}}} dx_n \int_{J(\bar{y},\varrho)\cap\Gamma} \left\{ | u (x) |^p + \left| \frac{\partial u (x)}{\partial x_n} \right|^p \right\} d\bar{x}$$

di qui (10) se $1 < \lambda < n$:

$$\| \varphi \|_{L^{(p,\lambda-1)}(\Gamma)} < 2 \sqrt{n-1}\, p \sup_{\substack{\varrho \in [0,\sqrt{n-1}] \\ \bar{y} \in \Gamma}} \left\{ \frac{1}{\varrho^\lambda} \int_0^{\frac{\varrho}{\sqrt{n-1}}} dx_n \int_{J(\bar{y},\varrho)\cap\Gamma} \left\{ | u (x) |^p + \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_n} \right|^p \right\} d\bar{x} \right\} <$$

(6) Nel corso del lavoro con $c_1, c_2, \ldots$ indicheremo costanti positive indipendenti dalle funzioni u e dalle tracce.

(7) Nel fissare un punto, o alcune variabili, intenderemo sempre di porci fuori di un insieme di misura nulla.

(8) $\sqrt{n-1}$ è il diametro di Γ.

(9) Si tenga conto della relazione: $\dfrac{\partial \, | u (\bar{x}, t) |^p}{\partial t} \leq p \, | u (\bar{x}, t) |^{p-1} \left| \dfrac{\partial u (\bar{x}, t)}{\partial t} \right| < p \, | u(\bar{x},t) |^p + p \left| \dfrac{\partial u (\bar{x}, t)}{\partial t} \right|^p$. L'ultima maggiorazione segue dalla disuguaglianza: $x^\alpha y^\beta < x \alpha + y \beta$ $(x, y \geq 0, \ \alpha + \beta = 1)$.

(10) Il « cilindro » $\left\{ x : \bar{x} \in J(\bar{y}, \varrho) \cap \Gamma, \ 0 \leq x_n \leq \dfrac{\varrho}{\sqrt{n-1}} \right\}$ è contenuto nella sfera $I\left(\bar{y}, \varrho \sqrt{\dfrac{n}{n-1}}\right)$.

$$< 2p\sqrt{n-1}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{\lambda}{2}} \sup_{\substack{\varrho\in[0,\sqrt{n}]\\ y\in\Gamma}} \left\{\frac{1}{\varrho^\lambda}\int\limits_{I(y,\varrho)\cap Q}\left\{|u(x)|^p+\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_n}\right|^p\right\}dx\right\}.$$

In definitiva, se $1 < \lambda < n$, si ha:

$$\|\varphi\|^p_{L^{(p,\lambda-1)}(\Gamma)} < 2p\sqrt{n-1}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{\lambda}{2}}\|u\|^p_{H_1^{(p,\lambda)}(Q)}. \tag{2.1}$$

Se invece $0 \le \lambda \le 1$, con ragionamento analogo, si ottiene

$$\|\varphi\|^p_{L^p(\Gamma)} < 2p\sqrt{n-1}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{\lambda}{2}}\|u\|^p_{H^{(p,\lambda)}(Q)}. \tag{3.1}$$

Maggioriamo ora le quantità $\left\|\dfrac{\varphi(x_1,\dots,x_i+x_n,\dots,x_{n-1})-\varphi(\bar{x})}{x_n}\right\|_{L^{(p,\lambda)}(T_i)}$ $(i = 1, 2, \dots, n-1)$ con la norma $\|u\|_{H_1^{(p,\lambda)}(Q)}$.

Osserviamo che per definire la norma $\left\|\dfrac{\varphi(x_1,\dots,x_i+x_n,\dots,x_{n-1}-\varphi(\bar{x})}{x_n}\right\|_{L^{(p,\lambda)}(T_i)}$ possiamo servirci, anzichè di sfere aventi il centro in un generico punto di T_i e raggio $\varrho \in [0, \sqrt{n}]$, di insiemi, che indicheremo con $S(y, \varrho)$, definiti dalle disuguaglianze

$$\begin{aligned} &y_j \le x_j \le y_j + \varrho \qquad (j \neq i)\\ &y_i \le x_i \le y_i + y_n + \varrho - x_n \end{aligned} \tag{4.1}$$

dove y è un generico punto di T_i e ϱ varia nell'intervallo $[0, 1]$ ([11]). È anche evidente che per ogni fissato y è sufficiente considerare i valori di ϱ per i puali $S(y, \varrho) \subset T_i$.

Sia dunque $y \in T_i$ e $\varrho \in [0, 1]$ tale che $S(y, \varrho) \subset T_i$. Si ha

$$\int\limits_{S(y,\varrho)}\left|\frac{\varphi(x_1,\dots,x_i+x_n,\dots,x_{n-1})-\varphi(\bar{x})}{x_n}\right|^p dx = \tag{5.1}$$

$$= \int_{y_1}^{y_1+\varrho} dx_1 \dots \int_{y_{i-1}}^{y_{i-1}+\varrho} dx_{i-1} \int_{y_{i+1}}^{y_{i+1}+\varrho} dx_{i+1} \dots \int_{y_n}^{y_n+\varrho} dx_n \int_{y_i}^{y_i+y_n+\varrho-x_n} \left|\frac{\varphi(x_1,\dots,x_i+x_n,\dots,x_{n-1})-\varphi(\bar{x})}{x_n}\right|^p dx_i .$$

([11]) Basta osservare che $S(y, \varrho)$ è contenuto in $I(y, \varrho\sqrt{n-1})$ e che per ogni ipersfera $I(y, \varrho)$ l'insieme $I(y, \varrho) \cap T_i$ è contenuto in un insieme $S(z, \bar{\varrho})$ con $z \in T_i$ e $\varrho\sqrt{3} \le \bar{\varrho} \le \varrho(1+\sqrt{3})$.

In virtù delle relazioni $(\eta > x_i)$:

$$\varphi(\bar{x}) = u\left(x^{in};\ \frac{x_i+\eta}{2},\ \frac{\eta-x_i}{2}\right) - \int_{x_i}^{\frac{x_i+\eta}{2}} \frac{\partial u(x^{in};\ t,\ t-x_i)}{\partial t}\, dt$$

$$\varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, \eta, \dots, x_{n-1}) = u\left(x^{in};\ \frac{x_i+\eta}{2},\ \frac{\eta-x_i}{2}\right) - \int_{\eta}^{\frac{x_i+\eta}{2}} \frac{\partial u(x^{in};\ t,\ \eta-t)}{\partial t}\, dt$$

l'integrale doppio

$$\int_{y_n}^{y_n+\varrho} dx_n \int_{y_i}^{y_i+y_n+\varrho-x_n} \left| \frac{\varphi(x_1, \dots, x_i+x_n, \dots, x_{n-1}) - \varphi(\bar{x})}{x_n} \right|^p dx_i =$$

$$= \int_{y_i}^{y_i+\varrho} dx_i \int_{y_n+x_i}^{y_i+y_n+\varrho} \left| \frac{\varphi(x_1, \dots, \eta, \dots, x_{n-1}) - \varphi(\bar{x})}{\eta - x_i} \right|^p d\eta$$

si maggiora con la quantità

$$\begin{aligned}(6.1)\qquad & 2^p \int_{y_i}^{y_i+\varrho} dx_i \int_{y_n+x_i}^{y_i+y_n+\varrho} d\eta \left| \frac{1}{\eta-x_i} \int_{x_i}^{\frac{x_i+\eta}{2}} \frac{\partial u(x^{in};\ t,\ t-x_i)}{\partial t}\, dt \right|^p + \\ & + 2^p \int_{y_i}^{y_i+\varrho} dx_i \int_{y_n+x_i}^{y_i+y_n+\varrho} d\eta \left| \frac{1}{\eta-x_i} \int_{\eta}^{\frac{\eta+x_i}{2}} \frac{\partial u(x^{in};\ t,\ \eta-t)}{\partial t}\, dt \right|^p = 2^p \{(I) + (II)\}.\end{aligned}$$

Per quanto riguarda l'integrale (I), applicando il cambiamento di variabili $\{x_j \to x_j\ (j \neq n),\ \eta \to 2\xi - x_i\}$ si ottiene

$$(I) < \frac{1}{2} \int_{y_i}^{y_i+\varrho} dx_i \int_{\frac{y_n}{2}+x_i}^{\frac{y_i+y_n+\varrho+x_i}{2}} d\xi \left| \frac{1}{\xi - x_i} \int_{x_i}^{x_i+\frac{y_n}{2}} \frac{\partial u(x^{in};\ t,\ t-x_i)}{\partial t}\, dt \right|^p +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{y_i}^{y_i+\varrho} dx_i \int\limits_{\frac{y_n}{2}+x_i}^{\frac{y_i+y_n+\varrho+x_i}{2}} d\xi \left|\frac{1}{\xi-x_i}\int\limits_{x_i+\frac{y_n}{2}}^{\xi} \frac{\partial u(x^{in};\, t,\, t-x_i)}{\partial t}\, dt\right|^p.$$

Il primo degli degli integrali a secondo membro, applicando la disuguaglianza di Schwarz-Hölder, si maggiora con l'integrale

$$\frac{y_n^{p-1}}{2^{p-1}}\int\limits_{y_i}^{y_i+\varrho} dx_i \int\limits_{x_i+\frac{y_n}{2}}^{\frac{y_i+y_n+\varrho+x_i}{2}} \frac{d\xi}{(\xi-x_i)^p}\int\limits_{x_i}^{x_i+\frac{y_n}{2}} \left|\frac{\partial u(x^{in};\, t,\, t-x_i)}{\partial t}\right|^p dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^{p-1}}\left(1-\frac{y_n^{p-1}}{(y_n+\varrho)^{p-1}}\right)\int\limits_{y_i}^{y_i+\varrho} dx_i \int\limits_{x_i}^{x_i+\frac{y_n}{2}} \left|\frac{\partial u(x^{in};\, t,\, t-x_i)}{\partial t}\right|^p dt \leq$$

$$(^{12}) \leq 2\left(1-\frac{y_n^{p-1}}{(y_n+\varrho)^{p-1}}\right)\int\limits_0^{\frac{y_n}{2}} dx_n \int\limits_{y_i+x_n}^{y_i+\varrho+x_n} \left(\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^p + \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_n}\right|^p\right) dx_i$$

mentre il secondo integrale, applicando una disuguaglianza di Hardy [13], si maggiora con l'integrale

$$\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int\limits_{y_i}^{y_i+\varrho} dx_i \int\limits_{x_i+\frac{y_n}{2}}^{\frac{y_i+y_n+\varrho+x_i}{2}} \left|\frac{\partial u(x^{in};\, \xi,\, \xi-x_i)}{\partial \xi}\right|^p d\xi \leq (^{14})$$

$$\leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p 2^p \int\limits_{\frac{y_n}{2}}^{\frac{y_n+\varrho}{2}} dx_n \int\limits_{y_i+x_n}^{y_n+y_i+\varrho-x_n} \left(\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^p + \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_n}\right|^p\right) dx_i .$$

---

(12) Con un evidente cambiamento di variabili.

(13) $\int\limits_a^b dx \left|\frac{1}{x-a}\int\limits_a^x f(t)\, dt\right|^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int\limits_a^b |f(x)|^p\, dx \quad (p>1)$; cfr. ad es. [6].

(14) Con un evidente cambiamento di variabili.

Quindi in definitiva

$$
\begin{aligned}
(I) \leq & \left(\frac{p}{p-1}\right)^p 2^{p-1} \int_{\frac{y_n}{2}}^{\frac{y_n+\varrho}{2}} dx_n \int_{y_i+x_n}^{y_n+y_i+\varrho-x_n} \left(\left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right|^p + \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_n} \right|^p \right) dx_i + \\
(7.1) \qquad & + \left(1 - \frac{y_n^{p-1}}{(y_n+\varrho)^{p-1}}\right) \int_0^{\frac{y_n}{2}} dx_n \int_{y_i+x_n}^{y_i+\varrho+x_n} \left(\left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right|^p + \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x^n} \right|^p \right) dx_i
\end{aligned}
$$

Con precedimento analogo si maggiora l'integrale (II) che compare nella (6.1) e si ottiene

$$
\begin{aligned}
(II) \leq & \left(\frac{p}{p-1}\right)^p 2^{p-1} \int_{\frac{y_n}{2}}^{\frac{y_n+\varrho}{2}} dx_n \int_{y_i+x_n}^{y_i+y_n+\varrho-x_n} \left(\left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right|^p + \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_n} \right|^p \right) dx_i + \\
(8.1) \qquad & + \left(1 - \frac{y_n^{p-1}}{(y_n+\varrho)^{p-1}}\right) \int_0^{\frac{y_n}{2}} dx_n \int_{y_i+y_n-x_n}^{y_i+y_n+\varrho-x_n} \left(\left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right|^p + \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_n} \right|^p \right) dx_i .
\end{aligned}
$$

Osserviamo a questo punto che l'insieme $\{x : y_j \leq x_j \leq y_j + \varrho \ (j \neq i, n), y_i + x_n \leq x_i \leq y_i + y_n + \varrho - x_n, \ \frac{y_n}{2} \leq x_n \leq \frac{y_n + \varrho}{2}\}$ è contenuto in una sfera $I\left(z, \varrho \frac{\sqrt{n-1}}{2}\right)$ avente il centro $z \in Q$, mentre gli insiemi $\{x : y_j \leq x_j \leq y_j + \varrho \ (j \neq i, n), y_i + x_n \leq x_i \leq y_i + \varrho + x_n, \ 0 \leq x_n \leq \frac{y_n}{2}\}$ e $\left\{x : y_j \leq x_j \leq y_j + \varrho \ (j \neq i, n), y_i + y_n - x_n \leq x_i \leq y_i + y_n + \varrho - x_n, \ 0 \leq x_n \leq \frac{y_n}{2}\right\}$ si possono ricoprire ciascuno con un numero N di sfere, $\frac{y_n}{2\varrho} \leq N < \frac{y_n}{2\varrho} + 1$, sfere che indicheremo con $\left\{I\left(z^{(i)}, \varrho \frac{\sqrt{n}}{2}\right)\right\}$ $(i = 1, \dots, N)$ e $\left\{I\left(z^{(i)}, \varrho \frac{\sqrt{n}}{2}\right)\right\}$ $(i = N+1, \dots, 2N)$ rispettivamente, aventi il centro in punti $z^{(i)}$ di Q e raggio $\varrho \frac{\sqrt{n}}{2}$.

Tenuto conto delle (6.1) (7.1) (8.1) e dell'osservazione ora fatta, si ha per l'integrale (5.1) la seguente maggiorazione:

$$\int_{S(y,\varrho)} \left| \frac{\varphi(x_1, \dots, x_i + x_n, \dots, x_{n-1}) - \varphi(\bar{x})}{x_n} \right|^p dx \leq$$

$$\leq 2^p \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_{I\left(z, \frac{\varrho\sqrt{n-1}}{2}\right) \cap Q} \left(\left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right|^p + \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_n} \right|^p \right) dx +$$

$$+ 2^p \left(1 - \frac{y_n^{p-1}}{(y_n + \varrho)^{p-1}}\right) \sum_1^{2N} {}_j \int_{I\left(z^{(j)}, \frac{\varrho\sqrt{n}}{2}\right) \cap Q} \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| + \left| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right|^p \right\} dx \leq$$

$$\leq \left[2^{2p-\lambda} \left(\frac{p}{p-1}\right)^p (n-1)^{\frac{\lambda}{2}} + 2^{p-\lambda+1} n^{\frac{\lambda}{2}} \left(1 - \frac{y_n^{p-1}}{(y_n + \varrho)^{p-1}}\right) N \right] \varrho^\lambda \sum_1^n {}_i \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^p_{L^{(p,\lambda)}(Q)}.$$

Da cui ([15])

$$\left\| \frac{\varphi(x_1, \dots, x_i + x_n, \dots, x_{n-1}) - \varphi(\bar{x})}{x_n} \right\|^p_{L^{(p,\lambda)}(T_i)} \leq c_2 \sum_1^n {}_i \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^p_{L^{(p,\lambda)}(Q)} \tag{9.1}$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

Dalla (2.1) se $1 < \lambda < n$, oppure dalla (3.1) se $0 \leq \lambda \leq 1$, e dalla (9.1) segue il teorema [I.1].

Sia Q^* la piramide che proietta l'insieme Γ dal punto $\{x_1 = x_2 = \dots \dots = x_{n-1} = 0, x_n = 1\}$:

$$Q^* \equiv \{x : 0 \leq x_n \leq 1,\ 0 \leq x_i \leq 1 - x_n \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)\}.$$

TEOREMA [II.1]. — *Se $\varphi \in W^{(p,\lambda)}(\Gamma)$, $p > 1$, $0 \leq \lambda < n$ esiste una funzione $u \in H_1^{(p,\lambda)}(Q^*)$ avente come traccia su Γ la funzione φ e si ha la maggiorazione*

$$\| u \|_{H_1^{(p,\lambda)}(Q^*)} \leq c_3 \|\varphi\|_{W^{(p,\lambda)}(\Gamma)}. \tag{10.1}$$

([15]) Si tenga conto della maggiorazione:

$$\left(1 - \frac{y_n^{p-1}}{(y_n + \varrho)^{p-1}}\right) N \leq \left(\frac{y_n^{p-1}}{(y_n + \varrho)^{p-1}}\right) \frac{y_n + \varrho}{\varrho} = \frac{\sum_0^{p-2} {}_k \binom{p-1}{k+1} y_n^{p-2+k} \varrho^k}{(y_n + \varrho)^{p-2}} \leq p - 1.$$

Analogamente a quanto fatto da Gagliardo in [6], consideriamo la seguente funzione u, definita per $x \in Q^*$,

$$u(x) = \frac{1}{x_n^{n-1}} \int_{x_1}^{x_1+x_n} d\xi_1 \dots \int_{x_{n-1}}^{x_{n-1}+x_n} \varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})\, d\xi_{n-1}.$$

È evidente che questa funzione ha su Γ la traccia φ. Dimostriamo che u verifica la maggiorazione (10.1).

Osserviamo che per definire la norma $\| u \|_{H_1^{(p,\lambda)}(Q^*)}$ ci si può servire, anzichè di sfere aventi il centro in un generico punto di Q^* e raggio $\varrho \in [0, \sqrt{n}]$, di insiemi che indicheremo con $J(y, \varrho)$ ([16]) definiti dalle disuguaglianze

$$\begin{aligned} & y_n \leq x_n \leq y_n + \varrho \\ & y_i \leq x_i \leq y_i + y_n + \varrho - x_n \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \end{aligned}$$

dove y è un generico punto di Q^* e ϱ varia nell'intervallo $[0, 1]$. Anzi, per ogni fissato y, è sufficiente considerare i valori di ϱ per i quali $J(y, \varrho) \subset Q^*$.

Sia $J(y, \varrho)$ un insieme del tipo ora visto. Maggioriamo dapprima le quantità $\left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^{(p,\lambda)}(Q^*)}$

Per $(i = 1, 2, \dots, n-1)$ si ha:

$$\int_{J(y,\varrho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p dx = \int_{y_n}^{y_n+\varrho} dx_n \int_{y_{n-1}}^{y_{n-1}+y_n+\varrho-x_n} dx_{n-1} \dots \int_{y_1}^{y_1+y_n+\varrho-x_n} dx_1 \left| \frac{1}{x_n} \int_{x_1}^{x_1+x_n} d\xi_1 \dots \frac{1}{x_n} \int_{x_{i-1}}^{x_{i-1}+x_n} d\xi_{i-1} \frac{1}{x_n} \int_{x_{i+1}}^{x_{i+1}+x_n} d\xi_{i+1} \dots \right.$$

$$\left. \dots \int_{x_{n-1}}^{x_{n-1}+x_n} \frac{\varphi(\xi_1, \dots, x_i + x_n, \dots, \xi_{n-1}) - \varphi(\xi_1, \dots, x_i, \dots, \xi_{n-1})}{x_n} d\xi_{n-1} \right|^p.$$

Applicando $(n-2)$ volte una nota disuguaglianza di Morrey ([17]) rispetto

---

([16]) Sono le piramidi che proiettano dal punto $(y_1 y_2 \dots y_{n-1}, y_n + \varrho)$ l'insieme $\{x : y_i \leq x_i \leq y_i + \varrho \ (i \neq n),\ x_n = y_n\}$. Si osservi che $J(y, \varrho)$ è contenuto in $I(y, \varrho\sqrt{n-1})$ e che per ogni ipersfera $I(y, \varrho)$ l'insieme $I(y, \varrho) \cap Q^*$ è contenuto in un insieme $J(z, \bar{\varrho})$ con $z \in Q^*$ e $\varrho\sqrt{3} \leq \bar{\varrho} \leq \varrho(1 + \sqrt{3})$.

([17]) $\int_a^{b-h} dx \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(\xi)\, d\xi \right|^p \leq \text{cost.} \int_a^b |f(x)|^p dx \quad (p \geq 1)$ cfr. ad es. [6].

alle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}$, scambiando opportunamente di volta in volta l'ordine di integrazione rispetto alle medesime variabili, si ottiene

$$\int_{J(y,\varrho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p dx \leq c_4 \int_{J(y,\varrho)} \left| \frac{\varphi(x_1, \ldots, x_i + x_n, \ldots, x_{n-1}) - \varphi(\bar{x})}{x_n} \right|^p dx \leq$$

$$\leq c_4 \int_{I(y,\varrho\sqrt{n}) \cap T_i} \left| \frac{\varphi(x_1, \ldots, x_i + x_n, \ldots, x_{n-1}) - \varphi(\bar{x})}{x_n} \right|^p dx$$

e quindi

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^p_{L^{(p,\lambda)}(Q^*)} \leq c_5 \left\| \frac{\varphi(x_1, \ldots, x_i + x_n, \ldots, x_{n-1}) - \varphi(\bar{x})}{x_n} \right\|^p_{L^{(p,\lambda)}(T_i)} \tag{11.1}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Maggioriamo ora la quantità $\left\| \dfrac{\partial u}{\partial x_n} \right\|_{L^{(p,\lambda)}(Q^*)}$. Poichè

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right|^p = \left| \sum_1^{n-1}{}_i \frac{1}{x_n^{n-1}} \int_{x_1}^{x_1+x_n} d\xi_1 \ldots \int_{x_{n-1}}^{x_{n-1}+x_n} \frac{\varphi(\xi_1, \ldots, x_i + x_n, \ldots, \xi_{n-1}) - \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})}{x_n} d\xi_{n-1} \right|^p$$

integrando su $J(y, \varrho)$ e applicando a secondo membro $(n-2)$ volte la disuguaglianza di Morrey rispetto alle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}$ si ottiene

$$\int_{J(y,\varrho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right|^p dx \leq c_6 \sum_1^{n-1}{}_i \int_{J(y,\varrho)} \left| \frac{1}{x_n} \int_{x_i}^{x_i+x_n} \frac{\varphi(x_1, \ldots, x_i + x_n, \ldots, x_{n-1}) - \varphi(x_1, \ldots, \xi_i, \ldots, x_{n-1})}{x_n} d\xi_i \right|^p dx \leq$$

$$\leq c_6 \sum_1^{n-1}{}_i \int_{S_i(y,\varrho)} \left| \frac{1}{x_n} \int_{x_i}^{x_i+x_n} \frac{\varphi(x_1, \ldots, x_i + x_n, \ldots, x_{n-1}) - \varphi(x_1, \ldots, \xi_i, \ldots, x_{n-1})}{x_n} d\xi_i \right|^p dx$$

dove $S_i(y, \varrho) \equiv \{x : y_j \leq x_j \leq y_j + \varrho \ (j \neq i),\ y_i \leq x_i \leq y_i + y_n + \varrho - x_n\}$.

Effettuando nell'i-esimo addendo il cambiamento di variabili $\{x_j \to X_j \ (j \neq n),\ x_i + x_n \to X_n\}$ si ha:

$$\int_{J(y,\varrho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right|^p dx \leq c_7 \sum_1^{n-1}{}_i \int_{y_1}^{y_1+\varrho} dx_1 \dots \int_{y_{i-1}}^{y_{i-1}+\varrho} dx_{i-1} \int_{y_{i+1}}^{y_{i+1}+\varrho} dx_{i+1} \dots \int_{y_n+y_i}^{y_i+y_n+\varrho} dx_n \int_{y_i}^{x_n-y_n} dx_i \cdot$$

$$\cdot \left| \frac{1}{x_n - x_i} \int_{x_i}^{x_n-y_n} \left| \frac{\varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_n, x_{i+1}, \dots, x_{n-1})}{x_n - \xi_i} - \frac{\varphi(x_1, \dots \xi_i, \dots, x_{n-1})}{x_n - \xi_i} \right| d\xi_i \right|^p +$$

$$+ c_7 \sum_1^{n-1}{}_i \int_{y_1}^{y_1+\varrho} dx_1 \dots \int_{y_{i-1}}^{y_{i-1}+\varrho} dx_{i-1} \int_{y_{i+1}}^{y_{i+1}+\varrho} dx_{i+1} \dots \int_{y_i+y_n}^{y_i+y_n+\varrho} dx_n \int_{y_i}^{x_n-y_n} dx_i \cdot \tag{12.1}$$

$$\cdot \left| \frac{1}{x_n - x_i} \int_{x_n-y_n}^{x_n} \left| \frac{\varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_n, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) - \varphi(x_1, \dots, \xi_i, \dots, x_{n-1})}{x_n - \xi_i} \right| d\xi_i \right|^p =$$

$$= c_7 ((I) + (II)).$$

Applicando rispetto alla variabile x_i la disuguaglianza di Hardy (v. ([13])) e successivamente un ovvio cambiamento di variabili, si maggiora l'integrale (I); precisamente:

$$(I) \leq c_8 \sum_1^{n-1}{}_i \int_{S_i(y,\varrho)} \left| \frac{\varphi(x_1, \dots, x_i + x_n, \dots, x_{n-1}) - \varphi(\bar{x})}{x_n} \right|^p dx \leq \tag{13.1}$$

$$\leq c_9 \varrho^\lambda \sum_1^{n-1}{}_i \left\| \frac{\varphi(x_1, \dots, x_i + x_n, \dots, x_{n-1}) - \varphi(\bar{x})}{x_n} \right\|^p_{L^{(p,\lambda)}(T_i)}.$$

Per quanto riguarda l'integrale (II) si ha:

$$(II) \leq \frac{1}{p-1} \left\{ 1 - \frac{y_n^{p-1}}{(y_n + \varrho)^{p-1}} \right\} \sum_1^{n-1}{}_i \int_{y_1}^{y_1+\varrho} dx_1 \dots \int_{y_{i-1}}^{y_{i-1}+\varrho} dx_{i-1} \int_{y_{i+1}}^{y_{i+1}+\varrho} dx_{i+1} \dots \int_{y_i+y_n}^{y_i+y_n+\varrho} dx_n \int_{x_n-y_n}^{x_n} \cdot$$

$$\cdot \left| \frac{\varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_n, \dots, x_{n-1}) - \varphi(x_1, \dots, \xi_i, \dots, x_{n-1})}{x_n - \xi_i} \right|^p d\xi_i =$$

$$= \frac{1}{p-1} \left\{ 1 - \frac{y_n^{p-1}}{(y_n + \varrho)^{p-1}} \right\} \sum_1^{n-1}{}_i \int_{H_i} \left| \frac{\varphi(x_1, \dots, x_i + x_n, \dots, x_{n-1}) - \varphi(\bar{x})}{x_n} \right|^p dx$$

dove $H_i \equiv \{x : y_j \leq x_j \leq y_j + \varrho\ (j \neq i, n), y_i + y_n - x_n \leq x_i \leq y_i + y_n + \varrho - x_n,$ $0 \leq x_n \leq y_n\}$.

Ogni insieme H_i si può ricoprire con un numero N di sfere, $\frac{y_n}{\varrho} \leq$ $\leq N < \frac{y_n}{\varrho} + 1$, aventi il centro in punti di T_i e raggio $\frac{\varrho\sqrt{n}}{2}$, per cui, con un procedimento già usato per stabilire la (9.1), si ha

$$(14.1) \qquad (II) \leq \frac{n^{\frac{\lambda}{2}}}{2^\lambda} \varrho^\lambda \sum_1^{n-1}{}_i \left\| \frac{\varphi(x_1, \dots, x_i + x_n, \dots, x_{n-1}) - \varphi(\bar{x})}{x_n} \right\|^p_{L^{(p,\lambda)}(T_i)}.$$

Dalle (12,1), (13,1), (14,1) segue che

$$(15.1) \qquad \left\| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right\|^p_{L^{(p,\lambda)}(Q^*)} \leq c_{10} \sum_1^{n-1}{}_i \left\| \frac{\varphi(x_1, \dots, x_i + x_n, \dots, x_{n-1}) - \varphi(\bar{x})}{x_n} \right\|^p_{L^{(p,\lambda)}(T_i)}.$$

Rimane da maggiorare la quantità $\| u \|^p_{L^{(p,\lambda)}(Q^*)}$.

Per $x \in Q^*$ si ha la relazione

$$(n-1)\, u(x) = \sum_1^{n-1}{}_i \frac{1}{x_n^{n-2}} \int_{x_1}^{x_1+x_n} d\xi_1 \dots \int_{x_{i-1}}^{x_{i-1}+x_n} d\xi_{i-1} \int_{x_{i+1}}^{x_{i+1}+x_n} d\xi_{i+1} \dots \int_{x_{n-1}}^{x_{n-1}+x_n} \cdot$$

$$\cdot\, \varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, x_i + x_n, \dots, \xi_{n-1})\, d\xi_{n-1} - x_n \frac{\partial u}{\partial x_n}$$

e quindi

$$\int_{J(y,\varrho)} | u |^p dx \leq c_{11} \left\{ \sum_1^{n-1}{}_i \int_{J(y,\varrho)} dx \left| \frac{1}{x_n^{n-2}} \int_{x_1}^{x_1+x_n} d\xi_1 \dots \int_{x_{i-1}}^{x_{i-1}+x_n} d\xi_{i-1} \int_{x_{i+1}}^{x_{i+1}+x_n} d\xi_{i+1} \dots \right.\right.$$

$$\left.\left. \dots \int_{x_{n-1}}^{x_{n-1}+x_n} \varphi(\xi_1, \dots, x_1 + x_n, \dots, \xi_{n-1})\, d\xi_{n-1} \right|^p + \int_{J(y,\varrho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right|^p dx \right\}.$$

L'integrale $\int_{J(y,\varrho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right|^p dx$ si maggiora in virtù della (15.1). Il primo integrale a secondo membro, effettuando il cambiamento di variabile $(x_j \to X_j\ (j \neq i),$ $x_i + x_n \to X_i)$ e applicando successivamente $(n-2)$ volte la disuguaglianza di Morrey rispetto alle variabili $X_j\,(j \neq i, n)$, si maggiora con la quantità

$$\sum_1^{n-1} {}_i \int_{y_n}^{y_n+\varrho} dx_n \int_{y_1}^{y_1+y_n+\varrho-x_n} dx_1 \ldots \int_{y_i+x_n}^{y_i+y_n+\varrho} dx_i \ldots \int_{y_{n-1}}^{y_{n-1}+y_n+\varrho-x_n} |\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})|^p \, dx_{n-1}$$

e questa, se $\varphi \in L^p(\Gamma)$ si maggiora facilmente con la norma $\|\varphi\|^p_{L^p(\Gamma)}$, se invece $\varphi \in L^{(p,\lambda-1)}(\Gamma)$, con $1 < \lambda < n$, tenuto conto che per ogni fissato $x_n \in [y_n, y_n + \varrho]$ l'integrale esteso all'insieme $\{x\colon y_j \leq x_j \leq y_j + y_n + \varrho - x_n$ $(j \neq i, n),\ y_i + y_n \leq x_i \leq y_i + y_n + \varrho\}$ è maggiorato dall'integrale esteso a $I(y, \varrho\sqrt{n-1}) \cap \Gamma$, si maggiora ulteriormente con la quantità

$$(n-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} \varrho^\lambda \|\varphi\|^p_{L^{(p,\lambda-1)}(\Gamma)}.$$

In definitiva, sia per $0 \leq \lambda \leq 1$ che per $1 < \lambda < n$,

$$\|u\|^p_{L^{(p,\lambda)}(Q^*)} \leq c_{12} \|\varphi\|_{W^{(p,\lambda)}(\Gamma)}. \tag{16.1}$$

Dalle (11.1), (15.1), (16.1) segue il teorema.

2. — Sia Ω un insieme aperto, limitato, di R^n avente frontiera $\partial\Omega$ localmente lipschitziana (cfr. ([4])); è allora possibile determinare un numero finito di domini I_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$ che ricoprono $\partial\Omega$ e tali che ogni I_k sia trasformabile nel « rettangolo » $\{x : 0 \leq x_i \leq 1\ (i \neq n),\ -1 \leq x_n \leq 1\}$ mediante una trasformazione biunivoca $\mathcal{T}_k$ che gode le seguenti proprietà:

i) $\mathcal{T}_k$ e $\mathcal{T}_k^{-1}$ sono lipschitziane e a Jacobiani limitati.

ii) $I_k \cap \bar{\Omega}$ è trasformato nell'insieme $Q \equiv \{x\colon 0 \leq x_i \leq 1\ (i = 1, 2, \ldots, n)\}$.

iii) $I_k \cap \partial\Omega$ è trasformato nell'insieme $\Gamma \equiv \{x : 0 \leq x_i \leq 1\ (i \neq n),\ x_n = 0\}$.

Ad ogni funzione φ definita su $\partial\Omega$ le trasformazioni $\mathcal{T}_k$ fanno corrispondere N funzioni $\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_N$ definite su Γ tali che

$$\varphi_i(\bar{x}) \equiv \varphi_j(\bar{y}) \quad \text{se} \quad \mathcal{T}_i^{-1}(\bar{x}) \equiv \mathcal{T}_j^{-1}(\bar{y}). \tag{1.2}$$

Viceversa, assegnate su Γ N funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$ soddisfacenti la (1.2) rimane univocamente assegnata su $\partial\Omega$ una funzione φ.

Diremo che $\varphi \in W^{(p,\lambda)}(\partial\Omega)$ se tutte le corrispondenti $\varphi_k \in W^{(p,\lambda)}(\Gamma)$ e porremo per definizione

$$\|\varphi\|_{W^{(p,\lambda)}(\partial\Omega)} = \sum_1^N {}_k \|\varphi_k\|_{W^{(p,\lambda)}(\Gamma)}, \tag{2.2}$$

TEOREMA [I.2]. — *Se* $u \in H_1^{(p,\lambda)}(\Omega)$, $p > 1$ e $0 \leq \lambda < n$, *la traccia* φ *della funzione* u *su* $\partial\Omega$ *appartiene a* $W^{(p,\lambda)}(\partial\Omega)$ *e si ha la maggiorazione*

$$\| \varphi \|_{W^{(p,\lambda)}(\partial\Omega)} \leq c_{13} \| u \|_{H_1^{(p,\lambda)}(\Omega)} .$$

Osserviamo innanzi tutto che se $\mathcal{T}$ è una trasformazione che muta biunivocamente un insieme $A \subset R^n$ in un insieme A' e $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}^{-1}$ sono lipschitziane e a Jacobiani limitati, allora $\mathcal{T}$ muta funzioni $\in H_1^{(p,\lambda)}(A)$ in funzioni $\in H_1^{(p,\lambda)}(A')$.

Infatti $u \in H_1^{(p,\lambda)}(A) \to u \in H_1^p(A)$ e quindi, per note proprietà di questi spazi (cfr. [18]), la funzione trasformata $u' \in H_1^p(A')$. Inoltre, in virtù dell'ipotesi che gli Jacobiani di $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}^{-1}$ siano limitati, esiste una costante C tale che se $I(y, \varrho)$ è una qualunque sfera avente il centro $y \in A'$ e raggio ϱ, $\mathcal{T}^{-1}(I(y, \varrho) \cap A')$ è contenuto in una sfera avente il centro in un punto di A e raggio $C\varrho$, per cui

$$\int_{I(y,\varrho)\cap A'} | u' |^p \, dx + \sum_1^n {}_i \int_{I(y,\varrho)\cap A'} \left| \frac{\partial u'}{\partial x_i} \right|^p dx \leq C^\lambda \varrho^\lambda \| u \|^p_{H_1^{(p,\lambda)}(A)}$$

e quindi $u' \in H_1^{(p,\lambda)}(A')$.

Ciò posto sia u_k la restrizione di u all'insieme $I_k \cap \Omega$ e u'_k la corrispondente funzione definita su Q. Per quanto abbiamo osservato $u'_k \in H_1^{(p,\lambda)}(Q)$ e allora in virtù del teorema [I.1] u'_k ha su Γ una traccia $\varphi_k \in W^{(p,\lambda)}(\Gamma)$ e si ha la maggiorazione

$$\| \varphi_k \|_{W^{(p,\lambda)}(\Gamma)} \leq c_1 \| u'_k \|_{H_1^{(p,\lambda)}(Q)} \leq c_{14} \| u \|_{H_1^{(p,\lambda)}(\Omega)} .$$

Di qui, sommando rispetto a k, si ha la tesi.

TEOREMA [II.2]. — *Se* $\varphi \in W^{(p,\lambda)}(\partial\Omega)$, $p > 1$ e $0 \leq \lambda < n$, *esiste una funzione* $u \in H_1^{(p,\lambda)}(\Omega)$ *avente come traccia su* $\partial\Omega$ *la funzione* φ; *si ha inoltre la maggiorazione*

$$\| u \|_{H_1^{(p,\lambda)}(\Omega)} \leq c_{15} \| \varphi \|_{W^{(p,\lambda)}(\partial\Omega)} .$$

Alla funzione φ corrispondono su Γ N funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ appartenenti allo spazio $W^{(p,\lambda)}(\Gamma)$. Sia Q^* il sottoinsieme di Q costituito dalla piramide che proietta Γ dal punto di coordinate $(x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0, x_n = 1)$.

In virtù del teorema [II.1] ad ogni φ_k $(k = 1, 2, \dots, N)$ si può associare una funzione $u'_k \in H_1^{(p,\lambda)}(Q^*)$ avente φ_k come traccia su Γ e tale che valga la maggiorazione

$$\| u'_k \|_{H_1^{(p,\lambda)}(Q^*)} \leq c_3 \| \varphi_k \|_{W^{(p,\lambda)}(\Gamma)} .$$

Siano u_k $(k = 1, 2, \dots, N)$ le funzioni corrispondenti delle u'_k; u_k è definita in $I_k^* \equiv \mathcal{T}_k^{-1}(Q^*) \subset I_k$. Sia I_0^* un insieme aperto la cui chiusura è contenuta in Ω e tale che gli insiemi $I_0^*, I_1^*, \dots, I_N^*$ costituiscano una copertura di Ω. Sia $\{\alpha_k\}$ $(k = 0, 1, \dots, N)$ un sistema di funzioni non negative, continue con le loro derivate prime, tali che ogni α_k ha supporto in I_k^* e $\sum_0^N{}_k\, \alpha_k(x) = 1$ per ogni $x \in \Omega$. Definiamo le u_k in tutto R^n ponendole uguali a 0 fuori di I_k^*. Poniamo ancora $u_0 \equiv 0$. La funzione

$$u = \sum_0^N{}_k\, \alpha_k(x)\, u_k$$

è la funzione cercata. Si ha infatti

$$\| u \|_{H_1^{(p,\lambda)}(\Omega)} \leq \sum_1^N{}_k \| \alpha_k u_k \|_{H_1^{(p,\lambda)}(I_k^*)} \leq c_{16} \sum_1^N{}_k \| u_k \|_{H_1^{(p,\lambda)}(I_k^*)} \leq c_{17} \sum_1^N{}_k \| u'_k \|_{H_{1\lambda}^{(p,\lambda)}(Q^*)} \leq$$

$$\leq c_{18} \sum_1^N{}_k \| \varphi_k \|_{W^{(p,\lambda)}(\Gamma)} = c_{18} \| \varphi \|_{W^{(p,\lambda)}(\partial\Omega)} .$$

Concludiamo osservando che la norma (2,2) non dipende dal particolare ricoprimento di $\partial\Omega$, cioè dal particolare sistema di domini $\{I_k\}$, nel senso che due ricoprimenti diversi danno origine a norme equivalenti; la norma (2,2) si può infatti esprimere in modo tale che non intervengano affatto le rappresentazioni locali di $\partial\Omega$.

Innanzitutto, se $\varphi(\bar{x})$ è una funzione definita su Γ, si verifica facilmente che la norma $\|\varphi\|_{W^{(p,\lambda)}(\Gamma)}$ è equivalente alla seguente [18] ($\bar{\lambda} = \max[\lambda - 1, 0]$):

$$\left\{ \| \varphi \|^p_{L^{(p,\bar{\lambda})}(\Gamma)} + \left\| \frac{\varphi(\bar{x}) - \varphi(\bar{y})}{(\bar{x}, \bar{y})^{\frac{p+n-2}{p}}} \right\|^p_{L^{(p,\lambda)}(\Gamma \times \Gamma)} \right\}^{\frac{1}{p}} \tag{3.2}$$

---

[18] $(\bar{x}, \bar{y}) = \left\{ \sum_1^{n-1}{}_i (x_i - y_i)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$. Supponiamo, per esemplificare, che Ω sia un aperto del piano e quindi $\Gamma \equiv [0, 1]$ e $T_1 \equiv \{x : 0 \leq x_2 \leq 1,\ 0 \leq x_1 \leq 1 - x_2\}$. In tal caso, tenendo conto della possibilità di sostituire, per definire la norma in $L^{(p,\lambda)}(A)$, le sfere con domini di altro tipo (triangoli rettangoli di lato ϱ se $A \equiv T_1$ e quadrati di lato ϱ se $A \equiv \Gamma \times \Gamma$) si può scrivere che

$$(*) \quad \| \varphi \|_{W^{(p,\lambda)}(\Gamma)} = \left\{ \| \varphi \|^p_{L^{(p,\bar{\lambda})}(\Gamma)} + \sup_{\substack{\varrho \in [0,1] \\ y \in T_1}} \frac{1}{\varrho^\lambda} \int_{y_1}^{y_1+\varrho} dx_1 \int_{y_2}^{y_1+y_2+\varrho-x_1} \left| \frac{\varphi(x_1 + x_2) - \varphi(x_1)}{x_2} \right|^p dx_2 \right\}^{\frac{1}{p}}$$

Da ciò segue che la norma (2.2) è equivalente alla seguente (cfr. [1] [6]):

$$\left\{ \sup_{\substack{\varrho\in(0,\varrho_0)\\ y\in\partial\Omega}} \frac{1}{\varrho^{\lambda-1}} \int_{I(y,\varrho)\cap\partial\Omega} |\varphi(x)|^p \, d\sigma_x + \sup_{\substack{\varrho\in[0,\varrho_0]\\ y,z\in\partial\Omega}} \frac{1}{\varrho^{\lambda}} \int_{I(y,\varrho)\cap\partial\Omega} d\sigma_x \int_{I(z,\varrho)\cap\partial\Omega} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|^p}{(x,\,y)^{p+n-2}} \, d\sigma_y \right\}^{\frac{1}{p}}$$

---

mentre la (3.2) è ugnale a

$$(**) \qquad \left\{ \|\varphi\|^p_{L^{(p,\bar\lambda)}(\Gamma)} + \sup_{\substack{\varrho\in[0,1]\\ y\in\Gamma\times\Gamma}} \frac{1}{\varrho^{\lambda}} \int_{y_1}^{y_1+\varrho} dx_1 \int_{y_2}^{y_2+\varrho} \left| \frac{\varphi(x_1)-\varphi(x_2)}{x_1-x_2} \right|^p dx_2 \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Di queste due norme basterà confrontare le parti rignardanti i «rapporti incrementali» della φ.

Applicando il cambiamento di variabili ($x_1 = X_2$, $x_1 + x_2 = X_2$) si ha:

$$\int_{y_1}^{y_1+\varrho} dx_1 \int_{y_2}^{y_1+y_2+\varrho-X_1} \left| \frac{\varphi(x_1+x_2)-\varphi(x_1)}{x_2} \right|^p dx_2 = \int_{y_1}^{y_1+\varrho} dx_1 \int_{x_1+y_2}^{y_1+y_2+\varrho} \left| \frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}{x_1-x_2} \right|^p dx_2 \leq$$

$$\leq \int_{y_1}^{y_1+\varrho} dx_1 \int_{y_1+y_2}^{y_1+y_2+\varrho} \left| \frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}{x_1-x_2} \right|^p dx_2 .$$

Da ciò, si deduce che ($*$) si può maggiore con ($**$).

Viceversa, supponiamo che l'insieme $\{x:\ y_1 \leq x_1 \leq y_1 + \varrho,\ y_2 \leq x_2 \leq y_2 + \varrho\}$ sia contenuto in $\Gamma\times\Gamma \cap (x_2 \geq x_1)$. Applicando il cambiamento di variabili ($x_1 = X_1$, $x_2 = X_1 + X_2$) si ha:

$$\int_{y_1}^{y_1+\varrho} dx_1 \int_{y_2}^{y_2+\varrho} \left| \frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}{x_2-x_1} \right|^p dx_2 = \int_{y_1}^{y_1+\varrho} dx_1 \int_{y_2-x_1}^{y_2+\varrho-x_1} \left| \frac{\varphi(x_1+x_2)-\varphi(x_1)}{x_2} \right|^p dx_2 \leq$$

$$\leq \int_{y_1}^{y_1+2\varrho} dx_1 \int_{y_2-y_1-\varrho}^{y_2+\varrho-x_1} \left| \frac{\varphi(x_1+x_2)-\varphi(x_1)}{x_2} \right|^p dx_2 .$$

In modo analogo si procede se $\{x:\ y_1 \leq x_1 \leq y_1 + \varrho,\ y_2 \leq x_2 \leq y_2 + \varrho\} \subset \Gamma\times\Gamma \cap (x_2 \leq x_1)$ oppure nel caso che detto insieme incontri la retta $x_1 = x_2$. In quest'ultimo caso l'insieme in questione si decompone in due triangoli ognuno dei quali è contenuto in un triangolo rettangolo a lati paralleli agli assi x_1, x_2 e di lunghezza 2ϱ e contenuti rispettivamente in $\Gamma\times\Gamma \cap (x_2 \geq x_1)$ e in $\Gamma\times\Gamma \cap (x_2 \leq x_1)$.

Da quanto detto segue che anche ($**$) si maggiora con ($*$).

BIBLIOGRAFIA

[1] N. ARONSZAJN - « *Boundary values of functions with finite Dirichlet integral* » — « *Conference on partial differenzial equations* » - Studies in eingevalue problems, n. 14 (Univ. of Kansas) (1955).

[2] V. M. BABICH - « *Sul problema del prolungamento delle funzioni* » - (in russo), Uspekhi Matematiceskii Nauk, 8,2 (54), p. 111-13 (1953).

[3] V. M. BABICH-L. N. SLOBODETSKIJ - « *Sulla limitatezza dell'integrale di Dirichlet* » in russo) - Doklady Akademii Nauk S. S. S. R, 106, p. 604-8 (1956).

[4] L. DE VITO - « *Sulle funzioni ad integrale di Dirichlet finito* » - Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, s. III, vol. XII, Fasc. I-II (1958), p. 55-127.

[5] G. FICHERA - « *Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno relativi all'equilibrio di un corpo elastico* » - Ann, Scuola Norm. Sup. di Pisa (3), 4, p. 35-99 (1950).

[6] E. GAGLIARDO - « *Caratterizzazione delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili* » - Rend. Sem. Matem. Univ. di Padova — vol. XXVII — (1957) p. 284-305.

[7] E. GAGLIARDO - « *Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili* », Ricerche di Matem. — vol. VII — (1958), p. 102-137.

[8] J. L. LIONS - « *Théorèmes de trace et d'interpolations (I)* » - Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, s. III, vol. XIII Fasc. IV, (1954), p. 389-403.

[9] J. L. LIONS - « *Un théorème de traces; applications* » - C. R. Acad. Sci. Paris, t. 249, (1959), p. 2259-2261.

[10] E. MAGENES-G. STAMPACCHIA - « *I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico* » Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, s. III, vol. XII, (1958), p. 247-357.

[11] C. MIRANDA - « *Sulla sommabilità delle derivate di una funzione armonica hölderiana* » - Rendic. Acc. Scienze Fis. e Mat. di Napoli (4), 18, (1951).

[12] C. MIRANDA - « *Sui sistemi di tipo ellittico di equazioni lineari a derivate parziali del primo ordine, in n variabili indipendenti* » - Atti Acc. Naz. dei Lincei - s. VIII; vol. III, (1952), p. 84-121.

[13] C. B. MORREY - « *Multiple integral problems in the calculus of variations and related topics* » - Un. of California Publ. 1, (1943), p. 1-130.

[14] S. M. NIKOLSKIJ - « *Sul problema di Dirichlet per il cerchio e per il semispazio* » - (in russo) Matematicheskii Sbornik, 75, (77), (1954), p. 247-66.

[15] G. PRODI - « *Tracce sulla frontiera delle funzioni di Beppo Levi* » - Rend. Sem. Matem. di Padova, vol. XXVI, (1956), p. 36-60.

[16] G. PRODI - « *Tracce di funzioni con derivate d'ordine l a quadrato integrabile su varietà di dimensione arbitraria* » - Rend. Sem. Matem. di Padova — vol. XXVIII — (1958), p. 402-432.

[17] G. STAMPACCHIA - « *Sopra una classe di funzioni in n variabili* » - Ricerche di Matem 1, (1951), p. 27-54.

[18] G. STAMPACCHIA - « *Problemi al contorno per equazioni di tipo ellittico a derivate parziali e questioni del calcolo delle variazioni connesse* » - Annali di Matem. (4), 33, (1952), p. 24-38.

[19] L. N. SLOBODETSKII - « *Gli spazi di S. L. Sobolev d'ordine frazionario e le loro applicazioni* » (in russo) Doklady Akad. Nauk, t. 118, (1958), p. 243-246.

[20] S. V. USPENSKII - « *Proprietà delle classi W_p^r con una derivata frazionaria su varietà differenziabili* » (in russo) Doklady Akad. Nauk, t. 132, (1960), p. 60-62.