

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

PIETRO BENVENUTI

Formulazione relativa delle equazioni dell'elettromagnetismo in relatività generale

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 14,
n° 2 (1960), p. 171-193*

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1960_3_14_2_171_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

FORMULAZIONE RELATIVA DELLE EQUAZIONI DELL'ELETTROMAGNETISMO IN RELATIVITÀ GENERALE

di PIETRO BENVENUTI (a Trieste)

Recentemente è stato introdotto in modo sistematico nella teoria della relatività generale un metodo di decomposizione dei tensori dello spazio tempo subordinato al riferimento fisico adottato. (Cfr. C. CATTANEO [1], [2], [3], [4]). Questa decomposizione che permette di introdurre in modo naturale il concetto di tensore spaziale, ha permesso altresì di definire una operazione differenziale (*derivazione covariante trasversa*) che operando su campi di tensori spaziali dà origine a campi di tensori spaziali.

In questo lavoro si usa la detta decomposizione per associare al tensore doppio del campo elettro-magnetico un vettore campo elettrico ed un vettore assiale campo magnetico. Questa decomposizione si effettua in un riferimento qualsiasi (quindi anche quando non sia verificata la ipotesi di tempo-ortogonalità che usualmente viene fatta a questo scopo) e naturalmente, nella ipotesi che la metrica sia pseudo-euclidea, essa coincide con la decomposizione classica. La stessa decomposizione permette inoltre di trarre dalle equazioni assolute del campo elettromagnetico delle equazioni relative al riferimento fisico adottato. Queste equazioni « *relative* » risultano dello stesso tipo delle ordinarie equazioni di MAXWELL discostandosene unicamente per termini additivi molto semplici che esprimono l'influenza sul campo elettromagnetico del campo gravitazionale (o, se si preferisce, del riferimento fisico adottato).

§ 1. — Considerazioni generali e richiami.

Sia V_4 il continuo spazio-temporale della relatività generale, x il suo generico punto, e sia x^1, x^2, x^3, x^4 un sistema di coordinate fisicamente ammissibili, Supporremo che la metrica definita in V_4 sia di tipo iperbolico con

segnatura $+, +, +, -$; in queste condizioni un sistema di coordinate ammissibili è un sistema tale che le curve $x^4 = \text{variabile}$, $x^e = \text{costante}$ ⁽¹⁾ costituiscano una *congruenza del genere tempo*, tale cioè che in ogni punto di V_4 il vettore unitario tangente alla curva della congruenza passante per quel punto abbia norma negativa. Le curve della congruenza possono allora essere interpretate come traiettorie in V_4 di ∞^3 particelle costituenti nel loro insieme il *fluido di riferimento*. Le prime tre coordinate: x^1, x^2, x^3 , che distinguono tra loro le diverse curve della congruenza e quindi le diverse particelle del fluido di riferimento, prendono il significato ed il nome di *coordinate spaziali*. Alla quarta coordinata si dà nome e significato di *coordinata temporale* con la posizione $x^4 = ct$ ⁽²⁾.

Fissata l'attenzione su una congruenza del genere tempo, cioè su un fluido di riferimento, consideriamo solo cambiamenti di coordinate spazio-temporali che lascino immutato il fluido di riferimento. Essi sono del tipo:

$$(1,1) \quad x^{e'} = x^e(x^1, x^2, x^3) \quad x^{4'} = x^4(x^1, x^2, x^3, x^4).$$

Ogni cambiamento di coordinate di questo tipo viene chiamato *interno al riferimento fisico* adottato; esso può essere sempre pensato come prodotto di un cambiamento di coordinate spaziali (cioè che lasci immutata la coordinata temporale) e di un cambiamento puramente temporale (cioè che lasci immutate le coordinate spaziali). Il primo di questi due corrisponde ad un mutamento del nome delle particelle del fluido di riferimento, il secondo corrisponde ad un mutamento dell'orologio coordinato a ciascuna di queste particelle. Tra tutti i diversi tempi (tra tutti i diversi orologi) che si possono pensare associati alle particelle di riferimento, uno gode di un preciso significato geometrico. Esso è definito, a meno del fattore c , come la ascissa curvilinea delle traiettorie in V_4 , orientate verso il futuro, delle particelle di riferimento. Questo tempo prende il nome di *tempo locale standard* e viene indicato con T_0 ; esso risulta legato alla ascissa temporale dalla seguente relazione:

$$(1,2) \quad cT_0 = \int_0^{x^4} \sqrt{-g_{44}} dx^4 + \varphi(x^1, x^2, x^3)$$

essendo φ una funzione arbitraria dei suoi argomenti x^1, x^2, x^3 .

⁽¹⁾ Qui e nel seguito conveniamo che gli indici latini, sia liberi che saturati, possono assumere tutti i valori 1, 2, 3, 4 mentre gli indici greci possono assumere i soli valori spaziali 1, 2, 3.

⁽²⁾ La lettera c indica, come d'uso, la velocità della luce in uno spazio vuoto,

Si ha così in generale :

$$(1,3) \quad \frac{\partial}{\partial T_0} = \frac{c}{\sqrt{-g_{44}}} \frac{\partial}{\partial x^4}.$$

L'operatore $\frac{\partial}{\partial T_0}$ si chiama *derivazione temporale locale*. Notiamo qui che mediante una sostituzione di coordinata temporale opportuna, cioè ponendo $x^4 = cT_0$, si può far coincidere il tempo coordinato t con il tempo locale standard T_0 .

Sia $\boldsymbol{\gamma}$ il vettore unitario tangente in x alla curva della congruenza di riferimento ed orientato verso il futuro. Le sue componenti sono :

$$(1,4) \quad \gamma^i \equiv \left(0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{-g_{44}}} \right) \quad \gamma_i = \frac{g_{i4}}{\sqrt{-g_{44}}}.$$

Il vettore $\boldsymbol{\gamma}$ è legato alla scelta delle coordinate di riferimento per V_4 ; tuttavia, finchè ci si limita a cambiamenti di coordinate interne al riferimento fisico adottato, il vettore $\boldsymbol{\gamma}$ non muta e quindi le sue componenti si comportano come le componenti di un vettore invariante. Al variare del punto x in V_4 il vettore $\boldsymbol{\gamma}$ descrive un campo vettoriale; le linee di flusso di questo campo vettoriale sono le linee della congruenza di riferimento. Il riferimento fisico può essere dunque determinato assegnando in V_4 il campo dei vettori $\boldsymbol{\gamma}$ orientati nel tempo.

La totalità dei vettori di T_x (spazio tangente in x a V_4) che sono perpendicolari a $\boldsymbol{\gamma}$ costituisce un sottospazio di T_x che viene indicato con Σ_x . I vettori di Σ_x prendono il nome di *vettori spaziali*. La totalità dei vettori paralleli a $\boldsymbol{\gamma}$ è pure un sottospazio che viene indicato con θ_x ed i cui elementi prendono il nome di *vettori temporali*. Ogni tensore che appartenga ad una potenza tensoriale di Σ_x prende il nome di *tensore spaziale*; il carattere spaziale di un tensore viene indicato con il simbolo \sim posto sopra alla lettera con la quale si indica il tensore stesso.

Ogni tensore di ordine n di T_x può essere decomposto in uno ed un sol modo nella somma di 2^n tensori dello stesso ordine, ciascuno dei quali contenuto in uno dei 2^n prodotti tensoriali di ordine n i cui singoli fattori siano scelti indifferentemente tra Σ_x e θ_x . I tensori componenti saranno detti proiezione del tensore di partenza sui relativi sottospazi della potenza tensoriale ennesima di T_x . Agli effetti di otterere da un tensore i suoi componenti, i due tensori doppi :

$$(1,5) \quad \gamma_{ik} = g_{ik} + \gamma_i \gamma_k; \quad - \gamma_i \gamma_k$$

agiscono rispettivamente da *proiettori spaziale e temporale*. L'annullarsi di un tensore di T_x è condizione necessaria e sufficiente per l'annullarsi di tutti i suoi componenti (di tutte le sue proiezioni).

Consideriamo i vettori $\partial_i P$ che costituiscono la *base naturale di T_x* . Le proiezioni dei primi tre di questi vettori su Σ_x costituiscono una base per il sottospazio Σ_x che sarà chiamata *base naturale di Σ_x* . Questi vettori saranno indicati col simbolo $\tilde{\partial}_e P$; i vettori della base naturale di Σ_x risultano espressi per mezzo dei vettori della base naturale di T_x nel seguente modo:

$$(1,6) \quad \tilde{\partial}_e P = \gamma_e^k \partial_k P = \partial_e P + \gamma_e^4 \partial_4 P.$$

Le componenti di un tensore spaziale rispetto alla base naturale di Σ_x prendono il nome di *componenti naturali in Σ_x* così come le componenti di un vettore o di un tensore di T_x secondo la base naturale di T_x vengono chiamate *componenti naturali in T_x* o anche semplicemente *componenti in T_x* . Le componenti naturali in Σ_x di un tensore spaziale \tilde{T} coincidono con le componenti in T_x ad indici spaziali di \tilde{T} stesso.

Consideriamo ora il vettore dP , spostamento elementare in V_4 di un punto in moto. Le sue componenti sono dx^i . La proiezione del vettore dP su Σ_x dà luogo ad un vettore spaziale che noi indicheremo con il simbolo \tilde{dP} . Le componenti naturali in Σ_x del vettore \tilde{dP} sono:

$$(\tilde{dP})^e = \gamma_e^k (dP)^k = dx^e.$$

Il vettore \tilde{dP} ha il significato ed assume il nome di *spostamento elementare relativo* al riferimento fisico considerato. La componente secondo la direzione orientata di \mathbf{v} del vettore dP sarà indicata con $c dT$. Alla quantità invariante dT si dà il nome di *incremento temporale standard*. La quantità dT è tale che:

$$(\tilde{dP})^2 - c^2 dT^2 = (dP)^2 = ds^2$$

il che assegna a dT , per confronto con gli spazi pseudo-euclidei della relatività ristretta, il significato corrispondente al nome che gli è stato dato. La definizione di incremento temporale standard porta alla formula:

$$(1,7) \quad dT = -\frac{1}{c} \gamma_i dx^i.$$

Da questa formula si vede che, se il punto sta in quiete relativa, cioè se $\tilde{dP} = 0$, l'incremento temporale standard coincide con l'incremento del tempo

locale standard definito sopra. Si ha infatti in questo caso :

$$dT = -\frac{1}{c} \gamma_4 dx^4 = \frac{1}{c} \sqrt{-g_{44}} dx^4 = dT_0.$$

Appare ora naturale definire *velocità relativa standard* il vettore $\frac{d\tilde{P}}{dT}$ le cui componenti naturali sono: $\frac{dx^e}{dT}$.

Si ha allora :

$$\tilde{v} = \frac{d\tilde{P}}{dT} = \frac{dx^e}{dT} \tilde{\partial}_e P = \frac{dx^e}{dT} \gamma_e^i \partial_i P = \gamma_k^i \frac{dx^k}{dT} \partial_i P.$$

Pertanto le componenti del vettore \tilde{v} , velocità relativa standard risultano :

$$(1,8) \quad \tilde{v}^i = \gamma_k^i \frac{dx^k}{dT}.$$

Risulta assai semplicemente espresso, mediante la \tilde{v} , il rapporto tra l'intervallo di tempo relativo standard dT sopra definito, e il corrispondente intervallo di tempo proprio $d\tau$ ($-c^2 d\tau^2 = ds^2$). Si ha infatti :

$$(1,9) \quad \frac{dT}{d\tau} = -\frac{1}{c} \gamma_i \frac{dx^i}{d\tau} = (1 - \tilde{v}^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Tutte le definizioni e tutti i risultati riportati in questo paragrafo sono stati tratti dai lavori di C. CATTANEO [1], [3] e [4] ai quali il lettore è pregato di riferirsi per più ampi sviluppi.

§ 2. — Operazioni sui vettori e sui tensori spaziali.

Le operazioni algebriche tensoriali (prodotti tensoriali, saturazione di indici) quando siano applicate a vettori o tensori spaziali, danno per risultato ancora vettori o tensori spaziali; non così invece per la operazione di derivazione covariante. Tuttavia è stata introdotta una operazione di derivazione che è covariante per sole trasformazioni di coordinate interne al riferimento e che prende il nome di *derivazione covariante spaziale o trasversa*. Questa operazione risulta dal prodotto della derivazione covariante ordinaria e della proiezione sul sottospazio Σ_x (o sulla opportuna potenza tenso-

riale di Σ_x stesso). La operazione di derivazione covariante trasversa viene indicata col simbolo $\tilde{\nabla}^*$. Ad esempio si ha :

$$(2,1) \quad \tilde{\nabla}_i^* \tilde{v}_j = \gamma_i^h \gamma_j^k \nabla_h \tilde{v}_k; \quad \tilde{\nabla}_i^* \tilde{T}_{jl} = \gamma_i^h \gamma_j^k \gamma_l^r \nabla_h \tilde{T}_{kr}.$$

Il tensore doppio spaziale $\gamma_{ik} = g_{ik} + \gamma_i \gamma_k$ che, oltre a funzionare da proiettore spaziale, definisce la metrica in Σ_x e può essere usato per alzare ed abbassare gli indici di un tensore spaziale, appare come costante rispetto alla derivazione covariante trasversa; pertanto quest'ultima operazione risulta invertibile con l'innalzamento o l'abbassamento degli indici mediante il tensore γ_{ik} . (Teorema di RICCI). Quando l'oggetto da derivare è uno scalare, la operazione di derivazione covariante ordinaria si riduce alla derivazione parziale e pertanto per la derivata spaziale di uno scalare si ha :

$$(2,2) \quad \tilde{\nabla}_i^* f = \gamma_i^j \partial_j f = \tilde{\partial}_i f = \partial_i f + \gamma_i \gamma^4 \partial_4 f.$$

Per le dimostrazioni, per il significato fisico della operazione di derivazione trasversa o spaziale e per ulteriori risultati sull'argomento il lettore può consultare i lavori già citati di C. CATTANEO [1], [4].

Un'altra operazione differenziale di grande interesse che opera su tensori spaziali ed ha come risultato tensori spaziali dello stesso ordine di quelli di partenza è la operazione di *derivazione temporale locale*. Questa operazione è già stata applicata da C. CATTANEO [3] ad un campo scalare; ne diamo qui la definizione, per altro del tutto ovvia, nel caso che l'oggetto da derivare sia un vettore o un tensore spaziale.

Sia $\tilde{\mathbf{E}}$ un vettore spaziale; come tale esso si può esprimere per mezzo dei vettori della base naturale di Σ_x .

$$\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}^e \tilde{\partial}_e P.$$

Fissiamo l'attenzione sui valori che assume questo vettore in un punto fissato del nostro sistema di riferimento al variare del tempo locale standard di quel punto. La *derivata temporale locale o relativa* di questo vettore è il vettore spaziale così definito :

$$(2,3) \quad \partial_{T_0} \tilde{\mathbf{E}} \equiv \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}}{\partial T_0} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}^e}{\partial T_0} \tilde{\partial}_e P = c\gamma^4 \partial_4 \tilde{\mathbf{E}}^e \tilde{\partial}_e P.$$

Se si esprimono i vettori della base naturale di Σ_x per mezzo dei vettori

della base di T_x si ottiene:

$$\delta_{T_0} \tilde{\mathbf{E}} = c \gamma^4 \partial_4 \tilde{\mathbf{E}} e \gamma_h^k \partial_k P = c \gamma_h^k \gamma^i \partial_i \tilde{\mathbf{E}}^h \partial_k P.$$

Pertanto le componenti ordinarie (cioè in T_x) del vettore $\partial_{T_0} \tilde{\mathbf{E}}$ risultano così espresse:

$$(2,4) \quad (\partial_{T_0} \tilde{\mathbf{E}})^k = c \gamma_h^k \gamma^i \partial_i \tilde{\mathbf{E}}^h; \quad (\partial_{T_0} \tilde{\mathbf{E}})_k = c \gamma_{kh} \gamma^i \partial_i \tilde{\mathbf{E}}^h.$$

In modo del tutto analogo si definisce la derivata temporale relativa di un tensore spaziale di ordine qualsiasi; ad esempio per un tensore doppio si ottiene:

$$(2,5) \quad (\partial_{T_0} \tilde{\mathbf{H}})^{ik} = c \gamma_j^i \gamma_h^k \gamma^r \partial_r \tilde{\mathbf{H}}^{jh}.$$

I TENSORI COMPLETAMENTE ANTISIMMETRICI; TENSORI DUALI.

Consideriamo in T_x lo pseudo-tensore di RICCI; si tratta di uno pseudo-tensore completamente antisimmetrico le cui componenti sono così definite:

$$(2,6) \quad \varepsilon^{ijk} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \delta^{ijk}; \quad \varepsilon_{ijk} = \sqrt{-g} \delta_{ijk}$$

dove si è indicato con g il determinante delle componenti g_{ik} del tensore metrico di T_x e con $\delta^{ijk} = \delta_{ijk}$ il simbolo di KRONECHER generalizzato, ovvero:

$$\delta^{ijk} = \delta_{ijk} = 0$$

se tutti gli indici non sono diversi tra loro

$$\delta^{ijk} = \delta_{ijk} = \pm 1$$

quando gli indici sono tutti diversi tra loro, dovendosi prendere il segno + o il segno - a seconda che essi formino una permutazione di ordine pari o di ordine dispari rispetto alla permutazione fondamentale 1, 2, 3, 4.

Mediante questo pseudo-tensore si definisce in T_x una corrispondenza che associa ad ogni tensore o pseudo-tensore antisimmetrico di ordine k ($0 \leq k \leq 4$) rispettivamente uno pseudo-tensore o un tensore antisimmetrico di ordine $4 - k$. Indicheremo con $*T$ il corrispondente del tensore

T e lo chiameremo *duale* di $T^{(1)}$. La corrispondenza che associa ad ogni tensore il suo duale è così definita:

$$\begin{array}{lll}
 \text{per } k = 0 & * T_{ijhk} = \varepsilon_{ijhk} T & * T^{ijhk} = \varepsilon^{ijhk} T \\
 \text{per } k = 1 & * T_{ijh} = \varepsilon_{ijhk} T^k & * T^{ijh} = \varepsilon^{ijhk} T_k \\
 \text{per } k = 2 & * T_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijhk} T^{hk} & * T^{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijhk} T_{hk} \\
 \text{per } k = 3 & * T_i = \frac{1}{3!} \varepsilon_{ijhk} T^{jhk} & * T^i = \frac{1}{3!} \varepsilon^{ijhk} T_{jhk} \\
 \text{per } k = 4 & * T = \frac{1}{4!} \varepsilon_{ijhk} T^{ijhk} & = \frac{1}{4!} \varepsilon^{ijhk} T_{ijhk}.
 \end{array}$$

In modo analogo definiremo ora una corrispondenza per dualità operante in Σ_x . Si consideri lo pseudo-tensore antisimmetrico spaziale di ordine 3 che ha come componenti naturali in Σ_x :

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma} = \sqrt{\gamma} \delta_{\alpha\beta\gamma}; \quad \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \delta^{\alpha\beta\gamma}.$$

Si è qui indicato con γ il determinante delle componenti naturali in Σ_x del tensore metrico spaziale: $\gamma_{\alpha\beta}$; $\delta^{\alpha\beta\gamma} = \delta_{\alpha\beta\gamma}$ è il simbolo di KRONECHER di ordine 3⁽²⁾.

Mediante questo pseudo-tensore è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca che associa ad ogni tensore o pseudo-tensore antisimmetrico spaziale di ordine k ($0 \leq k \leq 3$) rispettivamente uno pseudo-tensore o un tensore spaziali di ordine $3 - k$.

Questa corrispondenza prende il nome di *dualità spaziale*; il corrispondente del tensore spaziale \tilde{T} sarà indicato con $\tilde{*}\tilde{T}$ e sarà chiamato *duale spaziale o duale in Σ_x di \tilde{T}* . La dualità spaziale risulta definita dalle formule seguenti, le quali assegnano le componenti naturali dello pseudo-tensore o tensore duale spaziale in funzione delle componenti naturali

⁽¹⁾ Il termine *duale* nel significato che noi qui ricordiamo è entrato nell'uso comune anche se lo stesso termine è usato più spesso con un significato diverso Cfr. ad es. C. MOLLER [8].

⁽²⁾ Ricordiamo qui il legame esistente tra i due determinanti g e γ : $g_{44}\gamma = g$ (Cfr. ad es. MOLLER [8] appendice n. 8).

del tensore o pseudo-tensore di partenza :

$$\text{per } k = 0 \quad \approx \tilde{T}_{\alpha\beta\gamma} = \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma} \tilde{T} \quad \approx \tilde{T}^{\alpha\beta\gamma} = \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\gamma} \tilde{T}$$

$$\text{per } k = 1 \quad \approx \tilde{T}_{\alpha\beta} = \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma} \tilde{T}^\gamma \quad \approx \tilde{T}^{\alpha\beta} = \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\gamma} \tilde{T}_\gamma$$

$$\text{per } k = 2 \quad \approx \tilde{T}_\alpha = \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma} \tilde{T}^{\beta\gamma} \quad \approx \tilde{T}^\alpha = \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\gamma} \tilde{T}_{\beta\gamma}$$

$$\text{per } k = 3 \quad \approx \tilde{T} = \frac{1}{3!} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma} \tilde{T}^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{3!} \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\gamma} \tilde{T}_{\alpha\beta\gamma}$$

Le componenti dello pseudo-tensore $\tilde{\varepsilon}$ in T_x sono le seguenti :

$$(2,7) \quad \tilde{\varepsilon}_{ijh} = \varepsilon_{ijhk} \gamma^k; \quad \tilde{\varepsilon}^{ijh} = \varepsilon^{ijhk} \gamma_k.$$

Infatti, poichè ε_{ijhk} è completamente antisimmetrico, se uno almeno degli indici i, j, h assume valore 4 risulta :

$$\varepsilon_{ijhk} \gamma^k = \varepsilon_{ijh4} \gamma^4 = 0$$

e questo è caratteristico delle componenti covarianti di un tensore spaziale ; si ha inoltre :

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma h} \gamma^h = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma 4} \gamma^4 = \sqrt{-g} \delta_{\alpha\beta\gamma 4} \cdot \frac{1}{\sqrt{-g_{44}}} = \sqrt{\gamma} \delta_{\alpha\beta\gamma} = \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma}$$

e questo è sufficiente a dimostrare l'asserto, in quanto ogni tensore (o pseudo-tensore) spaziale ha le componenti ad indici spaziali eguali alle sue componenti naturali in Σ_x .

Notiamo infine che le componenti in T_x del tensore (o pseudo-tensore) spaziale $\approx \tilde{T}$, duale spaziale dello pseudo-tensore (o tensore) \tilde{T} , sono espresse dalle seguenti formule :

$$(2,8) \quad \text{per } k = 0 \quad \approx \tilde{T}_{ijh} = \tilde{\varepsilon}_{ijh} \tilde{T} \quad \approx \tilde{T}^{ijh} = \tilde{\varepsilon}^{ijh} \tilde{T}$$

$$\text{per } k = 1 \quad \approx \tilde{T}_{ij} = \tilde{\varepsilon}_{ijh} \tilde{T}^h \quad \approx \tilde{T}^{ij} = \tilde{\varepsilon}^{ijh} \tilde{T}_h$$

$$\text{per } k = 2 \quad \approx \tilde{T}_i = \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_{ijh} \tilde{T}^{jh} \quad \approx \tilde{T}^i = \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^{ijh} \tilde{T}_{jh}$$

$$\text{per } k = 3 \quad \approx \tilde{T} = \frac{1}{3!} \tilde{\varepsilon}_{ijh} \tilde{T}^{ijh} = \frac{1}{3!} \tilde{\varepsilon}^{ijh} \tilde{T}_{ijh}.$$

PROPRIETÀ ALGEBRICHE DELLA CORRISPONDENZA PER DUALITÀ SPAZIALE; PRODOTTO VETTORIALE DI DUE VETTORI SPAZIALI.

La corrispondenza per dualità spaziale gode di tutte le proprietà algebriche di cui gode la dualità negli spazi ordinari a 3 dimensioni; in particolare essa è una corrispondenza lineare, biunivoca, involutoria. Si può in effetti verificare facilmente che il duale del duale di un tensore o pseudo-tensore è ancora il tensore o pseudo-tensore di partenza; si ha cioè: $\approx \approx \tilde{T} = \tilde{T}$, oppure analogamente che, posto che sia: $\tilde{\mathcal{T}} = \approx \tilde{T}$ è anche $\tilde{T} = \approx \tilde{\mathcal{T}}$ (1).

Si considerino due vettori spaziali \tilde{a} e \tilde{b} (oppure due pseudo-vettori o vettori assiali o ancora un vettore ed uno pseudo-vettore). A partire da questi due vettori si costruisca il tensore antisimmetrico di ordine due: $\tilde{a} \otimes \tilde{b} - \tilde{b} \otimes \tilde{a}$; di questo tensore si consideri il duale in Σ_x , che, a seconda dei casi sarà un vettore o un pseudo-vettore. Questo duale è il prodotto vettoriale dei due vettori \tilde{a} e \tilde{b} e sarà indicato col simbolo $\tilde{a} \wedge \tilde{b}$.

Si ha cioè per definizione:

$$\tilde{c} = \tilde{a} \wedge \tilde{b} = \approx (\tilde{a} \otimes \tilde{b} - \tilde{b} \otimes \tilde{a}).$$

Le sue componenti si calcolano facilmente; esse sono:

$$(2,9) \quad \tilde{c}_i = (\tilde{a} \wedge \tilde{b})_i = \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_{ijk} (\tilde{a}^j \tilde{b}^k - \tilde{a}^k \tilde{b}^j) = \tilde{\varepsilon}_{ijk} \tilde{a}^j \tilde{b}^k.$$

Il prodotto vettoriale di due vettori spaziali gode delle proprietà delle quali gode il prodotto vettoriale solito tra vettori di uno spazio affine a 3 dimensioni:

a) Il prodotto vettoriale è un pseudo-vettore (un vettore assiale) se i due fattori sono dello stesso tipo, cioè se sono due vettori oppure due pseudo-vettori, mentre è un vettore (un vettore polare) se i due fattori sono di tipo diverso.

b) Il prodotto vettore è distributivo ed anticommutativo.

Queste proprietà sono di verifica immediata.

c) Il vettore prodotto è perpendicolare a ciascuno dei suoi fattori; infatti poichè $\tilde{\varepsilon}_{ijk}$ è antisimmetrico, mentre $\tilde{a}^j \tilde{b}^k \tilde{a}^i$ è simmetrico in i, j

(1) Si coglie qui l'occasione per ricordare che la corrispondenza per dualità in T_x non gode di questa proprietà poichè si ha invece $**T = -T$.

si ha :

$$\tilde{\mathbf{c}} \times \tilde{\mathbf{a}} = \tilde{c}_i \tilde{a}^i = \tilde{\varepsilon}_{ijk} \tilde{a}^j \tilde{b}^k \tilde{a}^i = 0.$$

Lo stesso dicasi per il prodotto scalare $\tilde{\mathbf{c}} \times \tilde{\mathbf{b}}$.

PROPRIETÀ DIFFERENZIALI DELLA CORRISPONDENZA PER DUALITÀ SPAZIALE.

La corrispondenza per dualità spaziale gode nei confronti della operazione di derivazione covariante spaziale di alcune delle proprietà di cui, negli spazi euclidei a 3 dimensioni, gode la corrispondenza per dualità nei confronti della derivazione parziale o, se si vuole, delle stesse proprietà di cui, nelle varietà a 3 dimensioni, gode la corrispondenza per dualità, lì definita, nei confronti della derivazione covariante. (Cfr. ad es. MOLLER [8] appendice n. 5).

a) Sia $\tilde{\mathcal{D}} = \approx \tilde{\mathbf{H}}$ il vettore assiale (o il vettore polare) duale in Σ_x dello pseudo-tensore (rispettivamente del tensore) doppio antisimmetrico $\tilde{\mathbf{H}}$; si ha allora identicamente :

$$(2,10) \text{ a) } \tilde{\text{div}} \tilde{\mathcal{D}} \equiv \tilde{\nabla}_h^* \tilde{\mathcal{D}}^h = \frac{1}{3!} \tilde{\varepsilon}^{ijk} (\tilde{\nabla}_i^* \tilde{\mathbf{H}}_{jk} + \tilde{\nabla}_j^* \tilde{\mathbf{H}}_{ki} + \tilde{\nabla}_k^* \tilde{\mathbf{H}}_{ij}) = \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^{ijk} \tilde{\partial}_i \tilde{\mathbf{H}}_{jk}$$

$$(2,11) \text{ b) } \tilde{\text{rot}}^i (\tilde{\mathcal{D}}) \equiv \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^{ijh} (\tilde{\nabla}_j^* \tilde{\mathcal{D}}_h - \tilde{\nabla}_h^* \tilde{\mathcal{D}}_j) = \tilde{\varepsilon}^{ijh} \tilde{\partial}_j \tilde{\mathcal{D}}_h = \tilde{\nabla}_k^* \tilde{\mathbf{H}}^{ik}.$$

Per procedere alla verifica di queste due identità ricordiamo in primo luogo (Cfr. C. CATTANEO [4], § 8) che la derivata covariante spaziale di un vettore assume la seguente forma esplicita :

$$\tilde{\nabla}_h^* \tilde{\mathcal{D}}^k = \tilde{\partial}_h \tilde{\mathcal{D}}^k + \left\{ \begin{matrix} \tilde{k} \\ h j \end{matrix} \right\} \tilde{\mathcal{D}}^j$$

dove il simbolo $\tilde{\partial}_h$ indica l'operatore $\partial_h + \gamma_h \gamma^4 \partial_4$ già incontrato alla formula (2,2) mentre le quantità :

$$\left\{ \begin{matrix} \tilde{k} \\ h j \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \gamma^{ki} (\tilde{\partial}_h \gamma_{ji} + \tilde{\partial}_j \gamma_{ih} - \tilde{\partial}_i \gamma_{hj})$$

costituiscono, come appare palese dalla loro espressione, una nuova specie di simboli di CHRISTOFFEL, costruiti come i simboli di CHRISTOFFEL ordinari facendo però uso sistematico dei coefficienti γ_{ik} della metrica spaziale al posto dei coefficienti g_{ik} della metrica spazio-temporale, e della operazione $\tilde{\partial}_h$ al posto della operazione di derivata spaziale ordinaria ∂_h .

Analogamente per la derivata covariante spaziale di un tensore doppio vale la seguente espressione esplicita:

$$\tilde{\nabla}_k^* \tilde{H}^{ih} = \tilde{\partial}_k \tilde{H}^{ih} + \left\{ \begin{matrix} i \\ k j \end{matrix} \right\} \tilde{H}^{jh} + \left\{ \begin{matrix} h \\ k j \end{matrix} \right\} \tilde{H}^{ij}.$$

In secondo luogo notiamo la validità della seguente relazione che si può verificare con semplici calcoli:

$$\left\{ \begin{matrix} j \\ j h \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \tilde{\partial}_h \sqrt{\gamma}.$$

Visto ciò, risulta agevole la verifica delle due identità a) e b); si ha infatti:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \tilde{\mathcal{S}} &= \tilde{\partial}_h \tilde{\mathcal{S}}^h + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \tilde{\mathcal{S}}^h \tilde{\partial}_h \sqrt{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \tilde{\partial}_h (\sqrt{\gamma} \tilde{\mathcal{S}}^h) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \tilde{\partial}_e (\sqrt{\gamma} \tilde{\mathcal{S}}^e) = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \tilde{\partial}_e (\sqrt{\gamma} \tilde{\varepsilon}^{e\lambda\mu} \tilde{H}_{\lambda\mu}) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \delta^{e\lambda\mu} \tilde{\partial}_e \tilde{H}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^{e\lambda\mu} \tilde{\partial}_e \tilde{H}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^{ijk} \tilde{\partial}_i \tilde{H}_{jk}. \end{aligned}$$

In modo analogo, quando si ricordi che il tensore spaziale \tilde{H} è antisimmetrico, si ottiene per le componenti naturali in Σ_x del vettore spaziale $\tilde{\nabla}_k^* \tilde{H}^{ik}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_k^* \tilde{H}^{ak} &= \tilde{\partial}_k \tilde{H}^{ak} + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ k j \end{matrix} \right\} \tilde{H}^{jk} + \left\{ \begin{matrix} k \\ k j \end{matrix} \right\} \tilde{H}^{aj} = \tilde{\partial}_k \tilde{H}^{ak} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \tilde{H}^{aj} \tilde{\partial}_j \sqrt{\gamma} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \tilde{\partial}_\lambda (\sqrt{\gamma} \tilde{H}^{a\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \tilde{\partial}_\lambda (\delta^{a\lambda e} \tilde{\mathcal{S}}_e) = \tilde{\varepsilon}^{a\lambda e} \tilde{\partial}_\lambda \tilde{\mathcal{S}}_e = \operatorname{rot}^a (\tilde{\mathcal{S}}). \end{aligned}$$

Sono così dimostrate le due identità a) e b).

Notiamo infine che in generale (e cioè se il riferimento non è spazialmente irrotazionale e se il vettore $\tilde{\mathcal{S}}$ non è indipendente dal tempo) non vale il teorema di invertibilità dell'ordine di derivazione per le derivate co-

varianti spaziali: $\tilde{\nabla}_h^* \tilde{\nabla}_k^* \tilde{\delta}_j$ (¹). Pertanto in generale si ha:

$$\tilde{\text{div}} \tilde{\text{rot}} \tilde{\delta} \neq 0.$$

§ 3. — **Significato fisico delle proiezioni del tensore vertice della congruenza di riferimento; velocità angolare locale, accelerazione di trascinamento.**

Chiamasi *tensore vertice* di una congruenza temporale il tensore doppio antisimmetrico:

$$(3,1) \quad \Omega_{ij} = \nabla_i \gamma_j - \nabla_j \gamma_i = \partial_i \gamma_j - \partial_j \gamma_i$$

dove $\boldsymbol{\gamma}$ è il vettore unitario tangente punto per punto alle linee della congruenza in oggetto. Se la congruenza è quella generata da un riferimento fisico il vettore $\boldsymbol{\gamma}$ è proprio quello che già abbiamo indicato con questo simbolo. Dalla proiezione del tensore vertice sul sottospazio $\Sigma_x \otimes \Sigma_x$ trae origine il tensore spaziale doppio antisimmetrico

$$(3,2) \quad \tilde{\Omega}_{ij} = \gamma_4 \left(\tilde{\partial}_i \frac{\gamma_j}{\gamma_4} - \tilde{\partial}_j \frac{\gamma_i}{\gamma_4} \right)$$

il cui annullarsi è caratteristico delle congruenze normali.

Dalla proiezione mista del tensore vertice trae origine il vettore spaziale

$$(3,3) \quad \tilde{C}_i = \gamma^r \nabla_r \gamma_i = \gamma^4 \nabla_4 \gamma_i$$

il cui annullarsi è caratteristico delle congruenze geodetiche. (Vedi C. CATTANEO [4]).

Noi assoceremo al tensore $\tilde{\Omega}$ il vettore assiale $\tilde{\omega} = \frac{c}{2} \tilde{*} \tilde{\Omega}$ il quale sarà chiamato vettore *velocità angolare di trascinamento locale*. Assoceremo inoltre al vettore spaziale \tilde{C} il vettore $\tilde{\alpha} = c^2 \tilde{C}$ che è la quadri-accellerazione della particella di riferimento. Al vettore $\tilde{\alpha}$ daremo anche il nome di *accelerazione di trascinamento*. La giustificazione delle denominazioni date ai vettori $\tilde{\omega}$ ed $\tilde{\alpha}$ si trova nella forma relativa delle equazioni di moto di una

(¹) Cfr. C. CATTANEO [4] § 16.

particella libera di prova. Queste equazioni infatti assumono, come C. CATTANEO ha dimostrato ⁽¹⁾, la seguente espressione:

$$\frac{\tilde{d}}{dT}(m\tilde{v}_k) = -mc^2\tilde{C}_k + mc\tilde{\Omega}_{kj}\tilde{v}^j.$$

In questa equazione lo scalare m è la massa relativa standard mentre \tilde{v}^j sono le componenti della velocità relativa la cui definizione noi abbiamo ricordato.

Se si sostituiscono nella equazione ora scritta al posto dei tensori \tilde{C} ed $\tilde{\Omega}$ i vettori che noi abbiamo associato loro, si arriva con facili sviluppi alla forma seguente: ⁽²⁾

$$\frac{\tilde{d}}{dT}(m\tilde{v}) = -m\tilde{a} - 2m\tilde{\omega} \wedge \tilde{v}.$$

Come si vede in questa equazione il vettore \tilde{a} gioca lo stesso ruolo che nella equazione classica della dinamica relativa giocava il vettore accelerazione di trascinamento ed il vettore assiale $\tilde{\omega}$ gioca a sua volta il ruolo che in quella equazione giocava il vettore velocità angolare. I due termini al secondo membro appaiono infatti del tutto identici rispettivamente alla forza di trascinamento ed alla forza del CORIOLIS. Per questa proprietà appaiono appropriati i nomi dati ai due vettori $\tilde{\omega}$ ed \tilde{a} .

Nei riferimenti costituenti congruenze normali e geodetiche, e solo in questi, i due vettori \tilde{a} ed $\tilde{\omega}$ si annullano e la equazione di moto della particella libera di prova si riduce alla equazione

$$\frac{\tilde{d}}{dT}(m\tilde{v}) = 0$$

cioè $m\tilde{v}$ è costante nel senso del trasporto per parallelismo.

Per questo motivo mi pare appropriato il nome di riferimenti inerziali generalizzati per i riferimenti detti.

⁽¹⁾ Vedi C. CATTANEO [3] formule (4).

⁽²⁾ Cfr. C. CATTANEO [5].

§ 4. — Il tensore campo elettro-magnetico; le sue proiezioni, vettore campo elettrico e pseudo-vettore campo magnetico.

Sia F il tensore doppio antisimmetrico del campo elettro-magnetico nel vuoto. Siano $F_{ik} = -F_{ki}$ le sue componenti covarianti.

La proiezione del tensore F sugli spazi $\Sigma \otimes \Sigma, \Sigma \otimes \theta, \theta \otimes \Sigma, \theta \otimes \theta$ porta a decomporre il tensore stesso nel seguente modo:

$$(4,1) \quad F_{ik} = \tilde{H}_{ik} - \tilde{E}_i \gamma_k + \gamma_i \tilde{E}_k.$$

Il tensore spaziale doppio antisimmetrico \tilde{H} è la proiezione di F su $\Sigma \otimes \Sigma$; si ha cioè:

$$\tilde{H}_{ik} = \gamma_i^j \gamma_k^h F_{jh}$$

Gli altri due addendi sono nell'ordine le proiezioni di F sugli spazi $\Sigma \otimes \theta$ e $\theta \otimes \Sigma$. Si ha così:

$$\tilde{E}_i = \gamma_i^j \gamma^h F_{jh}.$$

La quarta proiezione, quella su $\theta \otimes \theta$ risulta nulla. (Cfr. C. CATTANEO [4]).

Se si associa al tensore \tilde{H} il suo duale in Σ_x : $\tilde{\mathcal{S}}$, si ottiene la seguente decomposizione del tensore F :

$$(4,2) \quad F_{ik} = \tilde{\varepsilon}_{ikh} \tilde{\mathcal{S}}^h - \tilde{E}_i \gamma_k + \gamma_i \tilde{E}_k$$

oppure, in forma sintetica,

$$(4,3) \quad F = \tilde{*} \tilde{\mathcal{S}} - \tilde{E} \otimes \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma} \otimes \tilde{E}.$$

Al vettore polare \tilde{E} daremo il nome di *campo elettrico (relativo)*, al vettore assiale $\tilde{\mathcal{S}}$ il nome di *campo magnetico (relativo)*.

Sia ora $\mathcal{F} = * F$ il duale in T_x del tensore campo elettromagnetico. Le sue componenti si calcolano facilmente e si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{ik} &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ikjh} (\tilde{\varepsilon}^{jhr} \tilde{\mathcal{S}}_r - \tilde{E}^j \gamma^h + \gamma^j \tilde{E}^h) = \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ikjh} \varepsilon^{jhrs} \gamma_s \tilde{\mathcal{S}}_r - \varepsilon_{ikjh} \tilde{E}^j \gamma^h = \gamma_i \tilde{\mathcal{S}}_k - \gamma_k \tilde{\mathcal{S}}_i - \tilde{\varepsilon}_{ikj} \tilde{E}^j. \end{aligned}$$

Si ha cioè in sintesi :

$$(4,4) \quad \mathcal{F} = * F = - \approx \tilde{E} - \tilde{\mathcal{S}} (\otimes) \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma} (\otimes) \tilde{\mathcal{S}} .$$

Si ottiene cioè lo pseudo-tensore \mathcal{F} dal tensore F sostituendo al posto del vettore assiale $\tilde{\mathcal{S}}$ il vettore polare $-\tilde{E}$ ed al posto del vettore polare \tilde{E} il vettore assiale $\tilde{\mathcal{S}}$.

Notiamo infine che la decomposizione ora effettuata del tensore campo elettro-magnetico conduce alla decomposizione solita nel caso dello spazio tempo pseudo-euclideo della relatività ristretta. Si ha infatti in questo caso :

$$g_{ik} = 0 \text{ (se } i \neq k), = 1 \text{ (se } i = k \neq 4), = -1 \text{ (se } i = k = 4);$$

$$g_{ik} = g^{ik} .$$

Quindi :

$$\gamma^i = (0, 0, 0, 1) = \delta_4^i; \quad \gamma_i = (0, 0, 0, -1) = -\delta_i^4$$

e ancora :

$$\tilde{\varepsilon}_{ijk} = \varepsilon_{ijkh} \gamma^h = \delta_{ijk4} .$$

Ne segue così :

$$F_{ik} = \delta_{ikh4} \tilde{\mathcal{S}}^h + \tilde{E}_i \delta_k^4 - \delta_1^4 \tilde{E}_k$$

e si riconosce che le componenti del tensore F formano la seguente matrice :

$$F_{ik} = \begin{vmatrix} 0 & \tilde{\mathcal{S}}^3 & -\tilde{\mathcal{S}}^2 & E_1 \\ -\tilde{\mathcal{S}}^3 & 0 & \tilde{\mathcal{S}}^1 & \tilde{E}_2 \\ \tilde{\mathcal{S}}^2 & -\tilde{\mathcal{S}}^1 & 0 & \tilde{E}_3 \\ -\tilde{E}_1 & -\tilde{E}_2 & -\tilde{E}_3 & 0 \end{vmatrix} .$$

§ 5. — Scrittura relativa delle equazioni del campo elettromagnetico nel vuoto in presenza di un campo gravitazionale. Equazioni di Maxwell in un riferimento generico.

Come è noto⁽¹⁾ le equazioni del campo elettro-magnetico nel vuoto si possono scrivere nella forma seguente :

$$(5,1) \quad \nabla_k F^{ik} = \varrho^* V^i$$

$$(5,2) \quad \nabla_k \mathcal{F}^{ik} = 0 .$$

(1) Cfr. ad es. Lichnerowicz A. [7] I § 20.

Dove con F si è indicato il tensore del campo elettromagnetico, con $\mathcal{F} = *F$ il suo duale in T_∞ , con ϱ^* la densità propria di carica elettrica, misurata in un sistema locale inerziale di quiete per la carica stessa ed infine con V^i il vettore quadrivelocità unitaria della carica elettrica.

L'invariante ϱ^* è una quantità assoluta alla quale noi assoceremo l'invariante relativo (cioè invariante rispetto a cambiamenti di coordinate interni al riferimento)

$$(5,3) \quad \varrho = \varrho^* \frac{dT}{d\tau} = -\frac{\varrho^*}{c} \gamma_i \frac{dx^i}{d\tau} = \varrho^* \left(1 - \frac{\tilde{v}^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ad esso daremo il nome di densità relativa di carica elettrica. La definizione di densità relativa di carica coincide con la definizione che se ne dà solitamente (Cfr. per es. MOLLER [8] p. 302) nel caso che il riferimento sia tempo ortogonale e nel caso che la velocità relativa sia nulla; in entrambi questi casi si ha infatti:

$$\varrho = -\frac{\varrho^*}{c} \gamma_4 \frac{dx^4}{d\tau} = \sqrt{-g_{44}} V^4 \varrho^*.$$

Negli altri casi le due definizioni sono diverse.

Per ottenere una formulazione relativa delle equazioni del campo elettromagnetico, proietteremo le due equazioni (5,1) e (5,2).

Dalla proiezione su Σ_∞ della (5.1) si ottiene:

$$(5,4) \quad \gamma_j^i \nabla_k F^{jk} = \gamma_j^i \frac{\varrho^*}{c} \frac{dx^j}{d\tau}.$$

Dalla proiezione su θ_∞ si ottiene invece:

$$\gamma^i \gamma_j \nabla_k F^{jk} = \gamma^i \gamma_j \frac{\varrho^*}{c} \frac{dx^j}{d\tau}$$

cioè:

$$(5,5) \quad \gamma_j \nabla_k F^{jk} = \gamma_j \frac{\varrho^*}{c} \frac{dx^j}{d\tau}.$$

Le due equazioni così scritte sono nel loro insieme equivalenti alla equazione proiettata poichè, come abbiamo già osservato, l'annullarsi di un vettore è condizione necessaria e sufficiente per l'annullarsi dei suoi componenti spaziale e temporale.

Sviluppando le operazioni indicate nella (5,4) si ha:

$$\begin{aligned} \gamma_j^i \nabla_k F^{jk} &= \gamma_j^i \nabla_k \tilde{H}^{jk} + \gamma_j^i \nabla_k (\tilde{E}^{lk} \gamma^j - \tilde{E}^j \gamma^{lk}) = \\ &= \gamma_j^i \gamma_r^h \gamma_r^k \nabla_h \tilde{H}^{jr} - \gamma_j^i (\gamma_r^h - \delta_r^h) \nabla_h \tilde{H}^{jr} + \gamma_j^i (\tilde{E}^{lk} \nabla_k \gamma^j - \tilde{E}^j \nabla_k \gamma^{lk} - \gamma^{lk} \nabla_k \tilde{E}^j). \end{aligned}$$

Ricordando la definizione di derivata covariante spaziale, sviluppando le derivate covarianti nella seconda parentesi, ed infine considerando che è $\tilde{H}^{jr} \gamma_r = 0$ e quindi $\tilde{H}^{jr} \nabla_h \gamma_r + \gamma_r \nabla_h \tilde{H}^{jr} = 0$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \gamma_j^i \nabla_k F^{jk} &= \tilde{\nabla}_k^* \tilde{H}^{ik} + \gamma_j^i \gamma_r^h \tilde{H}^{jr} \nabla_h \gamma_r - \\ &- \gamma_j^i \left(-\tilde{E}^{lk} \partial_k \gamma^j + \tilde{E}^j \partial_k \gamma^{lk} + \tilde{E}^j \left\{ \begin{matrix} k \\ k \ h \end{matrix} \right\} \gamma^h + \gamma^{lk} \partial_k \tilde{E}^j \right). \end{aligned}$$

Il primo termine dentro la parentesi dà contributo nullo; infatti $\gamma_4^i = 0$ mentre $\partial_k \gamma^j = 0$ se $j \neq 4$.

Il secondo termine può essere scritto in forma diversa; si ha infatti:

$$\partial_k \gamma^{lk} = \partial_4 \gamma^4 = \delta_4^k \partial_k \gamma^4 = \frac{\gamma^{lk}}{\gamma^4} \partial_k \gamma^4.$$

Se infine si ricorda che $\left\{ \begin{matrix} k \\ k \ h \end{matrix} \right\} = \partial_h \lg \sqrt{|g|}^{(4)}$, al terzo termine si può dare la forma:

$$\tilde{E}^j \left\{ \begin{matrix} k \\ k \ h \end{matrix} \right\} \gamma^h = \tilde{E}^j \gamma^{lk} \partial_k \lg \sqrt{-g_{44}} = \tilde{E}^j \frac{\gamma^{lk}}{\gamma_4} \partial_k \gamma_4 + \tilde{E}^j \frac{\gamma^{lk}}{\sqrt{\gamma}} \partial_k \sqrt{\gamma}.$$

Si riesce allora ad esprimere tutta la parentesi come segue:

$$\tilde{E}^j \frac{\gamma^{lk}}{\sqrt{\gamma}} \partial_k \sqrt{\gamma} + \gamma^{lk} \partial_k \tilde{E}^j = \frac{\gamma^{lk}}{\sqrt{\gamma}} \partial_k (\sqrt{\gamma} \tilde{E}^j).$$

Ricordando la (3,3) si ottiene così:

$$\gamma_j^i \nabla_k F^{jk} = \tilde{\nabla}_k^* \tilde{H}^{ik} + \tilde{H}^{ij} \tilde{C}_j - \gamma_j^i \frac{\gamma^{lk}}{\sqrt{\gamma}} \partial_k (\sqrt{\gamma} \tilde{E}^j).$$

Infine ricordando la (2,11) e la (2,4) e sostituendo nel secondo termine al posto del tensore \tilde{H} e del vettore \tilde{C} le espressioni di questi in funzione

(4) Cfr. ad es. MOLLER [8] p. 278.

del vettore assiale \mathfrak{S} e del vettore accelerazione di trascinamento si ottiene:

$$\gamma_j^i \nabla_k F^{jk} = \text{rot}^i(\mathfrak{S}) + \frac{1}{c^2} (\tilde{\mathbf{a}} \wedge \mathfrak{S})^i - \frac{1}{c\sqrt{\gamma}} (\partial_{T_0} \sqrt{\gamma} \tilde{\mathbf{E}})^i.$$

Se sviluppiamo ora il secondo termine della equazione (5.4) otteniamo:

$$\gamma_j^i \frac{q^*}{c} \frac{dx^j}{d\tau} = \frac{q}{c} \frac{d\tau}{dT} \gamma_j^i \frac{dx^j}{d\tau} = \frac{q}{c} \tilde{v}^i.$$

Pertanto la proiezione della prima delle equazioni del campo elettromagnetico su Σ_x dà origine alla equazione:

$$(5,6) \quad \text{rot} \mathfrak{S} - \frac{1}{c\sqrt{\gamma}} \partial_{T_0} (\sqrt{\gamma} \tilde{\mathbf{E}}) = \frac{q}{c} \tilde{\mathbf{v}} + \frac{1}{c^2} \mathfrak{S} \wedge \tilde{\mathbf{a}}.$$

Consideriamo ora la equazione (5,5) e sviluppiamo il primo membro.

$$\gamma_j \nabla_k F^{jk} = \gamma_j \nabla_k \tilde{H}^{jk} + \gamma_j \nabla_k (\tilde{E}^k \gamma^j - \tilde{E}^j \gamma^k).$$

Sviluppando la parentesi e ricordando che è:

$$\gamma_j \tilde{H}^{jk} = 0 \quad \text{e quindi} \quad \gamma_j \nabla_h \tilde{H}^{jk} + \tilde{H}^{jk} \nabla_h \gamma_j = 0,$$

si ottiene:

$$\gamma_j \nabla_k F^{jk} = -\tilde{H}^{jk} \nabla_k \gamma_j - \nabla_k \tilde{E}^k - \gamma_j \gamma^k \nabla_k \tilde{E}^j = \frac{1}{2} \tilde{H}^{kj} \Omega_{ki} - \gamma_j^k \nabla_k \tilde{E}^j.$$

Il tensore \tilde{H} è un tensore spaziale, pertanto la sua proiezione sul sottospazio $\Sigma_x \otimes \Sigma_x$ coincide col tensore stesso. Si ha cioè:

$$\gamma_h^k \gamma_i^j \tilde{H}^{hi} = \tilde{H}^{kj}.$$

Si ottiene allora:

$$\frac{1}{2} \tilde{H}^{kj} \Omega_{kj} = \frac{1}{2} \gamma_h^k \gamma_i^j \tilde{H}^{hi} \Omega_{kj} = \frac{1}{2} \tilde{H}^{hi} \tilde{\Omega}_{hi} = \frac{2}{c} \tilde{\mathfrak{S}}_j \tilde{\omega}^j = \frac{2}{c} \tilde{\mathfrak{S}} \times \tilde{\omega}.$$

Anche per il secondo termine si ottiene una espressione significativa: infatti:

$$\gamma_j^k \nabla_k \tilde{E}^j = \gamma_h^k \gamma_j^h \nabla_k \tilde{E}^j = \tilde{\nabla}_h^* \tilde{E}^h = \text{div} \tilde{\mathbf{E}}.$$

Il primo membro della equazione (5,5) risulta allora così espresso:

$$\gamma_j \nabla_k F^{jk} = \frac{2}{c} \tilde{\mathcal{E}} \times \tilde{\omega} - \operatorname{div} \tilde{\mathbf{E}}.$$

Per il secondo membro della medesima equazione si ottiene immediatamente, quando si ricordi la (1,9):

$$\gamma_j \frac{\varrho^* dx^j}{c d\tau} = \frac{\varrho}{c} \frac{d\tau}{dT} \gamma_j \frac{dx^j}{dT} = -\varrho.$$

Perciò la detta equazione, proiezione su θ_x della prima equazione del campo elettro-magnetico, risulta nel seguente modo:

$$(5,7) \quad \operatorname{div} \tilde{\mathbf{E}} = \varrho + \frac{2}{c} \tilde{\mathcal{E}} \times \tilde{\omega}.$$

Per ottenere ora la formulazione relativa della seconda equazione del campo elettro-magnetico si potrebbe operare in modo analogo a quanto fatto per la prima. Possiamo però evitare di rifare i calcoli e scrivere immediatamente le equazioni che se ne ricaverrebbero se solo osserviamo che la seconda equazione differisce dalla prima per la mancanza del termine al secondo membro e per la sostituzione del tensore \mathbf{F} con il suo duale \mathcal{F} . Se allora ricordiamo quanto detto al § 4 riconosciamo che le equazioni cercate si ottengono da quelle già ricavate: (5,6) e (5,7) sostituendo al posto del vettore assiale $\tilde{\mathcal{E}}$ il vettore $-\tilde{\mathbf{E}}$ ed al posto del vettore $\tilde{\mathbf{E}}$ il vettore assiale $\tilde{\mathcal{E}}$ e cancellando i termini che contengono ϱ .

Possiamo così infine scrivere le equazioni del campo elettro-magnetico nella loro formulazione relativa; esse costituiscono nel loro complesso il seguente sistema:

$$(5,7) \quad \operatorname{div} \tilde{\mathbf{E}} = \varrho + \frac{2}{c} \tilde{\mathcal{E}} \times \tilde{\omega}$$

$$(5,8) \quad \operatorname{div} \tilde{\mathcal{E}} = -\frac{2}{c} \tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\omega}$$

$$(5,6) \quad \operatorname{rot} \tilde{\mathcal{E}} - \frac{1}{c\sqrt{\gamma}} \partial_{T_0} (\sqrt{\gamma} \tilde{\mathbf{E}}) = \frac{\varrho}{c} \tilde{\mathbf{v}} + \frac{1}{c^2} \tilde{\mathcal{E}} \wedge \mathbf{a}$$

$$(5,9) \quad \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}} + \frac{1}{c\sqrt{\gamma}} \partial_{T_0} (\sqrt{\gamma} \tilde{\mathcal{E}}) = \frac{1}{c^2} \tilde{\mathbf{E}} \wedge \tilde{\mathbf{a}}.$$

Se da queste equazioni si vogliono ottenere delle equazioni in forma scalare, basta considerare al posto delle equazioni del secondo gruppo, che sono vettoriali, quelle che da queste si ottengono eguagliando tra loro le componenti naturali in Σ_x dei vettori nei due membri. Si ottengono allora le seguenti equazioni le quali involgono soltanto le componenti naturali in Σ_x dei vettori o pseudo-vettori spaziali in gioco:

$$(5,7') \quad \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_\lambda (\sqrt{\gamma} \tilde{E}^\lambda) = \varrho + \frac{2}{c} \partial^e \tilde{\omega}_e$$

$$(5,8') \quad \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_\lambda (\sqrt{\gamma} \partial^{\tilde{\lambda}}) = -\frac{2}{c} \tilde{E}^e \tilde{\omega}_e$$

$$(5,6') \quad \frac{1}{\sqrt{\gamma}} (\partial_2 \partial_3 - \partial_3 \partial_2) - \frac{1}{c \sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial T_0} (\sqrt{\gamma} \tilde{E}^1) = \frac{\varrho}{c} \tilde{v}^1 + \frac{1}{c^2 \sqrt{\gamma}} (\partial_2 \tilde{a}_3 - \partial_3 \tilde{a}_2)$$

e altre due ottenute da questa per rotazione degli indici

$$(5,9') \quad \frac{1}{\sqrt{\gamma}} (\partial_2 \tilde{E}_3 - \partial_3 \tilde{E}_2) + \frac{1}{c \sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial T_0} (\sqrt{\gamma} \partial^{\tilde{1}}) = \frac{1}{c^2 \sqrt{\gamma}} (\tilde{E}_2 \tilde{a}_3 - \tilde{E}_3 \tilde{a}_2)$$

e altre due ottenute da questa per rotazione degli indici.

Non può sfuggire l'analogia fra le equazioni ora ottenute e le equazioni di MAXWELL, scritte in forma invariante per un cambiamento di coordinate interno al riferimento; anzi l'influenza del campo gravitazionale sul campo elettro-magnetico si esplica con la presenza nelle equazioni (5,7), (5,8), (5,6), (5,9) dei termini:

$$\frac{2}{c} \tilde{\mathcal{S}} \times \tilde{\omega}, \quad -\frac{2}{c} \tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\omega}, \quad \frac{1}{c^2} \tilde{\mathcal{S}} \wedge \tilde{\mathbf{a}}, \quad \frac{1}{c^2} \tilde{\mathbf{E}} \wedge \tilde{\mathbf{a}}$$

i quali si annullano se il riferimento è inerziale cioè se la congruenza di riferimento è normale e geodetica.

Nel caso che la congruenza sia normale e geodetica si può scegliere un sistema di coordinate (relative al riferimento fisico fissato) in modo che risulti $\gamma_e = 0$, $\gamma_4 = -1$ e quindi di conseguenza $T_0 = t$; se inoltre il sistema di riferimento è rigido (cfr. C. CATTANEO [4] § 15) risulta $\sqrt{\gamma} = \text{costante}$ rispetto alla variabile temporale e pertanto si può, mediante un cambio di coordinate puramente spaziale, fare in modo che sia $\sqrt{\gamma} = 1$.

Le equazioni assumono allora la forma più semplice :

$$\begin{aligned} \partial_\lambda \tilde{E}^\lambda &= \varrho & \partial_\lambda \tilde{\mathcal{B}}^\lambda &= 0 \\ \partial_2 \tilde{\mathcal{B}}_3 - \partial_3 \tilde{\mathcal{B}}_2 - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{E}^1 &= \frac{\varrho}{c} \tilde{v}^1 & \text{e analoghe} \\ \partial_2 \tilde{E}_3 - \partial_3 \tilde{E}_2 + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathcal{B}}^1 &= 0 & \text{e analoghe.} \end{aligned}$$

Questa forma è esattamente quella classica per gli spazi pseudo euclidei.

§ 6. — Le equazioni di Maxwell in un mezzo materiale.

Quando c'è induzione, il campo elettromagnetico macroscopico non è più rappresentato da un tensore solo ma dall'insieme dei due tensori doppi antisimmetrici :

tensore induzione magnetica-campo elettrico :

$$(6,1) \quad \mathbf{H} = \approx \mathcal{B} - \tilde{\mathbf{E}} \otimes \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma} \otimes \tilde{\mathbf{E}}$$

tensore campo magnetico-induzione elettrica :

$$(6,2) \quad \mathbf{G} = \approx \tilde{\mathcal{B}} - \tilde{\mathbf{D}} \otimes \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma} \otimes \tilde{\mathbf{D}} .$$

Supponiamo ora di usare come fluido di riferimento il mezzo materiale che produce l'induzione. Le equazioni del campo elettromagnetico sono allora le seguenti :

$$(6,3) \quad \nabla_i * H^{ki} = 0$$

$$(6,4) \quad \nabla_i G^{ki} = J^k .$$

Nel vettore

$$J^k = \varrho^* \gamma^k + \sigma \gamma_i H^{ik} = \varrho^* \gamma^k - \sigma \tilde{E}^k$$

si tiene conto anche della conduzione elettrica. Le due costanti ϱ^* e σ indicano rispettivamente la densità assoluta di carica e la conduttività elettrica.

Naturalmente i due tensori \mathbf{H} e \mathbf{G} sono legati tra loro da una relazione che esprime le proprietà elettromagnetiche del mezzo. Ad esempio se il mezzo è isotropo e non ferromagnetico il legame è espresso dalle equazioni:

$$(6,5) \quad \gamma^i G_{ik} = \varepsilon \gamma^i H_{ik}; \quad \mu \gamma^i * G_{ik} = \gamma^i * H_{ik}$$

dove le costanti ε , μ indicano rispettivamente il potere dielettrico e la permeabilità magnetica. (Cfr. A. Lichnerowicz [6] VIII).

La decomposizione dei tensori \mathbf{H} e \mathbf{G} ha già portato ad una espressione più significativa del vettore densità di corrente \mathbf{J} ; essa permette inoltre di dare alle equazioni (6,5) la forma classica:

$$(6,5') \quad \tilde{\mathbf{D}} = \varepsilon \tilde{\mathbf{E}}; \quad \tilde{\mathbf{B}} = \mu \tilde{\mathcal{S}}.$$

Proiettando ora le equazioni (6,1) e (6,2) sul sottospazio θ_x e sul sottospazio Σ_x si ottengono le equazioni relative del campo elettromagnetico in un mezzo materiale. Per confronto con i risultati già ottenuti riconosciamo immediatamente che queste equazioni formano nel complesso il seguente sistema:

$$(6,3') \quad \tilde{\text{div}} \tilde{\mathbf{B}} = -\frac{2}{c} \tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\omega}$$

$$(6,3'') \quad \tilde{\text{rot}} \tilde{\mathbf{E}} + \frac{1}{c\sqrt{\gamma}} \partial_{T_0} (\sqrt{\gamma} \tilde{\mathbf{B}}) = \frac{1}{c^2} \tilde{\mathbf{E}} \wedge \mathbf{a}$$

$$(6,4') \quad \tilde{\text{div}} \tilde{\mathbf{D}} = \varrho + \frac{2}{c} \tilde{\mathcal{S}} \times \tilde{\omega}$$

$$(6,4'') \quad \tilde{\text{rot}} \tilde{\mathcal{S}} - \frac{1}{c\sqrt{\gamma}} \partial_{T_0} (\sqrt{\gamma} \tilde{\mathbf{D}}) = -\sigma \tilde{\mathbf{E}} + \frac{1}{c^2} \tilde{\mathcal{S}} \wedge \mathbf{a}.$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] CATTANEO C. *General Relativity: Relative Standard Mass, Momentum, Energy and Gravitational Field in a General System of Reference*. «Nuovo Cimento» 10, 318 (1958).
- [2] CATTANEO C. *On the Energy Equation for a Gravitating Test Particle*. «Nuovo Cimento» 11, 733 (1959).
- [3] CATTANEO C. *Conservation Laws in General Relativity*. «Nuovo Cimento» 13, 237 (1959).
- [4] CATTANEO C. *Proiezioni naturali e derivazione trasversa in una varietà riemanniana a metrica iperbolica normale*. «Annali di Matematica pura ed applicata» 48, 361 (1959).
- [5] CATTANEO C. *Aspetti newtoniani della relatività generale*. Conferenza tenuta al Seminario matematico di Roma il 31 marzo 1960 (in corso di pubblicazione sui Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni (1960).
- [6] LICHNEROWICZ A. *Sur les équations relativistes de l'electro magnetisme*, «Annales de l'Ecole Normale Supérieure» (3) 60 f. 4 (1943).
- [7] LICHNEROWICZ A. *Theories relativistes de la gravitation et de l'electromagnetisme*. Masson Paris 1955.
- [8] MOLLER C. *The Theory of Relativity*. Clarendon Press Oxford 1952.