ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

CALOGERO VINTI

Espressioni che danno l'area di una superficie $z = f(x,y)$ in relazione al passaggio al limite sotto il segno

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 14, nº 1 (1960), p. 103-132

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1960_3_14_1_103_0>

ESPRESSIONI CHE DANNO L'AREA DI UNA SUPERFICIE $z = f(x, y)$ IN RELAZIONE AL PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO IL SEGNO

Nota di CALOGERO VINTI [1] (Palermo)

1. INTRODUZIONE. È noto [2] che per una curva rettificabile $\mathcal{C}: x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$, la lunghezza d'arco $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$ è data da:

$$(1) \qquad \mathcal{L}_{\mathcal{C}} = \lim_{h \to 0} \int_a^{b-h} \sqrt{\left[\frac{x(t+h) - x(t)}{h}\right]^2 + \left[\frac{y(t+h) - y(t)}{h}\right]^2}\, dt .$$

La proposizione tonelliana [3], la quale afferma che $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$ è data dall'integrale classico solo e quando le funzioni $x(t)$ e $y(t)$ sono AC in (a, b), assume allora l'aspetto di passaggio al limite sotto il segno, nella (1), valido soltanto nella classe delle curve AC, cioè di caratterizzazione di quelle curve rettificabili per le quali è valido nella (1) il passaggio al limite sotto il segno. L. Cardamone [4] ha studiato la caratterizzazione di quelle curve

---

(1) Lavoro eseguito nel Seminario di Analisi Matematica della Università di Palermo. Ringrazio il Prof. E. BAIADA par i consigli che mi ha dato.

(2) E. BAIADA: *La variazione totale, la lunghezza di una curva e l'integrale del calcolo delle variazioni in una variabile.* Atti. Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Fis. Mat. Nat. serie VIII, vol. XXII. pp. 584-588. anno 1957.

E. BAIADA e L. CARDAMONE: *La variazione totale e la lunghezza di una curva.* Annali Scuola Norm. Sup. di Pisa, vol. XI, pp. 29-71. anno 1957.

E. BAIADA: *Sulla convergenza in lunghezza delle medie integrali.* Annali di Mat. pura e applicata, (IV), vol. XLVIII. pp. 223-228. anno 1959.

(3) L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni.* vol. I° pag. 183 Zanichelli Editore Bologna.

(4) L. CARDAMONE: *Sulle espressioni che danno la lunghezza di una curva.* Atti, Accad. Sc. Lett. Arti. Palermo. (VI), vol, XVIII. pp. 269-275. anno 1957-58.

L. CARDAMONE: *Le formule di rettificazione, il passaggio al limite sotto il segno e le medie integrali.* Istituto Lombardo Accademia di Scienze e Lettere (in corso di stampa).

rettificabili per le quali nella (1) è possibile il passaggio al limite sotto il segno relativo soltanto ad uno solo dei rapporti incrementali, ad es. quello della $x(t)$, mostrando che se $x(t)$ è AC in (a, b), si ha:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{C}} = \lim_{h \to 0} \int_a^{b-h} \sqrt{x'^2(t) + \left[\frac{y(t+h) - y(t)}{h}\right]^2} \, dt, \tag{2}$$

e viceversa se è vera la (2), la $x(t)$ risulta AC in (a, b).

In questo lavoro ci proponiamo di studiare l'analoga questione per le superficie $z = f(x, y)$, $(x, y) \in Q\,[a_0 \leq x \leq b_0;\ c_0 \leq y \leq d_0]$, continue e ad area finita secondo Lebesgue, questione che porremo in termini precisi dopo aver fatto alcune considerazioni.

Detta $A(f, R)$ l'area della porzione di superficie $z = f(x, y)$ corrispondente al rettangolo $R\,[a \leq x \leq b;\ c \leq y \leq d]$ completamente immerso in Q, la proposizione analoga alla (1) non è sempre vera perchè in generale risulta [5]:

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} \iint_R \sqrt{1 + \left[\frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}\right]^2 + \left[\frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}\right]^2} \, dx\, dy \geq A(f, R), \tag{3}$$

ed il segno $=$ ha luogo allora e soltanto quando la $f(x, y)$ è ACY in R [6].

Riflettendo però sulla circostanza che la (1) può scriversi sotto la forma:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{C}} \doteq \lim_{h \to 0} \mathcal{L}_{\mathcal{C}_h},$$

essendo $\mathcal{C}_h : x = x_h(t) = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^h x(t+\eta)\, d\eta;\ y = y_h(t) = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^h y(t+\eta)\, d\eta$ la curva media integrale, la quale è manifestamente AC, l'estensione della (1)

---

(5) L. C. YOUNG: *An expression connected with the area of a surface* $z = F(x, y)$. Duke Math. Journal. fasc. II anno 1944 pp. 43-57.

T. RADÒ: *Length and Area.* American Mathematical Society Colloquium Publications. vol. XXX. anno 1948. pag. 536-V.3.37. e pag. 542-V.3.41.

(6) $f(x, y)$ dicesi ACY (assolutamente continua secondo L. C. YOUNG.) in R se sono verificate le seguenti condizioni.

i) $f(x, y)$ è $CVLT$ in R

ii) esistono due insiemi di BOREL B_1, B_2 tale che: a) f sia AC come funzione della x nell'insieme B_{1y} intersezione di B_1 con le rette orizzontali di quota y, per quasi tutti gli y di (c, d); b) f sia AC come funzione della y nell'insieme B_{2x} intersezione di B_2 con le rette verticali di piede x, per quasi tutti gli x di (a, b); c) $B_1 + B_2 = R$.

alle superficie $z = f(x, y)$ è possibile se si ricorre alle superficie medie integrali.

Considerata infatti la superficie $z = F_{h,k}(x, y) = \frac{1}{hk} \int_0^h \int_0^k f(x+\eta, y+t)\, d\eta\, dt$,

detta superficie media integrale, la quale è ACT (assolutamente continua secondo Tonelli) in R, risulta:

$$A(f, R) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} \iint_R \sqrt{1 + \widetilde{R}_h^2 + \widetilde{R}_k^2}\, dx dy, \tag{4}$$

essendo $\widetilde{R}_h = \frac{1}{k} \int_0^k \frac{f(x+h, y+t) - f(x, y+t)}{h} dt$, $\widetilde{R}_k = \frac{1}{h} \int_0^h \frac{f(x+\eta, y+k) - f(x, y+k)}{k} d\eta$,

le derivate parziali della $F_{h,k}(x, y)$ rispetto ad x e y [7].

Se la $f(x, y)$ è ACT in R, l'area è data dall'integrale classico (Tonelli) [8]:

$$A(f, R) = \iint_R \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\, dx\, dy,$$

e poichè in tal caso è: $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} \widetilde{R}_h \simeq f_x'$, $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} \widetilde{R}_k \simeq f_y'$, il teorema di Tonelli assume l'aspetto di teorema di passaggio al limite sotto il segno nella (4).

Cosa può dirsi se la f è AC rispetto ad x in (a, b) per quasi tutti gli y di (c, d), senza che sia AC rispetto ad y in (c, d) per quasi tutti gli x di (a, b)?

Poichè in tal caso è $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} \widetilde{R}_h \simeq f_x'$, possiamo dire che nella (4) è possibile il passaggio al limite sotto il segno relativo soltanto ad $\widetilde{R}_h$?

Risponderemo (nel N. 6) affermativamente mostrando che:

---

(7) La (4) per $h = k$ è stata mostrata da T. Radò: testo citato in (5), pp. 515-516; per h e k qualsivoglia la (4) è un caso particolare in un teorema assiomatico di convergenza in area dato da:

C. Vinti: *Sopra una classe di funzionali che approssimano l'area di una superficie.* Annali di Mat. pura ed Applicata. (IV), vol. XLVIII pp. 237-254 anno 1959. (Onoranze a G. Sansone).

(8) L. Tonelli: *Sulla quadratura delle superficie* (*Nota* 2⁰). Atti, Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sc. Fis. Mat. Nat. (6) 3, 633-638, anno 1926.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè risulti:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \iint_R \sqrt{1+f_x'^2+\tilde{R}_k^2}\,dx\,dy = A(f, R), \tag{5}$$

è che f sia AC rispetto ad x in (a, b) per quasi tutti gli y di (c, d).

Questa proposizione viene a caratterizzare le superficie per le quali l'area è data dalla (5).

Riprendiamo in considerazione la espressione a primo membro della (3):

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \iint_R \sqrt{1+\left[\frac{f(x+h, y)-f(x, y)}{h}\right]^2+\left[\frac{f(x, y+k)-f(x, y)}{k}\right]^2}\,dx\,dy \tag{6}$$

ed osserviamo che il motivo per il quale la (6) non dà l'area, nella classe $CVLT$, è dovuto esclusivamente alla presenza nella (6) di entrambi i rapporti incrementali, perchè se nella (6) lasciamo inalterato un solo rapporto incrementale, ad es. quello rispetto ad x, ed il rapporto incrementale rispetto ad y lo mediamo rispetto alla variabile x, allora la (6) così trasformata dà l'area. Ciò sarà dimostrato al N. 5, facendo vedere che:

$$\lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0} \iint_R \sqrt{1+\left[\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}\right]^2+\left[\frac{1}{h}\int_0^h \frac{f(x+\eta,y+k)-f(x+\eta,y)}{k}\,d\eta\right]^2}\,dx\,dy = A(\tag{7}$$

$$\lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0} \iint_R \sqrt{1+\left[\frac{1}{k}\int_0^k \frac{f(x+h,y+t)-f(x,y+t)}{h}\,dt\right]^2+\left[\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}\right]^2}\,dx\,dy = A(\tag{8}$$

Tenendo poi presente la caratterizzazione del Tonelli delle superficie per le quali l'area è data dall'integrale classico, possiamo dire che se nella (6) operiamo il passaggio al limite sotto il segno si ottiene l'area solo e quando f è ACT in R; il teorema di Tonelli caratterizza cioè quelle superficie per le quali operando nella (6) il passaggio al limite sotto il segno si ottiene l'area. Cosa può dirsi se nella (6) si opera il semi-passaggio al limite sotto il segno?, cioè è possibile caratterizzare quelle superficie per le quali operando nella (6) il passaggio al limite sotto il segno, relativo ad es. soltanto al rapporto incrementale rispetto ad x, l'espressione che così si ottiene dia l'area?

Risponderemo (nel N. 3) affermativamente mostrando che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè risulti:

$$\lim_{k \to 0} \iint_R \sqrt{1 + f_x'^2 + \left[\frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}\right]^2}\, dx\, dy = A(f, R),$$

è che f *si* AC *rispetto ad* x *in* (a, b) *per quasi tutti gli* y *di di* (c, d).

Faremo poi vedere (nel N. 4) che nella classe $CVLT$ l'area è data anche dalle seguenti espressioni:

$$\lim_{h \to 0} \lim_{k \to 0} \iint_R \sqrt{1 + \widetilde{R}_h^2 + \widetilde{\widetilde{R}}_k^2}\, dxdy = A(f, R), \tag{9}$$

$$\lim_{k \to 0} \lim_{h \to 0} \iint_R \sqrt{1 + \widetilde{R}_h^2 + \widetilde{\widetilde{R}}_k^2}\, dxdy = A(f, R), \tag{10}$$

mostrando che le formule (4), (7), (8), (9), (10) sono formule perfette, nel senso che se è: $A(f, R) = +\infty$, le espressioni a primo membro di ciascuna di dette formule sono pure $+\infty$, e viceversa se una delle espressioni a primo membro di una di tali formule è $+\infty$, è anche $A(f, R) = +\infty$.

Nel n. 6 caratterizzeremo anche quelle superficie per le quali l'area è data dalla

$$\lim_{k \to 0} \lim_{h \to 0} \iint_R \sqrt{1 + f_x'^2 + \widetilde{\widetilde{R}}_k^2}\, dx\, dy$$

facendo vedere che queste superficie sono soltanto quelle per le quali è f AC rispetto ad x in (a, b) per quasi tutti gli y di (c, d).

Per le dimostrazioni delle proposizioni enunciate ci serviremo, fra l'altro, del seguente lemma:

Dette $A_0(f, R)$, $g_1^0(f, R)$, $g_2^0(f, R)$ *le funzioni singolari di rettangolo dell'area e degli integrali di Tonelli, risulta:*

$$\text{estr. sup.} \sum_{i,j} \{g_1^{0^2}(f, r_{i,j}) + g_2^{0^2}(f, r_{i,j})\}^{\frac{1}{2}} = A^0(f, R),$$

essendo $r_{i,j}: i = 1, 2, 3, \ldots, n; j = 1, 2, 3, \ldots, m$; *una generica suddivisione di* R *in rettangoli* r_{ij} *con i lati paralleli a quelli di* R *e a due a due senza punti interi a comune.*

La dimostrazione di tale lemma la daremo al N. 2, e facciamo notare che nella letteratura non esistono proposizioni che stabiliscono relazioni di uguaglianza tra $A^0(f, R)$ ed $g_1^0(f, R), g_2^0(f, R)$, salvo nel caso che sia f ACT od ACY perchè allora risulta: $A^0(f, R) = g_1^0(f, R) + g_2^0(f, R)$.

Osserviamo infine che assegnata la funzione f in Q, e fissato un rettangolo R totalmente immerso in Q, spesso, per necessità algoritmiche, altereremo la legge di definizione della f fuori di R, definendo f fuori di R mediante simmetrie rispetto ai lati di R.

2. Supponiamo $f(x, y)$, d'ora in avanti, $CVLT$ in Q, e, per ogni rettangolo R immerso in Q, poniamo:

$$g_1(f, R) = \int_c^d V_x[f(x, y); a, b]\, dy, \quad g_2(f, R) = \int_a^b V_y[f(x, y); c, d]\, dx.$$

Le funzioni di rettangolo $g_1(f, R), g_2(f, R), A(f, R)$ si possono definire per ogni insieme B di Borel in Q, in modo che continuino ad essere non negative, completamente additive e continue [9].

Siano:

$$g_1(f, B) = \iint_B |f'_x|\, dx\, dy + g_1^0(f, B) \tag{11}$$

$$g_2(f, B) = \iint_B |f'_y|\, dx\, dy + g_2^0(f, B) \tag{12}$$

$$A(f, B) = \iint_B (f'^2_x + f'^2_y + 1)^{\frac{1}{2}}\, dx\, dy + A^0(f, B), \tag{13}$$

le decomposizioni di Lebesgue delle funzioni g_1, g_2, A.

Le funzioni singolari d'insieme $g_1^0(f, B), g_2^0(f, B), A^0(f, B)$, sono non negative e completamente additive.

È noto [10] che esiste un insieme e_0 di Borel, $e_0 \subset R$, $m(e_0) = 0$ tale che:

a) in $R - e_0$ le funzioni $g_1(f, B), g_2(f, B) (A(f, B)$ sono derivabili e le loro derivate sono rispettivamente $|f'_x|, |f'_y|, (f'^2_x + f'^2_y + 1)^{\frac{1}{2}}$.

b) $g_1^0(f, R) = g_1(f, e_0), g_2^0(f, R) = g_2(f, e_0), A^0(f, R) = A(f, e_0)$.

---

(9) T. RADÒ: testo citato in (5), pag. 184. III. 1.43.

(10) T. RADÒ: testo citato in (5). pag. 529. V. 3.28.

Dimostriamo il

LEMMA 2. *Qualunque sia il rettangolo* R *immerso in* Q, *risulta:*

$$\text{estr. sup.} \sum_{i,j} [g_1^{02}(f, r_{i,j}) + g_2^{02}(f, r_{i,j})]^{\frac{1}{2}} = A^0(f, R) \tag{14}$$

essendo $r_{i,j}$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$; $j = 1, 2, 3, \ldots, m$, *una generica suddivisione di* R *in rettangoli* $r_{i,j}$ *con i lati paralleli a quelli di* R *e a due a due senza punti interni a comune.*

Per l'uniforme sommabilità(11) in R della funzione $(f_x'^2 + f_y'^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$, in corrispondenza ad $\varepsilon > 0$ arbitrario esiste un $\delta(\varepsilon) > 0$ $(\delta < \varepsilon)$ tale che per ogni insieme misurabile $E \subset R$, con $m(E) < \delta$, risulti:

$$\iint_E (f_x'^2 + f_y'^2 + 1)^{\frac{1}{2}}\, dx\, dy < \varepsilon. \tag{15}$$

Essendo e_0 di misura nulla, esiste un insieme $\sum_{i,j} d_{i,j}$, $i = 1, 2, \ldots$; $j = 1, 2, \ldots$; costituito da un numero finito o da una infinità numerabile di rettangoli chiusi, aventi i lati paralleli a quelli di R, con $\sum_{i,j} |d_{i,j}| < \delta$, e tale che: $e_0 \subset \sum_{i,j} d_{i,j} \subset R$. Poichè è $e_0 \subset \sum_{i,j} d_{i,j}$ si ha (12):

$$\{g_1^2(f, e_0) + g_2^2(f, e_0)\}^{\frac{1}{2}} \leq \{g_1^2(f, \sum_{i,j} d_{i,j}) + g_2^2(f, \sum_{i,j} d_{i,j}) + (\sum_{i,j} |d_{i,j}|)^2\}^{\frac{1}{2}},$$

ed essendo $g_1(f, B)$, $g_2(f, B)$ funzioni d'insieme completamente additive, e tenuto conto di una nota disuguaglianza di Minkowski (13) risulta:

$$\{g_1^2(f, \sum_{i,j} d_{i,j}) + g_2^2(f, \sum_{i,j} d_{i,j}) + (\sum_{i,j} | d_{i,j} |)^2\}^{\frac{1}{2}} = \{[\sum_{i,j} g_1(f, d_{i,j})]^2 +$$

$$+ [\sum_{i,j} g_2(f, d_{i,j})]^2 + [\sum_{i,j} | d_{i,j} |]^2\}^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{i,j} \{g_1^2(f, d_{i,j}) + g_2^2(f, d_{i,j}) + | d_{i,j} |^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

---

(11) La sommabilità in Q della funzione $(f_x'^2 + f_y'^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$, sotto l'ipotesi che $z = f$ sia ad area finita in Q, è stata dimostrata da:

G. LAMPARIELLO: *Sulle superficie continue che ammettono area finita.* Atti. Acc. Naz. Lincei (6) 3, 357-362. anno 1926.

(12) T. RADÒ: testo citato in (5), pag. 183. III. 1.40. e pag. 184. III. 1.44.

(13) Cfr. G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD, G. POLYA: *Inequalities.* Cambridge. University. Press 1952 pag. 31.

Ma è:

$$\{g_1^2(f, d_{i,j}) + g_2^2(f, d'_{i,j}) + |d_{i,j}|^2\}^{\frac{1}{2}} \leq A(f, d_{i,j})\,(^{14}),$$

e quindi, in virtù delle attività della funzione $A(f, B)$, si ha:

$$\{g_1^2(f, e_0) + g_2^2(f, e_0)\}^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{i,j} A(f, d_{i,j}) = A(f, \sum_{i,j} d_{i,j}).$$

Da quest'ultima, tenuto conto della proprietà b) e della decomposizione 13), segue:

$$\{g_1^{0^2}(f, R) + g_2^{0^2}(f, R)\}^{\frac{1}{2}} \leq \iint_{\sum\limits_{i,j} d_{i,j}} (f_x'^2 + f_y'^2 + 1)^{\frac{1}{2}}\, dx\, dy + A^0(f, \sum_{i,j} d_{i,j}),$$

ed in virtù della (15) si ha:

$$\{g_1^{0^2}(f, R) + g_2^{0^2}(f, R)\}^{\frac{1}{2}} < \varepsilon + A^0(f, \sum_{i,j} d_{i,j}) \leq \varepsilon + A^0(f, R).$$

Tenuto poi conto dell'arbitrarietà di ε segue:

$$\{g_1^{0^2}(f, R) + g_2^{0^2}(f, R)\}^{\frac{1}{2}} \leq A^0(f, R).$$

Detta $r_{i,j}$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$, una suddivisione di R in rettangoli $r_{i,j}$, con i lati paralleli a quelli di R, e a due a due senza punti interni a comune, poichè la precedente è vera per ogni rettangolo $r_{i,j}$, si ha:

$$\text{estr. sup.} \sum_{i,j} \{g_1^{0^2}(f, r_{i,j}) + g_2^{0^2}(f, r_{i,j})\}^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{i,j} A^0(f, r_{i,j}) = A^0(f, R).$$

Se allora dimostriamo che:

$$\text{estr. sup.} \sum_{i,j} \{g_1^{0^2}(f, r_{i,j}) + g_2^{0^2}(f, r_{i,j})\}^{\frac{1}{2}} \geq A^0(f, R) \tag{16}$$

il lemma enunciato è dimostrato.

---

(14) L. TONELLI: *Sulla quadratura delle superficie* (Nota 1°). Atti Accad. Naz. Lincei (6) 3, 357-362, anno 1926.

In virtù delle decomposizioni 11), 12), e delle note disuguaglianze di Minkowski ([15]) è:

$$\sum_{i,j} \{g_1^2(f, r_{i,j}) + g_2^2(f, r_{i,j}) + |r_{i,j}|^2\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sum_{i,j} \left\{ \left[\iint_{r_{i,j}} |f'_x| \, dx\, dy + g_1^0(f, r_{i,j}) \right]^2 + \left[\iint_{r_{i,j}} |f'_y| \, dx\, dy + g_2^0(f, r_{i,j}) \right]^2 + |r_{i,j}|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \sum_{i,j} \left\{ \left(\iint_{r_{i,j}} |f'_x| \, dx\, dy \right)^2 + \left(\iint_{r_{i,j}} |f'_y| \, dx\, dy \right)^2 + |r_{i,j}|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \sum_{i,j} \{g_1^{0^2}(f, r_{i,j}) + g_2^{0^2}(f, r_{i,j})\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \sum_{i,j} \iint_{r_{i,j}} (f'^2_x + f'^2_y + 1)^{\frac{1}{2}} \, dx\, dy + \sum_{i,j} \{g_1^{0^2}(f, r_{i,j}) + g_2^{0^2}(f, r_{i,j})\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \iint_R (f'^2_x + f'^2_y + 1)^{\frac{1}{2}} \, dx\, dy + \sum_{i,j} \{g_1^{0^2}(f, r_{i,j}) + g_2^{0^2}(f, r_{i,j})\}^{\frac{1}{2}}.$$

Prendiamo ora, al variare della suddivisione $r_{i,j}$, l'estremo superiore del primo e dell'ultimo membro della precedente, e ricordiamo che l'estremo superiore del primo membro dà l'area $A(f, R)$, e che inoltre vale la decomposizione 13). Si ha:

$$\iint_R (f'^2_x + f'^2_y + 1)^{\frac{1}{2}} \, dx\, dy + A^0(f, R) \leq \iint_R (f'^2_x + f'^2_y + 1)^{\frac{1}{2}} \, dx\, dy +$$

$$+ \text{estr. sup.} \sum_{i,j} \{g_1^{0^2}(f, r_{i,j}) + g_2^{0^2}(f, r_{i,j})\}^{\frac{1}{2}},$$

e questa non è altro che la 16).

([15]) Cfr. testo citato in 13).

3. Supponiamo sempre $f(x, y)$ $CVLT$ in Q, supponiamo inoltre che il rettangolo R sia completamente immerso in Q, e poniamo $R_k = \dfrac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}$, con $0 < k < \min(d_0 - d, c - c_0)$. Dimostriamo in questo numero il

TEOREMA 1. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè risulti:*

$$\lim_{k \to 0} \iint_R \sqrt{1 + f_x'^2 + R_k^2}\, dx\, dy = A(f, R), \tag{17}$$

è che $f(x, y)$ sia AC rispetto ad x in (a, b) per quasi tutti gli y di (c, d).

Necessità. Siano $\Omega_1(\lambda)$, $\Omega_2(\lambda)$ rispettivamente i confini superiori degli insiemi $\iint_E |f_x'|\, dx\, dy$, $\iint_E |f_y'|\, dx\, dy$ al variare di E in Q, con $m(E) < \lambda$, λ essendo un numero positivo. Per l'uniforme sommabilità delle funzioni f_x', f_y', in corrispondenza ad $\varepsilon > 0$ esiste un $\lambda(\varepsilon) > 0$ $(\lambda < \varepsilon)$, tale che risulti: $\Omega_1(\lambda(\varepsilon)) \leq \varepsilon$, $\Omega_2(\lambda(\varepsilon)) \leq \varepsilon$. Se e_0 è l'insieme di Borel introdotto al N. 2, in $R - e_0$ esiste f_y', e quindi per ogni successione $k_n \to 0$ è: $\lim_{n \to \infty} \dfrac{f(x, y+k_n) - f(x, y)}{k_n} = f_y'(x, y)$, $(x, y) \in R - e_0$.

Fissata una successione $k_n \to 0$, in virtù del noto teorema di Severini-Egorov, esiste un insieme chiuso C contenuto in $R - e_0$, con $m(R - e_0) - m(c) < \lambda(\varepsilon)$, e tale che in C la successione $\dfrac{f(x, y+k_n) - f(x, y)}{k_n}$ converga uniformemente ad f_y'. Se denotiamo con e l'insieme di Borel $R - C$, risulta $m(e) < \lambda(\varepsilon)$, e si ha:

$$\iint_R \sqrt{1 + f_x'^2 + R_{k_n}^2}\, dx\, dy = \iint_C \sqrt{1 + f_x'^2 + R_{k_n}^2}\, dx\, dy +$$

$$+ \iint_e \sqrt{1 + f_x'^2 + R_{k_n}^2}\, dx\, dy \leq$$

$$\leq \iint_C \sqrt{1 + f_x'^2 + R_{k_n}^2}\, dx\, dy + m(e) + \iint_e |f_x'|\, dx\, dy + \iint_e |R_{k_n}|\, dx\, dy \leq$$

$$\leq \iint_C \sqrt{1 + f_x'^2 + R_{k_n}^2}\, dx\, dy + \lambda(\varepsilon) + \Omega_1(\lambda(\varepsilon)) + \iint_e |R_{k_n}|\, dx\, dy .$$

Essendo poi [16]:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \iint_e |R_{k_n}|\, dx\, dy \leq \Omega_2(\lambda(\varepsilon)) + g_2^0(f, R),$$

si ha:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \iint_R \sqrt{1+f_x'^2+R_{k_n}^2}\, dx\, dy \leq \iint_C \sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}\, dx\, dy +$$

$$+ \lambda(\varepsilon) + \Omega_1(\lambda(\varepsilon)) + \Omega_2(\lambda(\varepsilon)) +$$

$$+ g_2^0(f, R) \leq \iint_R \sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}\, dx\, dy + 3\varepsilon + g_2^0(f, R),$$

e poichè ε è arbitrario e arbitraria è pure la successione $k_n \to 0$, segue:

$$\overline{\lim_{k\to 0}} \iint_R \sqrt{1+f_x'^2+R_k^2}\, dx\, dy \leq \iint_R \sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}\, dx\, dy + g_2^0(f, R).$$

Ammessa vera la (17), in virtù della decomposizione (13) e della disuguaglianza sopra ottenuta, si deduce:

$$\iint_R \sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}\, dx\, dy + A^0(f, R) \leq \iint_R \sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}\, dx\, dy + g_2^0(f, R),$$

da cui:

$$A^0(f, R) \leq g_2^0(f, R).$$

Tenendo ora presente il lemma 1., si ha:

$$\{g_1^{0^2}(f, R) + g_2^{0^2}(f, R)\}^{\frac{1}{2}} \leq A^0(f, R) \leq g_2^0(f, R),$$

e quindi:

$$g_1^0(f, R) = 0.$$

La $f(x, y)$ è dunque AC rispetto ad x in (a, b) per quasi tutti gli y di (c, d).

---

(16) T. RADÒ: testo citato in 5), pag. 531; V. 3.33.

Sufficienza. Per mostrare la sufficienza adopereremo il seguente

LEMMA 2. *Se $f(x)$ è continua e a variazione limitata in (a_0, b_0), preso comunque un intervallo (a, b) interno ad (a_0, b_0), è:*

$$\int_a^b \left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right| dx \leq \frac{1}{h} \int_0^h V[f(x); a+\eta, b+\eta]\, d\eta,$$

per ogni $0 < h < b_0 - b$, e dove $V[f(x); a+\eta, b+\eta]$ *è la variazione totale di $f(x)$ nell'intervallo $(a+\eta, b+\eta)$* [17].

Definiamo nel rettangolo $[a \leq x \leq b + b - a;\ c_0 \leq y \leq d_0]$ la funzione $f^*(x, y)$ con la seguente legge: $f^*(x, y) = f(x, y)$ nel rettangolo $[a \leq x \leq b;\ c_0 \leq y \leq d_0]$; nel rettangolo $[b \leq x \leq b + b - a;\ c_0 \leq y \leq d_0$ definiamo $f^*(x, y)$ mediante simmetria rispetto al lato $x = b$. Poichè f *è* AC rispetto ad x in (a, b) per quasi tutti gli y di (c, d), f^* sarà AC rispetto ad x in $(a, 2b-a)$ per quasi tutti gli y di (c, d); f^* risulta allora ACY in R, e per un noto risultato di L. C. Young [18] è:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \iint_R \sqrt{1 + \left[\frac{f^*(x+h, y) - f^*(x, y)}{h}\right]^2 + \left[\frac{f^*(x, y+k) - f^*(x, y)}{k}\right]^2}\, dx\, dy =$$
$$= A(f^*, R) = A(f, R).$$

Osservando che per $(x, y) \in R$ è: $\dfrac{f^*(x,y+k)-f^*(x,y)}{k} = \dfrac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}$,

la (18) per $h = k$ si scrive:

$$\lim_{k\to 0} \iint_R \sqrt{1 + R_k^{*2} + R_k^2}\, dx\, dy = A(f, R),$$

ove s'è posto: $R_k^* = \dfrac{f^*(x+k, y) - f^*(x, y)}{k}$.

La sufficienza resta provata se mostriamo che:

$$\lim_{k\to 0} \left| \iint_R \sqrt{1 + R_k^{*2} + R_k^2}\, dx\, dy - \iint_R \sqrt{1 + f_x'^2 + R_k^2}\, dx\, dy \right| = 0.$$

---

[17] Per la dimostrazione di tale lemma cfr. C. VINTI nota citata in 7).

[18] L. C. YOUNG nota citata in 5).

Osserviamo che:

$$\left| \iint_R \sqrt{1 + R_k^{*2} + R_k^2}\, dx\, dy - \iint_R \sqrt{1 + f_x'^2 + R_k^2}\, dx\, dy \right| \leq$$

$$\leq \iint_R \sqrt{| R_k^{*2} - f_x'^2 |}\, dx\, dy ,$$

e per una nota relazione di Schwarz risulta:

$$\iint_R \sqrt{| R_k^{*2} - f_x'^2 |}\, dx\, dy \leq \sqrt{\iint_R | R_k^* + f_x' |\, dx\, dy} \cdot \sqrt{\iint_R | R_k^* - f_x' |\, dx\, dy} . \tag{19}$$

Ma è:

$$\iint_R | R_k^* + f_x' |\, dx\, dy \leq \iint_R | R_k^* |\, dx\, dy + \iint_R | f_x' |\, dx\, dy ,$$

e poichè:

$$\lim_{k \to 0} \iint_R | R_k^* |\, dx\, dy = g_1(f^*, R)\ ^{(19)} ,$$

ne segue che il primo fattore a secondo membro della (19) è limitato al tendere di k a zero.

La sufficienza resta allora dimostrata se proviamo che:

$$\lim_{k \to 0} \iint_R | R_k^* - f_x' |\, dx\, dy = 0 . \tag{20}$$

Poichè $\lim\limits_{k \to 0} R_k^* = f_x'$, quasi ovunque in R, la (20) è vera se si prova la uniforme sommalità in R della funzione $R_k^* - f_x'$, e poichè f_x' è uniformemente sommabile in R, basta mostrare la uniforme sommabilità in R della funzione R_k^*.

È noto [20] che la funzione di rettangolo $g_1(f^*, R)$, essendo f^* AC rispetto ad x in $(a, 2b - a)$ per quasi tutti gli y di (c, d), è assolutamente continua nel rettangolo $R^* \equiv [a \leq x \leq 2b - a ; c \leq y \leq d]$, quindi in corrispon-

---

(19) Cfr. T. RADÒ: testo citato in 5), pag. 528, V. 3. 26.

(20) Cfr. S. SAKS: *Theory of the Integral.* Monografie Mathematyczne Kamitet Redakcyjny. Tom. VII. Hafner Pubtishing Company New York pag. 174, 6. 1. e pag. 121, 7. 8.

denza ad $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta(\varepsilon) > 0$, tale che per ogni sistema di rettangoli $\sum_{i,j} r_{i,j} \subset R^*$, $r_{i,j} \equiv [a_i \leq x \leq b_i\,;\, c_j \leq y \leq d_j]$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$, a due a due senza punti interni a comune, con i lati paralleli a quelli di R^*, con $\sum_{i,j} | r_{i,j} | < \delta(\varepsilon)$ si ha:

$$\sum_{i,j} g_1(f^*, r_{i,j}) < \varepsilon . \tag{21}$$

Consideriamo allora un sistema di rettangoli $\sum_{i,j} r_{i,j}$, $\subset R$, $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$, a due a due senza punti interni a comune, con i lati paralleli a quelli di R, con $\sum_{i,j} | r_{i,j} | < \delta(\varepsilon)$, e supponiamo $0 < k < b - a$.

Si ha, in virtù del Lemma 2.,

$$\sum_{i,j} \iint_{r_{i,j}} | R_k^* | \, dx\, dy = \sum_{i,j} \int_{c_j}^{d_j} dy \int_{a_i}^{b_i} \left| \frac{f^*(x + k, y) - f^*(x, y)}{k} \right| dx \leq$$

$$\leq \sum_{i,j} \frac{1}{k} \int_0^k d\eta \int_{c_j}^{d_j} V_x [f^*(x, y);\, a_i + \eta,\, b_i + \eta] \, dy = \frac{1}{k} \int_0^k \sum_{i,j} g_1(f^*, r_{i,j}^{\eta}) \, d\eta,$$

avendo denotato con $r_{i,j}^{\eta}$ il rettangolo $[a_i + \eta \leq x \leq b_i + \eta\,;\, c_j \leq y \leq d_j]$.

E poichè i rettangoli $\sum_{i,j} r_{i,j}^{\eta}$ non hanno a due a due punti interni a comune, ed è: $\sum_{i,j} r_{i,j}^{\eta} \subset R^*$, $\sum_{i,j} | r_{i,j}^{\eta} | < \delta(\varepsilon)$, la precedente in virtù della (21) ci dà:

$$\sum_{i,j} \iint_{r_{i,j}} | R_k^* | \, dx\, dy < \varepsilon,$$

e quindi R_k^* risulta uniformemente sommabile in R.

4. Definiamo nel rettangolo $R^* \equiv [a \leq x \leq b + b - a\,;\, c \leq y \leq d + d - c]$ la funzione $f^*(x, y)$ con la seguente legge: $f^*(x, y) = f(x, y)$ per $(x, y) \in R$; nel rettangolo $[b \leq x \leq b + b - a;\, c \leq y \leq d]$ definiamo f^* con una simmetria rispetto ad $x = b$; indi definiamo f^* nel rettangolo $[a \leq x \leq 2b - a;\, c \leq y \leq 2d - c]$ mediante una simmetria rispetto al lato $y = d$. D'ora in avanti con R^* e f^* denoteremo il rettangolo e la funzione definiti come sopra, e supporremo sempre, come già detto al N. 2, f *CVLT* in Q. Considerata la superficie media integrale: $z = F_{h,k}(x, y) = \frac{1}{h\,k} \int_0^h \int_0^k f^*(x + \eta, y + t) \, d\eta \, dt$, $(x, y) < R$, $0 < h <$

$< b - a$, $0 < k < d - c$, la quale è ACT in R, si ha:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} A(F_{h,k}, R) = A(f, R) \text{ [21]}. \tag{22}$$

Posto:

$$\widetilde{R}_h^* = \frac{1}{k}\int_0^k \frac{f^*(x+h, y+t) - f(x, y+t)}{h}\, dt, \quad \widetilde{R}_k^* = \frac{1}{h}\int_0^h \frac{f^*(x+\eta, y+k) - f^*(x+\eta, y)}{k}\, d\eta,$$

$\widetilde{R}_h^*$, $\widetilde{R}_k^*$ rappresentano rispettivamente le derivate parziali della $F_{h,k}(x, y)$ rispetto ad x e y, e la (22) si scrive:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \iint_R \sqrt{1 + \widetilde{R}_h^{*2} + \widetilde{R}_k^{*2}}\, dx\, dy = A(f, R) \tag{23}$$

Dimostramo il seguente

Teorema 2. Con i simboli posti risulta:

$$\lim_{h\to 0} \lim_{k\to 0} \iint_R \sqrt{1 + \widetilde{R}_h^{*2} + \widetilde{R}_k^{*2}}\, dx\, dy = A(f, R) \text{ [22]}. \tag{24}$$

Consideriamo la superficie $z = f_h^*(x, y) = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^h f^*(x + \eta, y)\, d\eta$, $(x, y) \in R$, $0 <$ $< h < b - a$.

Poichè la funzione f_h^* è, per ogni h, AC rispetto ad x in (a, b) per tutti gli y di (c, d), in virtù del Teorema 1. risutta:

$$A(f_h^*, R) = \lim_{k\to 0} \iint_R \sqrt{1 + \left[\frac{f^*(x+h, y) - f(x, y)}{h}\right]^2 + \left[\frac{1}{h}\int_0^h \frac{f^*(x+\eta, y+k) - f^*(x+\eta, y)}{k}\, d\eta\right]^2}\, dx\, dy =$$

([21]) Tale risultato è un caso particolare di un teorema dato da C. Vinti: nota citata in 7).

([22]) Tale teorema si può dimostrare per via diretta seguendo un ragionamento che permette di raggiungere anche il teorema dato dalla (23); qui riportiamo questa dimostrazione.

$$= \lim_{k \to 0} \iint_R \sqrt{1 + R_h^{*2} + \widetilde{R}_k^{*2}}\, dx\, dy,$$

avendo posto: $R_h^* = \dfrac{f^*(x + h, y) - f^*(x, y)}{h}$.

Mostriamo ora che per $0 < h < b - a$, esiste il limite:

$$\lim_{k \to 0} \iint_R \sqrt{1 + \widetilde{R}_h^{*2} + \widetilde{R}_k^{*2}}\, dx\, dy, \tag{26}$$

ed è:

$$\lim_{k \to 0} \iint_R \sqrt{1 + \widetilde{R}_h^{*2} + \widetilde{R}_k^{*2}}\, dx\, dy = \lim_{k \to 0} \iint_R \sqrt{1 + R_h^{*2} + \widetilde{R}_k^{*2}}\, dx\, dy. \tag{27}$$

Infatti si ha:

$$\left| \iint_R \sqrt{1 + \widetilde{R}_h^{*2} + \widetilde{R}_k^{*2}} dx\, dy - \iint_R \sqrt{1 + R_h^{*2} + \widetilde{R}_k^{*2}}\, dx\, dy \right| \leq \iint_R \sqrt{\left| \widetilde{R}_h^{*2} - R_h^{*2} \right|}\, dx\, dy,$$

e, per una nota relazione di Schwarz, quest'ultima viene ad essere maggiorata coma segue:

$$\left| \iint_R \sqrt{1 + \widetilde{R}_h^{*2} + \widetilde{R}_k^{*2}}\, dx\, dy - \iint_R \sqrt{1 + R_h^{*2} + \widetilde{R}_k^{*2}}\, dx\, dy \right| \leq \tag{28}$$

$$\leq \sqrt{\iint_R \left| \widetilde{R}_h^* + R_h^* \right| dx\, dy} \cdot \sqrt{\iint_R \left| \widetilde{R}_h^* - R_h^* \right| dx\, dy}\,.$$

E poichè per ogni $0 < h < b - a$, a causa della continuità uniforme in R della funzione $\dfrac{f^*(x + h, y) - f^*(x, y)}{h}$, si ha:

$$\lim_{k \to 0} \widetilde{R}_h^* = \lim_{k \to 0} \frac{1}{k} \int_0^k \frac{f^*(x + h, y + t) - f^*(x, y + t)}{h}\, dt = \frac{f^*(x + h, y) - f^*(x, y)}{h}$$

uniformemente in R, ne segue che il limite per $k \to 0$ del primo fattore a secondo membro della (28) è finito, mentre quello del secondo fattore è zero. La (27) è allora dimostrata.

Osserviamo ora che la funzione f_h^* tende, per $h \to 0$, ad f^* uniformemente in R, e quindi in virtù della semicontinuità inferiore dell'area secondo Lebesgue, risulta:

$$\underline{\lim}_{h \to 0} A\,(f_h^*, R) \geq A\,(f^*, R) = A\,(f, R).$$

E questa, tenuto conto delle (25), (27), si scrive:

$$\underline{\lim}_{h \to 0} \lim_{k \to 0} \iint_R \sqrt{1 + \tilde{R}_h^{*2} + \tilde{R}_k^{*2}}\, dx\, dy \geq A\,(f, R) \tag{29}$$

D'altra parte, essendo vera la (23), in corrispoupenza ad $\varepsilon > 0$ arbitrario esistono un $\overline{h} > 0$ e un $\overline{k} > 0$ tali che per $0 < h < \overline{h}$, $0 < k < \overline{k}$, si ha:

$$\iint_R \sqrt{1 + \tilde{R}_h^{*2} + \tilde{R}_k^{*2}}\, dx\, dy < A\,(f, R) + \varepsilon.$$

E poichè esiste il limite del primo membro di quest'ultima per $k \to 0$, deduciamo:

$$\overline{\lim_{h \to 0}} \lim_{k \to 0} \iint_R \sqrt{1 + \tilde{R}_h^{*2} + \tilde{R}_k^{*2}} \leq A\,(f, R)$$

Questa assieme alla (29) ci dà la (24).

Analogamente si mostra il seguente

TEOREMA 3. Con i simboli posti risulta:

$$\lim_{k \to 0} \lim_{h \to 0} \iint_R \sqrt{1 + \tilde{R}_h^{*2} + \tilde{R}_k^{*2}}\, dx\, dy = A\,(f, R). \tag{30}$$

OSSERVAZIONE I. Le formule (23), (24), (30) sono delle formule perfette. Infatti supposto $A\,(f, R) = +\infty$, e quindi $A\,(f^*, R) = +\infty$ (f in tal caso non è VLT in R), poichè $F_{h,k}\,(x, y)$ tende uniformemente ad $f^*\,(x, y)$ in R, e l'area è semicontinua inferiormente, risulta:

$$\underline{\lim}_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} \iint_R \sqrt{1 + \tilde{R}_h^{*2} + \tilde{R}_k^{*2}}\, dx\, dy \geq +\infty,$$

e quindi:

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} \iint_R \sqrt{1 + \tilde{R}_h^{*2} + \tilde{R}_k^{*2}}\, dx\, dy = +\infty. \tag{31}$$

Viceversa se è vera la (31), non può risultare $A\,(f, R)$ finita perchè in tal caso f sarebbe $CVLT$ in R e per la (23) si avrebbe:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \iint_R \sqrt{1+\widetilde{R}_h^{*2}+\widetilde{R}_k^{*2}}\,dx\,dy = A\,(f, R) < +\infty .$$

Analogamente si mostra che le formule (24), (30) sono perfette.

5. In questo numero diamo delle espressioni, per il calcolo dell'area, che sono intermedie tra la espressione a primo membro della (3) e le espressioni a primo membro delle (24), (30), e le formule che otteniamo sono perfette.

TEOREMA 4. Con i simboli posti al N. 4. risulta:

$$A\,(f, R) = \lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0} \iint_R \sqrt{1+\left[\frac{f^*(x+h,y)-f^*(x,y)}{h}\right]^2+\left[\frac{1}{h}\int_0^h \frac{f^*(x+\eta,y+k)-f^*(x+\eta,y)}{k}\,d\eta\right]^2}\,dx\,dy =$$

$$= \lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0} \iint_R \sqrt{1+R_h^{*2}+\widetilde{R}_k^{*2}}\,dx\,dy.$$

Questa proposizione è conseguenza immediata delle (27), (24). Infatti, essendo vera la (27), basta prendere in entrambi i membri della (27) il limite per $h \to 0$ (tale limite esiste in virtù della (24)) e tenere presente la (24).

Analogamente si mostra il seguente

TEOREMA 5. Con i simboli posti al N. 4. risulta:

$$A\,(f, R) = \lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0} \iint_R \sqrt{1+\left[\frac{1}{k}\int_0^k \frac{f^*(x+h,y+t)-f^*(x,y+t)}{h}\,dt\right]^2+\left[\frac{f^*(x,y+k)-f^*(x,y)}{k}\right]^2}\,dx\,dy =$$

$$\lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0} \iint_R \sqrt{1+\widetilde{R}_h^{*2}+R_k^{*2}}\,dx\,dy .$$

6. Supposto sempre f $CVLT$ in Q, in questo numero dimostreremo due teoremi. Il primo è il seguente.

TEOREMA 6. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè risulti:*

$$\lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0}\iint_R \sqrt{1 + f_x'^2 + \widetilde{R}_k^{*2}}\, dx\, dy = A(f, R) \tag{32}$$

è che f sia AC rispetto ad x in (a, b) per quasi tutti gli y di (c, d).

Necessità. Poichè, per ogni $0 < k < d - c$, essendo $\dfrac{f^*(x, y + k) - f^*(x, y)}{k}$ uniformemente continua in R, è:

$$\lim_{h\to 0} \widetilde{R}_k^* = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^h \frac{f^*(x + \eta, y + k) - f^*(x + \eta, y)}{k}\, d\eta = \frac{f^*(x,y+k) - f^*(x,y)}{k}, \tag{33}$$

uniformemente in R, tenuto conto che in R è: $f_x^{*\prime} \simeq f_x'$, si ha:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\iint_R \sqrt{1 + f_x'^2 + \widetilde{R}_k^{*2}}\, dx\, dy = \\ = \iint_R \sqrt{1 + f_x^{*\prime 2} + \left[\frac{f^*(x, y + k) - f^*(x, y)}{k}\right]^2}\, dx\, dy.\end{aligned} \tag{34}$$

Allora dalla (32), in virtù della (34), segue:

$$\lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0}\iint_R \sqrt{1 + f_x'^2 + \widetilde{R}_k^{*2}}\, dx\, dy =$$

$$= \lim_{k\to 0}\iint_R \sqrt{1 + f_x^{*\prime 2} + \left[\frac{f^*(x, y + k) - f^*(x, y)}{k}\right]^2}\, dx\, dy = A(f, R) = A(f^*, R).$$

Questa, tenuto conto del Teorema 1., ci dice che f^* è AC rispetto ad x in (a, b) per quasi tutti gli y di (c, d), e poichè in R è: $f = f^*$, la necessità è dimostrata.

Sufficienza. Sotto l'ipotesi che f sia AC rispetto ad x in (a, b) per quasi tutti gli y di (c, d), mostriamo le due disuguaglianze:

$$\underline{\lim_{k\to 0}}\ \lim_{h\to 0}\iint_R \sqrt{1 + f_x'^2 + \widetilde{R}_k^{*2}}\, dx\, dy \geq A(f, R) \tag{35}$$

$$\overline{\lim_{k\to 0}}\ \lim_{h\to 0} \iint_R \sqrt{1 + f_x'^2 + \widetilde{R}_k^{*2}}\, dx\, dy \leq A\,(f\,,R) \tag{36}$$

dalle quali segue manifestamente la (32).

Per mostrare la (35) suddividiamo il rettangolo R in parti rettangolari $r_{i,j}$ a lati paralleli a quelli di R, mediante le suddivisioni:

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b\,; \quad c = c_0 < c_1 < c_2 < \ldots < c_m = d\,.$$

Si ha:

$$\iint_R \sqrt{1 + f_x'^2 + \widetilde{R}_k^{*2}}\, dx\, dy = \sum_{i,j} \iint_{r_{i,j}} (1 + f_x'^2 + \widetilde{R}_k^{*2})^{\frac{1}{2}}\, dx\, dy\,,$$

e applicando al secondo membro la disuguaglianza di Minkowski si avrà:

$$\begin{aligned}&\iint_R \sqrt{1 + f_x'^2 + \widetilde{R}_k^{*2}}\, dx\, dy \geq \\ &\geq \sum_{i,j} \left\{ \left(\iint_{r_{i,j}} |f_x'|\, dx\, dy \right)^2 + \left(\iint_{r_{i,j}} |\widetilde{R}_k^*|\, dx\, dy \right)^2 + \left(\iint_{r_{i,j}} dx\, dy \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{37}$$

Osserviamo ora che in virtù della (33) è:

$$\lim_{h\to 0} \iint_{r_{i,j}} |\widetilde{R}_k^*|\, dx\, dy = \iint_{r_{i,j}} \left| \frac{f^*(x\,, y + k) - f^*(x\,, y)}{k} \right| dx\, dy\,,$$

e prendendo in entrambi i membri il $\underline{\lim}$ per $k \to 0$, in virtù di un risultato di T. Radò [23], otteniamo:

$$\underline{\lim_{k\to 0}}\ \lim_{h\to 0} \iint_{r_{i,j}} |\widetilde{R}_k^*|\, dx\, dy = g_2\,(f^*\,, r_{i,j})\,.$$

Poichè inoltre, essendo f AC rispetto ad x per quasi tutti gli y di $(c\,, d)$, è:

$$\iint_{r_{i,j}} |f_x'|\, dx\, dy = \iint_{r_{i,j}} |f_x^{*\prime}|\, dx\, dy = g_1\,(f^*, r_{i,j})\,,$$

([23]) T. RADÒ: testo citato in 5), pag. 528, V. 3. 26.

dalla (37), prendendo prima il limite per $h \to 0$, che esiste per entrambi i membri, indi il $\underline{\lim}$ per $k \to 0$, si ha:

$$\varliminf_{k\to 0} \lim_{h\to 0} \iint_R \sqrt{1 + f_x'^2 + \widetilde{R}_k^{*2}}\, dx\, dy \geq \sum_{i,j} \{g_1^2(f^*, r_{i,j}) + g_2^2(f^*, r_{i,j}) + |r_{i,j}|^2\}^{\frac{1}{2}}$$

Ma il secondo membro di quest'ultima si può rendere prossimo quanto si vuole ad $A(f^*, R) = A(f, R)$, e quindi la (35) è dimostrata.

Per mostrare la (36), faremo uso del seguente

LEMMA 3. *Se* $f_j(x)$ $(j = 1, 2, 3)$ *sono tre funzioni definite, non negative ed integrabili sull'intervallo* (a, b), con $f_3(x) = 1$, *allora è*:

$$\int_a^b \left(\sum_{j=1}^3 f_j^2(x)\right)^{\frac{1}{2}} dx \leq \varliminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2^n} \left\{ \sum_{j=1}^3 \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} f_j(x)\, dx \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

dove $\{a_i\}$, $i = 1, 2, 3, \dots, 2^n$ $(a_1 = a, a_{2^n} = b)$ *è una suddivisione di* (a, b) *in* 2^n *parti uguali* ([24]).

In virtù di tale lemma si ha:

$$\int_a^b (f_x'^2 + \widetilde{R}_k^{*2} + 1)^{\frac{1}{2}} dx \leq \varliminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2^n} \left\{ \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} |f_x'|\, dx \right)^2 + \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} |\widetilde{R}_k^*|\, dx \right)^2 + \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} dx \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Integriamo entrambi i membri di tale disuguaglianza sull'intervallo (c, d), e va osservato che ciò è possibile perchè il secondo membro è maggiorato dalla seguente funzione integrabile:

$$\int_a^b |f_x'|\, dx + \int_a^b |\widetilde{R}_k^*|\, dx + b - a.$$

Avremo:

$$\int_c^d dy \int_a^b (f_x'^2 + \widetilde{R}_k^{*2} + 1)^{\frac{1}{2}} dx \leq$$

(38)

$$\leq \int_c^d dy \left[\varliminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2^n} \left\{ \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} |f_x'|\, dx \right)^2 + \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} |\widetilde{R}_k^*|\, dx \right)^2 + \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} dx \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

([24]) Di tale lemma se ne conosce un rafforzamento ulteriore, cfr. T. RADÒ: testo citato in 5), pp. 187-188; III. 1. 50.

e, per un noto lemma di Fatou [25], se al secondo membro il limite si porta fuori il segno d'integrale e poi si scambia l'algoritmo di somma con quello d'integrazione, si ha:

$$\int_c^d dy \int_a^b (f'^2_x + \widetilde{R}^{*2}_k + 1)^{\frac{1}{2}} dx \leq$$

$$\leq \lim_{\overline{n\to\infty}} \sum_{i=1}^{2^n} \int_c^d dy \left\{ \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} |f'_x| \, dx \right)^2 + \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} |\widetilde{R}^*_k| \, dx \right)^2 + \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} dx \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Applicando ancora il lemma 3. all'integrale a secondo membro, si avrà:

$$(39) \quad \begin{aligned} \int_c^d dy \int_a^b (f'^2_x + \widetilde{R}^{*2}_k + 1)^{\frac{1}{2}} dx \leq \lim_{\overline{n\to\infty}} \lim_{\overline{m\to\infty}} \sum_{i=1}^{2^n} \sum_{j=1}^{2^m} \left\{ \left(\int_{c_j}^{c_{j+1}} \int_{a_i}^{a_{i+1}} |f'_x| \, dx \, dy \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\int_{c_j}^{c_{j+1}} \int_{a_i}^{a_{i+1}} |\widetilde{R}^*_k| \, dx \, dy \right)^2 + \left(\int_{c_j}^{c_{j+1}} \int_{a_i}^{a_{i+1}} dx \, dy \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

ove (c_j, c_{j+1}) è la j^{esima} parte della suddivisione di (c, d) in 2^m parti uguali. Computiamo la differenza:

$$(40) \quad \begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^{2^n} \sum_{j=1}^{2^m} \left\{ \left(\iint_{r_{i,j}} |\widetilde{R}^*_h| \, dx \, dy \right)^2 + \left(\iint_{r_{i,j}} |\widetilde{R}^*_k| \, dx \, dy \right)^2 + |r_{i,j}|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} - \right. \\ & \left. - \sum_{i=1}^{2^n} \sum_{j=1}^{2^m} \left\{ \left(\iint_{r_{i,j}} |f'_x| \, dx \, dy \right)^2 + \left(\iint_{r_{i,j}} |\widetilde{R}^*_k| \, dx \, dy \right)^2 + |r_{i,j}|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right| \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^{2^n} \sum_{j=1}^{2^m} \left| \left(\iint_{r_{i,j}} |\widetilde{R}^*_h| \, dx \, dy \right)^2 - \left(\iint_{r_{i,j}} |f'_x| \, dx \, dy \right)^2 \right|^{\frac{1}{2}} = \\ & = \sum_{i=1}^{2^n} \sum_{j=1}^{2^m} \left| \iint_{r_{i,j}} |\widetilde{R}^*_h| \, dx \, dy - \iint_{r_{i,j}} |f'_x| \, dx \, dy \right|^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\iint_{r_{i,j}} |\widetilde{R}^*_h| \, dx \, dy + \iint_{r_{i,j}} |f'_x| \, dx \, dy \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

avendo denotato con $r_{i,j}$ il rettangolo $[a_i \leq x \leq a_{i+1};\ c_j \leq y \leq c_{j+1}]$.

---

[25] Cfr. per es. Saks: testo citato in 20) pag. 29.

Poichè, per una nota disuguaglianza di Schwarz ([26]), è:

(41) $$\sum_{i=1}^{2^n}\sum_{j=1}^{2^m}\left|\iint_{r_{i,j}}|\tilde{R}_h^*|\,dx\,dy-\iint_{r_{i,j}}|f'_x|\,dx\,dy\right|^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\cdot\left[\iint_{r_{i,j}}|\tilde{R}_h^*|\,dx\,dy+\iint_{r_{i,j}}|f'_x|\,dx\,dy\right]^{\frac{1}{2}}\leq\left\{\sum_{i=1}^{2^n}\sum_{j=1}^{2^m}\left|\iint_{r_{i,j}}|\tilde{R}_h^*|\,dx\,dy-\iint_{r_{i,j}}|f'_x|\,dx\,dy\right|\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\cdot\left\{\sum_{i=1}^{2^n}\sum_{j=1}^{2^m}\left[\iint_{r_{i,j}}|\tilde{R}_h^*|\,dx\,dy+\iint_{r_{i,j}}|f'_x|\,dx\,dy\right]\right\}^{\frac{1}{2}},$$

il secondo membro della (41) maggiora ulteriormente il primo membro della (40). Osserviamo ora che:

$$\left\{\sum_{i=1}^{2^n}\sum_{j=1}^{2^m}\iint_{r_{i,j}}|\tilde{R}_h^*|\,dx\,dy+\iint_{r_{i,j}}|f'_x|\,dx\,dy\right\}^{\frac{1}{2}}=\left\{\iint_R|\tilde{R}_h^*|\,dx\,dy+\iint_R|f'_x|\,dx\,dy\right\}^{\frac{1}{2}},$$

e poichè, in virtù del lemma 2., è:

$$\iint_R|\tilde{R}_h^*|\,dx\,dy\leq\frac{1}{hk}\int_0^h d\eta\int_0^k dt\int_c^d V_x\,[f^*(x, y+t);\ a+\eta;\ b+\eta]\,dy\leq$$

$$\leq\frac{1}{hk}\int_0^h d\eta\int_0^k dt A\,(f^*, R^*)=A\,(f^*, R^*),$$

essendo $0<h<b-a$, $0<k<d-c$, ed inoltre è:

$$\iint_R|f'_x|\,dx\,dy\leq A\,(f, R)\leq A\,(f^*, R^*),$$

ne segue:

(42) $$\left\{\sum_{i=1}^{2^n}\sum_{j=1}^{2^m}\iint_{r_{i,j}}|\tilde{R}_h^*|\,dx\,dy+\iint_{r_{i,j}}|f'_x|\,dx\,dy\right\}^{\frac{1}{2}}\leq\sqrt{2\,.\,A\,(f^*, R^*)}=M.$$

([26]) Cfr. per es. C. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD, G. POLYA: testo citato in 13) pag, 3: 1.3.2.

Il secondo fattore a secondo membro della (41), qualunque siano h, k, è allora limatato superiormente dal numero M.

Valutiamo ora il primo fattore a secondo membro della (41). Si ha:

$$(43) \qquad \left\{ \sum_{i=1}^{2^n} \sum_{j=1}^{2^m} \left| \iint_{r_{i,j}} | \widetilde{R}_h^* | \, dx \, dy - \iint_{r_{i,j}} | f_x' | \, dx \, dy \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left\{ \sum_{i=1}^{2^n} \sum_{j=1}^{2^m} \iint_{r_{i,j}} | \widetilde{R}_h^* - f_x' | \, dx \, dy \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \iint_R | \widetilde{R}_h^* - f_x' | \, dx \, dy \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Facilmente si mostra che:

$$(44) \qquad \lim_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} \iint_R | \widetilde{R}_h^* - f_x' | \, dx \, dy = 0.$$

Infatti, poichè f^* è AC rispetto ad x in $(a, 2b - a)$ per quasi tutti gli y di $(c, 2d - c)$, e quindi quasi ovunque in R è: $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} \widetilde{R}_h^* = f_x' = f_x^{*\prime}$, la funzione integranda della (44) tende a zero quasi ovunque in R al tendere di h e k a zero.

Se allora proviamo la uniforme sommabilità in R della funzione:

$$\varphi(x, y; h, k) = \widetilde{R}_h^* = \frac{1}{k} \int_0^k \frac{f^*(x + h, y + t) - f^*(x, y + t)}{h} \, dt$$

dipendente dai parametri h e k, essendo f_x' uniformemente sommabile in R, la (44) è dimostrata.

Tale uniforme sommabilità si prova seguendo l'analogo ragionamento che s'è fatto al N. 3. (sufficienza del Teorema 1.) per mostrare l'uniforme sommabilità in R della funzione R_k^*.

Basta osservare che essendo f^* AC rispetto ad x in $(a, 2b - a)$ per quasi tutti gli y di $(c, 2d - c)$, $g_1(f^*, R)$ è assolutamente continua in R^*, e quindi in corrispondenza ad $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni sistema di rettangoli $\sum\limits_{i,j} d_{i,j} \subset R^*$, $d_{i,j} \equiv [p_i \leq x \leq q_i;\, u_j \leq y \leq v_j]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$, a due a due senza punti interni a comune, con i lati paralleli a quelli di R^*, con $\sum\limits_{i,j} | d_{i,j} | < \delta(\varepsilon)$, si abbia:

$$(45) \qquad \sum_{i,j} g_1(f^*, d_{i,j}) < \varepsilon.$$

Considerato allora un sistema di rettangoli $\sum_{i,j} d_{i,j} \subset R$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$ a due a due senza punti interni a comune, con i lati paralleli a quelli di R, con $\sum_{i,j} |d_{i,j}| < \delta(\varepsilon)$, in virtù del lemma 2., si ha:

$$\sum_{i,j} \iint_{d_{i,j}} |\varphi(x, y; h, k)| \, dx \, dy \leq \sum_{i,j} \frac{1}{hk} \int_0^h d\eta \int_0^k dt \int_{u_j}^{v_j} V_x [f^*(x, y+t); p_i + \eta, q_i + \eta] \, dy =$$

$$= \frac{1}{hk} \int_0^h d\eta \int_0^k dt \sum_{i,j} g_1(f^*, d_{i,j}^{\eta t})$$

avendo denotato con $d_{i,j}^{\eta t}$ il rettangolo $[p_i + \eta \leq x \leq q_i + \eta;\ u_j + t \leq y \leq v_j + t]$. E poichè i rettangoli $d_{i,j}^{\eta t}$ non hanno a due a due punti interni a comune, ed è $\sum_{i,j} d_{i,j}^{\eta t} \subset R^*$, $\sum_{i,j} |d_{i,j}^{\eta t}| < \delta(\varepsilon)$, la precedente in virtù della (45) ci dà:

$$\sum_{i,j} \iint_{d_{i,j}} |\varphi(x, y; h, k)| \, dx \, dy < \varepsilon,$$

e quindi $\varphi(x, y, h, k)$ risulta uniformemente sommabile in R.

Essendo allora vera la (44), in corrispondenza ad $\varepsilon > 0$ esistono un $\bar{h} > 0$ e un $\bar{k} > 0$ tali che per $0 < h < \bar{h}$, $0 < k < \bar{k}$, risulti:

$$\iint_R |\tilde{R}_h^* - f'_x| \, dx \, dy < \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^2, \tag{46}$$

e dalla (40), in virtù delle (41), (42), (43), (46), per $0 < h < \bar{h}$, $0 < k < \bar{k}$, si deduce:

$$\sum_{i=1}^{2^n} \sum_{j=1}^{2^m} \left\{ \left(\iint_{r_{i,j}} |f'_x| \, dx \, dy \right)^2 + \left(\iint_{r_{i,j}} |\tilde{R}_k^*| \, dx \, dy \right)^2 + |r_{i,j}|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \varepsilon +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2^n} \sum_{j=1}^{2^m} \left\{ \left(\iint_{r_{i,j}} |\tilde{R}_h^*| \, dx \, dy \right)^2 + \left(\iint_{r_{i,j}} |\tilde{R}_k^*| \, dx \, dy \right)^2 + |r_{i,j}|^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

e ancora dalla (39), in virtù di quest'ultima disuguaglianza, sempre per $0 < h < \overline{h}$, $0 < k < \overline{k}$, si ha:

$$\int_c^d dy \int_a^b (f_x'^2 + \widetilde{R}_k^{*2} + 1)^{\frac{1}{2}} dx < \varepsilon +$$

$$+ \varlimsup_{n\to\infty} \varlimsup_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{2^n} \sum_{j=1}^{2^m} \left\{ \left(\iint_{r_{i,j}} | \widetilde{R}_h^* | \, dx\, dy \right)^2 + \left(\iint_{r_{i,j}} | \widetilde{R}_k^{*2} | \, dx\, dy \right)^2 + | r_{i,j} |^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Ma dal lemma 2. si deduce:

$$\iint_{r_{i,j}} | \widetilde{R}_h^* | \, dx\, dy \leq \frac{1}{hk} \int_0^h d\eta \int_0^k dt \int_{c_j}^{c_{j+1}} V_x [f^*(x, y+t)\,;\, a_i + \eta,\, a_{i+1} + \eta] \, dy =$$

$$= \frac{1}{hk} \int_0^h \int_0^k g_1 (f^*, r_{i,j}^{\eta t}) \, d\eta dt,$$

$$\iint_{r_{i,j}} | \widetilde{R}_k^* | \, dx\, dy \leq \frac{1}{hk} \int_0^h d\eta \int_0^k dt \int_{a_i}^{a_{i+1}} V_y [f^*(x+\eta, y)\,;\, c_j + t,\, c_{j+1} + t] \, dx =$$

$$= \frac{1}{hk} \int_0^h \int_0^k g_2 (f^*, r_{i,j}^{\eta t}) \, d\eta\, dt,$$

avendo denotato con $r_{i,j}^{\eta t}$ il rettangolo $[a_i + \eta \leq x \leq a_{i+1} + \eta\,;\, c_j + t \leq y \leq c_{j+1} + t]$, e allora dalla (47), tenuto conto di tali disuguaglianze, per $0 < h < \overline{h}$, $0 < k < \overline{k}$, si ha:

$$\int_c^d dy \int_a^b (f_x'^2 + \widetilde{R}_k^{*2} + 1)^{\frac{1}{2}} dx < \varepsilon +$$

$$+ \varlimsup_{n\to\infty} \varlimsup_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{2^n} \sum_{j=1}^{2^m} \left\{ \left(\frac{1}{hk} \int_0^h \int_0^k g_1 (f^*, r_{i,j}^{\eta t}) \, d\eta\, dt \right)^2 + \left(\frac{1}{hk} \int_0^h \int_0^k g_2 (f^*, r_{i,j}^{\eta t}) \, d\eta\, dt \right)^2 + \left(\frac{1}{hk} \int_0^h \int_0^k | r_{i,j} | \, d\eta\, dt \right)^2 \right\}$$

Applichiamo ora alla espressione in parentesi graffa la disuguaglianza di Minkowski; per $0 < h < \bar{h}$, $0 < k < \bar{k}$, otteniamo:

$$\int_c^d dy \int_a^b (f_x'^2 + \widetilde{R}_k^{*2} + 1)^{\frac{1}{2}} dx < \varepsilon +$$

$$+ \lim_{\overline{n \to \infty}} \lim_{\overline{m \to \infty}} \sum_{i=1}^{2^n} \sum_{j=1}^{2^m} \frac{1}{hk} \int_0^h d\eta \int_0^k dt \, \{g_1^2 (f^*, r_{i,j}^{\eta t}) + g_2^2 (f^*, r_{i,j}^{\eta t}) + | r_{i,j}^{\eta t} |^2\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \varepsilon + \lim_{\overline{n \to \infty}} \lim_{\overline{m \to \infty}} \frac{1}{hk} \int_0^h d\eta \int_0^k dt \sum_{i=1}^{2^n} \sum_{j=1}^{2^m} \{g_1^2 (f^*, r_{i,j}^{\eta t}) + g_2^2 (f^*, r_{i,j}^{\eta t}) + | r_{i,j}^{\eta t} |^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Denotando con $R^{\eta t}$ il rettangolo: $[a + \eta \leq x \leq b + \eta;\ c + t \leq y \leq d + t]$, poichè l'integrando all'ultimo membro della precedente non supera $A(f^*, R^{\eta t})$ (27), ed è poi $A(f^*, R^{\eta t}) \leq A(f^*, R_{\bar{h}, \bar{k}})$, essendo $R_{\bar{h}, \bar{k}}$ il rettangolo $[a \leq x \leq b + \bar{h},\ c \leq y \leq d + \bar{k}]$, dalla (48), per $0 < h < \bar{h}$, $0 < k < \bar{k}$, segue:

$$\iint_R (f_x'^2 + \widetilde{R}_k^{*2} + 1)^{\frac{1}{2}} dx\, dy < \varepsilon + A(f^*, R_{\bar{h}, \bar{k}}). \tag{49}$$

Osserviamo ora che in corrispondenza ad $\varepsilon > 0$ esistono un $h' > 0$ ed un $k' > 0$, tali che per $0 < h < h'$, $0 < k < k'$, è:

$$A(f^*, R_{h,k}) < A(f, R) + \varepsilon \ (^{28}). \tag{50}$$

Si può allora supporre che $\bar{h}(\varepsilon)$, $\bar{k}(\varepsilon)$ siano stati scelti in modo tale da risultare: $\bar{h}(\varepsilon) < h'$, $\bar{k}(\varepsilon) < k'$; dalla (49), in virtù della (50), per $0 < h < \bar{h}$, $0 < k < \bar{k}$, segue:

$$\iint_R \sqrt{1 + f_x'^2 + \widetilde{R}_k^{*2}}\, dx\, dy < 2\varepsilon + A(f, R),$$

(27) Cfr. L. TONELLI: nota citata in (14).

(28) Tale proposizione è stata dimostrata nel lavoro di C. VINTI: nota citata in (7).

e poichè esiste il limite del primo membro di quest'ultima per $h \to 0$ (è stato dimostrato in questo numero, formula (34)), si deduce:

$$\overline{\lim_{k\to 0}} \lim_{h\to 0} \iint_R \sqrt{1 + f_x'^2 + \tilde{R}_k^{*2}}\, dx\, dy \leq 2\varepsilon + A(f, R).$$

Tenuto conto della arbitrarietà di ε, la (36) è dimostrata.

Dimostriamo infine il seguente

TEOREMA 7. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè risulti:*

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \iint_R \sqrt{1 + f_x'^2 + \tilde{R}_k^{*2}}\, dx\, dy = A(f, R) \tag{51}$$

è che f sia AC rispetto ad x in (a, b) per quasi tutti gli y di (c, d).

Necessità. Dalla (51) segue che in corrispondeuza ad $\varepsilon > 0$ esistono un $\bar{h} > 0$ ed un $\bar{k} > 0$, tali che per $0 < h < \bar{h}$, $0 < k < \bar{k}$, risulti:

$$A(f, R) - \varepsilon < \iint_R \sqrt{1 + f_x'^2 + \tilde{R}_k^{*2}}\, dx\, dy < A(f, R) + \varepsilon, \tag{52}$$

e poichè esiste: $\lim_{h\to 0} \iint_R \sqrt{1 + f_x'^2 + \tilde{R}_k^{*2}}\, dx\, dy$ (è stato dimostrato in questo numero, formula (34)), dalla (52) passando al limite per $h \to 0$ otteniamo:

$$A(f, R) - \varepsilon \leq \lim_{h\to 0} \iint_R \sqrt{1 + f_x'^2 + \tilde{R}_k^{*2}}\, dx\, dy \leq A(f, R) + \varepsilon,$$

ed ancora:

$$A(f, R) - \varepsilon \leq \underline{\lim_{k\to 0}} \lim_{h\to 0} \iint_R \sqrt{1 + f_x'^2 + \tilde{R}_k^{*2}}\, dx\, dy \leq$$

$$\leq \overline{\lim_{k\to 0}} \lim_{h\to 0} \iint_R \sqrt{1 + f_x'^2 + \tilde{R}_k^{*2}}\, dx\, dy \leq A(f, R) + \varepsilon.$$

Data l'arbitrarietà di ε risulta allora:

$$\lim_{k\to 0} \lim_{h\to 0} \iint_R \sqrt{1 + f_x'^2 + \tilde{R}_k^{*2}}\, dx\, dy = A(f, R).$$

ed in virtù del Teorema 6, ne segue che f è AC rispetto ad x in (a, b) per quasi tutti gli y di (c, d).

Sufficienza. La sufficienza è provata se mostriamo che:

$$(53)\qquad \lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \left| \iint_R \sqrt{1 + \widetilde{R}_h^{*2} + \widetilde{R}_k^{*2}}\, dx\, dy - \iint_R \sqrt{1 + f_x'^2 + \widetilde{R}_k^{*2}}\, dx\, dy \right| = 0 .$$

Analogamente a come si è proceduto al N. 4 (dimostrazione del Teorema 2) si ottiene la disuguaglianza:

$$(54)\qquad \left| \iint_R \sqrt{1 + \widetilde{R}_h^{*2} + \widetilde{R}_k^{*2}}\, dx\, dy - \iint_R \sqrt{1 + f_x'^2 + \widetilde{R}_k^{*2}}\, dx\, dy \right| \leq$$

$$\leq \iint_R \sqrt{|\widetilde{R}_h^{*2} - f_x'^2|}\, dx\, dy \leq \sqrt{\iint_R |\widetilde{R}_h^{*} + f_x'|\, dx\, dy} \cdot \sqrt{\iint_R |\widetilde{R}_h^{*} - f_x'|\, dx\, dy} .$$

E poiche dalla (42) si ha: $\sqrt{\iint_R |\widetilde{R}_h^{*} + f_x'|\, dx\, dy} \leq M$, ed inoltre, essendo f AC rispetto ad x in (a, b) per quasi tutti gli y di (c, d), è vera la (44), cioè è: $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \iint_R |\widetilde{R}_h^{*} - f_x'|\, dx\, dy = 0$, la (53) è provata.

Osservazione 2. La sufficienza del Teorema 6, si può dimostrare direttamente come segue.

Dalla (54), tenendo presente la (42), si deduce:

$$(55)\qquad \left| \iint_R \sqrt{1+\widetilde{R}_h^{*2}+\widetilde{R}_k^{*2}}\, dxdy - \iint_R \sqrt{1+ f_x'^2+\widetilde{R}_k^{*2}}\, dxdy \right| \leq M \cdot \sqrt{\iint_R |\widetilde{R}_h^{*}-f_x'|\, dx\, dy} .$$

Essendo f AC rispetto ad x in (a, b) per quasi tutti gli y di (c, d), è vera la (44), quindi in corrispondenza ad $\varepsilon > 0$ esistono un $\bar{h} > 0$ e un $\bar{k} > 0$ tali che per $0 < h < \bar{h}$, $0 < k < \bar{k}$, risulti:

$$(56)\qquad \left| \iint_R \sqrt{1 + \widetilde{R}_h^{*2} + \widetilde{R}_k^{*2}}\, dx\, dy - \iint_R \sqrt{1 + f_x'^2 + \widetilde{R}_k^{*2}}\, dx\, dy \right| < \varepsilon .$$

Osservando ora che esiste il limite del primo membro della (56) per $h \to 0$ (è stato dimostrato al N. 3, formula (27), e in questo numero, formula (34)), dalla (56) si deduce:

$$\underline{\lim_{k\to 0}} \lim_{h\to 0} \left| \iint_R \sqrt{1+\widetilde{R}_h^{*2}+\widetilde{R}_k^{*2}}\, dx\, dy - \iint_R \sqrt{1+f_x'^2+\widetilde{R}_k^{*2}}\, dx\, dy \right| \leq$$

$$\leq \overline{\lim_{k\to 0}} \lim_{h\to 0} \left| \iint_R \sqrt{1+\widetilde{R}_h^{*2}+\widetilde{R}_k^{*2}}\, dx\, dy - \iint_R \sqrt{1+f_x'^2+\widetilde{R}_k^{*2}}\, dx\, dy \right| \leq \varepsilon,$$

cioè

$$\lim_{k\to 0} \lim_{h\to 0} \iint_R \sqrt{1+\widetilde{R}_h^{*2}+\widetilde{R}_k^{*2}}\, dx\, dy = \lim_{k\to 0} \lim_{h\to 0} \iint_R \sqrt{1+f_x'^2+\widetilde{R}_k^{*2}}\, dx\, dy.$$

E poichè, in virtù del Teorema 3. il primo membro di quest'ultima dà l'area $A(f, R)$, la sufficienza resta provata.