ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

SALVATORE CHERUBINO

Sulle radici r^{me} e sul quasi-logaritmo di una matrice singolare

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 13, nº 3 (1959), p. 373-388

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1959_3_13_3_373_0>

SULLE RADICI r^{me} E SUL QUASI-LOGARITMO DI UNA MATRICE SINGOLARE

di SALVATORE CHERUBINO (a Pisa)

In una Memoria del 1954 (1) ho introdotto la nozione di logaritmo di una matrice complessa non singolare, in relazione alle proprietà di permutabilità delle parti principale e complementare della matrice stessa. In una Nota lincea del 1956 (2) ho dato la risoluzione completa dell'equazione $e^X = A$ ed ho considerato le radici r^{me} di A, sempre nel caso della matrice A non singolare. In entrambe il logaritmo principale di A si indica con $\lg A$, mentre la soluzione generale di $e^X = A$ viene indicata con $\log A$.

In un'ampia Memoria del 1909 il CECIONI (3) studia, fra l'altro, le radici r^{me} di una matrice, anche singolare, servendosi della nozione di divisori elementari e della forma canonica di JORDAN, mentre qui lo scrivente fa uso principalmente, come nei due lavori cit. (1) e (2), della nozione di segnatura e della forma canonica stabilita nel 1936 in una Nota lincea (4), conseguendo semplificazioni e complementi non privi di qualche interesse.

In questa Memoria ricerco le radici r^{me} delle matrici singolari oppure no aggiungiendo osservazioni utili per le applicazioni, almeno in casi particolari.

Quanto alla nozione di logaritmo, è abbastanza evidente a *priori* che essa non può stabilirsi, in modo soddisfacente anche per le applicazioni,

---

(1) S. CHERUBINO : *Permutabilità e logavitmi delle matrici* [Rend. Matem., s. V, vol. XIII (Roma, 1954) pp. 221-238].

(2) S. CHERUBINO : *Logaritmi e radici* r^{me} *di matrici non singolari* [Rend. Lincei, s. VIII, vol. XX (Roma, genn. 1956) pp. 24-29].

(3) F. CECIONI : *Sopra alcune operazioni algebriche sulle matrici* (tesi di abilitazinne) [Ann. Sc. Norm. Pisa, vol. XI (1909) pp. 1-140], cap. III, pp. 84-137.

(4) S. CHERUBINO : *Sulla riduzione delle matrici a forma canonica.* Nota I e II [Rend. Lincei, s. VI, vol. XXIII (Roma, 1936) pp. 478-482 e pp. 647-653].

se non per le matrici non singolari (5). Perciò, qui si dà una nozione alquanto diversa, che diciamo *quasi-logaritmo* (principale e non) derivante da quella di *nucleo* di una matrice, del quale è il logaritmo; il nucleo essendo sempre una matrice non singolare, coincidente con la data se questa è non singolare (6).

§ 1. — Alcune proprietà delle radici r^{me}.

1. — Si consideri, nel campo complesso, l'equazione:

$$X^r = A \tag{1.1}$$

con A matrice complessa data, di ordine n, X matrice incognita ed r numero naturale (assoluto) assegnato.

---

(5) Nel caso non singolare, la nozione di logaritmo principale della matrice $C=D+J$, forma canonica di A (D e J parti principale e complementare) è fondata sulla convergenza della serie logaritmica $\lg(1+z)$ per $z = \frac{J}{D} = D^{-1}J = JD^{-1}$, convergenza assicurata dal che le radici caratteristiche di $\frac{J}{D}$, essendo tutte zero, appartengono al campo di convergenza della serie $\lg(1+z)$. Nel caso singolare, ad es. per $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ si ha:

$$C = I_2 + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = I_2 + \mathcal{B}$$

e la serie

$$\frac{1}{1}\mathcal{B} - \frac{1}{2}\mathcal{B}^2 + \frac{1}{3}\mathcal{B}^3 - \frac{1}{4}\mathcal{B}^4 + \dots \tag{γ}$$

non è convergente, perchè le radici caratteristiche di $\mathcal{B}$ sono entrambe esterne al campo di convergenza della serie logaritmica. Precisamente si ha:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \dots$$

matrice i cui due elementi diagonali sono entrambi eguali a $-\infty$ e l'elemento non diagonale diverso da zero è $+\infty$. Se si scambia $\mathcal{B}$ con $-\mathcal{B}$, le sue radici caratteristiche, entrambe eguali a $+1$, fanno convergere la serie logaritmica, ma la serie (γ) in matrici viene ad essere una matrice i cui elementi principali [vedi E. CESARO: *Analisi algebrica* [Torino, Bocca, (1894)] cap. XXIV, pp. 147-148] sono eguali a $-\lg 2$, mentre il terzo elemento diverso da zero risulta indeterminato (serie $1-1+1-1+\dots$).

(6) Sulla nozione di nucleo, in relazione alla permutabilità ed alle radici r^{me} converrà ritornare in altra ricerca.

Sia X_0 la forma canonica 1936 (7) di X, ottenuta con la trasformazione mediante la matrice $H : X_0 = H^{-1} X H$. La componente di X_0 relativa alla radice caratteristica α_1 di X, il cui indice è j e di segnatura $k_j \leqq k_{j-1} \leqq \leqq \ldots \leqq k_1$, si scrive:

$$
(1.2) \qquad X_{0,\alpha_1} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c}
\alpha_1 I_{k_j} & I_{k_j} \vdots \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\hline
\mathbf{0} & \alpha_1 I_{k_{j-1}} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\hline
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\hline
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \alpha_1 I_{k_2} & I_{k_2} \vdots \mathbf{0} \\
\hline
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \alpha_1 I_{k_1}
\end{array}\right]
$$

Elevando a potenza r^{ma} si ha:

$$
(1.3) \qquad X_{0,\alpha_1}^r = \left[\begin{array}{c|c|c|c}
\alpha_1^r I_{k_j} & \binom{r}{1} \alpha_1^{r-1} I_{k_j} \vdots \mathbf{0} & \cdots & \binom{r}{j} \alpha_1^{r-j} I_{k_j} \vdots \mathbf{0} \\
\hline
\mathbf{0} & \alpha_1^r I_{k_{j-1}} & \cdots & \binom{r}{j-1} \alpha_1^{r-j+1} I_{k_{j-1}} \vdots \mathbf{0} \\
\hline
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\hline
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \alpha_1^r I_{k_1}
\end{array}\right]
$$

In questa (1.3) i simboli binominali $\binom{r}{s}$ s'intendono eguali a zero se $s > r$.

La radice caratteristica α_1 di X è perciò radice r^{ma} di una radice caratteristica α di A, ossia di $A_0 = H^{-1} A H$ (9).

---

(7) Diciamo forma canonica 1936, per distinguerla da quella di JORDAN, la forma stabilita nelle due Note del 1936 cit (4).

(8) Cfr. il nostro *Calcolo delle Matrici* [Monografie del CNR, Cremonese, Roma (1957)] cap. II, § 4, n. 23, formula (34), p. 170.

(9) Trasformando con H, la (1.1) si scrive $X_0^r = A_0$, quindi X_{0,α_1}^r è una componente di A_0.

Diciamo m il numero delle radici r^{me} di α che sono radici caratteristiche di X_0, cioè sianvi m radici caratteristiche distinte di X_0, siano esse $\alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{(m)}$, che sono radici r^{me} di α. Indichiamo con

$$[k_1^{(s)} \leqq k_2^{(s)} \leqq \ldots \leqq k_{i_s}^{(s)}]; \tag{1.4}$$

la segnatura di X_0 rispetto ad $\alpha^{(s)}$, $s = 1, 2, \ldots, m$; siano:

$$i_1 \leqq i_2 \leqq \ldots \leqq i_m \tag{1.5}$$

gli indici di $\alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{(m)}$ in X_0 e completiamo con zeri le segnature delle $\alpha^{(s)}$ i cui indici sono minori di i_m, scrivendo gli zeri ai primi posti nelle (1.4).

Se $\alpha \neq 0$, si avrà che questa radice caratteristica di $A_0 = X_0^r$, ossia di A, avrà per interi della propria segnatura in A le somme degli intieri corrispondenti delle m segnature (1.4) ([10]) e la componente $A_{0,\alpha}$ di A_0 relativa alla radice caratteristica α di A sarà composta con le m potenze r^{me} $X_{0,\alpha'}^r$, $X_{0,\alpha''}^r, \ldots, X_{0,\alpha^{(m)}}^r$.

Se $\alpha = 0$, si ha $\alpha' = \alpha'' \ldots \alpha^{(m)}$, cioè $m = 1$. Se $r < j$, indice di $\alpha_1 = 0$ in X_0, nella (1.3) saranno nulle le matrici delle prime r caselle di ciascuna striscia, cioè si avrà:

$$X_{0,0}^r = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
0 & \cdots & I_{k_j} \vdots 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline
0 & \cdots & 0 & I_{k_{j-1}} \vdots 0 & \cdots & 0 \\ \hline
\vdots & & \vdots & \vdots & & \cdots \\ \hline
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & I_{k_{j-r}} \vdots 0 \\ \hline
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline
0 & & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{array}\right]. \tag{1.6}$$

Siano q ed r_1 il quoziente ed il resto della divisione di j per r, ossia $j = qr + r_1$, $r_1 < r$. Gli interi della segnatura della radice $\alpha = 0$ di $X_{0,0}^r$

([10]) Cfr. il trattato cit. ([8]), che da ora in poi si richiamerà scrivendo « *Matrici* », cap. II, § 4, n. 23, propos. l'), p. 172.

quindi di A_0 e di A, sono:

$$(1.7)\qquad \begin{cases} k_1 + \dots + k_r = h_1 \\ k_{r+1} + \dots + k_{2r} = h_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ k_{(q-1)r+1} + \dots + k_{qr} = h_q \\ k_{qr+1} + \dots + k_j = h_{q+1} \end{cases}$$

Se $r_1 = 0$, si avrà $h_{q+1} = 0$, cioè l'indice i di $\alpha = 0$ per A sarà q o $q + 1$ secondo $r_1 = 0$ od $r_1 > 0$.

Se $r \geqq j$, risulta $X^r_{0,0} = 0$ e l'indice di $\alpha = 0$ in A sarà $i = 1$.

Da quel che si è visto, risulta che $X^r_{0,0}$, componente di A_0, riesce pseudonulla oppure nulla secondo che $r < j$, oppure $r \geqq j$.

La matrice:

$$(1.8)\qquad X^r_0 = H^{-1} A H = A_0$$

è composta con le potenze r^{me} delle componenti di X_0 e se $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l, \alpha_{l+1}$ sono le radici caratteristiche distinte di A, l'ultima eventualmente zero, di molteplicità rispettive $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{l+1}$, la A_0 può supporsi composta di $l + 1$ componenti che indicheremo con $A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, A_{\alpha_{l+1}}$ disposte come le abbiamo scritte ([11]) e aventi gli ordini rispettivi $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{l+1}$; la componente di X^r_0 che coincide con A_{α_s} si indicherà con $X^r_{0\alpha_s}$ e la segnatura di A rispetto ad α_s è quella della componente A_{α_s}.

Da ciò che precede si raccoglie che:

a) per $\alpha \neq 0$ di molteplicità μ per A, le sue $m \leqq r$ radici r^{me} distinte che sono radici caratteristiche di X_0 avranno in X_0 molteplicità rispettive $\mu', \mu'', \dots, \mu^{(m)}$ con:

$$(1.\mathrm{I})\qquad \mu = \sum_{s=1}^{m} \mu^{(s)}; \qquad m \leqq r.$$

Se $(h_1, h_2, \dots, h_i)$ è la segnatura di A rispetto ad α, di indice i, mentre ([12]):

$$(k_1^{(s)}, k_2^{(s)}, \dots, k_{i_s}^{(s)}); \qquad (s = 1, 2, \dots, m)$$

è la segnatura di X_0 rispetto ad $\alpha^{(s)}$ con gli indici corrispondenti:

$$(1.\mathrm{II})\qquad i_1 \leqq i_2 \leqq \dots \leqq i_m$$

([11]) Supporremo sempre che la componente relativa alla radice caratteristica zero, quando c'è, occupi l'ultimo posto, pel che basta ordinare apportunamente le colonne di H.

([12]) Gli interi delle segnature sono ordinati in senso non crescente.

ordinati in senso non decrescente, si ha:

(1.III) $$i_m = \max(i_1, i_2, \dots, i_m) = i$$

(1.IV) $$\mu = \sum_{j=1}^{i} h_j$$

(1.V) $$\mu^{(s)} = \sum_{j=1}^{i} k_j^{(s)}; \qquad s = 1, 2, \dots, i$$

(1.VI) $$h_j = \sum_{s=1}^{m} k_j^{(s)};$$

nelle quali s'intende:

(1.VI′) $$\text{per } j > i_s: \qquad k_j^{(s)} = 0 .$$

La verifica delle condizioni da (1.I) ad (1.VI′) è necessaria e sufficiente per l'esisfenza della radice r^{ma} di A_α componente di A_0 relativa alla radice caratteristica $\alpha \neq 0$ di A.

b) se $\alpha = 0$, quindi $\alpha' = \alpha'' = \dots = \alpha^{(m)}$, è sempre

(1.VII) $$m = 1$$

(1.VIII) $$\mu = \mu'.$$

Occorre però distinguere due sottocasi, secondo che $r < i_1$ oppure $r \geqq i_1$, cioè secondo che la componente di A_0 relativa ad $\alpha = 0$ è pseudonulla oppure nulla. Distingueremo i due sottocasi con *b′*) e *b″*).

b′) per $r < i_1$ siano q il quoziente ed r_1 il resto della divisione di i_1 per r, ossia $i_1 = r\,q + r_1$, $r_1 < r$. Gli interi $h_1, h_2, \dots, h_i$ della segnatura di A rispetto ad $\alpha = 0$ saranno somme di r interi consecutivi, a cominciare da k_1, della segnatura $k_1, k_2, \dots, k_{i_1}$ della radice caratteristica zero di X_0. Se però $r_1 > 0$, l'ultimo intero h_i è somma degli ultimi r_1 interi k_j. Si ha $i = q$ oppure $i = q + 1$ secondo che $r_1 = 0$ od $r_1 > 0$, quindi $i_1 = r\,i$, oppure $i_1 = r\,(i - 1) + r_1$ [13].

Nel sottocaso *b″*) si ha $r \geqq i_1$, quindi $X^r_{0\alpha} = \mathbf{0} = A_\alpha$.

Se si volesse $i = i_1 = 1$, il primo caso non potrebbe verificarsi; nel secondo le componenti A_α, $X_{0,\alpha}$, per $\alpha = 0$, sarebbero entrambe nulle.

---

[13] L. CANTONI: *Serie di potenze e logaritmi di una matrice* [Boll. UMI, s. III, a, X (1955), pp. 376-381]. Cfr. anche «*Matrici*», cap. II, 4, n. 23, enunciati *l*) ed *l′*) a pp. 171-172.

Si è intanto ottenuto che:

c) se con $\alpha = 0$ *si vuole* $i = i_1 = 1$, *le componenti corrispondenti a questa radice in* A_0 *od in* X_0 *sono entrambe nulle e non vi può essere componente pseudonulla nè in* A_0 , *nè in* X_0 .

2. — Sia $f(z)$ un polinomio o una serie di potenze di z. Sappiamo che $f(X_0)$ ed $f(A_0)$, supposte convergenti, saranno composte con le matrici ottenuta da $f(z)$ per z eguale alle rispettive componenti di X_0 e di A_0. Inoltre, se α è una radice caratteristica di X_0 o di A_0, cioè di X oppure di A, $f(\alpha)$ è radice caratteristica di $f(X)$, rispettivamente di $f(A)$, con indici non maggiori di quelli di α in X o in A e gli interi della segnatura di $f(X)$ ed $f(A)$ rispetto ad $f(\alpha^{(s)})$ e ad $f(\alpha)$ sono tutti non minori di quelli corrispondenti delle segnature di X e di A rispetto ad $\alpha^{(z)}$ e ad α. Perciò, come si è visto, gli interi della segnatura di A rispetto ad α sono non minori di quelli corrispondenti di X_0 rispetto ad una qualsiasi delle radici $\alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{(m)}$, o dell'unica radice caratteristica zero di X_0. Se X_0 fosse un polinomio in A_0, gli interi delle segnature delle radici caratteristiche di X_0 sarebbero maggiori o almeno non minori di quelli delle corrispondenti radici caratteristiche di A_0 e ne seguirebbe che le segnature delle corrispondenti radici caratteristiche in X_0 ed in A_0 coincidono (insieme agli indici ed alle molteplicità). Per $\alpha \neq 0$ sarebbe allora necessariamente $m=1$, cioè in X_0 comparirà una sola radice caratteristica che sia radice r^{ma} di α, con la molteplicità di questa per A_0. Lo stesso accadrebbe per $\alpha = 0$.

Nel sottocaso b') in cui $r < i_1$ l'indice i_1 della radice zero per X_0 è $\geqq 2$ insieme ad r, quindi gli intieri della segnatura di A rispetto ad $\alpha = 0$, meno al più l'ultimo, sono necessariamente maggiori dei corrispondenti per X_0; perciò $X_{0,0}$ non può essere un polinomio nella relativa componente di $A_0 = X_0^r$ ed X non è un polinomio in A.

Nel sottocaso b'') in cui $r \geqq i_1$, l'unico intero della segnatura di $\alpha = 0$ per A_0 (o per A, che fa lo stesso) è sempre eguale alla molteplicità di $\alpha = 0$ per A_0, cioè $i = 1$ ed allora, per $\alpha = 0$, $X_{0,\bar{\alpha}}^r = 0$. Ma può darsi sia $i_1 > 1$, nel qual caso X_0 non può essere un polinomio in A_0.

Per semplificare l'enunciazione dei risultati ottenuti introdurremo alcune denominazioni. La componente di $A_0 = X_0^r$ relativa alla radice caratteristica zero (se questa c'è) è a sua volta composta di due componenti una pseudonulla l'altra nulla, che possono supporsi disposte in quest'ordine, ovvero di una sola di queste due. La prima si dirà *componente pseudonulla di* A_0, la seconda *componente nulla di* A_0: invece di riferirsi ad A_0 possiamo riferirci alla forma canonica (di JORDAN o 1936) di A od anche, sebbene impropriamente, ad A. Dopo di che può enunciarsi che:

a) affinchè una radice r^{ma} X di A sia un polinomio in A è necessario che X possegga la stessa segnatura complessiva di A, quindi che A_0 sia priva di componente pseudonulla.

Possiamo ora dimostrare che:

b) se la forma canonica di A è priva di componente pseudonulla, fra le radici r^{me} di A ve ne sono sempre di quelle che si esprimono con polinomi in A.

Infatti, la parte nulla di X_0 può prendersi coincidente con quella di A_0 ed alle condizioni (1.I) a (1.VI′) può sempre soddisfarsi con $m = 1$ e con gl'interi $k_j^{(s)}$ eguali agli h_j. Cioè, fra le radici r^{me} di A ve ne sono sempre di quelle che hanno la stessa segnatura di A. Dopo di che sia N la somma degli indici delle radici caratteristiche di A (cioè il grado della sua equazione minima) e sia $F(z)$ un polinomio in z di grado N in z, a coefficienti indeterminati. Le condizioni:

$$F(\alpha_s) = \sqrt[r]{\alpha_s}, \qquad s = 1, 2, \ldots, l, l+1 \tag{1.9}$$

$$F^{(j)}(\alpha_s) = \left(\frac{d^j}{d z^j}\sqrt[r]{z}\right)_{z=\alpha_s} \qquad \begin{cases} s = 1, 2, \ldots, l \\ j = 1, 2, \ldots, i_s \end{cases} \tag{1.10}$$

nelle quali si suppone $\alpha_{l+1} = 0$, se questa radice c'è in A, e che $i_1, i_2, \ldots$ $\ldots, i_l$ siano gl'indici delle radici diverse da zero $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$. Queste condizioni sono necessarie e sufficienti perchè $F(A)$ risulti una radice r^{ma} di A, non singolare, cioè con la soppressione di α_{l+1}.

Le (1.9) esigono l'annullarsi degli ultimi i_{l+1} coefficienti di $F(z)$, quando esiste $\alpha_{l+1} = 0$. Si può perciò supporre che $F(z)$ sia di grado $N - i_{l+1}$ e sopprimere le ultime i_{l+1} condizioni (1.9). La matrice dei coefficienti del sistema lineare nelle $N - i_{l+1} + 1$ indeterminate coefficienti di $F(z)$ è notoriamente non singolare [14], quindi $F(z)$ è univocamente determinato.

Indichiamo con $\bar{X}_0$, $\bar{A}_0$ le matrici ottenute da X_0, A_0 sopprimendo le linee che s'intersecano nella componente nulla di ciascuna di esse. Le (1.9)-(1.10) ci danno allora:

$$\bar{X}_0 = F(\bar{A}_0). \tag{1.11}$$

Orbene, poichè può scriversi:

$$A_0 = \begin{bmatrix} \bar{A}_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad X_0 = \begin{bmatrix} \bar{X}_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.12}$$

[14] Si tratta di una matrice wronskiana pel cui determinante si può vedere, ad es.: G. TORELLI: *Lezioni di Calcolo Infinitesimale* [Napoli, Tip. Acc. Sc. (1918)] cap. XXI, § 21, p. 309, V. anche L. CANTONI, Nota cit, [13] p. 381.

dalla (1.11) segue che:

$$X_0 = F(A_0) \tag{1.13}$$

qualunque sia il polinomio (o la serie di potenze) $F(z)$. Dopo di che, per la (1.8), si ha:

$$F(A) = H X_0 H^{-1} = X. \tag{1.14}$$

Si è così ottenuto che:

c) fra i polinomi in A che sono radici r^{me} di A, priva di componente pseudonulla, vi sono sempre polinomi di grado eguale alla somma degli indici delle radici caratteristiche diverse da zero di A.

Le determinazioni di ciascuna radice r^{ma} di $\alpha_s \neq 0$ sono r e poichè nelle (1.9) si deve porre $s = 1, 2, \ldots, l$, si ha subito che:

d) se A è priva di componente pseudonulla, di radici r^{me} di A esprimibili come polinomi in A di grado eguale alla somma degli indici delle l radici caratteristiche di A diverse da zero ve ne sono esattamente r^l (15).

Supponiamo ora che la segnatura di A sia unitaria, cioè che gli interi della sua segnatura complessiva siano tutti eguali ad uno, il che vuol dire che gli indici delle radici caratteristiche raggiungono tutti i rispettivi massimi, ossia sono tutti eguali alle molteplicità delle radici stesse. In tal caso, e solo allora, per un noto risultato (16) si ha che il gruppo delle matrici permutabili con A è esaurito dalle funzioni razionali intere di A. Poichè le radici r^{me} di A sono permutabili con A, ne viene che:

e) se la forma canonica di A è priva di componente pseudonulla e se la sua segnatura complessiva è unitaria, le radici r^{me} di A sono tutte esprimibili con polinomi in A.

3. — Le matrici permutabili con X sono anche permutabili con $X^r = A$, ma non è sempre vero il viceversa. Vogliamo esaminare se e quando l'algebra delle matrici permutabili con X coincide con quella delle matrici per-

---

(15) CECIONI, Mem. cit. (3), n. 35, p. 103.

(16) Cfr., ad es., S. CHERUBINO, *Sulle matrici permutabili con una data* [Rend. Padova, a. VII, nn. 3-4 (1936)] § 4, n. 15, fine. Vedi anche: S. CHERUBINO: *Sulle omografie permutabili* [Rend. Mat. Roma, s. IV, vol. II (1938, fasc. 1) pp. 14-46] § 3, n. 15 *b*), p. 34. Ivi si dice che « *matrici* (non singolari perchè moduli di omografie non degeneri) *aventi stessa segnatura sono l'una simile ad una funzione razionale* (intera) *dell'altra* » perchè queste funzioni si vogliono assoggettare alle sole condizioni (24)-(25). Così pure in « *Matrici* » cap. II, § 4, n. 24, p. 173, enunciati *m*) ed *n*). Avvertiamo che in quest'ultimo enunciato, rigo secondo, invece di « *sono tutte e sole quelle* » bisogna leggere « *sono tutte fra quelle* ». Pel risultato mentovato, vedi « *Matrivi* » cap. II, § 5, n. 32 *k*), p. 187.

mutabili con A. Basta cercare quando è che gli ordini delle due algebre coincidono, cioè quando è che si ha [17]:

$$\Sigma h_j^2 = \Sigma k_j^2 \tag{1.15}$$

le due sommatorie essendo estese a tutti gli interi delle segnature di A e di X. Basta che la (1.15) si verifichi per ogni coppia di componenti di X_0 e di A_0 fra loro corrispondenti. Poichè gli interi h_j sono non mai minori dei corrispondeni k_j, anzi sono somme di uno o più di questi, la (1.15) si riduce ad $h_j = k_j$; ciò per ogni componente. Perciò:

a) l'algebra delle matrici permutabili con X coincide con quella relativa ad A allora e solo che X ed A hanno la stessa segnatura complessiva. Il che richiede l'assenza, in A_0, della componente pseudonulla e che l'indice della eventuale radice caratteristica zero residua di A sia eguale all'unità [18].

Quanto al numero delle radici r^{me} di A distinte rispetto alla relazione di simiglianza, si osservi che devono esser soddisfatte le condizioni di cui al n. 1 in *a*) e, se A è singolare, quelle indicate allo stesso n. 1 in *b*). Fissato m e la segnatura di A, si tratta di calcolare il numero delle partizioni di μ secondo la (1.I) e degli h_j secondo le (1.VI), tenendo conto della (1.VI'). Dopo di che, fissati, in ordine non decrescente, gli indici i_1, $i_2, \ldots, i_m$ con $i_m = i$, le (1.V) ci daranno le molteplicità $\mu^{(s)}$ delle $m \leqq r$ radici r^{me} di α che si desidera siano radici caratteristiche di X. Così per tutte le radici caratteristiche di A, comprese quelle zero, per le quali valgono le condizioni di cui al n. 1 *b*).

Si osservi infine che:

b) se A_0 possiede una componente nulla questa è comune ad ogni sua radice r^{ma}.

§ 2. — Osservazioni particolari sulle radici r^{me}.

4. — Andiano ora a considerare alcuni casi notevoli che daranno al lettore la possibilità di orientarsi in ogni caso concreto. Basterà fermarsi sulle componenti di A_0 e di X_0 relative ad una stessa radice caratteristica della matrice A.

---

(17) S. CHERUBINO, prima delle due Note cit. (16), § 1, fine del n. 6.

(18) Cioè che i divisori elementari relativi alla radice zero siano tutti lineari. Vedi CECIONI, Mem. cit. (3) n. 33, p. 100. Il collega Cecioni mi prega di avvertire che nell'enunciato di detta pagina invece di «*è che sia* $|X_0| \neq 0$» deve leggersi «*è che i divisori elementari della matrice $X_0 - E\omega$, corrispondenti all'eventuale radice zero siano tutti lineari*»; egli aggiunge che, sempre per le radici caratteristiche zero, analoghe precisazioni vanno fatte a p. 85 in alto e negli enunciati di pp. 101 e 102.

Cominciamo dal caso $\alpha \neq 0$, $m = 1$. La molteplicità μ' della radice r^{ma} di α che si vuole sia radice caratteristica di X_0 sarà eguale a quella μ di α per A, come segue dalla (1.I), ed avrà indice $i_1 = i$ indice di α in A. La (1.VI) ci dice inoltre che la segnatura di X rispetto ad α' coincide con quella di A rispetto ad α.

Un *secondo caso* assai semplice è quello, sempre con $\alpha \neq 0$, di $m = \mu$, il che implica, causa la (1.I), che:

$$\mu' = \mu'' = \ldots = \mu^{(m)} = 1 \tag{2.1}$$

cioè che le radici $\alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{(m)}$ caratteristiche per X sono tutte semplici, quindi con indici eguali tutti ad 1:

$$i_s = i = 1, \qquad s = 1, 2, \ldots, m = \mu \tag{2.2}$$

e segnatura $[(1)\ (1) \ldots (1)]$.

La componente A_α di A_0 è la matrice scalare αI_μ mentre la componente di X_0 che gli corrisponde è la matrice diagonale di elementi principali le radici $\alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{(m)}$.

Un *terzo caso*, semplicissimo, è quello di $i = 1$, cioè di $A_\alpha = \alpha I_\mu$, $\alpha \neq 0$. Sono quindi eguali ad 1 gli indici di tutte le radici $\alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{(m)}$ per le cui molteplicità vale la (1.I). La componente di X_0 che corrisponde ad $A_\alpha = \alpha I_\mu$ sarà composta con le m matrici scalari $\alpha' I_{\mu'}, \alpha'' I_{\mu''}, \ldots, \alpha^{(m)} I_\mu^{(m)}$. Vi è un sol intero della segnatura di A rispetto ad α ed è $h = \mu$ ed uno solo, per ciascuna radice $\alpha^{(s)}$, eguale a $\mu^{(s)}$, cioè:

$$k^{(s)} = \mu^{(s)}; \qquad s = 1, 2, \ldots, m. \tag{2.3}$$

Come *quarto* ed ultimo *caso* assai semplice segnaliamo quello di $i = \mu$. La (1.IV) ci dà:

$$h_1 = h_2 = \ldots = h_i = 1 \tag{2.4}$$

e dalle (1.VI) segue che:

$$k_j^{(s)} = 1 \tag{2.5}$$

quali che siano j ed s e che $m = 1$, come nel primo caso. L'unica radice r^{ma} di α che è radice caratteristica di X avrà la stessa molteplicità μ di α per A e la segnatura di X rispetto ad essa coincide con quella di A rispetto ad α, quindi è unitaria. La componente di X_0 relativa a questa radice è dunque un polinomio nella corrispondente componente A_α di A_0.

§ 3. — **Radici quadrate.**

5. — Se $r = 2$, $\alpha \neq 0$, $\mu \geqq 2$, si ha $m \leqq 2$. Indichiamo con $+\sqrt{\alpha}$, $-\sqrt{\alpha}$ le due possibili radici caratteristiche di X. Per $m = 1$ si ricade nel primo dei 4 casi particolari trattati nel § 2 e la segnatura di X rispetto ad α' coincide con quella di A rispetto ad α.

Nel caso $m = 2$ detti i_1, i_2 gli indici delle due radici quadrate di α (in ordine non decrescente $i_1 \leqq i_2$) sarà $i_2 = i$, indice di α in A. Con le solite notazioni, le (1.VI)-(1.VI') si scrivono:

$$h_j = k'_j + k''_j\,; \quad j = 1, 2, \ldots, i \tag{3.1}$$

con $k'_j = 0$ per $j > i_1$. Inoltre, si deve avere, per le (1.I)-(1.V):

$$\mu = \mu' + \mu'' \tag{3.2}$$

$$\mu^{(s)} = \sum_{j=1}^{i_s} k_j^{(s)}\,; \qquad s = 1, 2\,. \tag{3.3}$$

Le partizioni (3.1) per ciascun j sono h_j e potendo scambiare tra loro le due radici $\pm\sqrt{\alpha}$, si hanno, in totale:

$$2^i\, h_1\, h_2 \ldots h_i \tag{3.4}$$

possibili partizioni (3.1). Analogamente le (3.2) danno $2\,\mu$ partizioni da combinare con le precedenti. Complessivamente le (3.1)-(3.2) danno:

$$2^{i+1}\, h_1\, h_2 \ldots h_i\, \mu \tag{3.5}$$

soluzioni. Fra esse bisogna scegliere soltanto quelle comuni con le (3.3), le cui soluzioni sono in numero di $2\,\mu'\,\mu''$ e tener conto che gli interi $k_1^{(s)}, k_2^{(s)}, \ldots, k_i^{(s)}$ sono disposti in ordine non crescente. Il numero delle classi distinte per simiglianza delle radici quadrate di A non sorpassa il più piccolo dei due numeri di partizioni sopra indicati.

Per $m = 1$ occorre soltanto tener conto che vi sono due scelte per la radice caratteristica di X_0 radice quadrata di α.

Se $\mu = 1$, è pure $m = i = 1$, quindi $i_1 = i = 1$, $\mu' = 1$ e risulta $h_j = k_j = 1$. Occorre solo tener conto delle due scelte per la radice quadrata di α.

Se $\alpha = 0$ e si presenta il sottocaso b') sarà $i_1 > 2$ e si devono considerare le partizioni (1.7) con $r = 2$: esse sono in numero di:

$$2^q\, h_1\, h_2 \ldots h_q \tag{3.6}$$

con $q = i$ o $q = i - 1$ secondo che si sceglie i_1 pari o dispari.

Nel sottocaso $b'')$ vi sono due scelte, $i_1 = 1$ od $i_1 = 2$; con la prima si ha $k_1 = \mu = \mu'$, con la seconda $k_1 + k_2 = \mu' = \mu$. Nella prima risulta $X_{0,0} = \mathbf{0}$, nella seconda:

$$X_{0,0} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & I_{k_1}; \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0}_{k_2} \end{array}\right], \quad k_1 + k_2 = \mu . \tag{3.7}$$

6. — Un caso generale assai semplice è quello di A diagonalizzabile, cioè di forma canonica diagonale, ovvero sia con gli indici delle radici caratteristiche tutti eguali ad uno. Un noto teorema [19] assicura che, per $\alpha \neq 0$, se A_α è diagonalizzabile, $X_{0,\alpha}$ è diagonale. Per $\alpha = 0$, essere A_α diagonalizzabile significa essere $A_\alpha = \mathbf{0}$; allora $X_{0,0}$ deve avere l'indice della radice zero non maggiore di r. Abbiamo dunque che:

a) *se* A *è diagonalizzabile, le radici caratteristiche diverse da zero di X hanno tutte indice uno; la radice zero (se c'è) ha indice non maggiore di r,*

b) *il numero delle radici quadrate distinte di una matrice* A *diagonalizzabile è una potenza di 2 il cui esponente è eguale al numero delle radici caratteristiche distinte di* A.

Il teorema a) vale per r qualunque ($\geqq 2$).

§ 4. — Quasi-logaritmi delle matrici singolari.

7. — Ogni matrice A, singolare o non, può sempre spezzarsi in un modo e uno solo nella somma di due parti, una *principale*, A_D, l'altra *complementare*, A_J, e si scrive [20]:

$$A = A_D + A_J \tag{4.1}$$

ovvero sia, passando alla forma canonica (di Jordan o la nostra 1936):

$$C = H^{-1} A H = H^{-1} A_D H + H^{-1} A_J H \doteq D + J. \tag{4.2}$$

Se A è non singolare, lo è anche A_D, quindi D, e si può porre [21]:

---

[19] « *Matrici* » cap. II, § 4, n. 23, 1''), p. 172.

[20] S. Cherubino: *Permutabilità e logaritmi delle matrici* [Rend. Matem., s. V, vol. XIII (Roma, 1954), pp. 221-238]. Vedi anche « *Matrici* » cap. II, § 4 e n. 22, p. 169 e cap. IV, § 1, n. 6, p. 252, e n. 8, p. 256. Per la forma canonica C la parte principale D è diagonale, quella complementare J e pseudonulla e canonica, mentre A_D è diagonalizzabile ed A_j è pseudonulla.

[21] Poichè A_D ed A_J sono permutabili, abbiamo scritto $\frac{A_J}{A_D}$ invece di $A_D^{-1} . A_J = A_J . A_D^{-1}$: così $\frac{J}{D}$ sta per $D^{-1} J = J D^{-1}$. Analogamente in seguito.

$$A = A_D \left[I + \frac{A_J}{A_D} \right] \tag{4.3}$$

$$C = D \left[I + \frac{J}{D} \right]. \tag{4.3'}$$

I due fattori, fra loro permutabili, a secondo membro di queste (4.3)-(4.3′) li diremo ordinatamente fattore *principale* e fattore *complementare* di A e di C, rispettivamente. Essi sono univocamente determinati da A e, nella (4.3′), non dipendono dalla matrice trasformatrice H. L'ordine delle righe e delle colonne di C, D, J dipende da quello di H.

È evidente che la radice r^{ma} di A è prodotto delle radici r^{me} dei suoi fattori principale e complementare. Anzi, più in generale, la radice r^{ma} di un prodotto di fattori a due a due permutabili è prodotto delle radici r^{me} dei fattori; ciò anche in caso di singolarità.

8. — Se la matrice A è singolare, la sua forma canonica C è composta di tre parti, la prima non singolare, la seconda pseudonulla, la terza nulla, che possiamo supporre disposte in quest'ordine, dall'alto in basso ed indicare C_{n_1}, J_{ν_1}, $\mathbf{0}_{\nu_2}$, essendo n_1, ν_1, ν_2 gli ordini rispettivi. Corrispondentemente D è composta con D_{n_1}, $\mathbf{0}_{\nu_1}$, $\mathbf{0}_{\nu_2}$ e J con J_{n_1}, J_{ν_1}, $\mathbf{0}_{\nu_2}$, sempre in quest'ordine. In particolare, una o due di queste componenti possono mancare.

Con le posizioni:

$$\overline{D} = \begin{bmatrix} D_{n_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-n_1} \end{bmatrix}, \quad n - n_1 = \nu_1 + \nu_2 \tag{4.4}$$

$$I^{(n_1)} = \begin{bmatrix} I_{n_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad I_{(n-n_1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-n_1} \end{bmatrix}; \quad I_{(\nu_2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n-\nu_2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{\nu_2} \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

ed osservando che la (4.4) ci dà:

$$\overline{D} = D + I_{(n-n_1)} \tag{4.4'}$$

la (4.3′) si può scrivere:

$$C = \overline{D} \left[I^{(n_1)} + \frac{J}{\overline{D}} \right]. \tag{4.6}$$

Le matrici D, J, $\overline{D}$, $I^{(n_1)}$, $I_{(n-n_1)}$, $I_{(\nu_2)}$ sono a due a due permutabili, il

---

([22]) Cfr. Mem. cit. ([1]), n. 1 a) p. 225.

che dà significato alla notazione adoperata in (4.6), la quale può anche scriversi:

$$C = \bar{D}\,[I + \mathcal{B}] \tag{4.7}$$

$$\mathcal{B} = \frac{J}{\bar{D}} - I_{(n-n_1)}\,. \tag{4.8}$$

I due fattori del secondo membro di (4.7), cioè quelli della (4.6) a destra, si dicono fattori rispettivamente *pseudoprincipale* e *pseudocomplementare di* C. Trasformando mediante H^{-1}, si ritorna da C ad A ed i due fattori a secondo membro della (4.7) che diventano:

$$H\,\bar{D}\,H^{-1}\ ;\ H\,[I + \mathcal{B}]\,H^{-1}, \tag{4.9}$$

fra loro permutabili come quelli di (4.7), li diremo fattori *pseudoprincipale* e *pseudocomplementare* di A.

Per le parti pseudoprincipale $\bar{D}$ e pseudocomplementare $\bar{J} = J - I_{(n-n_1)}$ valgano molte delle proprietà possedute dalle parti principale e complementare [23] compresa quella della permutabilità totale. Proprietà analoghe godono i fattori principale o pseudoprincipale e complementare o pseudocomplementare. In particolare si ha che: *le radici* r^{me} *di una matrice singolare sono prodotti delle radici* r^{me} *dei fattori pseudoprincipale e pseudocomplementare.*

9. — Poichè la matrice:

$$\frac{J}{\bar{D}} = \begin{bmatrix} D_{n_1}^{-1}\cdot J_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & J_{\nu_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0_{\nu_2} \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

è pseudonulla, esiste ed è convergente la serie:

$$\lg\left[I + \frac{J}{\bar{D}}\right] = \frac{J}{\bar{D}} - \frac{1}{2}\,\frac{J^2}{\bar{D}^2} + \frac{1}{3}\,\frac{J^3}{\bar{D}^3} - \dots \tag{4.11}$$

il cui secondo membro si riduce ad un polinomio in $\dfrac{J}{\bar{D}}$ di grado non superiore ad $n - \nu_2 = n_1 + \nu_1$, ordine della componente non nulla di (4.10).

([23]) Vedi la Mem. cit. ([1]), § 1 e § 2. Non vale la c) del n. 2, p. 227, nè il n. 3 del § 1 pp. 227-229; del § 2 vale senz'altro la a) del n. 4, p. 230.

La somma

$$\lg \overline{D} + \lg \left[I + \frac{J}{\overline{D}} \right] \tag{4.12}$$

si dirà *quasi-logaritmo principale* (24) di C. Da esso si passa al quasi-logaritmo non principale come da $\lg C$ si passa a $\log C$ nel caso non singolare, cioè come nella Nota lincea cit. (2).

La matrice non singolare:

$$\overline{D} \left[I + \frac{J}{\overline{D}} \right] = \overline{D} + J \tag{4.13}$$

si dice *nucleo* di C. Possiamo perciò enunciare che:

a) *il quasi-logaritmo* (*principale o non*) *di* C *coincide con il logaritmo* (*principale o non*) *del suo nucleo.*

Se trasformiamo con la matrice H^{-1}, inversa di quella che ha portato A alla forma canonica C, abbiamo:

$$H \cdot \overline{D} \left[I + \frac{J}{\overline{D}} \right] H^{-1} = H \overline{D} H^{-1} \cdot H \left[I + \frac{J}{\overline{D}} \right] H^{-1} \tag{4.14}$$

che si dirà *nucleo di* A. Quindi:

b) *il quasi-logaritmo* (*principale o non*) *di* A *è il logaritmo del suo nucleo.*

Se infine si osserva che per le matrici non singolari le parti ed i fattori pseudoprincipale e pseudocomplementare coincidono con le parti e coi fattori principale e complementare, si ha che:

c) *il nucleo ed il quasi-logaritmo di una matrice non singolare coincidono con la matrice stessa e col suo logaritmo* (*principale e non*).

---

(24) Esso è composto con una matrice non nulla di ordine $n - \nu_2 = n_1 + \nu_1$ e con una matrice nulla di ordine ν_2.