ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ENRICO MAGENES
GUIDO STAMPACCHIA

I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 12, nº 3 (1958), p. 247-358
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1958_3_12_3_247_0>

I PROBLEMI AL CONTORNO PER LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DI TIPO ELLITTICO

di ENRICO MAGENES e GUIDO STAMPACCHIA (Genova)

Lo studio dei problemi al contorno per le equazioni differenziali lineari di tipo ellittico di ordine qualunque ha avuto negli ultimi anni uno sviluppo notevole e ancora attualmente sono in corso interessanti ricerche.

Il presente lavoro è un'esposizione, che riteniamo abbastanza completa e generale, delle diverse teorie relative ai problemi in questioni, sviluppata in una serie di seminari all'Istituto matematico dell'Università di Genova.

Abbiamo ritenùto utile pubblicare questo lavoro, sia perchè un'esposizione generale non ci sembra ancora fatta — anche le monografie esistenti, quale ad esempio quella di C. MIRANDA [3] (*), sono quasi esclusivamente dedicate alle equazioni del secondo ordine o a equazioni particolari — sia perchè abbiamo cercato di portare, in alcuni punti, qualche contributo nuovo.

Ci sono state utili le conversazioni avute con i proff. MIRANDA, FICHERA, PRODI; in modo particolare desideriamo ringraziare il prof. LIONS oltre che per i suoi consigli anche per averci dato in visione manoscritti non ancora pubblicati. E siamo anche grati al prof. ARUFFO e ai dott. CAMPANATO e GAGLIARDO per la loro collaborazione.

Genova, Giugno 1958.

(*) I numeri tra [ ] si riferiscono alla bibliografia finale.

CAPITOLO I.

NOZIONI GENERALI

N. 1. *Richiami sugli spazi lineari topologici e sulle distribuzioni.*

Riportiamo anzitutto da Schwartz [3] alcuni richiami sugli spazi lineari topologici e sulle distribuzioni.

Salvo esplicito avviso tutti gli ***spazi lineari*** (o vettoriali) ***topologici*** e le ***applicazioni*** (o trasformazioni) ***lineari*** che considereremo saranno lineari rispetto al corpo complesso.

Dati due spazi lineari e topologici E e F, indichiamo con $\mathcal{L}(E, F)$ l'insieme di tutte le applicazioni lineari e continue di E in F. Ovviamente $\mathcal{L}(E, F)$ può considerarsi a sua volta come uno spazio lineare.

In particolare se F coincide con $\mathcal{C}$ (spazio dei numeri complessi), $\mathcal{L}(E, \mathcal{C})$ è lo spazio lineare di tutti i funzionali (o forme) lineari e continui su E e si chiama ***lo spazio duale*** di E. Si introducono di solito in esso diverse topologie (si veda ad es. BOURBAKI [1]); noi intenderemo sempre, in quel che segue, di aver introdotto la cosidetta topologia forte. Precisamente un ***sistema fondamentale di intorni dell'origine*** (1) in $\mathcal{L}(E, \mathcal{C})$ si otterrà prendendo i sottoinsiemi $W(B, U)$ di $\mathcal{L}(E, \mathcal{C})$ tali che:

1) B è un qualunque insieme limitato di E (2).

2) U è un qualunque intorno dello zero in $\mathcal{C}$.

3) x' appartiene a $W(B, U)$ se il valore $x'(x)$ che esso assume, calcolato in un qualunque punto x di B, appartiene a U.

Indicheremo con E' il duale di E quando si intenda introdotta in esso la topologia forte; E' chiamasi anche il ***duale forte*** di E ed è dunque uno spazio lineare topologico.

Conveniamo anche di indicare d'ora innanzi con $< x', x >$ il valore assunto da x' (elemento di E') nel punto x di E; il simbolo $< x', x >$ sta dunque ad indicare la dualità tra E ed E'.

---

(1) Ricordiamo che se indichiamo con $B(x)$ il sistema di tutti gli intorni del punto x di uno spazio topologico E, il sottoinsieme $G(x)$ di $B(x)$ costituisce un ***sistema fondamentale*** di ***intorni di*** x se ogni insieme di $B(x)$ contiene un insieme di $G(x)$.

(2) ***Un insieme*** B di uno spazio lineare topologico E è ***limitato*** se, fissato comunque un intorno U dell'origine di E è possibile mediante un'omotetia portare B in U (cioè se esiste un numere λ tale che $\lambda x \in U$ per ogni x di B).

Osserviamo poi che se consideriamo x fissato in E il numero complesso $< x', x >$ al variare di x' in E' definisce una *forma lineare e continua* su E', per la definizione stessa di $E' : x' \to < x', x >$.

Questa forma è dunque un elemento del duale (forte) di E' (che chiamasi anche *biduale forte* di E e si indica con E'').

Ricordiamo anche che se E è uno spazio di BANACH (o normato) può introdursi anche in E' una norma, che induce su E' proprio la topologia forte di cui abbiamo sopra detto: basterà porre come è noto:

$$\| x' \|_{E'} = \underset{\|x\|_E = 1}{\text{estr. sup.}} | < x', x > | .$$

Sia ora Ω un insieme aperto dello spazio euclideo reale R^n a n dimensioni, la cui chiusura indicheremo con $\overline{\Omega}$. Indicheremo con $x \equiv (x_1, \ldots, x_n)$ e $y \equiv (y_1, \ldots, y_n)$ i punti generici di R^n e porremo $| x | = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$. Consideriamo l'insieme delle funzioni complesse $\varphi(x)$ indefinitamente derivabili in Ω e a supporto [3] compatto, contenuto in Ω. Esso si può ovviamente considerare come uno spazio lineare rispetto al corpo complesso che indicheremo con $\mathcal{D}(\Omega)$. Introduciamo in esso la seguente topologia.

Sia $\{A\} \equiv \{A_0, A_1, \ldots A_\nu, \ldots\}$ una successione di insiemi aperti non vuoti contenuti in Ω, tali che $\overline{A}_\nu \subset A_{\nu+1}$, e tali che ogni compatto di Ω sia contenuto in A_ν per ν sufficientemente grande (se $\Omega \equiv R^n$ si può per es. prendere per A_ν la sfera $| x | < \nu + 1$). Siano poi $\{\varepsilon\} \equiv \{\varepsilon_0, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\nu, \ldots\}$ una successione decrescente e infinitesima di numeri positivi e $\{m\} \equiv \{m_0, m_1, \ldots, m_\nu, \ldots\}$ una successione di numeri interi ≥ 0, crescente e divergente.

Indichiamo con $U(\{m\}, \{\varepsilon\}, \{A\})$ l'insieme delle funzioni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ che per ogni ν verificano le relazioni

$$| D^p \varphi(x) | \leq \varepsilon_\nu \quad \text{per} \quad | p | \leq m_\nu \quad \text{e} \quad x \notin A_\nu$$

dove $p \equiv \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ è un sistema qualunque di n interi ≥ 0, $| p |$ la somma $p_1 + p_2 + \ldots p_n$ e D^p la derivata parziale

$$\frac{\partial^{p_1 + p_2 \cdots + p_n}}{\partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_n^{p_n}}$$

Al variare di $\{m\}$, $\{\varepsilon\}$, $\{A\}$ si ottiene così un sistema fondamentale di intorni dell'origine di $\mathcal{D}(\Omega)$. Introdotta questa topologia, $\mathcal{D}(\Omega)$ è allora uno

---

(3) Il supporto di una funzione φ è l'insieme chiuso intersezione di tutti gli insiemi chiusi fuori dei quali φ è $\equiv 0$.

spazio lineare topologico, anzi di più, localmente convesso, separato e anche completo (SCHWARTZ [1 ; cap. III, § 1]) (4).

Lo spazio duale (forte) di $\mathcal{D}(\Omega)$ dicesi *spazio delle distribuzioni* su Ω : $\mathcal{D}'(\Omega)$ (SCHWARTZ [1]).

Indicheremo con T i suoi elementi; *una distribuzione* T *è dunque una forma lineare e continua su* $\mathcal{D}(\Omega)$ e $< T, \varphi >$ indica una forma bilineare e continua separatamente su $\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$.

Le misure μ in Ω e le funzioni f sommabili in ogni compatto di Ω (localmente sommabili in Ω) sono distribuzioni $\in \mathcal{D}(\Omega)$ quando si identificano rispettivamente con i funzionali lineari e continui su $\mathcal{D}(\Omega)$:

$$< \mu, \varphi > = \int_\Omega \varphi \, d\mu \qquad \text{e} \qquad < f, \varphi > = \int_\Omega f(x)\, \varphi(x)\, dx$$

Ricordiamo che $\mathcal{D}(\Omega)$ (munito naturalmente della topologia indottavi da $\mathcal{D}'(\Omega)$) è denso in $\mathcal{D}'(\Omega)$ (SCHWARTZ [1, I] cap. III, § 3 teor. XV).

Si dirà *spazio di distribuzioni* ogni sottospazio lineare topologico E di $\mathcal{D}'(\Omega)$, munito di una topologia «più fine» di quella indottavi da $\mathcal{D}'(\Omega)$, tale cioè che l'iniezione di E in $\mathcal{D}'(\Omega)$ sia continua (5).

Uno spazio E *di distribuzioni si dice normale* se: 1) $\mathcal{D}(\Omega) \subset E \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, 2) le iniezioni di E in $\mathcal{D}'(\Omega)$ e di $\mathcal{D}(\Omega)$ in E sono continue, 3) $\mathcal{D}(\Omega)$ è denso in E.

È facile dimostrare che se E è uno spazio normale di distribuzioni il suo duale E' si può identificare dal punto di vista algebrico con un sottospazio di $\mathcal{D}'(\Omega)$, cioè esiste un isomorfismo algebrico di E' in $\mathcal{D}'(\Omega)$ (6).

Ricordiamo anche come viene definita la *derivata di una distribuzione* (SCHWARTZ [1, I, cap. II]). La derivata rispetto a x_i di una distribuzione

---

(4) Uno spazio topologico E è *separato* (o di Hausdorff) se verifica il seguente assioma: dati due punti x ed y distinti di E esistono un intorno di x ed uno di y senza punti comuni. Uno spazio lineare topologico E è *localmente convesso* se possiede un sistema fondamentale di intorno dell'origine (e quindi di ogni punto x) che siano convessi.

(5) Dato uno spazio lineare F e un suo sottospazio lineare E l'applicazione lineare di E in F che ad ogni x di E fa corrispondere se stesso si dice *applicazione canonica* o *iniezione* o *immersione* di E in F.

(6) Si dice che un'applicazione lineare $x \to f(x)$ di uno spazio lineare E in un altro spazio lineare F è un *isomorfismo algebrico* di E in F (su F) se essa è biunivoca tra E e un sottospazio di F (lo spazio intero F). Se inoltre E e F sono topologici, l'isomorfismo algebrico si dice di più *topologico* se $x \to f(x)$ è anche bicontinua; scriveremo a volte $E \cong F$, se esiste un isomorfismo algebrico e topologico di E su F, e diremo che E si può *identificare* con F.

T su Ω è la nuova distribuzione su Ω, che indicheremo con $\frac{\partial T}{\partial x_i}$, oppure con $D_i T$, definita dalla relazione

$$< \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi > = - < T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} >$$

Ogni distribuzione è dunque indefinitamente derivabile nel senso delle distribuzioni e si ha:

$$< D^p T, \varphi > = (-1)^{|p|} < T, D^p \varphi > . \tag{1.1}$$

Ricordiamo anche il risultato fondamentale della teoria delle distribuzioni: *la derivazione è un'applicazione lineare e continua di* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *su* $\mathcal{D}'(\Omega)$ (SCHWARTZ [1, I, cap. III, § 5, teor. XVIII]).

N. 2. *Alcuni spazi particolari di distribuzioni e di funzioni.*

Consideriamo ora alcuni spazi di distribuzioni e di funzioni che risultano utili in diversi campi dell'analisi e in particolare nelle teorie che esporremo.

Questi spazi possono essere introdotti da diversi punti di vista, che ora rapidamente richiameremo.

Sia Ω un insieme aperto di R^n che supporremo senz'altro limitato; indicheremo con Γ (o anche con $\partial \Omega$) la sua frontiera. *Salvo esplicito avviso supponiamo anche per semplicità che* Ω *sia di classe* C^∞ (7), anche se detta ipotesi non è sempre necessaria e volta per volta potrebbe essere opportunamente attenuata.

a) Consideriamo ora lo spazio lineare delle funzioni $f(x)$ complesse definite in $\overline{\Omega}$ ed ivi continue con le derivate parziali prime; indichiamo per ogni

---

(7) Con ciò intendiamo dire che ad ogni punto x di Γ si può associare un'ipersfera $\Gamma(x)$ di centro x in modo che la parte di Γ contenuta in $\Gamma(x)$ sia rappresentabile, rispetto ad un sistema di assi $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$ con l'origine in x, nella forma:

$$\xi_n = \psi(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \tag{I}$$

con ψ funzione definita in un opportuno intorno dell'origine ivi indefinitamonte differenziabile e nulla con le derivate prime nell'origine. Per un tale dominio esiste l'iperpiano tangente a Γ in ogni punto x di Γ; supporremo la rappresentazione (I) tale che l'asse ξ_n sia la normale interna.

$\alpha > 1$ con $\mathcal{H}^{1,\alpha}(\Omega)$ detto spazio, normato con la posizione

$$\| f \| = \left\{ \int_\Omega | f(x) |^\alpha \, dx \right\}^{\frac{1}{\alpha}} + \left\{ \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|^\alpha \right\}^{\frac{1}{\alpha}} \qquad \alpha > 1.$$

Esso non è, come è noto, completo. È della massima importanza considerare il *completamento* astratto di $\mathcal{H}^{1,\alpha}(\Omega)$, che indicheremo con $\widehat{\mathcal{H}}^{1,\alpha}(\Omega)$. Ogni punto di $\widehat{\mathcal{H}}^{1,\alpha}(\Omega)$ è individuato da una $(n+1)$-pla $(f, \psi_1, \ldots, \psi_n)$ di funzioni di $L^\alpha(\Omega)$ (8), legate dalle relazioni

$$\int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx = - \int_\Omega \varphi \, \psi_i \, dx \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

per ogni φ di $\mathcal{D}(\Omega)$. Come è noto la funzione ψ_i è stata da diversi Autori (SOBOLEV, FRIEDRICHS ...) assunta come la derivata « generalizzata » di f rispetto a x_i. Da quanto abbiamo richiamato nel n. 1 segue che la funzione f è una distribuzione T tale che $T \in L^\alpha(\Omega)$ e $D_i T \in L^\alpha(\Omega)$ e $D_i T = \psi_i$ (la derivazione $D_i T$ essendo intesa nel senso delle distribuzioni).

Indicheremo con $H^{1,\alpha}(\Omega)$ $(\alpha > 1)$ lo spazio delle distribuzioni T tali che $T \in L^\alpha(\Omega)$ e $D_i T \in L^\alpha(\Omega)$, normato con $\| T \| = \| T \|_{L^\alpha(\Omega)} + \Sigma_i \| D_i T \|_{L^\alpha(\Omega)}$. Esso risulta uno spazio di BANACH (cioè normato e completo) come si vede immediatamente ricordando che lo spazio $L^\alpha(\Omega)$ è completo e ricordando anche il risultato fondamentale sulla continuità della derivazione in $\mathcal{D}'(\Omega)$, richiamato alla fine del n. 1.

Nelle ipotesi formulate su Ω si può dimostrare che: $\widehat{\mathcal{H}}^{1,\alpha}(\Omega) \cong H^{1,\alpha}(\Omega)$; ma questa identità è valida anche più in generale (per lo studio delle condizioni su Ω che la assicurano v. ad es. BABICH [1], GAGLIARDO [2]).

In generale noi dovremo considerare lo spazio, anch'esso di BANACH, $H^{k,\alpha}(\Omega)$ (k intero ≥ 0, α reale > 1) delle distribuzioni T tali che $D^p T \in L^\alpha(\Omega)$ per $|p| \leq k$, la norma essendo data da

$$\| T \| = \sum_{|p| \leq k} \| D^p T \|_{L^\alpha(\Omega)}$$

dove intendiamo che $D^{(0, \ldots, 0)} T = T$.

---

(8) $L^\alpha(\Omega)$ è, come d'abitudine, lo spazio delle funzioni di potenza α — ma sommabile in Ω normato con la posizione:

$$\| f \|_{L^\alpha(\Omega)} = \left(\int_\Omega | f(x) |^\alpha \, dx \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Per brevità scriveremo $H^k(\Omega)$ in luogo di $H^{k,2}(\Omega)$; in tal caso lo spazio è di HILBERT.

Anche lo spazio $H^{k,\alpha}(\Omega)$ si può *identificare*, nelle ipotesi da noi fatte su Ω, con $\widehat{\mathcal{H}}^{k,\alpha}(\Omega)$, completamento dello spazio $\mathcal{H}^{k,\alpha}(\Omega)$ delle funzioni f continue con le derivate parziali di ordine p, con $|p| \leq k$ normato con la posizione

$$\|f\| = \sum_{|p| \leq k} \|D^p f\|_{L^\alpha(\Omega)}.$$

Circa le condizioni su Ω per la validità della relazione $H^{k,\alpha}(\Omega) \simeq \widehat{\mathcal{H}}^{k,\alpha}(\Omega)$ si veda ancora BABICH [1], GAGLIARDO [2].

Una vastissima letteratura è dedicata allo studio delle proprietà delle funzioni di $H^{k,\alpha}(\Omega)$.

NIKODYM ha chiamato funzioni di BEPPO LEVI le funzioni di $H^1(\Omega)$. Ci interessa per il seguito segnalare il

TEOREMA DI SOBOLEV [2]: *Nella ipotesi fatta su* Ω, *se* $u \in H^{k,\alpha}(\Omega)$ *allora* $u \in L^{\bar{\alpha}}(\Omega)$ *dove* $\dfrac{1}{\bar{\alpha}} = \dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{k}{n}$ *se è* $\bar{\alpha} > 0$, *e* u *è holderiana in* $\bar{\Omega}$ *se è* $\bar{\alpha} < 0$; *inoltre l'iniezione di* $H^{k,\alpha}(\Omega)$ *in* $L^{\alpha^*}(\Omega)$ *per ogni* $\alpha^* < \bar{\alpha}$ *è completamente continua.*

Il teorema è valido in ipotesi assai più larghe su Ω (si veda SOBOLEV [2]); per una recente dimostrazione di questi risultati cfr. ad es. GAGLIARDO [2].

Ponendo a base una nozione di derivata alquanto diversa dalla precedente queste classi sono state poi studiate da CALKIN e MORREY [1] e successivamente da STAMPACCHIA [2].

Un altro problema, diverso da quello posto da SOBOLEV, ma ad esso legato, consiste nel precisare la particolare natura di quasi continuità delle funzioni di $H^{k,\alpha}(\Omega)$ ed è stato studiato dapprima per $k = 1$, $\alpha \geq 1$ da STAMPACCHIA [2]. Una soluzione più precisa per $\alpha = 2$ è stata data da DENY e LIONS [1] e in generale il problema si inquadra nel problema relativo al completamento funzionale di uno spazio funzionale, studiato da ARONSZAJN-SMITH [1], STAMPACCHIA [7], FUGLEDE [1].

È ben noto che è possibile definire la *traccia* γu su Γ di ogni funzione $u \in H^{1,\alpha}(\Omega)$ e ciò si può fare in diversi modi.

Ricordiamo ad es. che la «traccia» γu è una funzione di $L^\alpha(\Gamma)$ (spazio delle funzioni di potenza α-esima sommabile su Γ) per cui:

$$\lim_{x \to \xi \, (\text{su } \nu_\xi)} u(x) = \gamma u(\xi) \tag{2.1}$$

per quasi tutti i punti ξ di Γ, ν_ξ essendo l'asse normale interno a Γ nel punto ξ.

Considerando poi una famiglia di insiemi aperti Ω_t, interni a Ω, le cui frontiere Γ_t sono « parallele » a Γ (t parametro reale variabile in $0 < t \leq t_0$), si dimostra che la traccia $\gamma^{(t)} u$ della restrizione di u a Ω_t (nel senso avanti precisato) « riportata » su Γ è tale che:

$$\lim_{t\to 0} \int_{\Gamma} | \gamma^{(t)} u - \gamma u |^{\alpha} d\sigma = 0 \tag{2.2}$$

e ciò esprime che $\gamma^{(t)} u$ «converge in media d'ordine α» a γu sul sistema $\{\Gamma_t\}$.

Per una funzione di $H^{k,\alpha}(\Omega)$, $k > 1$, si possono definire analogamente le « tracce » $\gamma_s u$ delle derivate normali « interne » di ordine s: $\dfrac{\partial^s u}{\partial \nu^s}$ ($s = 0, 1, \ldots, k-1$); con γu indicheremo il vettore $(\gamma_0 u, \gamma_1 u, \ldots, \gamma_{k-1} u)$; $u \to \gamma u$ *è un'applicazione lineare continua di* $H^{k,\alpha}(\Omega)$ *in* (ma non *su*) $[L^{\alpha}(\Gamma)]^k$ (prodotto topologico di $L^{\alpha}(\Gamma)$ per se stesso k volte) *la quale coincide con l'ordinaria traccia se* $u \in \mathcal{S}^{k,\alpha}(\Omega)$. Che l'applicazione sia *in* e non *su* $[L^{\alpha}(\Gamma)]^k$ è noto anche da un classico esempio di HADAMARD a proposito del principio di DIRICHLET.

Alcuni teoremi più recenti di SOBOLEV [2] assicurano poi, in più, che: $\gamma_s u \in L^{\zeta}(\Gamma)$ con $\zeta = \dfrac{\alpha n - \alpha}{n + s\alpha - \alpha k}$.

Si pone naturalmente il problema della caratterizzazione dell'insieme di queste tracce, cioè del *codominio* dell'applicazione $u \to \gamma u$; ovviamente esso è un sottospazio lineare di $[L^{\alpha}(\Gamma)]^k$ che indicheremo con $S^{k,\alpha}(\Gamma)$ (per brevità porremo $S^{k,2}(\Gamma) = S^k(\Gamma)$). Si vede subito chè lo spazio $S^{k,\alpha}(\Gamma)$ è isomorfo algebricamente allo spazio lineare quoziente $\dfrac{H^{k,\alpha}(\Omega)}{H_0^{k,\alpha}(\Omega)}$, dove $H_0^{k,\alpha}(\Omega)$ è il sottospazio lineare chiuso di $H^{k,\alpha}(\Omega)$ delle u aventi traccia $\gamma u \equiv 0$. Questo isomorfismo si può rendere anche topologico «riportando» come norma in $S^{k,\alpha}(\Gamma)$ quella di $\dfrac{H^{k,\alpha}(\Omega)}{H_0^{k,\alpha}(\Omega)}$ cioè:

$$\| \gamma u \|_{S^{k,\alpha}(\Gamma)} = \inf \| v \|_{H^{k,\alpha}(\Omega)}$$

essendo v un qualunque elemento della classe di equivalenza in $\dfrac{H^{k,\alpha}(\Omega)}{H_0^{k,\alpha}(\Omega)}$ cui corrisponde γu; $u \to \gamma u$ *è allora una applicazione lineare continua di* $H^{k,\alpha}(\Omega)$ *su* $S^{k,\alpha}(\Gamma)$.

Rimane però aperto il problema di una caratterizzazione diretta, intrinseca, di $S^{k,\alpha}(\Gamma)$, la quale non adoperi che i valori assunti da γu su Γ. Per $\alpha = 2$ ciò è stato fatto sotto forme diverse da ARONSZAJN [1], FICHERA [3], LIONS [3], PRODI [1] e [2], BABICH e SLOBODETSKY [1] (v. anche DE VITO [1]). Recentemente GAGLIARDO [1] ha stabilito una caratterizzazione di $S^{k,\alpha}(\Gamma)$ per $k = 1$, $\alpha \geq 1$.

Senza entrare in particolari, ma solo per dare un'idea di questo tipo di caratterizzazione, ricordiamo ad es. che $S^{1,\alpha}(\Gamma)$ è composto da tutte e sole le funzioni $\varphi(x) \in L^\alpha(\Gamma)$ e tali che esista finito l'integrale $\iint\limits_{\Gamma\times\Gamma} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|^\alpha}{\overline{xy}^{\alpha+n-2}}\, d\sigma_x\, d\sigma_y$; esso risulta uno spazio di BANACH quando si assuma come norma

$$\|\varphi\|_{S^{1,\alpha}(\Gamma)} = \|\varphi\|_{L^\alpha(\Gamma)} + \left[\iint\limits_{\Gamma\times\Gamma} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|^\alpha}{\overline{xy}^{\alpha+n-2}}\, d\sigma_x\, d\sigma_y\right]^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{2.3}$$

Accanto alla considerazione dell'applicazione $u \to \gamma u$ si pone evidentemente quella dell' applicazione, per ogni s tale che $0 \leq s \leq k-1$, $u \to \gamma_s u$ di $H^{k,\alpha}(\Omega)$ in $L^\alpha(\Gamma)$; anche tale applicazione è lineare e continua; detto $S_s^{k,\alpha}(\Gamma)$ il codominio di questa applicazione, esso è un sottospazio lineare di $L^\alpha(\Gamma)$. Si pone anche qui il problema della caratterizzazione intrinseca di $S_s^{k,\alpha}(\Gamma)$. Per $\alpha = 2$ ciò è stato ottenuto da LIONS in [3] e da BABICH e SLOBODETSKY [1] e PRODI [2].

Pur senza entrare in particolari osserviamo solo che $S_s^{k,\alpha}(\Gamma) \simeq \dfrac{H^{k,\alpha}(\Omega)}{U_s^{k,\alpha}(\Omega)}$; dove $U_s^{k,\alpha}(\Omega)$ è il sottospazio chiuso di $H_s^{k,\alpha}(\Omega)$ delle u tali che $\gamma_s u = 0$. Se $\alpha = 2$ scriveremo anche $S_s^k(\Gamma)$ anziché $S_s^{k,2}(\Gamma)$.

b) Abbiamo introdotto poc'anzi il sottospazio $H_0^{k,\alpha}(\Omega)$ di $H^{k,\alpha}(\Omega)$: si dimostra facilmente (v. ad es. SCHWARTZ [2]) che $H_0^{k,\alpha}(\Omega)$ coincide con la chiusura di $\mathfrak{D}(\Omega)$ in $H^{k,\alpha}(\Omega)$. Porremo per comodità nel seguito $H_0^{0,\alpha}(\Omega) = H^{0,\alpha}(\Omega) = L^\alpha(\Omega)$.

Ci sarà utile considerare lo spazio duale di $H_0^{k,\alpha}(\Omega)$ $(k \geq 0, \alpha > 1)$; esso, poichè $H_0^{k,\alpha}(\Omega)$ è normale (cioè $\mathfrak{D}(\Omega)$ è denso in $H_0^{k,\alpha}(\Omega)$), è identificabile algebricamente con un sottospazio di distribuzioni su Ω (v. n. 1). Noi indicheremo con $H^{-k,\alpha'}(\Omega)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha'}=1\right)$ questo spazio duale, porremo cioè per definizione

$$H^{-k,\alpha'}(\Omega) = (H_0^{k,\alpha}(\Omega))', \qquad \left(k \geq 0\,,\ \alpha' > 1\,;\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha'}=1\right).$$

Il simbolismo è giustificato dal fatto, ben noto, che per $k=0$ $(H^{0,\alpha}(\Omega))' \simeq H_0^{0,\alpha'}(\Omega)$, e meglio ancora dal seguente teorema:

TEOREMA 2.1: *Lo spazio $H^{-k,\alpha'}(\Omega)$ è costituito da tutte e sole le distribuzioni T su Ω tali che*

$$T = \sum_{|p|\leq k} D^p f_p \qquad \text{con} \qquad f_p \in L^{\alpha'}(\Omega). \tag{2.4}$$

Si considerino infatti le applicazioni lineari e continue di $H_0^{k,\alpha}(\Omega)$ in $L^\alpha(\Omega): u \to D^p u$, $|p| \leq k$. Poichè $L^\alpha(\Omega)$ è localmente convesso, un teorema generale della teoria degli spazi lineari topologici (v. ad es. BOURBAKI [1, pag. 76]) (9) assicura che ogni funzionale lineare e continuo su $H_0^{k,\alpha}(\Omega)$, cioè ogni elemento T di $H^{-k,\alpha'}(\Omega)$, può scriversi nella forma

$$< T, u > = \sum_{|p| \leq k} (-1)^{|p|} < f_p, D^p u > \tag{2.5}$$

con $f_p \in L^{\alpha'}(\Omega)$. Osserviamo ora che, essendo $\mathcal{D}(\Omega)$ denso in $H_0^{k,\alpha}(\Omega)$, $\langle T, u \rangle$ è individuata dalla sua restrizione a $\mathcal{D}(\Omega)$; ma per $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ la (2.5) a causa della (1.1), diventa:

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{|p| \leq k} (-1)^{|p|} \langle f_p, D^p \varphi \rangle = \sum_{|p| \leq k} \langle D^p f_p, \varphi \rangle$$

da cui la (2.4).

Viceversa se $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e vale la (2.4) si ha

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{|p| \leq k} \langle D^p f_p, \varphi \rangle = \sum_{|p| \leq k} (-1)^{|p|} \langle f_p, D^p \varphi \rangle = \sum_{|p| \leq k} (-1)^{|p|} \int_\Omega f_p(x) D^p \varphi(x) \, dx$$

da cui, essendo $f_p \in L^{\alpha'}(\Omega)$ e $\mathcal{D}(\Omega)$ denso in $H_0^{k,\alpha}(\Omega)$, si ha che T è una forma lineare continua su $H_0^{k,\alpha}(\Omega)$ cioè $T \in H^{-k,\alpha'}(\Omega)$.

c) Ci sarà utile considerare inoltre lo spazio, anch'esso di BANACH, $H^{k,\alpha}(R^n)$, $(k \geq 0, \alpha > 1)$, delle distribuzioni T su R^n tali che $D^p T \in L^\alpha(R^n)$, $|p| \leq k$, normalizzato ponendo: $\| T \| = \sum_{|p| \leq k} \| D^p T \|_{L^\alpha(R^n)}$. $H^{k,\alpha}(R^n)$ è uno spazio normale di distribuzioni su R^n.

Analogamente a quanto fatto sopra porremo per definizione: $H^{-k,\alpha'}(R^n) = (H^{k,\alpha}(R^n))'$, $\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1\right)$.

Anche per questo spazio vale un teorema analogo al teorema 2.1 e precisamente: *le distribuzioni di $H^{-k,\alpha'}(R^n)$ sono tutte e sole quelle per le quali si può scrivere $T = \sum_{|p| \leq k} D^p f_p$ con $f_p \in L^{\alpha'}(R^n)$.*

---

(9) Il teorema è il seguente: Sia F_i una famiglia di spazi lineari topologici localmente convessi, E uno spazio lineare e, per ogni i, $u \to L_i(u)$ sia un'applicazione lineare di E in F_i; se si munisce E della topologia la meno fine che rende continue le $L_i(u)$, ogni forma lineare continua su E può scriversi nella forma $\sum_i < f_i, L_i(u) >$ dove f_i è una forma lineare continua su F_i e $f_i = 0$ salvo che per un numero finito di indici i. La dimostrazione si fonda essenzialmente sul teorema di *Hahn-Banach*. Per il caso che ci interessa v. anche Morrey [1].

Consideriamo ora il sottospazio delle distribuzioni di $H^{k,\alpha}(R^n)$ aventi supporto in $\overline{\Omega}$, sottospazio che indicheremo con $H_{\overline{\Omega}}^{k,\alpha}$ (10).

È interessante fare qualche considerazione su questo sottospazio, sia pure in casi particolari.

$H_{\overline{\Omega}}^{0,\alpha}$ è ovviamente identificabile con lo spazio $L^\alpha(\Omega)$, per le ipotesi fatte su Ω.

Per quanto riguarda $H_{\overline{\Omega}}^{1,\alpha}$ si ha il seguente

TEOREMA 2.2: *Ogni distribuzione di* $H_{\overline{\Omega}}^{1,\alpha}$ *è una funzione* u *di* $L^\alpha(R^n)$, *nulla fuori di* $\overline{\Omega}$, *per la quale esistono* n *funzioni* $u_i \in L^\alpha(\Omega)$, $(i = 1, \dots, n)$, *tali che si ha:*

$$\langle D_i u , \varphi \rangle = \int_\Omega \varphi \, u_i \, dx + \int_\Gamma \varphi \gamma_0 u \cos(x_i, \nu) \, d\sigma \tag{2.6}$$

per ogni $\varphi \in \mathfrak{D}(R^n)$, *dove* $D_i u$ *è la derivata di* u *in* $\mathfrak{D}'(R^n)$, $\gamma_0 u$ *è la traccia di* u *su* Γ *e* ν *è la normale interna a* Ω *su* Γ.

Infatti incominciamo con l'osservare che poichè $\mathfrak{D}(R^n)$ è denso in $H^{1,\alpha}(R^n)$, ne viene che per ogni $u \in H^{1,\alpha}(R^n)$ esiste una successione $\{\psi_r\}$ di $\psi_r \in \mathfrak{D}(R^n)$, tale che

$$\psi_r \to u \quad \text{in} \quad L^\alpha(R^n) ; \qquad \psi_r \to \gamma_0 u \quad \text{in} \quad L^\alpha(\Gamma) ,$$

ed inoltre esistono n funzioni $u_i \, (i = 1, \dots, n)$ appartenenti a $L^\alpha(R^n)$, per cui $\dfrac{\partial \psi_r}{\partial x_r} \to u_i$ in $L^\alpha(R^n)$.

Osserviamo poi anche che per ψ e $\varphi \in \mathfrak{D}(R^n)$ si ha (formula di GREEN)

$$\int_\Omega \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_\Omega \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx - \int_\Gamma \varphi \psi \cos(x_i, \nu) \, d\sigma \tag{2.7}$$

sicchè passando al limite nella (2.7) scritta per ψ_r si ha che per ogni $u \in H^{1,\alpha}(R^n)$ vale la seguente formula:

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_\Omega \varphi \, u_i \, dx - \int_\Gamma \varphi \gamma_0 \cos(x_i, \nu) \, d\sigma . \tag{2.8}$$

(10) In generale se F è uno spazio di distribuzioni in Ω (o R^n) e X è un compatto di Ω (o R^n) indicheremo con F_X il sottospazio delle distribuzioni di F aventi supporto contenuto in X.

La (2.8) varrà in particolare se $u \in H_{\overline{\Omega}}^{1,\alpha}$. D'altra parte per definizione di derivata in $\mathcal{D}'(R^n)$ si ha

$$\langle D_i u , \varphi \rangle = - \langle u , D_i \varphi \rangle$$

e, poichè u ha supporto contenuto in $\overline{\Omega}$, si ha

$$\langle u , D_i \varphi \rangle = \int_{\Omega} u \, D_i \varphi \, dx$$

da cui la (2.6).

Il teorema 2.2 esprime il fatto che per ogni $u \in H_{\overline{\Omega}}^{1,\alpha}$ *la derivata* $D_i u$ *in* $\mathcal{D}'(R^n)$ *di* u *è la somma di una funzione* $u_i \in L^\alpha(\Omega)$ *e di una distribuzione su* Γ; la funzione u_i coincide con la derivata della u in $\mathcal{D}'(\Omega)$ e la distribuzione su Γ con $\gamma_0 u \cos(x_i , \nu)$.

In modo analogo si può caratterizzare lo spazio $H_{\overline{\Omega}}^{k,\alpha}$ con $k > 1$.

d) Introdurremo anche lo spazio $H_{\overline{\Omega}}^{-k,\alpha'}$ $(k \geq 0 , \alpha' > 1)$; esso è il sottospazio delle distribuzioni di $H^{-k,\alpha'}(R^n)$ aventi supporto in $\overline{\Omega}$.

Osserviamo ora che $H^{k,\alpha}(\Omega)$ $(k > 0, \alpha > 1)$, a differenza di $H_0^{k,\alpha}(\Omega)$, non è uno spazio normale di distribuzione su Ω e quindi il suo duale $(H^{k,\alpha}(\Omega))'$ non è *identificabile* con un sottospazio di distribuzioni su Ω (il che porta come conseguenza che non si può definire sugli elementi di $(H^{k,\alpha}(\Omega))'$ la derivazione nel senso di $\mathcal{D}'(\Omega)$).

Sarà dunque di interesse dimostrare che:

TEOREMA 2.3. (LIONS [4] e [5]): *Nelle ipotesi fatte su* Ω, $(H^{k,\alpha}(\Omega))'$, $(k > 0 , \alpha > 1)$, *si può identificare* (*algebricamente e topologicamente*) *con* $H_{\overline{\Omega}}^{-k,\alpha'}$ $\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1\right)$.

Poichè $H_{\overline{\Omega}}^{-k,\alpha'}$ è uno spazio di distribuzioni su R^n, la identificazione di cui alla proposizione precedente ci permetterà di dare un significato all'operazione di derivazione in $(H^{k,\alpha}(\Omega))'$, precisamente quella definita in $\mathcal{D}'(R^n)$.

Per dimostrare il teorema 2.3 incominciamo ad introdurre le seguenti notazioni:

φ_X indica la restrizione di una funzione φ, definita in R^n, all'insieme X.

$\tilde{\varphi}$ indica il prolungamento di una funzione φ definita in X ponendola uguale a zero in $\complement X$ (complementare di X rispetto a R^n):

$$\tilde{\varphi} = 0 \quad \text{in} \quad \complement X \qquad\qquad \tilde{\varphi} = \varphi \quad \text{in} \quad X .$$

Le ipotesi di regolarità formulate all'inizio su Ω sono tali da assicurare:

1) l'esistenza di un'applicazione $u \to \theta(u)$ lineare e continua di $H^{k,\alpha}(\Omega)$ in $H^{k,\alpha}(R^n)$ tale che $\theta(u)_\Omega \equiv u$ (quasi ovunque in Ω).

2) se $v \in H^{k,\alpha}(R^n)$ e $v_\Omega = 0$, esiste una funzione w di $H_0^{k,\alpha}\left(\complement\, \overline{\Omega}\right)$ tale che $v = \widetilde{w}$.

Che sia possibile soddisfare la 1) discende facilmente da BABICH [1], GAGLIARDO [2]; la 2) è ovvia nell'ipotesi fatta su Ω. Si osservi che 1) e 2) sono indipendenti fra di loro.

Dimostrazione del teorema 2.3: Sia $T \in (H^{k,\alpha}(\Omega))'$; se $v \in H^{k,\alpha}(R^n)$, $\langle T, \overline{v_\Omega} \rangle$ è un funzionale semilineare (11) continuo in $H^{k,\alpha}(R^n)$ e quindi della forma $\langle \pi T, \overline{v} \rangle$, ove $\pi T \in H^{-k,\alpha'}(R^n)$; ma poichè, se $\varphi \in \mathfrak{D}(R^n)$ e $\varphi = 0$ su $\overline{\Omega}$, si ha $\langle \pi T, \overline{\varphi} \rangle = \langle T, \overline{\varphi_\Omega} \rangle = 0$, possiamo concludere che la relazione

$$\langle T, \overline{v_\Omega} \rangle = \langle \pi T, \overline{v} \rangle \qquad \text{per} \qquad v \in H^{k,\alpha}(R^n)$$

definisce un'applicazione lineare e continua $T \to \pi T$ di $(H^{k,\alpha}(\Omega))'$ in $H^{-k,\alpha'}_{\overline{\Omega}}$. Dimostreremo che π costituisce proprio un isomorfismo di $(H^{k,\alpha}(\Omega))'$ su $H^{-k,\alpha'}_{\overline{\Omega}}$.

Sia $S \in H^{-k,\alpha'}_{\overline{\Omega}}$; per ogni $u \in H^{k,\alpha}(\Omega)$, $\langle S, \overline{\theta(u)} \rangle$ è un funzionale semilineare continuo su $H^{k,\alpha}(\Omega)$, quindi della forma $\langle \omega S, \overline{u} \rangle$ ove $\omega S \in (H^{k,\alpha}(\Omega))'$.

La relazione: $\langle S, \overline{\theta(u)} \rangle = \langle \omega S, \overline{u} \rangle$ definisce quindi un'applicazione lineare e continua $S \to \omega S$ di $H^{-k,\alpha'}_{\overline{\Omega}}$ in $(H^{k,\alpha}(\Omega))'$.

Ebbene, basterà dimostrare che ω e π sono due applicazioni, l'una inversa dell'altra, per dimostrare l'asserto; basterà cioè dimostrare che

$$\left\{ \begin{aligned} &\omega \pi T = T \qquad \text{per} \qquad T \in (H^{k,\alpha}(\Omega))' \\ &\pi \omega S = S \qquad \text{per} \qquad S \in H^{-k,\alpha'}_{\overline{\Omega}}. \end{aligned} \right. \tag{2.9}$$

La prima delle (2.9) si ha semplicemente osservando che per ogni $u \in H^{k,\alpha}(\Omega)$, è:

$$\langle \omega \pi T, \overline{u} \rangle = \langle \pi T, \overline{\theta(u)} \rangle = \langle T, \overline{\theta(u)_\Omega} \rangle = \langle T, \overline{u} \rangle.$$

---

(11) O anche pseudo lineare; ricordiamo che tale è un funzionale $F(v)$ se $F(av + bw) = \overline{a}\, F(v) + \overline{b}\, F(w)$.

Per la seconda, essendo per ogni $v \in H^{k,a}(R^n)$

$$\langle \pi\, \omega\, S\, ,\, \overline{v} \rangle = \langle \omega\, S\, ,\, \overline{v}_\Omega \rangle = \langle S\, ,\, \theta\,(\overline{v}_\Omega) \rangle\, ,$$

basterà dimostrare che : $\langle S, \theta\,(\overline{v}_\Omega) \rangle = \langle S, \overline{v} \rangle$, cioè $\langle S, \theta\,(\overline{v}_\Omega) - \overline{v} \rangle = \langle S, \overline{\tilde{g}} \rangle = 0$ ove $\tilde{g} = v - \theta(v_\Omega)$ e $g \in H_0^{k,a}\left(\complement\, \overline{\Omega}\right)$ (proposizione 2)); ma poichè $g = \lim_{i\to\infty} \varphi_i$ in $H_0^{k,a}\left(\complement\, \overline{\Omega}\right)$ con $\varphi_i \in \mathcal{D}\left(\complement\, \overline{\Omega}\right)$ e quindi $\tilde{g} = \lim_{i\to\infty} \tilde{\varphi}_i$ in $H^{k,a}(R^n)$, segue: $\langle S\, ,\, \overline{\tilde{g}} \rangle = \lim_{i\to\infty} \langle S\, ,\, \overline{\tilde{\varphi}}_i \rangle = 0$, perché $\langle S\, ,\, \overline{\tilde{\varphi}}_i \rangle = 0$, avendo S supporto in $\overline{\Omega}$.

e) Accanto agli spazi $H^{k,a}(\Omega)\, ,\, H^{k,a}_{\overline{\Omega}}$ ecc. ora introdotti sarà utile per il seguito ricordare anche altri spazi di distribuzioni.

Sostituendo ad $H^{k,a}(\Omega)$ lo spazio $C^k(\overline{\Omega})$ delle funzioni continue in $\overline{\Omega}$ con le derivate d'ordine $\leq k$ normalizzato ponendo al solito

$$\| H \|_{C^k(\overline{\Omega})} = \sum_{|p| \leq k} \max_{\overline{\Omega}} |\, D^p u\, |$$

si possono sviluppare considerazioni analoghe a quelle ora viste. A noi basterà richiamare per il seguito le seguenti proprietà.

La chiusura, $C_0^k(\overline{\Omega})$, di $\mathcal{D}(\Omega)$ in $C^k(\overline{\Omega})$ è ovviamente costituita dalle funzioni di $C^k(\overline{\Omega})$ nulle su Γ con tutte le derivate d'ordine $\leq k$.

$C_0^k(\overline{\Omega})$ è uno spazio normale di distribuzioni su Ω. Il suo duale $(C_0^k(\overline{\Omega}))'$ si può identificare dunque con un sottospazio di distribuzioni su Ω, di cui però non ci serviremo in seguito.

$C^k(\overline{\Omega})$ non è invece uno spazio normale di distribuzioni su Ω; il suo duale $(C^k(\overline{\Omega}))'$ non si può dunque identificare con un sottospazio di $\mathcal{D}'(\Omega)$. Si può però identificare con un sottospazio di $\mathcal{D}'(R^n)$, come ora vedremo, analogamente a quanto fatto per $(H^{k,a}(\Omega))'$ col teorema 2.3.

Ricordiamo per questo che si indica con $\mathcal{D}^k(R^n)$ lo spazio delle funzioni φ continue con le derivate d'ordine $\leq k$, a supporto compatto in R^n, la topologia essendo definita in modo anologo a quello usato per $\mathcal{D}(R^n)$: precisamente un sistema fondamentale di intorni dell'origine essendo dato dalle funzioni φ di $\mathcal{D}^k(R^n)$ che per ogni ν verificano le

$$|D^p\, \varphi\,(x)| \leq \varepsilon_\nu \qquad \text{per} \qquad |p| \leq k \qquad \text{e} \qquad x \notin A_\nu$$

essendo $\varepsilon_0\, ,\, \varepsilon_1\, , \ldots ,\, \varepsilon_\nu$ una successione di numeri positivi decrescenti e infinitesima e $A_0\, ,\, A_1\, , \ldots ,\, A_\nu\, , \ldots$ la successione delle sfere aperte $|x| < \nu + 1$ ([SCHWARTZ [1, I]).

Lo spazio duale di $\mathcal{D}^k(R^n)$ è lo spazio delle distribuzioni d'ordine finito e $\leq k$; lo indicheremo con $\mathcal{D}^{-k}(R^n)$. È noto che gli elementi di $\mathcal{D}^{-k}(R^n)$ sono caratterizzati dal fatto di essere somme di derivate, d'ordine $\leq k$, di misure in R^n: $T = \sum_{|p| \leq k} D^p \mu_p$ con μ_p misura in R^n, la derivazione essendo intesa in $\mathcal{D}'(R^n)$ (v. SCHWARTZ [1, I, pag. 96], la dimostrazione si potrebbe dare anche in modo analogo a quello del teorema 2.1).

Indichiamo allora con $\mathcal{D}^{-k}_{\overline{\Omega}}$ il sottospazio delle distribuzioni di $\mathcal{D}^{-k}(R^n)$ aventi supporto contenuto in $\overline{\Omega}$; gli elementi di $\mathcal{D}^{-k}_{\overline{\Omega}}$ sono caratterizzati (v. SCHWARTZ [1, I, p. 91]) dall'essere somme di derivate, d'ordine $\leq k$, di misure a supporto contenuto in $\overline{\Omega}$: $T = \sum_{|p| \leq k} D^p \mu_p$ con μ_p misure a supporto in $\overline{\Omega}$.

Ebbene si può facilmente ottenere, seguendo la dimostrazione del teorema 2.3, il

TEOREMA 2.4 (VISHIK-SOBOLEV [1]): *Il duale $(C^k(\overline{\Omega}))'$ di $C^k(\overline{\Omega})$ si può identificare con $\mathcal{D}^{-k}_{\overline{\Omega}}$.*

Pur senza entrare in particolari è bene osservare come possono ottenersi risultati analoghi partendo dagli spazi $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ (spazio delle funzioni hölderiane di esponente α con le derivate d'ordine $\leq k$) o altri spazi in luogo di $C^k(\overline{\Omega})$ e di $H^{k,\alpha}(\Omega)$. In particolare potrà interessare per il seguito un teorema di isomorfismo analogo ai teoremi 2.3 e 2.4.

f) Riprendiamo ora brevemente lo spazio $H^{k,\alpha}(R^n)$ nella ipotesi $\alpha = 2$; scriveremo, come si è già detto, più semplicemente $H^k(R^n)$. Tale spazio è stato in *c*) introdotto per k intero positivo e negativo. Vediamo ora come possa estendersi la definizione per *k reale qualunque*.

Osserviamo perciò anzitutto che se k è intero ≥ 0, per note proprietà sulla trasformata di FOURIER in $L^2(R^n)$, se $f(x) \in H^k(R^n)$, detta $\widehat{f}(\xi)$ la sua trasformata di FOURIER, si ha che $(1 + |\xi|^2)^{\frac{k}{2}} \widehat{f}(\xi) \in L^2(R^n)$ e viceversa.

È allora naturale la seguente definizione: *diremo che la distribuzione T appartiene ad $H^k(R^n)$, k reale qualunque, se T appartiene allo spazio $\mathcal{S}'$ delle distribuzioni temperate* ([12]) *e se la sua trasformata di Fourier $\widehat{T}$ è una funzione*

([12]) Ricordiamo che $\mathcal{S}'$ è lo spazio duale dello spazio $\mathcal{S}$ così definito: $\varphi(x) \in \mathcal{S}$ se è indefinitamente differenziabile in R^n e risulta $\lim_{x \to \infty} |x|^s D^p \varphi(x) = 0$ per ogni D^p e ogni s intero ≥ 0; in $\mathcal{S}$ si introduce la topologia prendendo come sistema fondamentale di intorni dell'origine gli insiemi $V(m, s, \varepsilon)$ delle φ di $\mathcal{S}$ tali che $|(1 + |x|^2)^s D^p \varphi(x)| < \varepsilon$ per ogni $|p| \leq m$ essendo m e s interi ≥ 0 qualunque ed ε reale positivo qualunque. È anche *tale che*

$$(1 + |\xi|^2)^{\frac{k}{2}} \widehat{T}(\xi) \in L^2(R^n) .$$

Lo spazio $H^k(R^n)$ così introdotto è uno spazio di HILBERT (completo) se si assume come prodotto scalare di due elementi S e T

$$(S, T) = \int_{R^n} (1 + |\xi|^2)^k \widehat{S}(\xi) \overline{\widehat{T}}(\xi) \, d\xi$$

e di conseguenza come norma $\| T \| = (T, T)^{1/2}$.

Se k è intero positivo si ritrova la definizione usuale di $H^k(R^n)$ richiamata in *c*), con una norma che è equivalente a quella ivi introdotta.

In generale vale il seguente importante teorema di dualità.

TEOREMA 2.5: *Il duale di $H^k(R^n)$ si può identificare con $H^{-k}(R^n)$:* $(H^k(R^n))' \simeq H^{-k}(R^n))$,

Più precisamente il teorema 2.5 va inteso così: $(H^k(R^n))'$, in quanto $H^k(R^n)$ è uno spazio normale di distribuzioni, è isomorfo algebricamente ad un sottospazio K' di $\mathcal{D}'(R^n)$, per una proprietà richiamata nel n. 1; ebbene $K' = H^{-k}(R^n)$ e l'isomorfismo è anche topologico. Per la dimostrazione si veda SCHWARTZ [3].

Il teorema 2.5 permette ora di ritrovare, anche nel caso di k intero negativo, lo spazio precedentemente introdotto in *c*) per semplice dualità.

Si osservi ancora che questi spazi $H^k(R^n)$ con k reale sono strettamente legati alla derivazione di ordine reale qualunque che in più modi e da diversi Autori è stata utilmente considerata (v. ad es. PRODI [1]).

Per concludere ricordiamo ancora che si dimostra (v. ad es. LIONS [3] e PRODI [1]) che: *lo spazio $H^{k-\frac{1}{2}}(R^n)$ è isomorfo allo spazio $S_0^k(R_+^{n+1})$ delle tracce $\gamma_0 u$ delle funzioni u di quadrato sommabile con tutte le derivate d'ordine $\leq k$ nel semispazio R_+^{n+1} di R^{n+1} per cui è $x_{n+1} \geq 0$, cioè* $H^{k-\frac{1}{2}}(R^n) \simeq S_0^k(R_+^{n+1})$.

---

noto che in $\mathcal{S}'$ si può definire la trasformata di Fourier ponendo $< \widehat{T}, \varphi > = < T, \widehat{\varphi} >$ dove

$$\widehat{\varphi}(y) = \int_{R^n} \varphi(x) \, exp(-2\pi i x \cdot y) \, dx \qquad (x \cdot y = x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n y_n)$$

è la trasformata usuale di Fourier. Si veda *Schwartz* [1] e per un breve riassunto [3].

In generale, con analogo significato dei simboli, si ha

$$H^{k-s-\frac{1}{2}}(R^n) \simeq S_s^k(R_+^{n+1}) \qquad (s = 0, 1, \dots, k-1).$$

g) Ci sarà utile richiamare anche il seguente lemma

LEMMA 2.6: *Nella ipotesi fatta su Ω ad ogni $\varepsilon > 0$ corrisponde un numero $\lambda(\varepsilon)$ dipendente solo da ε tale che*

$$\| u \|_{H^{k-1,\alpha}(\Omega)} \leq \varepsilon \| u \|_{H^{k,\alpha}(\Omega)} + \lambda(\varepsilon) \| u \|_{H^{0,\alpha}(\Omega)}$$

per ogni u di $H^{k,\alpha}(\Omega)$ (k intero positivo).

Anche in questo lemma l'ipotesi su Ω può essere notevolmente generalizzata: si veda NIRENBERG [2], LIONS [6], GAGLIARDO [2] dove si possono trovare anche dimostrazioni dirette del lemma. Noi qui dimostreremo però ora un interessante lemma che J. L. LIONS ci ha gentilmente comunicato e da cui si deduce il lemma 2.6 tenuto conto del fatto ben noto (RELLICH, KONDRASHOV, ...) che l'iniezione di $H^k(\Omega)$ in $H^{k-1}(\Omega)$ è completamente continua.

LEMMA 2.7 (di LIONS): *Siano E_1, E_2, E_3 tre spazi di Banach con E_1 sottospazio lineare di E_2 e E_2 di E_3, le iniezioni di E_1 in E_2 e di E_2 in E_3 essendo continue e l'iniezione di E_1 in E_2 essendo di più completamente continua; allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\lambda(\varepsilon)$ tale che*

$$\| u \|_{E_2} \leq \varepsilon \| u \|_{E_1} + \lambda(\varepsilon) \| u \|_{E_3} \tag{2.10}$$

per ogni $u \in E_1$.

Infatti fissato $\varepsilon > 0$, se per assurdo la (2.10) non fosse vera, ci sarebbe per ogni n un punto u_n di E_1 e un $\lambda_n > 0$ tale che $\lambda_n \to +\infty$ e

$$\| u_n \|_{E_2} \geq \varepsilon \| u_n \|_{E_1} + \lambda_n \| u_n \|_{E_3}$$

Posto $v_n = \dfrac{u_n}{\| u_n \|_{E_1}}$ si ha:

$$\| v_n \|_{E_2} \geq \varepsilon + \lambda_n \| v_n \|_{E_3}, \qquad \| v_n \|_{E_1} = 1 \tag{2.11}$$

Allora $\| v_n \|_{E_2}$ è limitato al variare di n e quindi, per la (2.11), segue

$$\| v_n \|_{E_3} \to 0 \tag{2.12}$$

Poichè $\| v_n \|_{E_1} = 1$ e l'iniezione di E_1 in E_2 è completamente continua, esiste una sotto successione $\{v_i\}$ tale che v_i converge fortemente in E_2 a un punto v. Ma per (2.12) $v = 0$ e quindi $v_i \to 0$ in E_2. Ma da (2.11) si ha $\| v_i \|_{E_2} \geq \varepsilon$, e ciò è assurdo.

OSSERVAZIONE: Per ragioni di comodità porremo d'ora innanzi $\| u \|_{H^k(\Omega)} = \| u \|_{k,\Omega}$ e, se non ci sarà possibilità di equivoco, anche $\| u \|_{H^k(\Omega)} = \| u \|_k$ Così pure $\| u \|_{H^k(R^n)} = \| u \|_{k,R^n}$

N. 3. *Un principio generale di esistenza e unicità per equazioni funzionali lineari.*

Enunciamo ora un risultato di FICHERA [6] (v. anche FAEDO [1]) relativo alla risolubilità di alcune equazioni funzionali, che sarà utile in seguito.

Sia $\mathcal{V}$ una varietà lineare rispetto al corpo complesso, e siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ due spazi di Banach rispetto allo stesso corpo. Siano poi $M_1 v$ ed $M_2 v$ due applicazioni lineari di $\mathcal{V}$ *in* $\mathcal{B}_1$ e *in* $\mathcal{B}_2$ rispettivamente. Detto Φ un elemento del duale $\mathcal{B}_1'$ di $\mathcal{B}_1$, consideriamo la seguente equazione

$$\langle \Phi , M_1 v \rangle = \langle \Psi , M_2 v \rangle \text{ per ogni } v \in \mathcal{V} \tag{3.1}$$

nella incognita Ψ, elemento del duale $\mathcal{B}_2'$ di $\mathcal{B}_2$. Il simbolo $\langle \ \rangle$ indica la dualità rispettivamente tra $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_1'$ e tra $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_2'$.

Sussiste a questo proposito il seguente risultato che fornisce una condizione necessaria e sufficiente per la risolubilità della (3.1)

TEOREMA 3.1: *Condizione necessaria e sufficiente per la risolubilità della* (3.1) *dato comunque* Φ, *è che, per ogni* $v \in \mathcal{V}$ *si abbia*,

$$\| M_1 v \|_{\mathcal{B}_1} \leq k \, \| M_2 v \|_{\mathcal{B}_2} \tag{3.2}$$

con k *costante. La soluzione della* (3.1) *è poi unica se e solo se il codominio di* $M_2 v$ *al variare di* v *in* $\mathcal{V}$ *è denso in* $\mathcal{B}_2$. *Inoltre la soluzione* Ψ *della* (3.1) *soddisfa alla condizione*

$$\| \Psi \|_{\mathcal{B}_2'} \leq k \, \| \Phi \|_{\mathcal{B}_1'}$$

Rinviando per la dimostrazione al lavoro citato di FICHERA [6], ci limitiamo ad osservare che la dimostrazione della sufficienza della condizione (e noi adopereremo in seguito soprattutto in questo senso il teorema) è una conseguenza del teorema di HAHN-BANACH; infatti si consideri in $M_2(\mathcal{V})$, codominio di M_2, il funzionale lineare $\Psi(w_2) = \Phi[M_1 v]$, dove v è tale che $M_2 v = w_2$ (si osservi che $M_1 v$ dipende solo da w_2 in virtù della (3.2)). Sempre per la (3.2) $\Psi(w_2)$ è continuo e quindi, per il teorema di HAHN-BANACH, esso può prolungarsi in tutto $\mathcal{B}_2$ in un funzionale Ψ che è dunque soluzione di (3.1). L'unicità è poi ovvia se $M_2(\mathcal{V})$ è denso in $\mathcal{B}_2$.

Capitolo II

PROBLEMI AL CONTORNO PER EQUAZIONI LINEARI ELLITTICHE. METODI AD « INTEGRALE DI DIRICHLET » FINITO.

N. 4. *Equazioni ellittiche e problemi al contorno; introduzione.*

Volendo studiare i problemi al contorno per le equaziani differenziali è bene ricordare anzitutto che nell'assegnare un operatore differenziale è essenziale precisare anche la sua decomposizione negli operatori che vanno considerati come *elementari.* Questa precisazione è particolarmente importante quando si considerano operatori che operano su classi di funzioni più vaste di quanto si faccia nella teoria classica.

Così ad es. nella teoria classica si suole indicare con $\Delta^2 u$ sia l'operatore

$$\Delta \Delta u \qquad (\Delta u \text{ laplaciano}) \tag{4.1}$$

che l'operatore

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \eta \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u, \tag{4.2}$$

$$\eta \text{ e } \mu \text{ costanti tali che } \eta + \mu = 1.$$

Nel primo caso si assume come operatore elementare Δu, nel secondo caso si assumono come operatori elementari tutte le derivate seconde. Mentre nel primo caso l'operatore $\Delta^2 u$ può operare su funzioni per le quali si sia dato un significato al solo Δu, nell'altro caso l'operatore può operare su classi di funzioni per le quali si sia dato un significato a tutte le derivate seconde.

Ma l'importanza della decomposizione dell'operatore consiste pure nel fatto che, anche quando si siano fissati gli operatori elementari, a decomposizioni diverse rispetto a quegli operatori elementari fissati, corrispondono problemi al contorno « ben posti » diversi, come sarà meglio chiarito nel prossimo numero.

Diciamo allora subito che fisseremo la nostra attenzione nei numeri seguenti (salvo ritornare nell'ultimo capitolo sulla questione) su quegli *operatori di ordine pari definiti in Ω la cui decomposizione è espressa mediante gli operatori elementari $D^p u$, derivate parziali d'ordine qualunque, intese nel senso* *delle distribuzioni in Ω*; più precisamente considereremo l'operatore del tipo

$$Au = \sum_{|p|,\,|q| \leq m} (-1)^{|p|} D^p \left(a_{p,q}(x)\, D^q u\right) \tag{4.3}$$

dove i coefficienti $a_{p,q}(x)$ sono funzioni complesse definite in Ω e le derivazioni sono intese in $\mathfrak{D}'(\Omega)$.

Volendo che $Au \in \mathfrak{D}'(\Omega)$, Au si potrà considerare definito in diverse classi di funzioni o distribuzioni u a seconda delle ipotesi che si faranno sugli $a_{p,q}(x)$; ad es. se gli $a_{p,q}(x)$ sono indefinitamente differenziabili in Ω, Au è definito per ogni distribuzione u di $\mathfrak{D}'(\Omega)$; supponendo invece i coefficienti meno regolari occorre restringere la classe delle distribuzioni sulle quali Au opera (si veda per la moltiplicazione tra le distribuzioni il cap. V di SCHWARTZ [1, I]). In ogni caso pur di *supporre, come faremo d'ora innanzi, che gli $a_{p,q}(x)$ siano almeno localmente sommabili in Ω, Au è definito per ogni $u \in \mathfrak{D}(\Omega)$ e si vede anzi subito che $u \to Au$ è una applicazione lineare continua di $\mathfrak{D}(\Omega)$ in $\mathfrak{D}'(\Omega)$*, cioè un elemento di $\mathcal{L}(\mathfrak{D}(\Omega), \mathfrak{D}'(\Omega))$.

Ma è allora da notare che poichè per la derivazione intesa nel senso delle distribuzioni su Ω valgono i teoremi usuali di invertibilità dell'ordine delle derivazioni e di derivazione del prodotto, uno stesso operatore *Au può ammettere più decomposizioni del tipo* (4.3) *negli operatori elementari $D^p u$, ciascuna delle quali serve ad individuarlo come elemento di $\mathcal{L}(\mathfrak{D}(\Omega), \mathfrak{D}'(\Omega))$*. Ad es. lo stesso operatore $\Delta^2 u$ scritto nella forma (4.2) ammette al variare di η e μ decomposizioni diverse tutte rispetto agli stessi operatori elementari derivate seconde. E così pure l'operatore Δu in due variabili (x_1, x_2) può essere scritto rispetto agli operatori elementari derivate prime nella forma

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2} u + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_2} u \tag{4.4}$$

e nell'altra

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} u + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_2} u + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\eta \frac{\partial}{\partial x_2} u\right) - \tag{4.5}$$

$$- \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\eta \frac{\partial}{\partial x_1} u\right) + \frac{\partial \eta}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_1} u - \frac{\partial \eta}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2} u \qquad \eta \in C^1(\overline{\Omega}) \text{ e reale}$$

Sarà utile ricordare ora la definizione di ellitticità per Au, estensione naturale di quella classica per gli operatori del secondo ordine.

DEFINIZIONE 4.1: *Diremo che Au è un operatore «ellittico» nel punto x se la forma caratteristica associata ad Au, di grado $2m$ nelle variabili reali*

$\xi_1 \dots \xi_n$ *è «definita», nel senso che indicato con ξ il vettore $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ si abbia:*

$$\sum_{|p|,|q|=m} a_{p,q}(x)\, \xi^{p+q} \neq 0 \qquad per \quad \xi \neq 0 ; \tag{4.6}$$

Au è ellittico in Ω se è ellittico in ogni $x \in \Omega$.

Si osservi esplicitamente che la forma caratteristica non dipende dalla decomposizione del tipo (4.3) di Au negli operatori $D^p u$, ma solo dall'operatore Au.

La (4.6) equivale anche alla condizione

$$\left| \sum_{|p|,|q|=m} a_{pq}(x)\, \xi^{p+q} \right| \geq \alpha(x) \, |\xi|^{2m}$$

per ogni ξ reale, $\alpha(x)$ essendo un numero opportuno positivo. Se poi i coefficienti $a_{pq}(x)$ sono reali la forma caratteristica può supporsi, senza restrizioni, definita positiva e l'ellitticità si può ridurre allora alla condizione

$$\sum_{|p|,|q|=m} a_{pq}(x)\, \xi^{p+q} \geq \alpha(x) \, |\xi|^{2m} \tag{4.7}$$

per ogni ξ reale, $\alpha(x) > 0$.

Fatte queste premesse, veniamo ora a considerare i problemi al contorno relativi agli operatori Au del tipo descritto avanti. Facendo uso di un linguaggio necessariamente approssimato, possiamo dire, ispirandoci ai risultati noti nella teoria classica, che «grosso modo» un problema al contorno è assegnato quando siano dati *in un senso opportuno:*

1) *un operatore differenziale Au in Ω*

2) *un operatore lineare (differenziale, integrale ecc...) di frontiera Lu su Γ.*

3) *una classe K di funzioni (distribuzioni) nella quale si possa dare un significato agli operatori elementari Du, a Au, ed a Lu.*

Il problema è poi «ben posto» secondo HADAMARD quando il sistema

$$Au = f \quad \text{in} \quad \Omega, \qquad Lu = g \quad \text{su} \quad \Gamma$$

è risolubile in modo unico in K per ogni f e g assegnate e la soluzione dipende «con continuità», secondo una topologia opportuna, dai dati f e g.

Prima di esporre una teoria dei problemi al contorno per equazioni di ordine qualunque è opportuno richiamare alcuni risultati relativi alle equazioni del secondo ordine, che potranno essere di guida nello studio ulteriore.

È ben noto che per gli operatori reali ellittici del secondo ordine si presentano diversi problemi al contorno: di DIRICHLET ($Lu = u$), di NEUMANN ($Lu = \frac{du}{d\nu^*}$, ν^* direzione «conormale»), misti di DIRICHLET-NEUMANN ($Lu = u$

su una parte Γ_1 di Γ, $Lu = \frac{du}{d\nu^*}$ su $\Gamma - \Gamma_1$), di derivata obliqua «regolare» ($Lu = \frac{d\,u}{d\,l}$, l direzione «penetrante» in Ω) ecc. Molti di questi problemi sono già da tempo stati risolti nell'ambito dell'analisi classica, quando per soluzione si intenda una funzione continua in Ω con le derivate che compaiono in Au e in $\Omega + \Gamma$ con quelle derivate che compaiono in Lu, con procedimenti laboriosi e diversi a seconda dei problemi considerati.

Una visione più unitaria dei diversi problemi si presenta però quando questi vengono considerati in un senso « generalizzato » o « debole » mediante procedimenti, fra i quali interessante è quello « variazionale » o « a integrale di DIRICHLET » finito. Orbene è importante ricordare, a proposito di questi problemi relativi alle equazioni del secondo ordine, che già la trattatistica classica ha messo in evidenza che essi non solo sono « ben posti » nel senso sopraddetto, ma godono altresì di fondamentali e caratteristiche proprietà, quali la possibilità di applicare ad essi la teoria di FREDHOLM-RIESZ (teorema della alternativa, proprietà degli autovalori e delle autofunzioni..) e la possibilità di « regolarizzare » la soluzione sia in Ω che su Γ in funzione della regolarità dei dati del problema, fino ad ottenere addirittura l'analiticità della soluzione quando i dati siano analitici.

Se si vorrà allora costruire una teoria significativa dei problemi al contorno per le equazioni d'ordine qualunque, bisognerà dare a detti problemi un'impostazione che permetta di ottenere tutte queste proprietà o almeno la maggior parte. La impostazione che si è finora dimostrata la più utile è sostanzialmente quella variazionale e ad essa si rifanno sotto forme più o meno equivalenti quasi tutte le teorie recenti (GÅRDING [1], VISHIK [1], BROWDER [1], NIRENBERG [2], LIONS [1], [3] ...). Noi la esporremo appunto nei prossimi numeri nella forma datale da LIONS [1] [3], che ci sembra la più sistematica e generale. Il problema viene ricondotto al caso di condizioni al contorno omogenee ($Lu = 0$) mediante la sottrazione di una opportuna funzione. Nei numeri seguenti seguiremo anche noi in un primo tempo questa impostazione, trattando il caso di condizioni al contorno omogenee, riservandoci di ritornare successivamente su una trattazione diretta del problema non omogeneo.

È forse utile richiamare dapprima questa teoria nel caso delle equazioni reali del secondo ordine, anche se essa è allora assai nota; ancora più in particolare fissiamo per semplicità l'attenzione sull'operatore *reale* autoaggiunto del secondo ordine nella forma

$$Au + \lambda u \equiv - \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + \lambda u \qquad (a_{ik}(x) = a_{ki}(x))$$

e sui problemi:

1°) di DIRICHLET: $Au + \lambda u = f$ in Ω; $u = 0$ su Γ

2°) di NEUMANN: $Au + \lambda u = f$ in Ω; $\dfrac{du}{d\nu^*} = 0$ su Γ

3°) misto: $Au + \lambda u = f$ in Ω; $u = 0$ su Γ_1, $\dfrac{du}{d\nu^*} = 0$ su $\Gamma - \Gamma_1$

Alla base del concetto di soluzione debole sta, come è noto, una opportuna interpretazione delle formule di GREEN, intese come equazioni funzionali « traducenti » il problema al contorno dato. Osserviamo che questa idea si riconnette fra l'altro ai procedimenti da tempo introdotti da M. PICONE [1] per il calcolo effettivo delle soluzioni del problema al contorno.

Ricordiamo che, se u e v sono funzioni sufficientemente regolari, vale la seguente formula di GREEN

$$(4.8) \quad \int_\Omega \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_k} \, d x + \lambda \int_\Omega u \, v \, d x = \int_\Omega (Au + \lambda u) v \, d x + \int_\Gamma a \frac{d u}{d \nu^*} v \, d \sigma$$

con $a \dfrac{d u}{d \nu^*} = - \sum\limits_{i,k=1}^n a_{ik} \cos(x_k, \nu) \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$

Supposto allora f sufficientemente regolare e supposto di conoscere una soluzione u pure essa sufficientemente regolare del problema 1°), se ne deduce che detta soluzione verifica la relazione

$$(4.9) \qquad \int_\Omega \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_k} \, d x + \lambda \int_\Omega u \, v \, d x = \int_\Omega f \, v \, d x$$

per ogni v appartenente alla classe V_1 delle funzioni sufficientemente regolari e *nulle* su Γ. La (4.9) al variare di v nella classe V_1 si presenta dunque come condizione necessaria perchè u sia soluzione regolare del problema 1°); ma viceversa essa è anche sufficientemente, come si può vedere con ragionamenti elementari, nel senso che se u è una funzione sufficientemente regolare appartenente a V_1 e soddisfacente alla (4.9) per ogni v di V_1, allora u risolve il problema 1°).

Considerazioni del tutto analoghe possono farsi per i problemi 2°) e 3°); anche essi si riconducono alla equazione (4.9) con la sola differenza che essa andrà rispettivamente studiata nella classe V_2 di tutte le funzioni sufficientemente regolari e nella classe V_3 delle funzioni sufficientemente regolari e *nulle* su Γ_1.

La (4.9) si presenta dunque come equazione funzionale nell'incognita u, da risolvere in una certa classe V ed *equivalente al problema dato.* Il problema si sposta dunque nella risoluzione dell'equazione funzionale (4.9) e questo è appunto il problema inteso in senso « debole » : si sostituisce al problema ordinario l'equazione (4,9) e si cerca di risolverla nella classe più generale possibile di funzioni, generalizzando anche al massimo le ipotesi sui dati, cioè su Ω, sui coefficienti a_{ik} e su f.

È proprio qui che si presenta assai opportuna la considerazione dello spazio di BEPPO LEVI, $\dot{H}^1(\Omega)$, che abbiamo richiamato nel n. 2 e più precisamente del sottospazio $\widetilde{H}^1(\Omega)$ costituito dalle funzioni reali di $\dot{H}^1(\Omega)$. Si osservi che allora gli integrali che compaiono in (4.9) hanno significato per ogni u e $v \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ non appena i coefficienti $a_{ik}(x)$ siano misurabili e limitati in Ω e f sia reale e, ad es., $\in \dot{H}^0(\Omega)$. In quest'ipotesi sui dati si avrà allora il problema « debole » di DIRICHLET se si cercherà la soluzione della (4.9) nella classe $V \equiv H^1_0(\Omega) \cap \widetilde{H}^1(\Omega)$, quello di NEUMANN nella classe $V \equiv \widetilde{H}^1(\Omega)$, quello misto nella classe V delle $v \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ aventi traccia, nel senso stabilito nel n. 2, *nulla* su Γ_1.

Dal punto di vista esistenziale, nelle ipotesi fatte sui dati e supposto l'operatore uniformemente ellittico in Ω, si ha l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema 1°) per ogni $\lambda \geq 0$ e del problema 2°) per ogni $\lambda > 0$; precisamente si ha il teorema :

Se gli a_{ik} *sono misurabili e limitati in* Ω, $\sum_{i,k} a_{ik}(x)\, \xi_i\, \xi_k \geq \alpha \mid \xi \mid^2$ *con* α *costante* > 0, $f \in L^2(\Omega)$ *e* $\lambda \geq 0$ $[\lambda > 0]$ *esiste una ed una sola funzione* $u \in H^1_0(\Omega) \cap \widetilde{H}^1(\Omega)$ $[u \in \widetilde{H}^1(\Omega)]$ *la quale verifichi la* (4.9) *per ogni* $v \in H^1_0(\Omega) \cap \widetilde{H}^1(\Omega)$ $[v \in \widetilde{H}^1(\Omega)]$.

E un analogo risultato vale per il problema 3°) per ogni $\lambda \geq 0$. La dimostrazione si può ottenere con diversi procedimenti (v. ad es. STAMPACCHIA [5] FICHERA [2] ...).

Ottenuta l'esistenza e l'unicità della soluzione debole in ipotesi generali sui dati, sorge poi come è noto il problema della sua *regolarizzazione*, problema che nella sua più larga accezione va così inteso : ricercare tutte le proprietà qualitative sia in Ω che su Γ (di differenziabilità, di integrabilità, di quasi contiuuità ecc.) che la soluzione viene a godere man mano che si fanno sui dati ipotesi più restrittive. Ciò permetterà di dare volta per volta un significato più concreto e preciso rispettivamente all'equazione $A\,u + \lambda u = f$ e alle condizioni al contorno, compendiate finora nell'equazione (4.9). Uno degli aspetti più importanti in questo processo di regolarizzazione è quello di collegare il problema generalizzato a quello inteso nel senso classico, ritrovando i risultati classici e in particolare anche l'analiticità della soluzione se i dati sono analitici [13]. Diversi risultati si sono ottenuti in questo senso, particolarmente notevoli proprio per le equazioni di secondo ordine, e diversi sono anche i procedimenti che si sono rivelati utili; di essi parleremo nei n. 9-13. Passiamo ora ad esporre la teoria generale per le equazioni d'ordine $2m$.

N. 5. *Problemi con condizioni al contorno omogenee.*

Assegnamo dunque l'operatore $A\,u$ nelle forma (4.3) e supponiamo inoltre i *coefficienti* $a_{pq}(x)$ *misurabili e limitati in* Ω. *Allora* $A\,u$ *si può prolungare in* $H^m(\Omega)$ *e non solo appartiene a* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *ma, in virtù del teorema* 2.1, *appartiene anche a* $H^{-m}(\Omega)$. Ad esso si può associare la forma sesquilineare e continua su $H^m(\Omega) \times H^m(\Omega)$.

$$(5.1)\qquad a(u\,,\,v) = \int_\Omega \sum_{|p|,\,|q| \leq m} a_{pq}(x)\, D^q u\, \overline{D^p v}\, dx\,.$$

Una forma $a(u, v)$ dicesi sesquilineare se è lineare in u e semilineare in v.

Si osservi che $a(u, v)$ *è individuata univocamente da* Au, *in quanto questo è assegnato con la sua decomposizione* (4.3); a decomposizioni diverse di Au corrispondono forme $a(u\,,\,v)$ diverse. La cosa può essere utilmente chiarita dai seguenti esempi. L'operatore Δu scritto nella decomposizione (4.4) individua la forma

$$(5.2)\qquad \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\,\overline{\frac{\partial v}{\partial x_1}} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\,\overline{\frac{\partial v}{\partial x_2}}\right) dx\,;$$

scritto invece nella decomposizione (4.5) individua la forma

$$(5.3)\qquad \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\,\overline{\frac{\partial v}{\partial x_1}} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\,\overline{\frac{\partial v}{\partial x_2}} + \eta\,\frac{\partial u}{\partial x_1}\,\overline{\frac{\partial v}{\partial x_2}} - \eta\,\frac{\partial u}{\partial x_2}\,\overline{\frac{\partial v}{\partial x_1}} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial \eta}{\partial x_2}\, v\, \overline{\frac{\partial u}{\partial x_1}} - \frac{\partial \eta}{\partial x_1}\, v\, \overline{\frac{\partial u}{\partial x_2}}\right) dx\,.$$

---

[13] Ma si osservi, a questo proposito, che non è detto che la impostazione classica sia quella che meglio schematizza i vari problemi della Fisica e della Tecnica. Accade spesso nella Fisica Matematica che i fenomeni sono schematizzati in problemi al contorno che hanno la loro naturale espressione in relazioni del tipo integrale (4.9); tradizionalmente si suole da queste relazioni dedurre problemi intesi in senso classico senza che le derivazioni richieste a questo scopo siano sempre lecite. E a volte, se queste lo sono, implicano ipotesi onerose di regolarità sui dati «incompatibili» con quelli fisici.

D'altra parte le (4.4) e (4.5) individuano lo stesso operatore $\in \mathcal{L}(\mathfrak{D}(\Omega), \mathfrak{D}'(\Omega))$.

Così pure l'operatore $\Delta^2 u$ scritto nelle diverse decomposizioni (4.2) al variare di η e μ dà luogo alle diverse forme

$$\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{n} \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \overline{\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}} + \sum_{i,j=1}^{n} \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \overline{\frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}} \right) dx . \tag{5.4}$$

Resta dunque ben inteso che noi intendiamo d'ora innanzi che Au *sia assegnato con la sua decomposizione* (4.3), sicchè esso individua univocamente la forma (5.1).

Ciò premesso si consideri poi un operatore Bu lineare e continuo di $H^m(\Omega)$ nello spazio $(S^m(\Gamma))'$ duale di $S^m(\Gamma)$ (cfr. n. 2); diremo allora che Bu è un *operatore frontiera*: ovviamente $\langle Bu, \overline{\gamma v} \rangle$ è una forma sesquilineare e continua su $H^m(\Omega) \times H^m(\Omega)$.

Consideriamo allora la forma sesquilineare

$$((u, v)) = a(u, v) + \langle Bu, \overline{\gamma v} \rangle . \tag{5.5}$$

Essa è continua su $H^m(\Omega) \times H^m(\Omega)$; allora la forma semilineare $((u, \varphi))$, $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, è continua su $\mathfrak{D}(\Omega)$ per u fissato in $H^m(\Omega)$, dunque $((u, \varphi)) = \langle \mathcal{A}u, \overline{\varphi} \rangle$ con $\mathcal{A}u \in \mathfrak{D}'(\Omega)$; la $((u, v))$ definisce perciò attraverso la $((u, \varphi)) = \langle \mathcal{A}u, \overline{\varphi} \rangle$, $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, un operatore $\mathcal{A}u$ ben determinato. Ma poichè $\gamma\varphi = 0$, si ha $((u, \varphi)) = a((u, \varphi))$; d'altra parte è immediato verificare, con semplici integrazioni per parti, che $a(u, \varphi) = \langle Au, \varphi \rangle$ nel senso delle distribuzioni su Ω e dunque $\mathcal{A}u = Au$.

La forma (5.5) definisce dunque l'operatore Au da cui siamo partiti *qualunque* sia Bu.

Siano ora dati:

1) Un sottospazio V chiuso di $H^m(\Omega)$ tale che $H_0^m(\Omega) \subset V \subset H^m(\Omega)$ ([14]); sarà allora $(u, v)_V = (u, v)_{H^m(\Omega)}$.

2) Uno spazio normale di distribuzioni Q che sia anche uno spazio di BANACH ([15]) e tale che $V \subset Q$, l'iniezione di V in Q essendo continua. Il duale Q' di Q è allora uno spazio di distribuzioni in Ω ed è pure di BANACH ed inoltre è $Q' \subset H^{-m}(\Omega)$; Q è solitamente $L^2(\Omega)$ e allora identificheremo pure

---

([14]) Si potrebbe anche supporre V non chiuso in $H^m(\Omega)$ e con ciò si allargherebbe ancora la classe dei problemi al contorno considerati; si veda più avanti il n. 6 c).

([15]) Più in generale si potrebbe supporre Q localmente convesso e separato.

Q' con $L^2(\Omega)$; ma se $V = H_0^m(\Omega)$ potrebbe allora anche essere $Q = H_0^m(\Omega)$, dimodochè $Q' = H^{-m}(\Omega)$.

3) Lo spazio $\mathcal{H}$ (di BANACH) delle $u \in V$ tali che $Au \in Q'$ munito della norma:

$$\| u \|_{\mathcal{H}}^2 = \| u \|_V^2 + \| Au \|_{Q'}^2 .$$

Indicheremo infine con N il sottospazio chiuso di $\mathcal{H}$ formato dalle u tali che

$$\langle Au , \bar{v} \rangle = ((u , v)) \tag{5.6}$$

per ogni $v \in V$, il simbolo $\langle \ \ \rangle$ indicando la dualità tra Q e Q' ed N essendo munito della norma introdotta in $\mathcal{H}$: diremo che *u verifica le condizioni al contorno omogenee se $u \in N$.*

Ebbene il *problema con condizioni al contorno omogenee* viene in questa teoria così posto:

PROBLEMA 5.1: ***In quali condizioni l'operatore Au è un isomorfimo di N su Q'? Ossia anche in quali condizioni per ogni f di Q' l'equazione $Au = f$ è risolubile univocamente in N e risulta***

$$\| u \|_N \leq c \, \| f \|_{Q'} \qquad (c \text{ costante})? \tag{5.7}$$

Osserviamo subito che, ***il problema $Au = f$, $u \in N$ equivale alla risoluzione dell'equazione nella u***

$$((u , v)) = \langle f , \bar{v} \rangle \qquad \textit{per ogni} \quad v \in V \tag{5.8}$$

Infatti se la $Au = f$ è risolubile in N, è certamente verificata la (5.8) per ogni $v \in V$, in virtù della (5.6). Viceversa se è verificata la (5.8) per $u \in V$ e per ogni $v \in V$, si ha allora anche per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$((u , \varphi)) = \langle Au , \bar{\varphi} \rangle = \langle f , \bar{\varphi} \rangle$$

da cui $Au = f$ e, poichè Q e uno spazio normale di distribuzioni, $\langle Au , \bar{v} \rangle = \langle f , \bar{v} \rangle$ per ogni $v \in V \subset Q$; quindi, per la (5.8) $\langle Au , \bar{v} \rangle = ((u , v))$ per ogni $v \in V$, cioè $u \in N$. Si osservi che è essenziale supporre che lo spazio Q sia uno spazio normale di distribuzioni se si vuole che (5.8) sia equivalente al problema $Au = f$, $u \in N$.

Generalizzando quanto si è visto nel n. 4 per l'equazioni del secondo ordine, il problema al contorno « debole » è così ricondotto alla risoluzione di un'equazione funzionale, la (5.8).

Prima ancora di studiare la risolubilità della (5.8), ci sembra utile chiarire la portata dell'impostazione che si è così data ai problemi del contorno. Si capisce intanto che, una volta *assegnato Au con la sua decomposizione*, la classe N, cioè le condizioni al contorno, dipendono dallo spazio V e dall'operatore Bu [16]; ed è dunque in base al variare di V e di Bu che si potranno classificare i problemi al contorno, come ora vedremo. *Ma questa classificazione sarà relativa a quella decomposizione assegnata di Au.* Se si vorranno tutte le possibili condizioni al contorno, cioè tutti i possibili operatori lineari Lu associabili formalmente in questa teòria ad un operatore differenziale assegnato Au, bisognerà considerare *tutte le possibili decomposizioni di Au del tipo* (4.3) *e per ciascuna di esse tutti i possibili problemi che si ottengono al variare di V e di Bu.* La cosa sarà meglio chiarita dagli esempi che ora porteremo, suggeriti dalla classificazione che è nota per l'equazioni del secondo ordine. La classificazione che daremo sarà naturalmente molto parziale in quanto aumentando l'ordine dell'operatore aumenterà la varietà dei problemi al contorno che si potranno considerare.

a) problema di DIRICHLET : quello in cui : $V \equiv H_0^m(\Omega)$. Si potrà allora supporre $Bu \equiv 0$, poichè il problema non dipende da Bu; di più esso *non dipende nemmeno dalla decomposizione di Au.* Le condizioni al contorno omogenee consistono allora nella : $\gamma u \equiv 0$ su Γ.

b) Problema del tipo di NEUMANN (o condizioni « naturali » al contorno) : quello in cui $V = H^m(\Omega)$, $Bu \equiv 0$.

È qui opportuno qualche chiarimento. A questo scopo consideriamo ad es. l'operatore Δu nella decomposizione (4.4), cui è dunque associata la forma $a(u, v)$ data dalla (5.2). Il problema di NEUMANN secondo la definizione ora data si traduce nell'equazione funzionale, supposto per fissare le idee $Q = L^2(\Omega) = Q'$:

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \overline{\frac{\partial v}{\partial x_1}} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \overline{\frac{\partial v}{\partial x_2}} \right) dx = \int_\Omega f \bar{v}\, dx \qquad \text{per ogni } v \text{ di } H^1(\Omega)$$

ed equivale « formalmente » al problema classico di NEUMANN [17]

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{du}{d\nu} = 0 \quad \text{su } \Gamma$$

---

[16] Si dovrebbe dire meglio anche da Q; ma in generale Q è fissato a priori e solitamente è $Q \equiv L^2(\Omega)$.

[17] Il senso della frase « equivale formalmente » ci sembra chiaro : esso significa che se la soluzione debole trovata è sufficientemente regolare allora verifica in un senso precisato l'equazione e le condizioni al contorno; la cosa era stata già del resto illustrata nell'introduzione del n. 4.

Se invece consideriamo Δu nella forma (4.5), si ha allora la seguente equazione:

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \overline{\frac{\partial v}{\partial x_1}} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \overline{\frac{\partial v}{\partial x_2}} + \eta \frac{\partial u}{\partial x_1} \overline{\frac{\partial v}{\partial x_2}} - \eta \frac{\partial u}{\partial x_2} \overline{\frac{\partial v}{\partial x_1}} + \frac{\partial \eta}{\partial x_2} v \overline{\frac{\partial u}{\partial x_1}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial \eta}{\partial x_1} v \overline{\frac{\partial u}{\partial x_2}} \right) dx = \int_\Omega f \bar{v} \, dx \qquad \text{per ogni } v \in H^1(\Omega)$$

che equivale « formalmente », come si vede con semplice applicazione della formula di GREEN, al problema:

$$-\Delta u = f \quad \text{su } \Omega, \qquad \frac{du}{d\nu} + \eta \frac{du}{d\sigma} = 0 \quad \text{su } \Gamma \tag{5.9}$$

$$\left(\frac{du}{d\sigma} \text{ derivata tangenziale} \right)$$

cioè a un problema che, nella letteratura classica, vien detto di derivata obliqua regolare.

Ecco dunque un esempio esplicito in cui le condizioni al contorno omogenee $Lu = 0$ dipendono dalla decomposizione di Au.

Questa osservazione si può estendere a tutti gli operatori del secondo ordine ellittici: consideriamo infatti l'operatore del secondo ordine nella forma (4.3), vale a dire, con ovvi cambiamenti di indici

$$Au = -\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} u - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{i0} u) + \sum_{i=1}^{n} a_{0i} \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u \tag{5.10}$$

cui è dunque associata la forma

$$a(u, v) = \int_\Omega \left[\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \overline{\frac{\partial v}{\partial x_k}} + \sum_{i=1}^{n} a_{i0} u \overline{\frac{\partial v}{\partial x_i}} + \sum_{i=1}^{n} a_{0i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \bar{v} + a_0 u \bar{v} \right] dx .$$

Si ottiene allora « formalmente » la seguente formula di GREEN

$$a(u, v) = \int_\Omega Au \bar{v} \, dx + \int_\Gamma \mathcal{L} u \bar{v} \, d\sigma \tag{5.11}$$

dove

$$\mathcal{L} u = a \frac{du}{d\nu^*} + bu , \tag{5.12}$$

con

$$a \frac{du}{d\nu^*} = - \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \cos (x_k , \nu) \frac{\partial u}{\partial x_i} \tag{5.13}$$

e

$$b = \sum_{i=1}^{n} a_{i0} \cos (x_i , \nu) . \tag{5.14}$$

Quando le condizioni al contorno di NEUMANN sono dunque viste come *condizioni naturali*, determinate dalla formula di GREEN — cioè con $Lu = \mathcal{L}u$ dove $\mathcal{L}u$ è dato dalla (5.12) — se non s'impone ai cofficienti la condizione di simmetria

$$a_{ik} = \overline{a}_{ki} \tag{5.15}$$

si può fare in modo che la direzione ν^* individuata dalla (5.13) sia una qualunque prefissata direzione obliqua penetrante, pur di modificare la decomposizione di Au (18). Solo se vale la (5.15) la decomposizione di Au è fissata, c'è una sola forma $a(u, v)$ associata ad Au e si ritrova come condizione naturale quella in cui ν^* è la « conormale » abituale. Nel caso dunque del secondo ordine ad ogni operatore Au si associa nella letteratura classica *un solo problema di* NEUMANN attraverso l'imposizione della condizione di simmetria (5.15) che determina la decomposizione di Au.

Quando si passa però al caso $m > 1$ la cosa non è più possibile, nel senso che, anche nelle ipotesi $a_{pq}(x) = \overline{a_{qp}(x)}$ per $|p| = |q| = m$, un operatore Au può ammettere diverse decomposizioni del tipo (4.3) cui corrispondono diverse forme $a(u, v)$ e in conseguenza diversi problemi al contorno del tipo di NEUMANN. Un semplice esempio si ha assumendo l'operatore $\Delta^2 u$ nella forma (4.2). In esso è verificata la condizione $a_{pq} = \overline{a}_{qp}$ per $|p| = |q| = 2$. Con opportune integrazioni per parti, dalla forma $a(u, v)$ associata (5.4), si arriva « formalmente » alla seguente formula di GREEN :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \Delta^2 u \, \overline{v} \, dx - \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial}{\partial \nu} (\Delta u) - \eta \, \mathcal{S}(u) \right] \overline{v} \, d\sigma + \int_{\Gamma} (\eta \, \mathcal{T}(u) + \mu \, \Delta u) \, \overline{\frac{\partial v}{\partial \nu}} \, d\sigma \tag{5.16}$$

---

(18) Ciò era stato già osservato in sostanza da *Giraud* [1].

dove $\mathcal{S}(u)$ e $\mathcal{T}(u)$ sono opportuni operatori differenziali di frontiera (per la forma esplicita di $\mathcal{S}(u)$ e $\mathcal{T}(u)$ si veda LIONS [1, pag. 75]). Il problema di NEUMANN « equivale formalmente » allora a

$$\Delta^2 u = f \qquad \text{in} \quad \Omega$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(\Delta u) - \eta\, \mathcal{S}(u) = 0 \qquad \text{su} \quad \Gamma; \; \eta\, \mathcal{T}(u) + \mu\, \Delta u = 0 \qquad \text{su} \quad \Gamma$$

e le condizioni al contorno variano dunque al variare di η e μ; si noti che se $\eta = 0$ $\mu = 1$ si trovano quelle che nella letteratura classica si chiamano abitualmente condizioni di NEUMANN.

Le considerazioni precedenti ci sembra mettano sufficientemente in evidenza come in sostanza non si possa parlare di problema di NEUMANN relativo ad un operatore Au, ma piuttosto di *problema di* NEUMANN *relativo alla decomposizione assegnata di* Au, e ciò è in perfetta armonia con la nostra impostazione.

Osserviamo infine anche che la determinazione esplicita dell'operatore Lu corrispondente « formalmente » al problema di NEUMANN si può fare attraverso la esplicita considerazione di una formula di GREEN del tipo (5.16) o (5.11); ora una tale formula si può sempre formalmente ottenere moltiplicando Au per v e integrando su Ω; mediante integrazione per parti e tenendo conto delle proprietà topologiche di Ω, si può infatti ottenere:

$$a(u, v) = \int_\Omega Au\, \overline{v}\, dx + \int_\Gamma \{ \mathcal{L}_0\, u \gamma_0 \overline{v} + \mathcal{L}_1\, u \gamma_1 \overline{v} + \dots + \mathcal{L}_{m-1}\, u \gamma_{m-1} \overline{v} \}\, d\sigma \tag{5.17}$$

dove $\mathcal{L}_i u$ $(i = 0, \dots, m-1)$ è un opportuno operatore lineare di ordine $\leq 2m - 1 - i$, i cui coefficienti dipendono naturalmente dagli a_{pq}. Il nostro problema di NEUMANN risulta allora equivalente « formalmente » al problema

$$Au = f \qquad \text{in} \quad \Omega, \qquad \mathcal{L}_i u = 0 \qquad \text{su} \quad \Gamma \qquad i = 0, 1, \dots, m-1.$$

c) Problemi intermedi di primo tipo: Quelli in cui $Bu = 0$ e V è il sottospazio di $H^m(\Omega)$ delle v per cui è

$$\gamma_{i_1} v = \gamma_{i_2} v = \dots = \gamma_{i_k} v = 0 \qquad (0 \leq i_1 < i_2 \dots < i_k \leq m - 1)$$

« Formalmente » tale problema equivale a

$$Au = f \qquad \text{in} \quad \Omega \qquad \gamma_{i_1} u = 0; \dots \gamma_{i_k} u = 0 \qquad \text{su} \quad \Gamma$$

$\mathcal{L}_i u = 0$ su Γ per i valori di i diversi da $i_1, \ldots, i_k$, $\mathcal{L}_i u$ essendo determinato dalla (5.17).

d) Problemi intermedi di secondo tipo: Quelli in cui $Bu = 0$ e V è il sottospazio di $H^m(\Omega)$ delle v per cui è

$$\gamma_{j_s} v = \sum_{h=1}^{m-k} \beta_{s,h}(x)\, \gamma_{i_h} v \qquad \begin{array}{l} s = 1, \ldots, k; \quad j_s \neq i_h; \quad j_s \leq m-1; \\ 0 \leq i_1 < i_2 < \ldots i_{m-k} \leq m-1. \end{array} \tag{5.18}$$

Sostituendo le (5.18) nella formula di GREEN (5.17) si otterrà la relazione

$$a(u, v) = \int_\Omega A u \bar{v}\, dx + \int_\Gamma (L_{i_1} u \overline{\gamma_{i_1} v} + L_{i_2} u \overline{\gamma_{i_2} v} + \ldots + L_{i_{m-k}} u \overline{\gamma_{i_{m-k}} v})\, d\sigma$$

dove i $L_{i_h} u$ sono opportuni operatori lineari d'ordine $\leq 2m - 1 - i_h$, da qui si ricava che il problema equivale formalmente a

$$\begin{array}{ll} Au = f & \text{in } \Omega \\ \left.\begin{array}{l} L_{i_h} u = 0 \quad h = 1, \ldots, m-k \\ \gamma_{j_s} u - \sum_{h=1}^{m-k} \beta_{s,h}\, \gamma_{i_h} u = 0 \qquad s = 1, \ldots, k. \end{array}\right\} & \text{su } \Gamma \end{array} \tag{5.19}$$

e) Problemi misti del tipo di Dirichlet-Neumann: quelli in cui $Bu = 0$ e V è così determinato: decomposto Γ in un numero finito di parti Γ_r $(r = 1, \ldots, k)$, $v \in V$ se appartiene ad $H^m(\Omega)$ e se

$$\gamma_{i_{r,1}} v = \gamma_{i_{r,2}} v = \ldots = \gamma_{i_{r,t_r}} v = 0 \quad \text{su } \Gamma_r \qquad (0 \leq i_{r,1} \leq \ldots \leq i_{r,t_r} \leq m-1).$$

f) Problemi del tipo di derivata obliqua regolare: Per precisare quali problemi intenderemo indicare con questa espressione è necessario introdurre una classe opportuna di operatori Bu di frontiera, seguendo le idee sviluppate in un recente lavoro di LIONS [3].

Sia $B^* = \Sigma\, b_p D^p$ un operatore differenziale lineare di ordine minore di $2m$ i cui coefficienti b_p sono funzioni definite in tutto R^n e sufficientemente regolari (supporremo per es. $b_p \in C^{2m-|p|}(R^n)$. Si definisce l'ordine di *trasversalità* di B^* rispetto a Γ nel modo seguente: per ogni punto x si consideri una rappresentazione parametrica locale del tipo (I) della nota (7) di pag. 251; in questo sistema B^* si trasforma nell'operatore $\widetilde{B}^* = \Sigma\, \beta_p D_\xi^p$, $p = (p_1, \ldots, p_n)$; sia allora $\mu(x)$ il più grande dei p_n tali che $\beta_p(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, 0)$ non sia $\equiv 0$, cioè l'ordine di $\widetilde{B}^*$ rispetto a D_{ξ_n} (derivata secondo la normale a Γ

in x); $\mu(x)$ non dipende dalla rappresentazione parametrica adottata e il massimo μ dei $\mu(x)$ al variare di x su Γ si dice ordine di trasversalità di B^* rispetto a Γ; e si dice allora che B^* è μ volte trasversale a Γ. In sostanza B^* è μ-volte trasversale a Γ quando si può considerare rispetto a un sistema di coordinate curvilinee intrinseche su Γ come un operatore lineare differenziale su Γ nelle tracce della u e delle sue derivate normali fino alla μ-esima.

Se $u \in C^{2m}(\overline{\Omega})$, allora certamente $B^* u \in C^0(\overline{\Omega})$ e quindi $\gamma_0(B^* u) \in C^0(\Gamma)$. Supponiamo ora che B^* sia di ordine $2m-1-s$ $(0 \leq s \leq m-1)$ e sia anche $m-1$ volte trasversale a Γ. Allora si può dimostrare che l'applicazione lineare $u \to B_s u \equiv \gamma_0 B^* u$ di $C^{2m}(\overline{\Omega})$ in $C^0(\Gamma)$ si può prolungare in un'applicazione lineare e continua che indicheremo ancora con $u \to B_s u$ di $H^m(\Omega)$ in $(S_s^m(\Gamma))'$ — spazio duale di $S_s^m(\Gamma)$ (v. n. 2) — in quanto è valida la maggiorazione

$$\left|\int_\Gamma B_s u\, \varphi\, d\sigma\right| \leq c \,\| u \|_m \,\| \varphi \|_{S_s^m(\Gamma)} \tag{5.20}$$

per ogni $u \in C^{2m}(\overline{\Omega})$ e ogni $\varphi \in C^\infty(\Gamma)$, con costante indipendente da u e da φ. Ebbene diremo allora che il problema al contorno considerato è *del tipo di derivata obliqua regolare* se $V \equiv H^m(\Omega)$ e $Bu \equiv (B_0 u, B_1 u, \dots, B_{m-1} u)$, $B_s u$ $(s = 0, \dots, m-1)$ essendo un operatore del tipo considerato e cioè di ordine $2m-1-s$ e $(m-1)$-volte trasversale a Γ; Bu è dunque un elemento dello spazio prodotto $(S_0^m(\Gamma))' \times (S_1^m(\Gamma))' \times \dots \times (S_{m-1}^m(\Gamma))'$, e perciò di $(S^m(\Gamma))'$.

Può essere interessante considerare il seguente semplice esempio: si prenda l'operatore Δu nella forma (4.4) e la relativa $a(u, v)$ associata (5.2). Data una funzione $\eta(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ si consideri l'operatore su $\Gamma : \eta \dfrac{du}{d\sigma}$ $\left(\dfrac{du}{d\sigma}\right.$ derivata $\left.\text{tangenziale}\right)$; è ovvio che tale operatore si può considerare come un operatore del tipo $B_0 u$ e cioè di ordine 1 e 0-volte trasversale a Γ. Si ottiene allora, posto $Bu = B_0 u$ nella (5.8) e $V \equiv H^1(\Omega)$, che la (5.8) equivale formalmente alla equazione

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\overline{\partial v}}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\overline{\partial v}}{\partial x_2}\right) dx + \int_\Gamma \eta \frac{du}{d\sigma}\,\overline{v}\, d\sigma = \int_\Omega f\, \overline{v}\, dx .$$

e cioè, sempre formalmente, al problema di derivata obliqua regolare

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega; \quad \frac{du}{d\nu} + \eta \frac{du}{d\sigma} = 0 \quad \text{su } \Gamma.$$

È interessante osservare che si è così ottenuto formalmente di nuovo il problema (5.9) già considerato in *b*) come problema di NEUMANN relativo alla decomposizione (4.5) di Au. E l'osservazione vale in generale, non solo per ogni problema del secondo ordine, ma anche per quelli di ordine superiore; cioè *un problema del tipo di derivata obliqua regolare rispetto ad una decomposizione di Au può essere considerato come problema di* NEUMANN *rispetto ad un'altra opportuna decomposizione di Au.* Ma ci sembra ormai sufficientemente chiarito che lo stesso problema $Au = f$, $Lu = 0$ si può «formalmente» ottenere nella nostra impostazione in più modi facendo variare la decomposizione di Au, la classe V e l'operatore Bu.

g) Più in generale potremo considerare problemi dove $V \equiv H^m(\Omega)$ e gli operatori frontiera sono del tipo $Bu = (B_0 u, \dots, B_{m-1} u)$ dove B_s è $m-1$ volte trasversale a Γ e di ordine $\leq 2m - 1 - s$. Per tali operatori $B_s u$ vale a maggior ragione la (5.20) e quindi Bu rappresenta un operatore frontiera. È da osservare che $\langle Bu, \gamma v \rangle$ si scriverà, quando u e v sono sufficientemente regolari, per es. $\in C^{2m}(\overline{\Omega})$, come somma di integrali ordinari di frontiera: $\sum_{s=0}^{m-1} \int_\Gamma B_s u \, \gamma_s v \, d\sigma$; e questa osservazione potrà servire nell'applicazioni.

La classificazione ora accennata si potrebbe evidentemente ulteriormente estendere ma sarebbe pur sempre questione di nomenclatura ([19]) e non di fondo anche se le definizioni da noi ora introdotte ci sembrano più che legittime in virtù delle «equivalenze formali» messe in evidenza. Ci basta d'altra parte aver dato questi esempi per illustrare la varietà di problemi al contorno che possono rientrare nella impostazione ora data.

N. 6. *Esistenza e unicità della soluzione.*

a) Ritorniamo ora al problema della risolubilità dell'equazione (5.8). Il problema può essere così trasformato ([20]): poichè $((u, v))$ è sesquilineare e continua su $V \times V$ esiste un operatore lineare e continuo $E(v)$, di V in sè, tale che per ogni $u, v \in V$ sia

$$((u, v)) = (u, E(v))_V \equiv (u, E(v))_{H^m(\Omega)}$$

([19]) Nella stessa letteratura classica per le equazioni del secondo ordine il problema di *Neumann* non è lo stesso per tutti gli Autori.

([20]) Questa osservazione e la conseguente dimostrazione del teorema 6.2 ci sono state comunicate gentilmente da *G. Fichera*.

cosicchè la (5.8) diventa $(u, E(v))_{H^m(\Omega)} = \langle f, \bar{v} \rangle$, $v \in V$. Dal teorema 3.1 si ha allora

TEOREMA 6.1: *Condizione necessaria e sufficiente per la risolubilità del problema* 5.1 *è che si abbia:*

α) $\qquad \| v \|_Q \leq k \, \| E(v) \|_m \qquad$ *per ogni* $v \in V$

β) *il codominio* $E(V)$ *della* E *sia denso in* V.

Nelle teorie dei diversi Autori sopra citati (GÄRDING, VISHIK, LIONS, ecc.) non sono però le α) e le β) che vengono prese alla base della trattazione dei problemi al contorno ellittici. È in realtà, se si ricorda quanto si è detto nel n. 4 a proposito del caso $m = 1$, più che la ricerca di condizioni necessarie e sufficienti quali le α) e β) perchè il problema sia ben posto, interessa piuttosto una condizione anche solo sufficiente per la risolubilità di (5.8), ma che sia poi utile nello studio delle ulteriori proprietà caratteristiche dei problemi ellittici (regolarizzazione, analiticità, ecc.) e si riallacci in modo abbastanza naturale alla ellitticità dell'equazione definita nel n. 4.

Noi porremo allora alla base della nostra trattazione la seguente definizione:

DEFINIZIONE 6.1: *Diremo che la forma* $((u, v))$ *è* V-*ellittica (e che il problema al contorno è* V-*ellittico) se esiste una costante* $\alpha > 0$ *tale che*

$$| ((u, u)) | \geq \alpha \, \| u \|_m^2 \tag{6.1}$$

per ogni $u \in V$.

Attraverso questa ipotesi è possibile, come vedremo, studiare contemporaneamente la risolubilità di (5.8), la teoria di FREDHOLM-RIESZ, la regolarità e l'analiticità della soluzione.

Si osservi che di solito la (6.1) è sostituita dalla seguente condizione più restrittiva, anche se dello stesso tipo

$$\mathrm{Re}\, ((u, u)) \geq \alpha \, \| u \|_m^2 , \qquad \text{per ogni } u \text{ di } V \tag{6.1$'$}$$

Anzitutto si ha (Lions [1])

TEOREMA 6. 2: *La* V-*ellitticità di* $((u, v))$ *è condizione sufficiente per la risolubilità del problema* 5.1.

In virtù del teorema 6.1 basterà dimostrare che la V-ellitticità è condizione sufficiente per il verificarsi delle α) e β) precedenti. E infatti, usando le notazioni precedenti, se è verificata la (6.1) si ha, poichè $V \subset Q$ e l'iniezione di V in Q è continua

$$\| v \|_Q^2 \leq c \, \| v \|_m^2 \leq \frac{c}{\alpha} \, | (v, E(v))_{H^m(\Omega)} | \leq \frac{c}{\alpha} \, \| v \|_m \, \| E(v) \|_m$$

da cui la α). Anche la β) è però verificata, poichè se è $(u, E(v))_V = 0$ per ogni v di V, si ha allora anche

$$(E(u), u)_V = 0$$

da cui, per la (6.1), $u \equiv 0$ ([21]).

b) Il teorema ora descritto assicura dunque che Au è un isomorfismo di N su Q'; si suole indicare con $f \to Gf$ l'isomorfismo inverso e chiamare *G l'operatore di Green del problema.* Si pone allora il problema della rappresentazione di questo operatore di GREEN mediante un opportuno nucleo (*il nucleo di Green del problema*) e dello studio delle proprietà di regolarità e delle singolarità di questo nucleo; il problema, di estremo interesse per le applicazioni, è stato studiato ed è tuttora oggetto di interessanti studi (v. ad es. LIONS [1], SCHWARTZ [2] e [4], ARONSZAJN [3], GARNIR [1] e [2]); ma noi ci limitiamo qui a rinviare agli Autori citati.

c) Per meglio illustrare ancora la portata dell'impostazione data ai problemi al contorno e dei risultati ottenuti fino ad ora, è bene aggiungere qualche osservazione che può d'altra parte essere utile proprio nelle applicazioni (v. anche la nota ([13]) di pag. 271).

Abbiamo supposto per comodità il dominio Ω limitato e sufficientemente regolare (addirittura di classe C^∞); ma l'impostazione data con il problema 5.1 e il teorema esistenziale 6.2 valgono in generale per un insieme Ω aperto qualunque di R^n, salvo precisare in modo un pò diverso gli operatori frontiera Bu (risulterà anche più complessa la classificazione dei problemi al contorno).

Un'altra generalizzazione importante si riferisce all'ipotesi fatta su V, di cui si è già fatto cenno nella nota ([14]) di pag. 272; è facile vedere che, per l'impostazione del problema 5.1 e la validità del teorema 6.2, V può anche non essere un sottospazio *chiuso* di $H^m(\Omega)$, ma solamente uno spazio di HILBERT sottospazio lineare di $H^m(\Omega)$ tale che $H_0^m(\Omega) \subset V \subset H^m(\Omega)$, le iniezioni di $H_0^m(\Omega)$ in V e di V in $H^m(\Omega)$ essendo continue. La teoria si svolge allora in modo perfettamente analogo sostituendo la (6.1) con la $|((u, u))| \geq \alpha \|u\|_V^2$.

Con ciò naturalmente si allarga ancora notevolmente la classe dei problemi al contorno considerati.

d) Da quando abbiamo detto finora appare chiaro che non solo per i problemi al contorno per operatori del secondo ordine, ma anche per quelli re-

---

([21]) Per una dimostrazione del teorema 6.2 nell'ordine di idee di *Vishik, Browder, Lions* ecc. e nell'ipotesi più restrittiva (6.1') si veda *Lions* [1].

lativi ad operatori di ordine $2m$, gioca un ruolo essenziale la relazione funzionale (5.8), la quale, generalizzando la (4.9), riunisce le condizioni « all'interno » e « sulla frontiera » di Ω.

In Fisica Matematica accade che molti fenomeni fisici hanno una naturale schematizzazione matematica in una relazione funzionale del tipo (5.8) specialmente quando l'analisi matematica è condotta mediante considerazioni proprie dei procedimenti variazionali.

È da una relazione del tipo (5.8) che possono poi dedursi separatamente le condizioni « all'interno » e « sulla frontiera » mediante quei procedimenti che sono alla base del calcolo delle variazioni come lemmi di Du Bois Reymond, di Haar ...

Queste impostazioni si presentano particolarmente utili quando si debbano trattare problemi relativi a domini Ω non del tutto regolari (si ricordi quanto si è detto in *c*)) e in generale quando i dati presentano delle discontinuità.

Ricollegandosi ora con l'impostazione dei problemi al contorno (v. n. 4) si presenta evidentemente il problema di trovare delle condizioni algebriche necessarie e sufficienti (o almeno soltanto sufficienti) che assicurino per la forma associata la validità della (6.1) o (6.1′) in termine degli operatori Au e Bu, di V e di Ω.

E allora appare evidente che potranno presentarsi delle condizioni algebriche per uno stesso operatore Au differenti secondo che si tratti di un problema al contorno o di un altro.

Di queste questioni ci interesseremo nel numero seguente.

N. 7. *Condizioni algebriche per la V-ellitticità ; coercività della forma* $((u, u))$.

a) Il problema delle condizioni algebriche per la V-ellitticità della forma $((u, v))$ o almeno della forma $((u, v)) + \lambda (u, v)_0$ [22] per λ positivo sufficientemente grande si riconnette con quello delle cosiddette *forme quadratiche coercive* secondo Aronszajn [2].

Incominciamo anzitutto con alcune considerazioni di carattere generale che permettono di semplificare il problema.

Una prima osservazione di carattere generale, che si può dimostrare facilmente per « partizione dell'unità », è il *carattere locale della V-ellitticità*, nel senso che *per la V-ellitticità della forma* $((u, v))$ *è* (*ovviamente necessario*) *e sufficiente che per ogni x di $\bar{\Omega}$ esista un intorno $\mathfrak{I}(x)$ di x tale che la re-*

---

[22] Indicheremo con $(u, v)_0$ il prodotto scalare in $L^2(\Omega)$.

strizione di $((u, u))$ *alle funzioni* u *di* V *a supporto contenuto in* $\mathcal{I}(x) \cap \overline{\Omega}$ *verifichi per ogni tale* u *la relazione*

$$(7.1) \qquad |((u, u))| \geq \alpha \| u \|_m^2$$

con α *costante positiva indipendente da* x *e da* u.

Si può poi anche osservare che verificare la (7.1) per ogni u di V *è ovviamente equivalente a verificare la* (7.1) *su un sottospazio* W *di* V *denso in* V; in particolare interesserà soprattutto per semplificare il problema il caso che W sia costituito da funzioni il più regolari possibile. Si pone allora *un problema di densità di certi sottospazi di* V: ad es. $V \cap C^m(\overline{\Omega})$ è denso in V? La risposta è certo affermativa se $V \equiv H^m(\Omega)$ per le ipotesi fatte su Ω (v. n. 2) e in altri casi particolarmente semplici di spazi V; ma la risposta può essere negativa, se V è assai generale o se Ω non è più sufficientemente regolare; sicchè il problema andrà studiato caso per caso.

Altra osservazione di carattere generale è la seguente: sia $x' = X(x)$ una trasformazione (biunivoca e continua) di classe C^m del dominio $\overline{\Omega}$ in un dominio $\overline{\Omega}'$: ad ogni funzione $u(x) \in H^m(\Omega)$ si può allora far corrispondere la funzione $u'(x') = u(X^{-1}(x'))$ e viceversa: si ha così una applicazione lineare e invertibile $u \to u'$ di $H^m(\Omega)$ in $H^m(\Omega')$: in questa applicazione al sottospazio chiuso V di $H^m(\Omega)$ corrisponderà ovviamente un sottospazio, pur esso chiuso, di $H^m(\Omega')$ che chiameremo V'.

Definiamo allora in V' la forma quadratica $((u', u'))'$ ponendo $((u', u'))' = ((u, u))$. Per $k = 0, \ldots, m$, risulta certamente per ogni $u \in H^m(\Omega)$ e per il corrispondente $u' \in H^m(\Omega')$:

$$c_1 \| u' \|_k \leq \| u \|_k \leq c_2 \| u' \|_k$$

con c_1 e c_2 costanti indipendenti da u e u'. Si può allora concludere col:

TEOREMA 7.1: *Verificare la* (7.1) *per ogni* $u \in V$ *equivale a verificare la:*

$$|((u', u'))'| \geq \alpha' \| u' \|_m^2 \qquad \alpha' \text{ cost. pos.}$$

per ogni $u' \in V'$.

Supponiamo ora che i coefficienti $a_{pq}(x)$ di Au siano continui in $\overline{\Omega}$. Per ogni punto y di $\overline{\Omega}$ indichiamo con $((u, v))_y$ la forma sesquilineare definita da

$$((u, v))_y = \int_\Omega \Sigma\, a_{pq}(y)\, D^q u(x)\, \overline{D^p v(x)}\, dx, \quad \text{se} \quad y \in \Omega,$$

e

$$((u\,,\,v))_y = \int_\Omega \Sigma\, a_{pq}(y)\, D^q u(x)\, \overline{D^p v(x)}\, dx + \langle Bu\,,\, \gamma \bar{v} \rangle \qquad \text{se} \quad y \in \Gamma$$

Allora si ha (ARONSZAJN [2])

TEOREMA 7.2: *Nelle ipotesi fatte su* $((u\,,\,v))$ *condizione necessaria e sufficiente perchè* $((u\,,\,v))$ *sia V-ellittica è che per ogni* y *di* $\bar{\Omega}$ *esista un intorno* $\mathfrak{I}(y)$ *tale che*

$$|\,((u\,,\,u))_y\,| \geq \alpha\, \|\, u\, \|_m^2 \tag{7.2}$$

per tutte le u *di* V *a supporto contenuto in* $\mathfrak{I}(y) \cap \bar{\Omega}$, α *essendo un opportuno numero positivo indipendeute da* y *e da* u.

In virtù del carattere locale della V-ellitticità, più sopra messo in evidenza, il teorema 7.2 segue subito con un artificio ben noto (di KORN), osservando che per la supposta continuità dei coefficienti $a_{pq}(x)$ in $\bar{\Omega}$ ad ogni $\varepsilon > 0$ si può far corrispondere un intorno $\mathfrak{I}(y)$ di y tale che $|\,((u\,,\,u)) - ((u\,,\,u))_y\,| < \varepsilon\, \|\, u\, \|_m^2$ per ogni $u \in V$ e a supporto contenuto in $\mathfrak{I}(y) \cap \bar{\Omega}$.

Si osservi anche che, essendo $\bar{\Omega}$ un compatto di R^n, l'uniformità della (7.2) rispetto a y (cioè l'indipendenza di α da y) segue senz'altro ogni volta che si sia dimostrata la stessa (7.2) per ogni y con α indipendente dalla sola u.

Si osservi ancora che se anche la forma $\langle Bu\,,\, \gamma v \rangle$ è di tipo integrale, più precisamente se l'operatore Bu è del tipo considerato nel n. 5 f) e g), allora il teorema 7.2 vale ancora quando $((u\,,\,v))_y$ sia definito come sopra se $y \in \Omega$ e invece, se $y \in \Gamma$, sia ottenuto sostituendo anche in Bu i coefficienti con il loro valore assunto in y.

Sono pure immediati i seguenti risultati generali.

TEOREMA 7.3: *Se* $((u\,,\,v))$ *è V-ellittica e l'operatore di frontiera* Bu *è di norma sufficientemente piccola e precisamente si abbia*

$$|\,\langle Bu\,,\, \overline{\gamma u} \rangle\,| \leq \|\, Bu\, \|_{(S^m(\Gamma))'}\, \|\, \gamma u\, \|_{S^m(\Gamma)} \leq c\, \|\, u\, \|_m^2$$

con $c < \alpha$, α *essendo la costante che compare nella condizione di V-ellitticità di* $((u\,,\,v))$; *allora anche la forma* $((u\,,\,v)) + \langle Bu\,,\, \overline{\gamma v} \rangle$ *è V-ellittica.*

TEOREMA 7.4: *Se* $((u\,,\,v))$ *verifica la* (6.1′) *e l'operatore* Bu *di frontiera è tale che* $B + B^*$ (B *operatore aggiunto di* B) *è un operatore positivo, allora anche* $((u\,,\,v)) + \langle Bu\,,\, \overline{\gamma v} \rangle$ *è V-ellittica.*

Infatti allora $Re \langle B u\,,\, \overline{\gamma u} \rangle \geq 0$.

Naturalmente le considerazioni generali sinora fatte valgono anche se in luogo della V-ellitticità di $((u, v))$ si voglia quella della forma $((u, v)) + \lambda(u, v)_0$ per λ sufficientemente grande. Si ha anche qui il seguente immediato

TEOREMA 7.5: *Se* $((u, v))$ *verifica la* (6.1′) *per ogni* $u \in V$, *allora anche la forma* $((u, v)) + \lambda(u, v)_0 + \langle Bu, \overline{\gamma v} \rangle$ *è* V*-ellittica per* λ ***sufficientemente grande, purchè*** Bu ***verifichi la ipotesi seguente: ad ogni*** $\varepsilon > 0$ ***è possibile associare un*** $\lambda(\varepsilon)$ ***tale che*** $|\langle Bu, \overline{\gamma u} \rangle| \leq \varepsilon \| u \|_m^2 + \lambda(\varepsilon) \| u \|_0^2$.

È anche immediato osservare che $((u, v)) + \lambda(u, v)_0$ sarà V-ellittica per λ sufficientemente grande, quando si sarà dimostrata l'esistenza di un λ_0 e di un α positivi tali che:

$$Re((u, u)) + \lambda_0 \| u \|_0^2 \geq \alpha \| u \|_m^2 \tag{7.3}$$

per ogni $u \in V \cap C^m(\overline{\Omega})$ e che $V \cap C^m(\overline{\Omega})$ è denso in V.

Ci siamo così collegati col concetto di *forme quadratiche coercive secondo* ARONSZAJN [2]: ***si dice infatti che*** $((u, v))$ ***è coerciva su*** $V \cap C^m(\overline{\Omega})$ ***se esistono un*** λ_0 ***e un*** α ***positivi tali che*** *valga la* (7.3) *per ogni* $u \in V \cap C^m(\overline{\Omega})$.

Hanno interesse in particolare la coercività di $((u, u))$ su $H_0^m(\Omega) \cap C^m(\overline{\Omega})$ (problema di DIRICHLET) e quella di $((u, u))$ su $H^m(\Omega) \cap C^m(\overline{\Omega}) = C^m(\overline{\Omega})$ (problema di NEUMANN); si osservi in proposito che $H_0^m(\Omega) \cap C^m(\overline{\Omega})$ è denso in $H_0^m(\Omega)$ e $C^m(\overline{\Omega})$ lo è in $H^m(\Omega)$.

b) Abbiamo così esaurito le considerazioni di carattere generale e veniamo perciò ad esporre i risultati più significativi finora noti sul problema delle condizioni algebriche atte ad assicurare la V-ellitticità di $((u, v))$ o almeno la coercività di $((u, u))$ su $V \cap C^m(\overline{\Omega})$.

Anzitutto si ha (ARONSZAJN [2])

TEOREMA 7.6: *Condizione necessaria per la* V*-ellitticità di* $((u, v))$ *è che per ogni* y *di* Ω *l'operatore* Au *sia ellittico nel senso della definizione* (4.1).

Infatti supponiamo per assurdo che risulti $\sum_{|p|, |q| = m} a_{pq}(y) \xi^{p+q} = 0$ per ξ vettore reale diverso da zero; possiamo anche supporre, con una semplice trasformazione di coordinate, che ξ sia proprio il vettore $(\xi_1, 0, \ldots, 0)$. Allora utilizzando il teorema 7.2 si arriva ad un assurdo, se si prende come funzione u una funzione del tipo

$$\varphi(x)(x_1 - y_1)^{m-1} \log \frac{1}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \varepsilon^2}}$$

dove $\varphi(x)$ è una funzione di $\mathfrak{D}(\Omega)$ uguale ad 1 in una sfera di centro y e raggio ϱ e nulla fuori di una sfera di centro y e raggio ϱ' $(\varrho < \varrho' < d(y, \Gamma) =$ $=$ distanza di y da Γ), e si fa tendere ε a 0.

Passando poi alle condizioni sufficienti è essenziale introdurre la seguente

DEFINIZIONE 7.1: *Diremo che Au è fortemente ellittico nel punto x se*

$$Re \sum_{|p|,|q|=m} a_{pq}(x)\, \xi^{p+q} \geq \alpha(x)\, |\, \xi\, |^{2m} \tag{7.4}$$

per ogni ξ reale, $\alpha(x) > 0$.

Si osservi subito che se l'operatore è a coefficienti reali la definizione 7.1 coincide con la definizione 4.1, ma essa è più restrittiva se Au è complesso. Si osservi che anche la (7.4) non dipende della decomposizione di Au.

Si dirà poi che Au è *uniformemente fortemente ellittico* in Ω se $\alpha(x)$ non dipende da x, cioè se

$$Re \sum_{|p|,|q|=m} a_{pq}(x)\, \xi^{p+q} \geq \alpha\, |\, \xi\, |^{2m} \tag{7.5}$$

$\alpha > 0$, ξ reale qualunque.

Vediamo ora quali problemi possono essere trattati presupponendo la (7.5).

Si consideri anzitutto il problema di DIRICHLET: $V \equiv H_0^m(\Omega)$, $Bu \equiv 0$; si ha allora il seguente notevole risultato (GÄRDING [1], VISHIK [1])

TEOREMA 7.7: *Se i coefficienti $a_{pq}(x)$ sono continui in $\overline{\Omega}$ la ellitticità forte uniforme di Au, cioè la (7.5), è condizione sufficiente per la $H_0^m(\Omega)$-ellitticità della forma $a(u, v) + \lambda (u, v)_0$ con λ sufficientemente grande.*

COROLLARIO: *nelle ipotesi suddette il problema di* DIRICHLET *per l'equazione $Au + \lambda u = f$ con λ sufficientemente grande è ben posto.*

Diamo a grandi linee la dimostrazione di questo teorema. Anzitutto si dimostra, mediante l'uso della trasformata di FOURIER, che se gli a_{pq} sono costanti e vale la (7.5), allora si ha, posto

$$a_0(u, v) = \int_\Omega \sum_{|p|,|q|=m} a_{pq}\, D^q u\, \overline{D^p v}\, dx,$$

$$Re\, a_0(u, u) \geq \alpha\, \|\, u\, \|_m^2, \qquad \alpha > 0 \tag{7.6}$$

per ogni $u \in H_0^m(\Omega)$. Infatti si osservi anzitutto che in $H_0^m(\Omega)$ la norma così definita

$$\|\, u\, \|_* = \Big(\sum_{|p|=m} \|\, D^p u\, \|_0^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

e la norma $\|\, u\, \|_m$ sono equivalenti; sicchè la (7.6) equivale nel nostro caso alla disuguaglianza:

$$Re\, a_0(u, v) \geq \alpha\, \|\, u\, \|_*^2 \qquad \text{per ogni } u \in H_0^m(\Omega). \tag{7.7}$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè valga la (7.7) per ogni $u \in H_0^m(\Omega)$ è ovviamente che essa valga per ogni $u \in \mathcal{D}(\Omega)$. Orbene per note proprietà della trasformata di FOURIER, se $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ si ha:

$$Re\, a_0(u, u) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} \mathrm{Re} \sum_{|p|,|q|=m} a_{pq}\, \xi^{p+q} \,|\, \widehat{u}(\xi) |^2 d\xi$$

$$\| u \|_*^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} |\, \xi\, |^{2m} \,|\, \widehat{u}(\xi)\, |^2\, d\xi$$

e di qui dunque la (7.7) e la (7.6).

Dimostrata così questa proposizione, con artificio assai noto, si scompone l'integrale

$$Re \int_\Omega \sum_{|p|,|q| \leq m} a_{pq}(x)\, D^q u\, \overline{D^p u}\, dx,$$

mediante la cosiddetta partizione dell'unità, in integrali estesi a regioni sufficientemente piccole; a questi ultimi integrali si applica un ragionamento analogo a quello adoperato nel teorema 7.2 (artificio di KORN), ci si riporta al caso dei coefficienti costanti, infine si applica il lemma 2.6 e si ottiene così un λ^* tale che per $\lambda \geq \lambda^*$ risulta:

$$Re \int_\Omega \sum_{|p|,|q| \leq m} a_{pq}(x)\, D^q u\, \overline{D^p u}\, dx \geq c_1 \| u \|_m^2 - \lambda \| u \|_0^2$$

per ogni $u \in H_0^m(\Omega)$, c_1 essendo una costante positiva

c) Passiamo ora *al problema di* NEUMANN: $V \equiv H^m(\Omega)$, $Bu \equiv 0$. Abbiamo già osservato nel n. 4 che quando è $m = 1$ la (7.5) è sufficiente per la risolubilità del problema relativo all'equazione $Au + \lambda u = f$. Quando però è $m > 1$ ciò non avviene più. Si ha più precisamente che non solo la (7.5) non è più sufficiente perchè il problema sia $H^m(\Omega)$-ellittico, ma nemmeno è sufficiente perchè sia ben posto, come dimostra il seguente esempio.

Si consideri l'operatore $\Delta^2 u + \lambda u$ dove $\Delta^2 u$ è dato dalla decomposizione (4.2) con $\eta = 0$, $\mu = 1$ e si prenda $Q = Q' = L^2(\Omega)$; il problema di NEUMANN « equivale allora formalmente », per quanto si è già osservato nel n. 5 *b*), al problema classico

$$\Delta^2 u + \lambda u = f \quad \text{in } \Omega; \qquad \Delta u = 0 \quad \text{su } \Gamma; \qquad \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{su } \Gamma.$$

Ebbene tale problema non è ben posto *qualunque* sia λ. Sia ha infatti che esso non è risolubile, naturalmente secondo l'impostazione del n. 5, se si prende per f una funzione armonica $\in L^2(\Omega)$ ma non $\in H^2(\Omega)$; l'affermazione sarà dimostrata in seguito nel n. 15.

Il problema di NEUMANN è $H^m(\Omega)$-ellittico — e quindi si può risolvere — se alla (7.5) si sostituisce un ipotesi più restrittiva (ed equivalente alla (7.5) solo se $m=1$ e $a_{pq}=\overline{a_{qp}}$ per $|p|=|q|=1$ oppure se $m=1$ e gli a_{pq} sono reali) e precisamente la

$$(7.8) \qquad Re \sum_{|p|,|q|=m} a_{pq}(x)\, z_q\, \overline{z_p} \geq \alpha \sum_{|p|=m} |z_p|^2$$

con α costante positiva, per ogni insieme di numeri complessi z_p (p variabile in modo che $|p|=m$). Si ha infatti allora il

TEOREMA 7.8 (LIONS [1]): ***Se i coefficienti a_{pq} sono misurabili e limitati in Ω, la condizione algebrica (7.8) è sufficiente per la $H^m(\Omega)$-ellitticità della forma $a(u,v)+\lambda(u,v)_0$ con λ sufficientemente grande; il problema di Neumann per l'equazione $Au+\lambda u=f$, con λ sufficientemente grande, è allora ben posto.***

Dalla condizione algebrica (7.8) si ha infatti per ogni u di $H^m(\Omega)$

$$Re \int_\Omega \sum_{|p|,|q|=m} a_{pq}\, D^q u\, \overline{D^p u}\, dx \geq \alpha \sum_{|p|=m} \| D^p u \|_0^2 .$$

Basta allora fare uso del lemma 2.6 per completare la dimostrazione.

Si osservi che mentre la (7.5) non dipende dalla decomposizione di Au, la (7.8) vi dipende; e la cosa è subito vista pensando all'operatore $\Delta^2 u$ nella decomposizione (4.2): se $\eta=0$, $\mu=1$ la (7.8) non è verificata; lo è invece se $\eta>0$ e $\mu\geq 0$.

La (7.8) è comunque una condizione solo sufficiente per la $H^m(\Omega)$-ellitticità di $a(u,v)+\lambda(u,v)_0$. Si pone il problema di trovare le condizioni necessarie e sufficienti e da questo punto di vista è interessante il seguente risultato di ARONSZAJN [2]: si supponga che la forma quadratica $a(u,u)$ sia *formalmente positiva*, cioè che essa possa scriversi nel modo seguente

$$(7.9) \qquad a(u,u)=\int_\Omega \sum_{k=1}^{s} |A_k u|^2\, dx$$

dove $A_k u$ è un operatore differenziale lineare di ordine m, $A_k u = \sum_{|p|\leq m} b_p^{(k)}(x)\, D^p u$.

Detto $P_k(x, \xi) = \sum_{|p|=m} b_p^{(k)}(x) \xi^p$ il polinomio caratteristico di $A_k u$ si ha allora il

TEOREMA 7.9: ***Se i coefficienti $b_p^{(k)}$ sono continui in $\bar{\Omega}$, condizione necessaria e sufficiente perchè $a(u, u)$ sia coerciva su $C^m(\bar{\Omega})$ (o anche perchè $a(u, v) + \lambda(u, v)_0$ sia $H^m(\Omega)$ — ellittica per λ sufficientemente grande) è che l'operatore Au sia ellittico in $\bar{\Omega}$ e che per ogni x di Γ non esista alcun vettore complesso $\xi + i\eta$ per il quale sia $P_k(x, \xi + i\eta) = 0$ per ogni k, il vettore reale η essendo ortogonale all'iperpiano tangente in x a Γ.***

Rinviamo per la dimostrazione ad ARONSZAJN [2]; osserviamo solo, come semplice applicazione del teorema che la forma (5.4) associata all'operatore Δ^2 è coerciva su $C^2(\bar{\Omega})$ se $\eta = 1, \mu = 0$ e non lo è se $\eta = 0$, $\mu = 1$.

Per quanto riguarda gli altri problemi al contorno recentemente M. SCHECHTER ha annunciato in [2] di aver proseguito lo studio intrapreso da ARONSZAJN col teorema 7.9, assegnando per la stessa forma quadratica (7.9) la condizione necessaria è sufficiente per la coercività nel caso di certi problemi intermedi di I tipo, precisamente quando V è determinata dall'annullarsi delle prime r ($< m - 1$) delle tracce $\gamma_i u$ ([23]).

d) Ci sembra non del tutto inutile terminare questo numero con alcune considerazioni sui problemi più noti relativi alle equazioni del secondo ordine a coefficienti reali. Abbiamo già osservato che allora la condizione algebrica (7.5) equivale alla (7.8); è questo in sostanza il motivo per cui anche nelle teorie classiche i problemi al contorno più noti (DIRICHLET, NEUMANN ecc.) sono ben posti per le equazioni del secondo ordine.

Anche nella teoria da noi esposta, verificata la abituale condizione di ellitticità uniforme, cioè la (7.5) per $m = 1$, i problemi di DIRICHLET, di NEUMANN, di derivata obliqua, misto di DIRICHLET-NEUMANN o di DIRICHLET — derivata obliqua sono ben posti, anzi V-ellittici per l'equazione $Au + \lambda u = f$, almeno per λ sufficientemente grande. Nel caso che l'equazione sia della forma

$$-\sum_{i,k=1} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} + \lambda u = f \tag{7.10}$$

il *problema di* NEUMANN è «ben posto» per ogni $\lambda > 0$ (si ottiene così il teorema del n. 4).

([23]) Il lavoro di *Schechter* è stato pubblicato in [3]; di esso e di un altro interessantissimo lavoro di *Agmon* [2], dedicato pure alla coercività delle forme $a(u, u)$ in generale, abbiamo però potuto prendere visione solo a stesura ultimata del presente lavoro.

Se si considera invece il problema $\dfrac{d\,u}{d\,\nu^*} - b\,u = 0$ su Γ, sempre per l'equazione (7.10), basta l'ipotesi: $b \geq 0$ su Γ e non identicamente nullo per assicurare la $H^1(\Omega)$ - ellitticità della forma

$$a(u, v) + \int_\Gamma b\,\gamma_0\,u \cdot \overline{\gamma_0\,v}\,d\,\sigma$$

e quindi l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema suddetto. Si ha infatti facilmente che in $H^1(\Omega)$ la norma definita come:

$$\left[\int_\Gamma |\gamma_0\,u|^2\,d\,\sigma\right]^{1/2} + \left[\int_\Omega |\mathrm{grad}\,u|^2\,d x\right]^{1/2}$$

è equivalente a $\|u\|_1$.

Quanto al ***problema di*** DIRICHLET, sempre per l'equazione (7.10), esso è ovviamente risolubile per λ qualunque ≥ 0. Ma c'è di più: poichè, come abbiamo già osservato

$$\|u\|_1 \;\text{ e }\; \left(\int_\Omega |\mathrm{grad}\,u|^2\,d x\right)^{1/2}$$

sono norme equivalenti in $H^1_0(\Omega)$, la forma $a(u, v) + \lambda(u, v)_0$ può essere $H^1_0(\Omega)$ - ellittica, in certi casi, anche per valori negativi di λ (per maggiori precisazioni si veda STAMPACCHIA [5]).

Circa il ***problema di derivata obliqua*** si potrà anche, nella nostra teoria, sfruttare proficuamente l'osservazione fatta nel n. 5 b) e f); a seconda dei casi potrà essere più facile verificare la V - ellitticità della corrispondente forma $((u, v))$, mantenendo per Au la decomposizione assegnata e considerando il problema come problema del tipo 5, f), oppure modificando la decomposizione di Au e considerando il problema come il problema di NEUMANN in questa nuova decomposizione. Per es. (ma insistiamo che l'osservazione è valida in generale) il problema (5.9) può essere visto come problema di NEUMANN relativo all'operatore Δu nella forma (4.4) (v. n. 5, b)) e allora la relazione di V - ellitticità (6.1′) si riduce alla

$$\text{(7.11)}\qquad \int_\Omega |\,\mathrm{grad}\,u\,|^2\,d\,x + R\,e\int_\Omega \left(\frac{\partial\,\eta}{\partial\,x_2}\,u\,\frac{\partial\,\overline{u}}{\partial\,x_1} - \frac{\partial\,\eta}{\partial\,x_1}\,u\,\frac{\partial\,\overline{u}}{\partial\,x_2}\right) d\,x \,+$$
$$+\,\lambda \int_\Omega |\,u\,|^2\,d\,x \geq \alpha\,\|u\|_1^2 \qquad \text{per ogni } u \in C^1(\overline{\Omega})$$

relazione certo verificata se λ è sufficientemente grande.

Ma può anche essere visto come problema di derivata obliqua relativo all'operatore Δu nella decomposizione (4.5) (v. n. 5, f)) e allora la relazione di V-ellitticità (6.1′) si riduce alla seguente:

$$\int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 \, d x + \lambda \int_\Omega |u|^2 \, d x + R e \int_\Gamma \eta \frac{d u}{d \sigma} \bar{u} \, d \sigma \geq \alpha \, \| u \|_1^2 \tag{7.12}$$

per ogni $u \in C^1(\Omega)$, relazione certo verificata sempre per λ sufficientemente grande poichè (v. teorema 7.5) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\lambda(\varepsilon)$ tale che

$$\left| 2 \int_\Gamma \eta \frac{d u}{d \sigma} \bar{u} \, d \sigma \right| = \left| \int_\Gamma \eta \frac{d |u|^2}{d \sigma} \, d \sigma \right| = \left| - \int_\Gamma \frac{d \eta}{d \sigma} |u|^2 \, d \sigma \right| \leq$$

$$\leq c \left| \int_\Gamma |u|^2 \, d\sigma \right| \leq \varepsilon \, \| u \|_1^2 + \lambda(\varepsilon) \, \| u \|_0^2 .$$

Sempre per le equazioni del secondo ordine si inquadrano e si risolvono nella teoria da noi esposta anche i cosiddetti problemi di trasmissione: si supponga Ω diviso da una ipersuperficie Γ^* di R^n in due parti Ω_1 e Ω_2; siano assegnati in Ω_1 e Ω_2 due operatori del secondo ordine $A_1 u$ e $A_2 u$ a coefficienti continui rispettivamente in $\overline{\Omega}_1$ e $\overline{\Omega}_2$; il problema consiste « formalmente » nel trovare $u_1(x)$ definito in Ω_1 e $u_2(x)$ definito in Ω_2 e tale che

$$A_1 u_1 + \lambda u_1 = f_1 \quad \text{in } \Omega_1, \quad A_2 u_2 + \lambda u_2 = f_2 \quad \text{in } \Omega_2$$

$$\gamma u_1 = \gamma u_2 \quad \text{su } \Gamma^*, \quad a_1 \frac{d u_1}{d \nu_1^*} + a_2 \frac{d u_2}{d \nu_2^*} = 0 \quad \text{su } \Gamma^*$$

$$\frac{d u_1}{d \nu_1^*} = 0 \quad \text{su } \Gamma_1, \quad \frac{d u_2}{d \nu_2^*} = 0 \quad \text{su } \Gamma_2$$

(ν_i^* conormale relativa a A_i: $\Gamma_i = \Omega_i \cap \Gamma$).

Considerato allora l'operatore a coefficienti discontinui su Γ^*

$$A u(x) = \begin{cases} A_1 u(x) & \text{per } x \in \Omega_1 \\ A_2 u(x) & \text{per } x \in \Omega_2 \end{cases}$$

il problema di trasmissione si può trattare come problema di NEUMANN per tale operatore e la condizione algebrica di ellitticità abituale è sufficiente per ottenere il teorema di esistenza e di unicità della soluzione debole (v. LIONS [1] e STAMPACCHIA [6]).

N. 8. *Applicazione della teoria di Riesz.*

È abbastanza semplice applicare ora la teoria di RIESZ-FREDHOLM. Supponiamo la forma $((u, v))$ V-ellittica e introduciamo le seguenti ipotesi

1) $Q \subset L^2(\Omega) \subset Q'$.

2) *L'iniezione di V in Q' è completamente continua.*

Si osservi subito che se $Q = Q' = L^2(\Omega)$ poichè Ω è supposto limitato e regolare e V è un sottospazio chiuso di $H^m(\Omega)$, la 2) è verificata per un noto teorema (RELLICH, KONDRASHOV, ecc.) che assicura la completa continuità dell'iniezione di $H^m(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$.

Consideriamo allora il problema:

$$Au + \lambda u = f, \quad u \in N, \quad \lambda \text{ parametro complesso.} \tag{8.1}$$

Esso equivale alla risoluzione in V dell'equazione

$$u + \lambda\, Gu = Gf, \tag{8.2}$$

dove G è l'operatore di GREEN del problema (v. n. 6). Per la 2) Gu è una trasformazione completamente continua di V in V. Ciò permette di applicare alla (8.2) le teoria di RIESZ-FREDHOLM; e sono allora noti i ragionamenti e i risultati relativi (per maggiori dettagli si veda ad es. LIONS [1]).

In particolare: introdotta la *forma aggiunta* di $((u, v))$:

$$((u, v))^* = \overline{((v, u))}$$

si definiscono, in modo analogo a quello visto nel n. 4, *l'operatore aggiunto* A^*w (e risulta $A^*w = \sum_{|p|, |q| \leq m} (-1)^{|p|} D^p (\overline{a_{pq}}\, D^q w)$) e lo spazio N^*, ottenendo così il *problema aggiunto* di (8.1)

$$A^*w + \overline{\lambda} w = f', \quad w \in N^*. \tag{8.3}$$

Ebbene i problemi (8.1) e (8.3) costituiscono una coppia di equazioni di FREDHOLM, per cui vale dunque il teorema dell'alternativa.

Se poi $((u, v))$ è hermitiana, cioè $((u, v)) = \overline{((v, u))}$, allora lo spettro del problema (8.1) è costituito da un insieme numerabile di valori reali

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_i \leq \ldots$$

e il sistema delle autofunzioni $\{u_i\}$ corrispondenti ($Au_i + \lambda_i u_i = 0$, $\| u_i \|_0 = 1$) è ortonormale e completo in $L^2(\Omega)$ e quello $\left\{\dfrac{u_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right\}$ lo è in V (rispetto al prodotto scalare $((u, v))$).

N. 9. *I problemi con condizioni al contorno non omogenee.*

a) Volendo ora passare ai problemi con condizioni non omogenee al contorno, naturalmente rimanendo sempre nell'ordine di idee finora seguito, vediamo quali procedimenti sono stati adoperati finora e quali ulteriori considerazioni si possono fare. L'idea che si usa è quella di riportare il caso non omogeneo a quello omogeneo e il procedimento con quale si è soliti realizzarla si rifà in sostanza a R. COURANT [1] ed è il seguente.

Sia K uno spazio di distribuzioni in Ω contenente N e si supponga che l'operatore Au si possa prolungare in K in modo che Au sia ancora in Q' e l'applicazione $u \to Au$ sia continua da K in Q'.

Il problema al contorno con condizioni non omogenee può allora impostarsi così :

9.1. *Dato* $f \in Q'$ *e* $h \in K$, *determinare* u *in* K *in modo che*

$$\left\{ \begin{array}{l} Au = f \\ u - h \in N. \end{array} \right. \tag{9.1}$$

Si dirà allora che u assume le *stesse condizioni al contorno di* h.

Il problema introducendo l'incognita $u - h$ viene così ricondotto al caso dei dati al contorno nulli, precedentemente studiato.

Solitamente però si assegnano le condizioni al contorno : $Lu = g$ su Γ *da interpretarsi in un certo senso, che dipenderà ovviamente dalla classe* K, essendo inoltre g un elemento assegnato di uno spazio opportuno, $\Sigma(\Gamma)$, anch'esso dipendente da K.

Vediamo allora come debba essere precisato da questo punto di vista il problema al contorno con condizioni non omogenee, per ricondurlo al problema 9.1.

Siano dati uno spazio K di distribuzioni su Ω e uno spazio $\Sigma(\Gamma)$ di distribuzioni su Γ e un'applicazione lineare $u \to Lu$ di K in $\Sigma(\Gamma)$ in modo tale che

1) $K \supset N$ e l'operatore Au si possa prolungare in K in modo che $u \to Au$ sia un'applicazione lineare continua di K in Q'

2) $\overset{-1}{L}(0) = N$ (24).

Il problema è allora ricondotto al seguente : *assegnato* $g \in \Sigma(\Gamma)$ *costruire* $h \in K$ *tale che* $Lh = g$. Supposto infatti risolto quest'ultimo, si risolva il

(24) $\overset{-1}{L}(0)$ è l'insieme delle u di K tali che $Lu = 0$.

problema 9.1, con la funzione h così costruita; allora la funzione $u = h + (u - h)$ risolverà in K il problema

$$Au = f \qquad\qquad Lu = g$$

poichè $L(u - h) = 0$ in quanto $u - h \in N \subset K$. E inoltre la soluzione è unica poichè $\overset{-1}{L}(0) = N$.

Ma il problema della costruzione della funzione h non è finora risolto in generale e si presenta tutt'altro che semplice.

In generale l'applicazione $u \to Lu$ non sarà *su* $\Sigma(\Gamma)$ ma *in* $\Sigma(\Gamma)$. Si capisce naturalmente che tanto più regolare si prenderà la g in $\Sigma(\Gamma)$, tanto più probabile sarà l'esistenza di h e più semplice la sua costruzione effettiva; ma naturalmente non è detto che si ottengano più facilmente così i risultati già acquisiti per altra via relativi ad equazioni particolari, quali ad es. quelle del secondo ordine.

Si presenta poi naturalmente, volendo costruire una teoria generale dei problemi al contorno, *il problema di caratterizzare il codominio* $\mathcal{S}(\Gamma)$ *della trasformazione* $u \to Lu$ *di* K *in* $\Sigma(\Gamma)$; e il problema è in sostanza dello stesso tipo di quello visto nel n. 2 a proposito delle tracce delle funzioni u di $H^m(\Omega)$. Vale dunque la pena di dire qualcosa di più su di esso.

Anzitutto, poichè $\overset{-1}{L}(0) = N$, si vede subito che $\mathcal{S}(\Gamma)$ è un sottospazio lineare di $\Sigma(\Gamma)$ *isomorfo algebricamente allo spazio quoziente* K/N.

D'altra parte K è la somma diretta topologica di N e di K_0, essendo K_0 il sottospazio di K delle u_0 tale che $Au_0 = 0$: $K = N \overset{\circ}{+} K_0$ (si noti che allora N e K_0 sono chiusi in K). Infatti consideriamo l'operatore G di Green (v. n. 6) del problema; allora l'operatore $P = GA$ è un operatore lineare continuo da K su N e, poichè $G\,Au = u$ per $u \in N$, si ha $P^2 = P$; dunque P è un *proiettore* di K su N e allora per un noto risultato: $K = PK + (I - P)K$ (I identità), cioè per ogni u di K si ha $u = Pu + (I - P)u$, dove $Pu \in N$ e $A(I - P)u = 0$ in quanto $APu = u$. Dunque $K = N \overset{\circ}{+} K_0$.

Ne viene che K/N è isomorfo algebricamente e topologicamente a K_0 e quindi $\mathcal{S}(\Gamma)$ *è isomorfo algebricamente anche a* K_0; possiamo anzi concludere che $\mathcal{S}(\Gamma) \equiv L(K_0)$ (codominio di L su K_0).

Il nostro problema è dunque quello di caratterizzare $L(K_0)$. Ed è naturale, così come è stato in sostanza fatto per lo spazio delle tracce delle u di $H^m(\Omega)$, cercare di caratterizzare anche topologicamente $L(K_0)$, cioè $\mathcal{S}(\Gamma)$, in modo che L sia un isomorfismo algebrico e topologico di K_0 su $\mathcal{S}(\Gamma)$.

È ovvio che una tale caratterizzazione topologica si avrebbe se si «riportasse» su $\mathcal{S}(\Gamma)$ la topologia dello spazio quoziente K/N: ma qui il problema è di caratterizzare direttamente $\mathcal{S}(\Gamma)$ mediante la sola considerazione dei valori assunti da Lu su Γ e di introdurre in esso una topologia indipendentemente dalla considerazione di K/N, analogamente a quanto è stato richiamato nel n. 2 per $S^m(\Gamma)$.

Se K è uno spazio di BANACH il problema consiste allora nel determinare $\mathcal{S}(\Gamma)$ come spazio di BANACH in modo che valgano le maggiorazioni

$$
(9.2) \qquad \begin{cases} \| Lu_0 \|_{\mathcal{S}(\Gamma)} \leq c_1 \| u_0 \|_K \\ \| u_0 \|_K \leq c_2 \| Lu_0 \|_{\mathcal{S}(\Gamma)} \end{cases}
$$

per ogni u_0 di K_0 (c_1 e c_2 costanti). Dunque in sostanza il problema è ricondotto a stabilire formule di maggiorazione per le soluzioni dell'equazione omogenea $Au = 0$ quali le (9.2); ma questo problema è in generale di notevole difficoltà.

Non ci sembra inutile illustrare quanto finora detto con qualche esempio concreto. Prenderemo perciò ora in considerazione il problema di DIRICHLET e per esso due classi K di funzioni particolarmente interessanti, perchè già considerati per altra via e in casi particolari da diversi Autori con risultati assai significativi (STAMPACCHIA [5] e [3], FICHERA [6] e [4], SOBOLEV [1], VIOLA [1], CIMMINO [1] e [2], PINI [1], [2] e [3], ...).

Nel problema di DIRICHLET l'operatore Lu consiste nella traccia γu di u, cioè nel vettore γu di componenti: $\gamma_0 u, \gamma_1 u, \ldots, \gamma_{m-1} u$ tracce della u e delle sue derivate normali successive da intendersi *in un senso opportunamente definito.* La condizione $Lu = \varphi$ si scrive allora

$$
(9.3) \qquad \gamma u = g \quad \text{su } \Gamma, \qquad \text{cioè} \quad \gamma_0 u = g_0, \ldots, \gamma_{m-1} u = g_{m-1}
$$

essendo $(g_0, \ldots, g_{m-1})$ le componenti di un vettore g di un *opportuno* spazio $\Sigma(\Gamma)$. Naturalmente il significato da darsi alla (9.3) e lo spazio $\Sigma(\Gamma)$ dipenderanno dallo spazio K in cui si cerca la soluzione. Vediamo appunto i casi che ci interessano.

I^0 *esempio*: $K = \mathcal{H}$ (v. n. 5, pag. 273); allora ovviamente il significato delle (9.3) sarà quello definito nel n. 2 per le funzioni di $H^m(\Omega)$ e lo spazio $\Sigma(\Gamma)$ sarà lo spazio $S^m(\Gamma)$ e si avranno in particolare per $u \to \gamma u$ le due interpretazioni già viste nel n. 2:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t \to 0} \int_\Gamma [\gamma_s^{(t)} u - g_s]^2 \, d\sigma = 0 \\
&\lim_{x \to \xi (\text{su } \nu_\xi)} \frac{\partial^s u(x)}{\partial \nu_\xi^s} = g_s(\xi) \qquad \xi \in \Gamma
\end{aligned}
\qquad (s = 0, 1, \ldots, m-1)
$$

Ovviamente $\overset{-1}{L}(0) = N$,

Il problema della costruzione della h consiste dunque nel trovare una funzione $h \in H^m(\Omega)$ tale che

$$\gamma h = g \quad \text{e} \quad Ah \in Q'$$

g essendo un elemento fissato di $S^m(\Gamma)$; è esso risolubile per ogni g di $S^m(\Gamma)$? Ciò equivale a chiedere: $\mathcal{S}(\Gamma) = \Sigma(\Gamma) = S^m(\Gamma)$?

La risposta è certo affermativa se $Q = H_0^m(\Omega)$; e allora infatti è $Q' = H^{-m}(\Omega)$ e dunque $\mathcal{H} \equiv H^m(\Omega)$ per il teorema 2.1.

La risposta è pure affermativa qualunque sia lo spazio Q (e quindi Q') per l'operatore del secondo ordine ($m = 1$) a coefficienti reali; se infatti si scrive l'operatore del secondo ordine nella forma (5.10) e si suppone $a_{ik} = a_{ki}$ (ipotesi non restrittiva trattandosi del problema di DIRICHLET che non dipende dalla decomposizione di Au) e inoltre i coefficienti a_{i0} si suppongono limitati insieme alle derivate prime in Ω, allora, posto $A_0 u = -\Sigma \dfrac{\partial}{\partial x_i} a_{ik} \dfrac{\partial u}{\partial x_k}$, $A_0 u$ è un operatore autoaggiunto reale e perciò è risolubile mediante metodi diretti di calcolo delle variazioni (v. ad es. STAMPACCHIA [5]) il problema di DIRICHLET

$$A_0 u = 0\,,\ \gamma_0 u = g \qquad (\text{per ogni } g \in S^1(\Gamma)).$$

Detta h la soluzione, $Ah = A_0 h - \Sigma \dfrac{\partial}{\partial x_i}(a_{i0} h) + \Sigma a_{0i} \dfrac{\partial h}{\partial x_i} + a_0 h$ appartiene a $H^0(\Omega)$ e quindi a Q'. Il problema è così risolto ma si osservi che in sostanza per costruire h si è qui ricorsi addirittura ad un *teorema esistenziale per il problema* $Au = 0$, $\gamma_0 u = g$!

II^0 *esempio*: Sia $Q \equiv Q' \equiv L^2(\Omega)$ e sia K lo spazio delle $u \in H^{m-1}(\Omega)$ tali che $Au \in L^2(\Omega)$ e che, introdotto il sistema di superficie parallele $\{\Gamma_t\}$ a Γ (v. n. 2), l'integrale $\displaystyle\int_\Gamma \left(\frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu_t^{m-1}}\right)^2 d\sigma$ (ν_t normale a Γ_t) sia una funzione di t pseudolimitata in un intorno destro fissato di 0: $0 < t \leq t_0$ e inoltre risulti, dopo aver « trasportata » su Γ la funzione $\dfrac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu_t^{m-1}}$:

$$\lim_{t \to 0} \int_\Gamma \left[\frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu_t^{m-1}} - g_{m-1}\right]^2 d\sigma = 0 \tag{9.4}$$

essendo g_{m-1} una funzione di $L^2(\Gamma)$.

In questo spazio la condizione $\gamma_{m-1} u = g_{m-1}$ viene dunque definita dalla (9.4), mentre le altre $\gamma_i u = g_i$ ($i = 0, 1 \ldots, m-2$) andranno intese nel senso detto nel n. 2 in quanto $u \in H^{m-1}(\Omega)$.

Si può facilmente dimostrare che K è uno spazio di BANACH (completo) se si normalizza ponendo

$$\| u \|_K = \| u \|_{H^{m-1}(\Omega)} + \| Au \|_{H^0(\Omega)} + \underset{0<t\leq t_0}{\text{pseudo est. sup.}} \left(\int_{\Gamma_t} \left(\frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu_t^{m-1}} \right)^2 d\sigma \right)^{1/2}$$

Si osservi che K contiene lo spazio $\mathcal{B}$ dell'esempio precedente, quando sia $Q \equiv Q' \equiv L^2(\Omega)$.

Indichiamo con $\Sigma(\Gamma)$ lo spazio di HILBERT delle m-ple di funzioni $g \equiv (g_0, g_1, \dots, g_{m-1})$ tali che $g_* \equiv (g_0, g_1, \dots, g_{m-2})$ sia un elemento di $S^{m-1}(\Gamma)$ e g_{m-1} di $L^2(\Gamma)$, con la norma definita da $\| g \|_{\Sigma(\Gamma)} = \| g_* \|_{S^{m-1}(\Gamma)} + \| g_{m-1} \|_{L^2(\Gamma)}$. Si presenta allora in primo luogo il problema di sapere se è $\overset{-1}{L}(0) = N$; si tratta in sostanza di avere un teorema di unicità in K per il problema di DIRICHLET. Per $m = 1$ il risultato segue da un teorema di unicità dovuto a CIMMINO [1]; in casi particolari detto teorema si ha anche per $m > 1$ (v. PINI [2], [3]). La risposta sembra affermativa in generale, ma ciò va ancora dimostrato.

Si ha poi il problema della costruzione della h, che consiste nel determinare h in modo che $Ah \in L^2(\Omega)$, $h \in H^{m-1}(\Omega)$, e $\gamma_i h = g_i$ $(i = 0, 1, \dots, m-1)$ nel senso ora detto, per ogni $g = (g_0, \dots, g_{m-1})$ appartenente a $\Sigma(\Gamma)$; è ciò possibile per ogni tale g? Cioè $\mathcal{S}(\Gamma) \equiv \Sigma(\Gamma)$? In generale il problema è aperto. Per $m = 1$ la risposta è affermativa in virtù dei risultati di CIMMINO [1], [2] e in casi particolari anche per $m > 1$ (v. PINI [2], [3]); ma si osservi anche qui che *con ciò si è ricorso a teoremi esistenziali per il problema* $Au = 0$; $Lu = g$. Problema interessante è quello di ottenere l'esistenza di h senza ricorrere a tali strumenti.

Si noti che si otterrebbero così soluzioni a integrale di DIRICHLET d'ordine m *non finito,* poichè tali sono le funzioni della classe K considerata in questo secondo esempio.

Considerazioni analoghe ed esempi analoghi si potrebbero fare anche per gli altri problemi al contorno ed in particolare per quelli misti. Per $m = 1$ si otterrebbero così, una volta superate le difficoltà analoghe a quelle messe in luce per il problema di DIRICHLET negli esempi I^0 e II^0, i risultati per altra via ottenuti da FICHERA [2], MAGENES [1], [2] e [4], STAMPACCHIA [5] ecc.

Ritorniamo ora al problema 9.1 in generale; in esso si è in sostanza cercato di estendere ulteriormente la classe $\mathcal{K}$, in cui si cerca la soluzione, introducendo la classe K (che contiene $\mathfrak{K}$). Ma il problema può porsi in generale nel seguente modo.

Supponiamo di sapere che *se f appartiene ad un sottospazio* (*anche non chiuso*) Q_* *di* Q' *allora la soluzione* $u = Gf$ *del problema* 5.1 (*di cui il teo-*

rema 6.2 ci assicura l'esistenza) appartenga a un sottospazio N_* (anche non chiuso) di N.

È questa in sostanza un'ipotesi di « regolarizzazione » e nei numeri seguenti noi otterremo risultati di questo tipo.

Ebbene il problema 9.1 *si può allora generalizzare sostituendo a K il sottospazio K_* (contenente N_*) delle u di K tali che $Au \in Q_*$.*

Con ciò si potrebbero ottenere risultati relativi ai problemi non omogenei, di tipo classico, pur di particolarizzare Q_* e quindi K_*.

Naturalmente si presentano anche ora problemi analoghi a quelli visti (in particolare la costruzione di h) e di soluzione tutt'altro che semplice, oltre a quello di stabilire la validità dell'ipotesi fatta di regolarizzazione. Ad es. si consideri il problema classico di DIRICHLET: $\Delta u = 0$ in Ω, $u = g$ su Γ, essendo g una qualunque funzione continua su Γ; è ovvio che N_* dovrà essere contenuto nel sottospazio di N delle funzioni continue in $\overline{\Omega}$. Si presentano allora questi problemi:

1⁰) proprietà di regolarizzazione: determinare cioè Q_* in modo che per $f \in Q_*$, $Gf \in N_*$ con $N_* \subset N \cap C^0(\overline{\Omega})$ (dalla teoria classica è noto che si può prendere ad es. $Q_* \equiv C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$)

2⁰) costruire per ogni $g \in C^0(\Gamma)$ una funzione h continua in $\overline{\Omega}$ e tale che *$\Delta u \in Q^*$ e $u = g$ su Γ.*

E i problemi diventano ancora più complessi quando si voglia studiare il problema di DIRICHLET classico per equazioni d'ordine superiore. Nel caso di due variabili una costruzione analoga a quella richiesta da 2⁰) è stata proprio di recente fatta da MIRANDA [4] in un lavoro dedicato all'estensione del principio di massimo all'equazioni d'ordine $2m$.

Vogliamo ancora osservare, prima di lasciare questo problema, che le difficoltà ora messe in luce sono in sostanza insite nel tentativo di ridurre un problema del tipo $Au = f$, $Lu = g$ ad uno del tipo $Au = f$, $Lu = 0$. E infatti difficoltà in sostanza analoghe si trovano, anche se si cerca di ottenere tale riduzione per altra via.

Ad es. si può pensare il seguente procedimento, che trovasi anche usato in FICHERA [7]; si supponga che

I⁰) *siano $\mathcal{S}_*(\Gamma)$ uno spazio lineare e topologico e $\{\psi_r\}$ un sistema di funzioni di K tali che $u \to Lu$ sia un'applicazione lineare di K in $\mathcal{S}_*(\Gamma)$ e $\{L(\psi_r)\}$ costituisca un sistema completo in $\mathcal{S}_*(\Gamma)$.*

II⁰) *Ogni successione $\{w_r\}$ di K_0 (sottospazio di K delle soluzioni di $Au = 0$) tale che $\{Lw_r\}$ converga in $\mathcal{S}_*(\Gamma)$ ad un punto g di $\mathcal{S}_*(\Gamma)$, converga in K alla soluzione del problema $Aw = 0$, $Lw = g$.*

Assegnati allora $f \in Q'$ e $g \in \mathcal{S}_*(\Gamma)$ consideriamo in K il problema $Au = f$, $Lu = g$. Sia $\{v_r\}$ una successione di combinazioni lineari delle ψ_r tale che $Lv_r \to g$ in $\mathcal{S}_*(\Gamma)$; si consideri in K il problema $Au = Av_r$, $Lu = 0$;

esso ammette per ipotesi una soluzione unica u_r. Posto: $w_r = v_r - u_r$ si ha: $Aw_r = 0$ $Lw_r = Lv_r$.

In virtù della ipotesi II^0) poichè $Lv_r \to g$ in $\mathcal{S}_*(\Gamma)$, w_r tende in K a un punto w di K che è soluzione del problema $Aw = 0$, $Lw = g$. Detta u_0 la soluzione di $Au = f$, $Lu = 0$, posto $u = u_0 + w$ si ha allora $Au = f$, $Lu = g$.

Naturalmente in questo procedimento le difficoltà da superare sono la dimostrazione delle ipotesi I^0) e II^0), e queste sono sostanzialmente analoghe a quelle che si incontrano col primo procedimento; e in particolare è da notare la stretta relazione tra la proprietà di chiusura II^0) e le formule di maggiorazione (9.2).

D'altra parte è anche da osservare che nei lavori citati a proposito degli esempi I^0 e II^0, riguardanti la risoluzione di problemi con condizioni al contorno non omogenee, trovansi proprio dimostrate proposizioni quali la (II^0) (vedi in particolare CIMMINO, PINI, MAGENES).

Possiamo dunque concludere che la teoria generale esposta nei numeri precedenti e in questo, se è pur vero che risolve in modo soddisfacente i problemi ellittici con condizioni al contorno omogenee, presenta ancora lacune e difficoltà quando si passi al caso di condizioni al contorno non omogenee.

b) Da quando detto risulta dunque interessante vedere se e come i problemi con condizioni non omogenee possono essere trattati direttamente attraverso la stessa teoria generale esposta nei numeri 4-8, opportunamente completata. Ciò è infatti possibile, almeno per quanto riguarda i dati al contorno che non sono soddisfatti da una arbitraria funzione di V (condizioni « non stabili » secondo alcuni Autori).

Ecco precisamente di che si tratta (per un caso particolare vedi MAGENES [4]). Riprendiamo per questo in un primo tempo il problema 5.1 così come è stato enunciato nel n. 5. In esso l'equazione $Au = f$ è da intendersi nel senso delle distribuzioni in Ω. Le condizioni al contorno sono invece da intendersi nel senso che u appartiene ad N, cioè che verifica la (5.6) per ogni v di V.

Quest'ultima condizione si può presentare in veste più significativa come ora vedremo.

Supponiamo $V \neq H_0^m(\Omega)$ (nel caso $V = H_0^m(\Omega)$ l'appartenenza di u a N equivale come si è visto alla condizione $\gamma u = 0$ e non si otterrebbe nulla di nuovo); l'applicazione $v \to \gamma v$ definisce una applicazione lineare e continua di V su un sottospazio lineare e chiuso $V(\Gamma)$ di $S^m(\Gamma)$; così come $S^m(\Gamma) \simeq \dfrac{H^m(\Omega)}{H_0^m(\Omega)}$ si ha subito che $V(\Gamma) \simeq \dfrac{V}{H_0^m(\Omega)}$. Ovviamente è anche

$(V(\Gamma))' \supset (S^m(\Gamma))'$. Poichè si tratta di spazi di HILBERT è anche $(V(\Gamma))' \simeq$
$\simeq \left(\dfrac{V}{H_0^m(\Omega)}\right)'$; ne segue, per un noto teorema sui duali degli spazi quozienti, che $(V(\Gamma))' \simeq W'$, dove W' è il sottospazio di W' dei funzionali lineari continui su V e nulli su $H_0^m(\Omega)$.

Sia allora $u \in \mathscr{K}$; consideriamo per $v \in V$ la forma $\langle Au, \bar{v} \rangle - a(u, v)$ pseudolineare e continua su V; essa si annulla su $H_0^m(\Omega)$ e dunque, per quanto si è detto, c'è un ben determinato elemento $T(u)$ di $(V(\Gamma))'$ tale che

$$\langle Au, \bar{v} \rangle - a(u, v) = \langle T(u), \overline{\gamma v} \rangle \quad \text{per ogni } v \in V \tag{9.5}$$

il simbolo $\langle\ \rangle$ a secondo membro indicando la dualità tra $V(\Gamma)$ e $(V(\Gamma))'$. La (9.5) può formalmente essere interpretata come una *estensione della formula di* GREEN ad $\mathscr{K}$. Nel caso che $V = H^m(\Omega)$, $Q = Q' = L^2(\Omega)$ essa coincide con la (2.11) di LIONS [3, cap. I].

L'appartenenza di u ad N significa allora per la (5.5) *e la* (5.6) *che* $\langle Bu, \overline{\gamma v} \rangle = \langle T(u), \overline{\gamma v} \rangle$ *per ogni* $v \in V$, *cioè, poichè* $Bu \in (S^m(\Gamma))' \subset (V(\Gamma))'$,

$$Bu - T(u) = 0 \quad \text{in} \quad (V(\Gamma))' \tag{9.6}$$ [25]

È questa la nuova *interpretazione* che può darsi delle *condizioni al contorno omogenee* determinate dall'appartenenza ad N.

Orbene la (9.6) (condizioni al contorno omogenee) può essere sostituita dalla seguente (condizione al contorno non omogenea):

$$Bu - T(u) = g \tag{9.6'}$$

dove g è un elemento fissato di $(V(\Gamma))'$. Più precisamente possiamo generalizzare il problema 5.1 nel seguente:

PROBLEMA 9.2: *Trovare le condizioni nelle quali è possibile, fissato comunque* $f \in Q'$ *e* $g \in (V(\Gamma))'$, *determinare u in V in modo che:*

$$Au = f \tag{9.7}$$

$$\langle Bu - T(u), \overline{\gamma v} \rangle = \langle g, \overline{\gamma v} \rangle \quad \textit{per ogni } v \in V \tag{9.8}$$

$$\| u \|_V \le c \{ \| f \|_{Q'} + \| g \|_{(V(\Gamma))'} \} \tag{9.9}$$

(*c costante indipendente da* u, f, g).

---

[25] Si osservi che nella impostazione da noi data al problema 5.1 si sarebbe potuto, generalizzandola, assegnare prima lo spazio V e poi l'operatore $Bu \in \mathscr{L}(V, (V(\Gamma))')$.

La (9.8) equivale alla: $Bu - T(u) = g$ in $(V(\Gamma))'$ ed è ovviamente una ***condizione al contorno non omogenea.***

Il problema si può anche ora tradurre, osservando che l'aggiunta del termine noto $\langle g, \overline{\gamma v} \rangle$ non influisce sull'equazione $Au = f$, nell'equazione:

$$(9.10) \qquad ((u, v)) = \langle f, \bar{v} \rangle + \langle g, \overline{\gamma v} \rangle \qquad \text{per ogni } v \in V$$

il primo $\langle \quad \rangle$ indicando la dualità tra Q e Q' e il secondo quella tra $V(\Gamma)$ e $(V(\Gamma))'$.

Ebbene è facile vedere che la V-ellitticità di $((u, v))$ è sufficiente per risolvere il problema (9.2); basta ricorrere al teorema 3.1 come si è fatto per il problema 5.1; la (9.10) equivale alla relazione

$$(9.11) \qquad (u, E(v))_{H^m(\Omega)} = \langle f, \bar{v} \rangle + \langle g, \overline{\gamma v} \rangle, \qquad \text{per ogni } v \in V$$

e le condizioni necessarie e sufficienti per la risolubilità di (9.11), qualunque siano f e g, sono le:

$$\alpha') \qquad \| v \|_Q + \| \gamma v \|_{S^m(\Gamma)} \leq k \| E(v) \|_m \qquad (k \text{ cost. indip. da } v)$$

e la stessa β) del teorema 6.1.

Tenendo conto che $\| v \|_Q + \| \gamma v \|_{S^m(\Gamma)} \leq c \| v \|_m$ gli stessi ragionamenti del n. 6 dimostrano che la V-ellitticità di $((u, v))$ è condizione sufficiente per la validità di α') e β).

Si può dunque concludere col:

TEOREMA 9.3: *La V-ellitticità di $((u, v))$ è condizione sufficiente per la risolubilità del problema* 9.2.

Con ciò vengono risolte direttamente vaste classi di problemi con condizioni al contorno non omogenee: per esempio il problema di NEUMANN, quello di derivata obliqua regolare, i problemi misti con dati di DIRICHLET nulli ecc.

Naturalmente si pone ora il problema di una interpretazione « concreta » delle condizioni al contorno sia omogenee, sia non, espresse dalle (9.6) e dalla (9.6'), problema di notevole interesse applicativo. Che significato può assumere l'operatore $T(u)$ introdotto in questo numero?

Supponiamo per es. (v. LIONS [3]) che sia $m = 1$ e $V = H^1(\Omega)$. Se u è sufficientemente regolare, per es. $\in C^2(\bar{\Omega})$, e tali pure sono i coefficienti, $a_{pq}(x)$, per es. $\in C^1(\bar{\Omega})$, vale allora la formula di GREEN classica, cioè la (5.11) e dunque in tal caso $\langle T(u), \overline{\gamma u} \rangle = -\int_\Gamma \mathcal{L} u \, \bar{v} \, d\sigma$ dove $\mathcal{L} u$ è dato dalla

(5.12); in particolare se l'operatore Au è autoaggiunto, $a_{ik} = \overline{a}_{ki}$ e $a_{i0} = a_{0i} = 0$, si ha $\langle T(u), \overline{\gamma v} \rangle = -\int\limits_{\Gamma} a \frac{du}{d\nu^*} \overline{v}\, d\sigma$, ν^* essendo la conormale usuale.

Un problema interessante è allora il seguente: $C^2(\overline{\Omega})$ è denso in $\mathscr{K}$? Se la risposta è affermativa si può allora dire che $T(u)$ è il prolungamento dell'operatore $\mathscr{L}u$ e in particolare, se Au è autoaggiunto, della derivata conormale usuale.

In generale, per $m > 1$ e $V \equiv H^m(\Omega)$, $T(u)$ è il prolungamento del vettore $\mathscr{L}u \equiv (\mathscr{L}_0 u, \ldots, \mathscr{L}_{m-1} u)$ essendo $\mathscr{L}_i(u)$ gli operatori che compaiono nella formula (5.17)? Il risultato è evidentemente interessante perchè sarebbe un primo passo verso una interpretazione «concreta» delle condizioni al contorno nella nostra impostazione, problema che si riconnette a quello della regolarizzazione di cui appunto ci interesseremo nei numeri seguenti.

Capitolo III

PROBLEMI DI REGOLARIZZAZIONE

N. 10. *Problemi di regolarizzazione: Primi teoremi.*

Abbiamo già avuto occasione di accennare, nel corso della esposizione fin qui fatta, a diversi aspetti di quello che in generale può chiamarsi il problema della *regolarizzazione.* Si tratta cioè di fissare quelle ulteriori proprietà di regolarità della soluzione in dipendenza della regolarità dei dati (i coefficienti a_{pq}, la forma Bu, f, g, l'insieme Ω).

La varietà dei risultati che possono presentarsi è notevole. Da semplici interpretazioni « concrete » dei risultati ottenuti — come si è già accennato alla fine del numero precedente — fino ai risultati relativi all'analiticità della soluzione, si presenta una vasta gamma di problemi tutti di forte interesse sia teorico che pratico.

Poichè i problemi al contorno sono stati ridotti a relazioni funzionali del tipo (5.8) o (9.10), il problema si presenta come una generalizzazione di note questioni sia di calcolo delle variazioni che di analisi classica.

Diversi risultati sono stati ottenuti a questo riguardo; numerosi sono gli Autori che hanno dato sia direttamente sia indirettamente contributi a questi problemi a partire da LICHTENSTEIN. Fra i primi c'è da ricordare CACCIOPPOLI [1] e CIMMINO [1] e inoltre, senza alcuna pretesa di completezza: WEYL, PETROSWKY, SCHWARTZ, FRIEDRICHS, SOBOLEV, HOPF, SCHIFFMANN, SIGALOV, JOHN, LADIZENSKAYA, GUSEVA, C. B. MORREY Jr., NIRENBERG, ARONSZAJN, SMITH, BROWDER, STAMPACCHIA, AMERIO, FICHERA, PINI, DE GIORGI, MAGENES, ...

Riservandoci di dare in seguito qualche cenno ulteriore sui diversi procedimenti di regolarizzazione, inizieremo ora ad esporne uno che è attualmente il più generale, nel senso che permette di ottenere la regolarizzazione sia in Ω che su Γ di una vasta classe di problemi al contorno per equazioni d'ordine $2m$ qualunque. Ci serviremo in ciò di contributi di numerosi Autori, come FRIEDRICHS [2], NIRENBERG [2], BROWDER [2], ARONSZAJN-SMITH, STAMPACCHIA [6] e in particolare dell'esposizione di LIONS fatta in [5].

A differenza di quanto fatto però fino ad ora, ci siamo proposti di ottenere questa regolarizzazione in condizioni di larga generalità e anche per problemi con condizioni al contorno non omogenee, secondo l'impostazione che ad essi abbiamo data nel n. 9 *b*).

Segnaliamo anche che le considerazioni di questi numeri, a differenza di quelle svolte precedentemente relative ai teoremi esistenziali, hanno carattere « locale ». Questo fatto permette di avvalersi di questa teoria della regolarizzazione anche in problemi le cui soluzioni non sono, a priori, in $H^m(\Omega)$, ma solo in $H^m(\Omega')$ con $\Omega' \subset \Omega$. Questa considerazione, mentre permette di trarre alcune proprietà delle soluzioni anche per problemi più generali di quelli che prenderemo esplicitamente in considerazione, potrà inoltre servire per ottenere la regolarizzazione di soluzioni di problemi, ottenute con procedimenti diversi da quelli fin qui svolti.

Cominceremo a fissare alcune ipotesi ed alcune notazioni che serviranno nei successivi lemmi e teoremi. Indicheremo nel seguito con σ_r la sfera $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < r$ e con σ'_r la « semisfera » $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < r$, $x_n > 0$; con $\partial\sigma_r$ e $\partial\sigma'_r$ le frontiere dei suddetti insiemi aperti e più precisamente indicheremo con $\partial_1\sigma'_r$ la porzione di $\partial\sigma'_r$ che giace sul « piano » $x_n = 0$ e con $\partial_2\sigma'_r$ la rimanente porzione di $\partial\sigma'_r$, $(\partial\sigma'_r = \partial_1\sigma'_r + \partial_2\sigma'_r)$; con x' indicheremo anche il complesso delle variabili $(x_1, \dots, x_{n-1})$, sicchè il punto $x \equiv (x_1, \dots, x_n)$ sarà anche indicato con $x \equiv (x', x_n)$. Converremo anche di indicare con $D_{x'}^s u$ una qualunque derivata rispetto alle sole variabili $x_1, \dots, x_{n-1}$, cioè tale che $s \equiv (s_1, \dots, s_{n-1}, 0)$ e con $D_n^q u$ una derivata solo rispetto a x_n, cioè tale che $q \equiv (0, 0, \dots, 0, q)$.

Fissato un valore R di r, indicheremo con ω indifferentemente l'insieme aperto che può coincidere sia con σ_R che con $\sigma_{R'}$. Indicheremo poi con $\mathfrak{D}(R^n, \omega)$ l'insieme delle funzioni φ di $\mathfrak{D}(R^n)$ le quali hanno supporto contenuto in ω se $\omega \equiv \sigma_R$ mentre hanno supporto la cui intersezione col « semispazio » $x_n > 0$ appartiene ad ω se $\omega \equiv \sigma'_R$.

Indichiamo con $\mathcal{H}^m(\omega)$ la chiusura in $H^m(\omega)$ delle funzioni di $\mathcal{D}(R^n, \omega)$ considerate su ω: risulta pertanto che quando $\omega \equiv \sigma_R$ è: $\mathcal{H}^m(\omega) = H_0^m(\omega)$. Quando $\omega \equiv \sigma'_R$, data la definizione di $\mathcal{H}^m(\omega)$, è possibile, nonostante il fatto che la frontiera di ω non è « indefinitamente derivabile », definire, in modo analogo a quanto ricordato al n. 2 (a proposito di $H^k(\Omega)$), la traccia $\gamma v \equiv (\gamma_0 v, \dots, \gamma_{m-1} v)$ di ogni funzione v di $\mathcal{H}^m(\omega)$, la quale è un'applicazione lineare e continua di $\mathcal{H}^m(\omega)$ nello spazio di HILBERT $S^m(\partial\omega)$.

Osserviamo anche, sempre se $\omega = \sigma'_R$, che, per ogni $v \in \mathcal{H}^m(\omega)$, $\gamma_i v$ $(i = 0, \dots, m-1)$ ha supporto contenuto in $\partial_1 \omega$. Indicheremo con $(S(\partial\omega))'$ il duale di $S^m(\partial\omega)$.

Indicheremo in seguito con Bu un operatore lineare e continuo di $H^m(\omega)$ in $(S^m(\partial\omega))'$; allora la forma $\langle Bu, \overline{\gamma v}\rangle$ dove il simbolo $\langle \quad \rangle$ indica la dualità fra $S^m(\partial\omega)$ e $(S^m(\partial\omega))'$, è sesquilineare e continua su $H^m(\omega) \times \mathcal{H}^m(\omega)$.

Detto $\mathcal{V}$ un sottospazio lineare e chiuso di $\mathcal{H}^m(\omega)$ si consideri la forma sesquilineare e continua in $H^m(\omega) \times \mathcal{V}$:

$$((u, v)) = a(u, v) + \langle Bu, \overline{\gamma v}\rangle \tag{10.1}$$

ove

$$a(u, v) = \int_\omega \sum_{|p|, |q| \leq m} a_{pq} D^q u \, \overline{D^p v} \, dx \tag{10.2}$$

e i coefficienti a_{pq} *sono supposti, per semplicità, funzioni indefinitamente derivabili in* $\overline{\omega}$, *anche se detta ipotesi non è sempre necessaria e volta per volta potrebbe essere opportunamente attenuata.*

È beninteso che, se $\omega \equiv \sigma_R$, è: $\langle Bu, \overline{\gamma v}\rangle \equiv 0$ e quindi potremo sempre in questo caso supporre $Bu \equiv 0$.

Consideriamo poi una seconda forma in $S^m(\partial\omega)$: $\langle g, \overline{\gamma v}\rangle$, ove, naturalmente, g è un elemento fissato di $(S^m(\partial\omega))'$; anche ora, se $\omega \equiv \sigma_R$, sarà $g \equiv 0$.

Sul sottospazio $\mathcal{V}$ faremo nel seguito la seguente ipotesi, restrittiva solo se $\omega \equiv \sigma'_R$: *supponiamo che*

1) *esista una classe* Φ, *non vuota, di funzioni di* $\mathcal{D}(R^n, \omega)$ *tale che per ogni* $r < R$ *esista almeno una funzione* $\varphi \in \Phi$ *uguale ad* 1 *su* σ_r (o σ'_r) *e inoltre tale che*

$$\varphi v \in \mathcal{V} \quad per \quad \varphi \in \Phi \quad e \quad v \in \mathcal{V}$$

2) *indicato con*

$$\varrho_h v = \frac{v(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - v(x_1, \dots, x_n)}{h}$$

il rapporto incrementale rispetto alla variabile x_i, $\varrho_h v$ *appartenga a* $\mathcal{V}$ *quando sia* $v \in \mathcal{V}$ *ed* h *sufficientemente piccolo, e ciò accada per ogni* i *se* $\omega \equiv \sigma_R$ *e per ogni* $i \neq n$ *se* $\omega \equiv \sigma'_R$.

Quando si verificano le ipotesi precedenti diremo anche che *le condizioni al contorno determinate da $\mathfrak{V}$ su $\partial_1 \sigma'_R$ sono del tipo* $(\mathfrak{N})$, *o brevemente che $\mathfrak{V}$ è del tipo* $(\mathfrak{N})$. Ciò implica in altri termini che ogni funzione ottenuta da una funzione v di $\mathfrak{V}$ mediante una qualunque « traslazione » piccola parallella al « piano » $x_n = 0$ appartiene ancora a $\mathfrak{V}$.

Una conseguenza immediata di questa condizione è il fatto che ogni derivata di $v\,(\in \mathfrak{V}) : D^s_{x'}\, v$ di un qualunque ordine $|\, s\,|$ appartiene ancora a $\mathfrak{V}$.

Sulle forme sesquilineari introdotte precedentemente faremo i seguenti tipi di ipotesi.

Diremo che *la forma* $((u\,,\,v))$ *soddisfa l'ipotesi* α), *se esiste una costante* $\alpha > 0$, *in modo che per ogni* $v \in \mathfrak{V}$ *si abbia:*

$$\alpha) \qquad \alpha \,\|\, v \,\|^2_{m,\omega} \leq |\, ((v\,,\,v))\,| \,.$$

Le ipotesi che ora faremo si riferiscono al caso che $\omega \equiv \sigma'_R$, in quanto che nel caso $\omega = \sigma_R$ le forme di frontiera sono identicamente nulle ed esse sono ovviamente verificate.

In questo numero e nel successivo indicheremo sempre con la stessa lettera c costanti che possono essere diverse da formola a formola.

Diremo che *la forma* $\langle g\,,\,\overline{\gamma v}\rangle$ *introdotta precedentemente soddisfa l'ipotesi* β_k) *se per ogni* $\varphi \in \Phi$ *e* $v \in \mathfrak{D}(R_n, \omega) \cap \mathfrak{V}$ *e per ogni* $s \equiv (s_1\,, \ldots, s_{n-1}\,, 0)$ *con* $|\, s \,| \leq k$, *si ha:*

$$\beta_k) \qquad |\,\langle g\,,\,\overline{\gamma\varphi\varrho_h D^s_{x'}\, v}\rangle\,| \leq c \,\|\, v \,\|_{m,\omega}$$

ove c è una costante positiva indipendente da v e da h e ϱ_h indica, come già detto precedentemente, il rapporto incrementale rispetto ad una delle variabili x_i con $i \neq n$.

Sull'operatore Bu faremo le seguenti ipotesi che indicheremo con γ_k):

Supponiamo che dalla relazione: $D^s_{x'}\, u \in H^m(\omega)$ *con* $|\, s\,| \leq k$ *segua, per* $\varphi \in \Phi$ *e* $v \in \mathfrak{D}(R^n, \omega) \cap \mathfrak{V}$

$$\gamma_k) \qquad \begin{cases} |\,\langle B\varrho_h(\varphi\, D^s_{x'}\, u)\,,\,\overline{\gamma v}\rangle + \langle Bu\,,\,\overline{\gamma\varphi\varrho_{-h} D^s_{x'} v}\rangle\,| \leq c \,\|\, v \,\|_{m,\omega} \\ |\,\langle Bu\,,\,\overline{\gamma D^s_{x'}\, \varphi\varrho_h v}\rangle + (-1)^{|s|}\langle BD^s_{x'} u\,,\,\overline{\gamma\varphi\varrho_h v}\rangle\,| \leq c \,\|\, v \,\|_{m,\omega} \end{cases}$$

con c indipendente da v e da h.

Avremo anche occasione di considerare una forma lineare e continua in $\mathfrak{V}$: $\langle f\,,\,\overline{v}\rangle$. Su di essa faremo le seguenti ipotesi:

Se $\omega \equiv \sigma_R$, *supporremo che, per ogni* $v \in \mathfrak{D}(R^n, \omega)$, *si abbia:*

$$F_k) \qquad |\,\langle f\,,\,\overline{D^t v}\rangle\,| \leq c \,\|\, v \,\|_{m-1,\,\omega}$$

per ogni $t \equiv (t_1\,, t_2\,, \ldots, t_n)$ *con* $|\, t\,| \leq k$, *Se* $\omega \equiv \sigma'_R$, *supporremo che si abbia:*

$F_k)$ $$| \langle f, \overline{D^s_{x'} v} \rangle \leq c \, \| v \|_{m-1, \omega}$$

per ogni $v \in \mathfrak{D}(R^n, \omega) \cap \mathcal{V}$ *e per ogni* $s \equiv (s_1, \ldots, s_{n-1}, 0)$ *e* $| s | \leq k$, *e inoltre*

$F_k^*)$ $$| \langle f, \overline{D^t v} \rangle | \leq c \, \| v \|_{m-1, \omega}$$

per ogni $v \in \mathfrak{D}(\omega)$ *e per ogni* $t \equiv (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ *con* $| t | \leq k$ *ove le costanti* c *sono indipendenti da* v *e da* h.

La $F^*)$ è implicita nella $F_k)$ per $t \equiv s \equiv (s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, 0)$.

La $F_k)$ (se $\omega \equiv \sigma_R$), o la $F_k^*)$ (se $\omega \equiv \sigma'_R$), si possono anche esprimere dicendo che (cfr. n. 2)

(i) $$D^t f \in H^{-(m-1)}(\omega) \quad \text{se} \quad | t | \leq k$$

le quali, in particolare, sono soddisfatte se:

(ii) $$f \in H^{-(m-1)+k}(\omega).$$

Infatti, se è verificata la (ii), si ha (cfr. n. 2)

$$f = \Sigma \, D^p \varphi_p \quad \text{con} \quad | p | = m - 1 - k \quad \text{e} \quad \varphi_p \in L^2(\omega)$$

e quindi

$$D^t f = \Sigma \, D^t D^p \varphi_p = \Sigma \, D^{p'} \varphi_p \quad \text{con} \quad | p' | \leq m - 1$$

cioè è verificata la (i).

Nel caso $\omega \equiv \sigma'_R$ e inoltre $\mathcal{V} \equiv \overset{m}{H}_0(\omega)$ la $F_k^*)$ implica la $F_k)$ e questa è equivalente alla (i). Quando $\mathcal{V} \supset \overset{m}{H}_0(\omega)$ (propriamente) alla (i) occorre in più aggiungere la $F_k)$. La $F_k)$, introdotta la norma

$$\| f \| = \sum_{| s | \leq k} \; \sup_{v \in \mathfrak{D}(R^n, \omega) \cap \mathcal{V}} \frac{| \langle f, \overline{D^s_x v} \rangle |}{\| v \|_{m-1, \omega}}$$

dove $s \equiv (s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, 0)$, equivale al fatto che $\| f \|$ è finita.

Ciò premesso dimostriamo il seguente lemma:

LEMMA 10.1: *Assegnata la forma sesquilineare* (10.1) *e un funzionale* $F(v)$ *definito in* $\mathcal{V}$ *(di tipo* $(\mathcal{N})$*), sia* u *una funzione fissata di* $H^m(\omega)$ *e siano verificate le ipotesi* $\alpha)$ *e* $\gamma_0)$ *e inoltre si abbia per ogni* $v \in \mathcal{V}$ *e* $\varphi \in \Phi$

(10.3) $$| ((u, v)) + F(v) | \leq c \, \| v \|_{m-1, \omega}$$

(10.4) $$| F(\varrho_h(\varphi v)) | \leq c \, \| v \|_{m, \omega}$$

allora segue, per ogni $v \in \mathcal{V}$ *e* $\varphi \in \Phi$

$$|((\varrho_h(\varphi u), v))| \leq c \| v \|_{m,\omega} \tag{10.5}$$

e ancora:

$$\| \varrho_h(\varphi u) \|_{m,\omega} \leq c \tag{10.6}$$

ove le costanti c sono indipendenti da v e da h.

Tenendo presente la relazione, valida per $v \in \mathcal{D}(R^n, \omega) \cap \mathcal{V}$ e $\varphi \in \Phi$

$$\begin{aligned}((\varrho_h(\varphi u), v)) = ((\varrho_h(\varphi u), v)) + ((u, \varphi \varrho_{-h} v)) + \\ + F(\varphi \varrho_{-h} v) - [((u, \varphi\varrho_{-h} v)) + F(\varphi\varrho_{-h} v)]\end{aligned} \tag{10.7}$$

poichè, per quanto supposto su $\mathcal{V}$ e per la (10.3), si ha:

$$|((u, \varphi\varrho_{-h} v)) + F(\varphi\varrho_{-h} v)| \leq c \| \varphi\varrho_{-h} v \|_{m-1,\omega} \leq c \| v \|_{m,\omega} \tag{10.8}$$

(la diseguaglianza $\| \varphi\varrho_{-h} v \|_{m-1,\omega} \leq c \| v \|_{m,\omega}$ si dimostra facilmente) la (10.5) seguirà, tenendo conto della (10.4) e dell'ipotesi γ_0), la quale assicura:

$$|\langle B\varrho_h(\varphi u), \overline{\gamma v} \rangle + \langle B u, \overline{\gamma\varphi\varrho_{-h} v} \rangle| \leq c \| v \|_{m,\omega}$$

quando avremo provato che:

$$|a(\varrho_h(\varphi u), v) + a(u, \varphi\varrho_{-h} v)| \leq c \| v \|_{m,\omega}. \tag{10.9}$$

Per dimostrare la (10.9) noi proveremo che:

$$|a(u, \varphi\varrho_h v) - a(\varphi u, \varrho_h v)| \leq c \| v \|_{m,\omega} \tag{10.9'}$$

$$|a(\varphi u, \varrho_h v) + a(\varrho_{-h}(\varphi u), v)| \leq c \| v \|_{m,\omega}. \tag{10.9''}$$

Per dimostrare la (10.9') osserviamo che l'espressione che compare a primo membro è la somma di termini del tipo:

$$\int_\omega \beta(x) D^q u \overline{D^p \varrho_h v} \, dx$$

ove $|p| + |q| < 2m$, e $\beta(x)$ è una funzione $\mathcal{D}(R^n, \omega)$. Ora i termini per cui $|p| < m$ sono ovviamente maggiorati da $c \| v \|_{m,\omega}$. I termini per cui

$|p| = m$ (e quindi $|q| < m$) si maggiorano ancora con $c \| v \|_{m,\omega}$ osservando che:

$$\int_\omega \beta(x) D^q u \overline{D^p \varrho_h u} \, dx = - \int_\omega \varrho_{-h} [\beta(x) D^q u] \overline{D^p v} \, dx$$

(ciò discende dalla relazione semplice a mostrarsi che quando $v \in \mathfrak{D}(R^n, \omega) \cap \mathcal{V}$ e $u \in H^m(\omega)$ si ha:

$$\int_\omega (u \varrho_h v + v \varrho_{-h} u) \, dx = 0) .$$

Per dimostrare la (10.9″) osserviamo che l'espressione che compare a primo membro risulta somma di termini del tipo:

$$\int_\omega \beta(x) [D^q \varrho_{-h} (\varphi u) \overline{D^p v} + D^q (\varphi u) \overline{D^p \varrho_h v}] \, dx .$$

Ora i termini per cui $|p| + |q| < 2m$ si maggiorano come precedentemente; consideriamo invece uno qualunque dei rimanenti ed osserviamo che, essendo:

$$\int_\omega \beta(x) D^q \varrho_{-h} (\varphi u) \overline{D^p v} \, dx = - \int_\omega D^q (\varphi u) \varrho_h [\beta \overline{D^p v}] \, dx =$$

$$= - \int_\omega D^q (\varphi u) [\beta \varrho_h \overline{D^p v} + \overline{D^p v (x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n)} \varrho_h \beta] \, dx$$

si trova per esso l'espressione:

$$- \int_\omega D^q (\varphi u) \overline{D^p v (x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n)} \varrho_h \beta \, dx +$$

$$+ \int_\omega \beta(x) D^q (\varphi(u)) (\overline{D^p \varrho_h v} - \varrho_h \overline{D^p v}) \, dx$$

Ora il primo di questi integrali si maggiora facilmente con $c \| v \|_{m,\omega}$ mentre il secondo è nullo.

La (10.5) è così dimostrata per $v \in \mathfrak{D}(R^n, \omega) \cap \mathcal{V}$; per continuità essa si prova per $v \in \mathcal{V}$.

Per ottenere la (10.6) basta sfruttare l'ipotesi α) ; scritta infatti la (10.5) per $v = \varrho_h(\varphi u) \in \mathcal{V}$, si ottiene :

$$| ((\varrho_h(\varphi u), \varrho_h(\varphi u))) | \leq c \| \varrho_h(\varphi u) \|_{m,\omega}$$

donde per l'ipotesi α), poichè $\varrho_h(\varphi u) \in \mathcal{V}$, segue :

$$\alpha \| \varrho_h(\varphi u) \|^2_{m,\omega} \leq c \| \varrho_h(\varphi u) \|_{m,\omega}$$

e di qui la (10.6).

COROLLARIO DEL LEMMA 10.1 : *Nelle ipotesi del lemma* 10.1 *si deduce, quando* $\omega \equiv \sigma_R$, *che, per ogni* $\varphi \in \Phi$

(10.10) $$\varphi u \in H^{m+1}(\omega)$$

e quindi :

(10.11) $$u \in H^{m+1}(\sigma_r) \qquad \textit{per ogni } r < R.$$

mentre, quando $\omega \equiv \sigma'_R$, *si deduce, per ogni* $\varphi \in \Phi$

(10.12) $$D_i(\varphi u) \in H^m(\omega) \qquad i \neq n \qquad |p| \leq m$$

e quindi :

(10.13) $$D_i u \in H^m(\sigma'_r) \qquad \textit{per} \quad r < R; \quad i \neq n, |p| \leq m$$

Come applicazione del lemma precedente, consideriamo una funzione u di $H^m(\omega)$ la quale soddisfi la relazione

(10.14) $$a(u, v) + \langle Bu, \gamma \bar{v} \rangle = \langle f, \bar{v} \rangle + \langle g, \gamma \bar{v} \rangle$$

per $v \in \mathcal{V}$, ove le notazioni usate sono già state introdotte all'inizio di questo numero. Sussiste allora il seguente :

TOREMA 10.1 : *Se* $u \in H^m(\omega)$, *soddisfa la* (10.14) (*con* $\mathcal{V}$ *del tipo* ($\mathcal{N}$) *e se sono soddisfatte le ipotesi* α), β_0) *e* γ_0), F_0), *risultano verificate la* (10.11) *o le* (10.13) *secondo che* $\omega \equiv \sigma_R$ *o* $\omega \equiv \sigma'_R$.

Posto infatti $F(v) = -\langle g, \gamma \bar{v} \rangle$, l'ipotesi β_0) implica la (10.4) e la F_0 implica la (10.3) ; il lemma 10.1 ed il suo corollario dimostrano l'enunciato.

OSSERVAZIONE : Nel caso che $\omega \equiv \sigma_R$, essendo $\langle Bu, \gamma \bar{v} \rangle \equiv 0$, $\langle g, \gamma \bar{v} \rangle \equiv 0$ si deduce facilmente, dalla dimostrazione del teorema 10.1, la seguente maggiorazione (cfr. anche ipotesi F_0)):

$$(10.15) \qquad \| D_i \varphi u \|_{m,\omega} \leq c \left(\| f \|_{-m+1,\omega} + \| u \|_{m,\omega} \right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ove c è una costante indipendente da u.

Se $\omega \equiv \sigma'_R$ si può dedurre una maggiorazione analoga, quando $i \neq n$, purchè $\mathcal{V} \equiv H_0^m(\omega)$. Nel caso generale, ferma rimanendo la limitazione: $i \neq n$, sussiste una maggiorazione analoga alla (10.15) purchè a secondo membro si aggiungano quantità legate alle costanti che intervengono nelle ipotesi β_0) e γ_0), e nella ipotesi F_0).

Ci proponiamo di generalizzare il teorema 10.1 dimostrando il seguente

TEOREMA 10.2: *Se* $u \in H^m(\omega)$, *soddisfa la* 10.14, $\mathcal{V}$ *essendo di tipo* $(\mathfrak{N})$, *e se sono verificate le ipotesi* α), β_{k-1}), γ_{k-1}), F_{k-1}), *si deduce:*

$$(10.16) \qquad \varphi u \in H^{m+k}(\omega) \qquad se \qquad \omega \equiv \sigma_R$$

e quindi:

$$(10.17) \qquad u \in H^{m+k}(\sigma_r) \qquad per\ ogni \qquad r < R$$

oppure:

$$(10.18) \qquad D_{x'}^s(\varphi u) \in H^m(\omega) \quad se \quad \omega \equiv \sigma'_R, \qquad s \equiv (s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, 0); \ |s| \leq k$$

e quindi:

$$(10.19) \qquad D_{x'}^s u \in H^m(\sigma'_r) \quad per \quad r < R; \qquad s \equiv (s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, 0); \ |s| \leq k$$

Il teorema è vero per $k = 0$, dimostriamolo in generale per induzione. Sarà allora $D^t u \in H^m(\omega)$ ove $|t| = k - 1$ e D^t indica una derivata qualsiasi se $\omega \equiv \sigma_R$ e una derivata rispetto alle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ se $\omega \equiv \sigma'_R$. In ogni caso, come abbiamo già notato, $D^t v \in \mathfrak{D}(R^n, \omega) \cap \mathcal{V}$ se $v \in \mathfrak{D}(R^n, \omega) \cap \mathcal{V}$; potremo allora scrivere, per la (10.14):

$$(10.20) \qquad a(u, D^t v) + \langle B u, \overline{\gamma D^t v} \rangle = \langle f, \overline{D^t v} \rangle + \langle g, \overline{\gamma D^t v} \rangle$$

per ogni $v \in \mathfrak{D}(R^n, \omega) \cap \mathcal{V}$ o anche, osservando che a causa della natura del supporto di v, si ha:

$$a(u, D^t v) = (-1)^{|t|} a(D^t u, v) + \int_\omega \sum_{|p|, |q| \leq m} \ \sum_{|p'| \leq k-2} \beta_{pq} D^{p'}(D^q u) \overline{D^p v}\, dx$$

la seguente relazione:

$$(10.21)\qquad (-1)^{|t|}\,[a\,(D^t u\,,v) + \langle B\,D^t u\,,\overline{\gamma\,v}\rangle] + \mathcal{F}_t(v) +$$
$$+\int_\omega \sum_{|p|,|q|\leq m}\ \sum_{|p'|\leq k-2} \beta_{pq} D^{p'}(D^q u)\,\overline{D^p v}\,dx - \langle g\,,\overline{\gamma D^t v}\rangle = \langle f\,,\overline{D^t v}\rangle$$

ove

$$\mathcal{F}_t(v) = \langle B\,u\,,\overline{\gamma\,D^t v}\rangle - (-1)^{|t|}\,\langle B\,D^t u\,,\overline{\gamma\,v}\rangle.$$

Posto allora

$$(10.22)\ (-1)^{|t|}\,F(v) = \int_\omega \sum_{|p|,|q|\leq m}\ \sum_{|p'|\leq k-2} \beta_{pq} D^{p'}(D^q u)\,\overline{D^p v}\,dx + \mathcal{F}_t(v) - \langle g,\overline{\gamma D^t v}\rangle$$

osserviamo che per le ipotesi $\beta_{k-1})$, $\gamma_{k-1})$ (tenuto conto che $D^t u \in H^m(\omega)$) seguirà:

$$(10.23)\qquad |\,F(\varphi\,\varrho_h\,v)\,| \leq c\,\|\,v\,\|_{m,\omega}$$

quando avremo dimostrato che

$$(10.24)\qquad \left|\int_\omega \sum_{|p|,|q|\leq m}\ \sum_{|p'|\leq k-2} \beta_{pq} D^{p'}(D^q u)\,\overline{D^p(\varphi\varrho_h v)}\,dx\right| \leq c\,\|\,v\,\|_{m,\omega}\,.$$

D'altra parte dalla (10.21), a causa dell'ipotesi $\mathrm{F}_{k-1})$ segue:

$$(10.25)\qquad |\,((D^t u\,,v)) + F(v)\,| \leq c\,\|\,v\,\|_{m-1,\omega}\,.$$

Allora, rifacendosi al lemma 10.1, quando si assuma $D^t u$ al posto di u, risultano, per la (10.23), per la (10.25) e per l'ipotesi $\gamma_{k-1})$, verificate tutte le ipotesi richieste. Dal corollario del lemma 10.1 segue la tesi del teorema 10.2.

Rimane quindi da dimostrare la (10.24). Ora l'espressione che compare a primo membro della (10.24) è somma di termini del tipo:

$$\int_\omega \beta\,(x)\,D^{p'}\,(D^q u)\,\overline{D^p\,\varrho_h v}\,dx$$

ove $|\,p\,| + |\,q\,| \leq 2m$ e $\beta\,(x) \in \mathfrak{D}\,(R^n,\omega)$. Ciascuno di questi termini, tenendo conto della natura di $\beta\,(x)$ e di v, si può scrivere sotto la forma

$$-\int_\omega \varrho_{-h}\,[\beta(x)\,D^{p'}(D^q u)]\,\overline{D^p\,v}\,dx$$

e si maggiora con un'espressione del tipo $c \| v \|_{m,\omega}$ ove la costante c dipende dal valore di $\| D_i D^{p'} D^q u \|_{0,\omega}$ che è finito per ogni i, se $\omega \equiv \sigma_R$ e per $i \neq n$, se $\omega \equiv \sigma_R'$, essendo $|p'| \leq k - 2$. Il teorema 10.2 è così completamente dimostrato.

Osserviamo che, come per il teorema 10.1, si può dedurre, quando $\omega \equiv \sigma_R$, la maggiorazione:

$$\| D^s(\varphi u) \|_{m,\omega} \leq c \{ \| D^t f \|_{-m+1,\,\omega} + \| D^t u \|_{m,\omega} \} \leq \tag{10.25'}$$
$$\leq c \{ \| f \|_{-m+k,\,\omega} + \| D^t u \|_{m,\omega} \} \quad (|s| \leq k, |t| \leq k-1)$$

con c indipendente da u.

Di qui si deduce poi facilmente che:

$$\| D^s(\varphi u) \|_{m,\omega} \leq c (\| f \|_{-m+k,\,\omega} + \| u \|_{m,\omega}) \tag{10.26}$$

Nel caso $\omega \equiv \sigma_R'$ e $\mathcal{V} = \overset{m}{H}_0(\omega)$ la (10.25') e la (10.26) valgono con la condizione ulteriore che $s \equiv (s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, 0)$.

Segnaliamo, in particolare, che per $k = m$ si ha, essendo $(H^0(\omega))' = H^0(\omega)$

$$\| D^t(\varphi u) \|_{m,\omega} \leq c (\| f \|_{0,\omega} + \| u \|_{m,\omega}) \tag{10.26'}$$

ove $t \equiv (t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n)$ con $|t| = m$ e $t_n \neq 0$ oppure $t_n = 0$, secondo che $\omega \equiv \sigma_R$ oppure $\omega \equiv \sigma_R'$.

Sempre se $k = m$ e $\omega \equiv \sigma_R'$, supponiamo $Bu = 0$ e

$$\langle g, \overline{\gamma v} \rangle = \int_{\partial_1 \omega} \sum_{i=0}^{m-1} g_i \overline{\gamma_i v} \, d\sigma$$

ove le funzioni g_i sono funzioni assegnate su $\partial_1 \omega$ e $\in L^2(\partial_1 \omega)$. Da quanto dimostrato precedentemente possiamo dedurre, nell'ipotesi che $D^s_{x'} g_i \in L^2(\partial_1 \omega)$, $s \equiv (s_1, \ldots, s_{n-1}, 0)$ con $|s| \leq i + 1$, la seguente limitazione $(t \equiv (t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, 0)$, $|t| \leq m)$:

$$\| D^t(\varphi u) \|_{m,\omega} \leq c (\| f \|_{0,\omega} + \| u \|_{m,\omega} + |\!|\!| g |\!|\!|) \tag{10.27}$$

ove c è indipendente da u e dove:

$$|\!|\!| g |\!|\!| = \sum_{i=0}^{m-1} \| g \|_{i+1,\,\partial_1 \omega} \tag{10.28}$$

Infatti la condizione $\beta_{m-1})$ è di certo verificata se sussistono le limitazioni

$$\left| \int_{\partial_1 \omega} g_i \, \gamma_i \, \overline{\varphi \varrho_h \, D_{x'}^{t'} v} \, d\sigma \right| \leq c \, \| v \|_{m,\omega} , \qquad | t' | \leq m - 1$$

e queste sono verificate se sussistono limitazioni del tipo:

$$\left| \int_{\partial_1 \omega} D_{x'}^{s} \varrho_h (\varphi g_i) \, \overline{D_{x'}^{q} \gamma_i v} \, d\sigma \right| \leq c \, \| v \|_{m,\omega} \tag{10.29}$$

ove $| s | \leq i$, $| q | \leq m - i - 1$.

Ora, essendo il primo membro maggiorato da $\| g_i \|_{i+1,(\partial_1\omega)} \cdot \| v \|_{m,\omega}$, segue la (10.27).

La (10.27) può essere precisata ulteriormente supponendo che g_i sia la restrizione a $\partial_1 \omega$ di una funzione ϑg_i a supporto compatto nello spazio $\pi_0 \equiv (x_1 , x_2 , \ldots , x_{n-1} , 0)$. In tal caso si può assumere al posto della (10.28)

$$||| g ||| = \sum_i^{0 \ldots m-1} \| \vartheta g_i \|_{i+\frac{1}{2}, \pi_0} . \tag{10.30}$$

Ciò si può dimostrare facilmente, facendo uso della trasformata di FOURIER nello spazio π_0. Infatti dalla (10.29), tenendo conto che $\varrho_h(\varphi g_i)$ e v sono a supporto compatto in $\partial_1 \omega$, si può scrivere:

$$\left| \int_{\partial_1 \omega} D_{x'}^{s} \varrho_h (\varphi g_i) \, \overline{D_{x'}^{q} \gamma_i v} dx' \right| \leq c \int_{\pi_0} | \xi |^{|s| - \frac{1}{2}} \widehat{\varrho_h \varphi g_i} \cdot | \xi |^{|q| + \frac{1}{2}} \widehat{\gamma_i v} \, d\xi \leq$$

$$\leq c' \, \| \varrho_h \varphi g_i \|_{i - \frac{1}{2}, \pi_0} \cdot \| \gamma_i v \|_{|q| + \frac{1}{2}, \pi_0} \leq c' \, \| \varphi g_i \|_{i + \frac{1}{2}, \pi_0} \cdot \| v \|_{m,\omega} .$$

Donde la (10.27), ove la (10.28) è sostituita dalla (10.30).

N. 11. *Regolarizzazione alla frontiera.*

a) Il teorema 10.2 permette di ottenere immediatamente un risultato relativo alla regolarizzazione delle soluzioni del problema 9.2 nell'interno del dominio Ω, e permette anche di ottenere un risultato parziale relativo alla regolarizzazione delle soluzioni alla frontiera Γ. Per ottenere un risultato completo anche alla frontiera dobbiamo completare i lemmi ed i teoremi precedenti nel caso che $\omega \equiv \sigma'_R$. Per questo incominciamo a dimostrare il seguente:

LEMMA 11.1: *Se* $D_i u \in H^m(\omega)$ *con* $i \neq n$ *ed è verificata la relazione*

$$a(u, \varphi) = \langle f, \overline{\varphi} \rangle \qquad \textit{per ogni} \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\omega) \tag{11.1}$$

ed è $a_{\bar p \bar q} \neq 0$, $(\bar p \equiv (0, 0, \ldots, 0, m)$; $\bar q \equiv (0, \ldots, 0, m))$ *e inoltre* $\langle f, \varphi \rangle$ *è un funzionale lineare e continuo in* $H_0^{(m-1)}(\omega)$ *(ipotesi* F_0^**)), allora:*

$$D_n^\nu u \in H^{-(m-1)}(\omega), \ \nu \equiv (0, 0, \ldots, 0, 2m), \ |\nu| = 2m \tag{11.2}$$

La (11.1), scritta esplicitamente, diventa:

$$\int_\omega \Sigma\, a_{pq}\, D^q u\, \overline{D^p \varphi}\, dx = \langle f, \overline{\varphi} \rangle \tag{11.3}$$

o ancora

$$\int_\omega a_{\bar p \bar q}\, D^{\bar q} u\, \overline{D^{\bar p} \varphi}\, dx + \int_\omega \Sigma\, a_{pq}\, D^q u\, \overline{D^p \varphi}\, dx = \langle f, \overline{\varphi} \rangle$$

ove la sommatoria è estesa a tutte le coppie (p, q) distinte dalla coppia $(\bar p, \bar q)$.

Quest'ultima relazione si può scrivere anche sotto la forma

$$(-1)^m \langle D^{\bar p}(a_{\bar p \bar q} D^{\bar q} u), \overline{\varphi} \rangle - \int_\omega D_j (\Sigma\, a_{pq}\, D^q u)\, \overline{D^{p'} \varphi}\, dx = \langle f, \overline{\varphi} \rangle \tag{11.4}$$

ove $p' \equiv (p_1, \ldots, p_j - 1, \ldots, p_n)$ se $p \equiv (p_1, p_2, \ldots p_j, \ldots, p_n)$ ed j è un indice qualunque.

Ora poichè tanto l'integrale a primo membro, per l'ipotesi fatta su u, quanto il secondo membro sono funzionali semilineari e continui in $H_0^{m-1}(\omega)$ segue che tale è il funzionale a primo membro della (11.4).

Ciò equivale a dire che (cfr. n. 2):

$$D^{\bar p}(a_{\bar p \bar q} D^{\bar q} u) \in H^{-(m-1)}(\omega)$$

Di qui tenuto conto che:

$$D^{\bar{p}} a_{\bar{p}\bar{q}} D^{\bar{q}} u = a_{\bar{p}\bar{q}} D_n^{\nu} u + \ldots \in H^{-(m-1)}(\omega)$$

segue, (v. ad es. il teorema 5.3 di SCHWARTZ [3]), la (11.2).

Dimostreremo in seguito il seguente *lemma di* LIONS:

LEMMA 11.2: *Se* $w, D_i w \in H^0(\omega)$, $(i = 1, \ldots, n-1)$, *e* $D_n^{\bar{q}} w \in H^{(m-1)}(\omega)$, $\bar{q} \equiv (0, 0, \ldots, 0, m)$ *segue*:

$$w \in H^1(\sigma'_r) \quad con \quad r < R. \tag{11.5}$$

Potremo allora dedurre il seguente:

TEOREMA 11.1: *Se sono verificate le ipotesi del teorema* 10.1, *segue*:

$$u \in H^1(\sigma'_r) \quad per \quad r < R \tag{11.6}$$

Osserviamo anzitutto che per il teorema 7.6 e per la supposta uniforme continuità degli $a_{pq}(x)$ in $\bar{\omega}$, si può dedurre che: $a_{\bar{p}\bar{q}} \neq 0$.

Inoltre il teorema 10.1 e le ipotesi del teorema 11.1 assicurano che sono soddisfatte le ipotesi del lemma 11.1 e inoltre il lemma 11.2, quando si pone $w \equiv D^{\bar{q}} u$, implica la (11.6).

Dimostriamo ora il seguente teorema:

TEOREMA 11.2: *Se sono soddisfatte le ipotesi del teorema* 10.2 *ed il funnale* $\langle f, D^t \varphi \rangle$ *con* $|t| \leq k-1$ *è lineare e continuo in* $H_0^{m-1}(\omega)$ (*ipotesi* F^*_{k-1}) *segue*:

$$u \in H^{m+k}(\sigma'_r) \quad \text{per} \quad r < R. \tag{11.7}$$

Il teorema è stato dimostrato per $k = 0$, dimostriamolo in generale.

Il teorema 10.2 assicura già che:

$$D^s_{x'} u \in H^m(\sigma'_r), \quad s \equiv (s_1, \ldots, s_{n-1}, 0), \quad |s| \leq k, \quad r < R. \tag{11.8}$$

Se $t \equiv (t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, 0)$ e $|t| = k-1$ dalla relazione che segue dalla (10.14) per $\varphi \in \mathfrak{D}(\omega)$

$$a(u, D^t \varphi) = \langle f, \overline{D^t \varphi} \rangle \tag{11.9}$$

si deduce:

$$(11.10) \qquad (-1)^{|t|}\, a(D^t u, \varphi) = \langle f, \overline{D^t \varphi} \rangle - (-1)^{|t|} \int_\omega \Sigma\, D^t (a_{pq} D^q u)\, \overline{D^p \varphi}\, dx$$

dove il secondo membro è per la (11.8) un funzionale semilineare e continuo in $H_0^{m-1}(\omega)$. La (11.8) assicura anche che:

$$(11.11) \qquad D_i D^t u \in H^m(\sigma_r') \quad \text{per} \quad i \neq n \quad \text{e} \quad r < R$$

e quindi per i lemmi 11.1 e 11.2 segue:

$$(11.12) \qquad D^t u \in H^{m+1}(\sigma_r'), \quad r < R$$

Ciò assicura che u è derivabile $m+1$ volte rispetto ad x_n in $L^2(\sigma_r')$.

Sia ora $t \equiv (t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, 1)$ e $|t| \leq k-1$, la (11.12) assicura che:

$$D_i D^t u \in H^m(\sigma_r'), \quad i \neq n, \quad r < R$$

mentre la (11.10), poichè il secondo membro è ancora un funzionale continuo in $H_0^{m-1}(\omega)$, permette di concludere, per i lemmi 11.1 e 11.2, che:

$$D^t u \in H^{m+1}(\sigma_r'), \quad r < R$$

Prendendo successivamente $t \equiv (t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, 2), t \equiv (t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, 3), \ldots$ $\ldots, t \equiv (t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, k-1)$ si deduce che la funzione u è derivabile anche $m+k$ volte rispetto ad x_n in $L^2(\sigma_r')$ $(r < R)$ e ciò basta per dimostrare la (11.7).

Osserviamo che volendo limitarsi alla dimostrazione del teorema 11.2 quando $k \geq m$, ci si può rifare ad una forma più semplice del lemma di LIONS (vedi ad es. MORREY-NIRENBERG, lemma 2.4 di [1]) oppure ad un uso appropriato dei risultati di ARONSZAJN sulla coercività delle forme quadratiche (v. teorema 7.8) come è fatto ad es. da BROWDER [2].

b) Occorre ora dimostrare il lemma 11.2 di LIONS. Seguiremo qui la dimostrazione che ci è stata gentilmente comunicata da J. L. LIONS. Permettiamo le seguenti considerazioni.

Se E è un aperto anche non limitato del piano, indichiamo con $K(E)$ lo spazio delle funzioni u per cui $u, D_i u \in H^0(E)$ $i = 1, \ldots, n-1$, e $D^{\bar p} u \in H^{-(m-1)}(E)$, $\bar p \equiv (0, 0, \ldots, m)$ munito della sua struttura hilbertiana naturale.

Ciò posto indichiamo con $C^\infty(\bar E)$ lo spazio delle funzioni indefinitamente differenziali in $\bar E$ e con π il semispazio $x_n > 0$, $(x \equiv (x', x_n), x' \equiv (x_1, \ldots, x_{n-1}))$

e dimostriamo che

$$C^\infty(\bar{\pi}) \cap K(\pi) \quad \text{è denso in } K(\pi). \tag{11.13}$$

Infatti sia $u \in K(\pi)$; per $t > 0$ indichiamo con π_{-t} il semispazio $x_n > -t$ e definiamo in π_{-t} la funzione $u_t(x) = u(x', x_n + t)$.

Sia v_t la restrizione di u_t a π; se poi $\varphi \in \mathfrak{D}(\pi)$ poniamo

$$\tau_t\,\varphi \equiv \{0 \text{ per } x_n < t\,,\ \varphi(x', x_n - t) \text{ per } x_n > t\}\,.$$

È evidente che $v_t\,, D_i\,v_t \in L^2(\pi)\,, (i = 1\,, \ldots, n-1)$. Inoltre, essendo

$$\langle D^{\bar{p}}\,v_t\,, \varphi\rangle = (-1)^m \langle v_t\,, D^{\bar{p}}\,\varphi\rangle = (-1)^m \langle u\,, D^{\bar{p}}\,\tau_t\,\varphi\rangle = \langle D^{\bar{p}}\,u\,, \tau_t\,\varphi\rangle$$

si deduce che la forma $\varphi \to \langle D^{\bar{p}}\,v_t\,, \varphi\rangle$ è continua su $\mathfrak{D}(\pi)$ munito della topologia indotta da $H^{m-1}(\pi)$ e ciò prova che $v_t \in K(\pi)$.

Poichè d'altra parte, se $f \in H_0^{m-1}(\pi)$ si ha: $\langle D^{\bar{p}}\,v_t\,, f\rangle = \langle D^{\bar{p}}\,u\,, \tau_t f\rangle$ e il secondo membro tende a $\langle D^{\bar{p}}\,u\,, f\rangle$ quando $t \to 0$, perchè $\tau_t f \to f$ in $H_0^{m-1}(\pi)$, ciò mostra che $v_t \to u$ in $K(\pi)$ debolmente, $t \to 0$. Per provare la (11.13) basta allora approssimare una funzione $u \in K(\pi)$ che è la restrizione a π di un elemento $\mathfrak{U} \in K(\pi_{-t})$, $t > 0$ fissata; se φ è una funzione di x_n uguale ad 1 per $x_n > 0$ e nulla per $x_n < -\dfrac{t}{2}$ e inoltre indefinitivamente derivabile, la funzione φu è in $K(R^n)$ e la sua restrizione a π è sempre u.

Se ora $\{\varrho_k\}$ è una successione di regolarizzanti (cfr. ad es. SCHWARTZ [3]) in $\mathfrak{D}(R^n)$, $\varphi\,u * \varrho_k \to \varphi\,u$ in $K(R^n)$) e in tal modo si costruisce una successione di $C^\infty(\bar{\pi}) \cap K(\pi)$ che converge verso u e si ha quindi la (11.13).

Per ogni funzione $u \in C^\infty(\bar{\pi}) \cap K(\pi)$ consideriamo l'applicazione

$$u \to P(u) = \begin{cases} u(x) & x_n > 0 \\ \sum\limits_{s=1}^{m} \lambda_s\,u(x', -s x_n) & \text{per} \quad x_n \leq 0 \end{cases} \tag{11.14}$$

ove le costanti λ_s soddisfano la condizione:

$$\Sigma\,(-1)^k\,\lambda_s\,s^k = 1\,, \qquad (k = 1\,, 2\,, \ldots, m) \tag{11.15}$$

e dimostriamo

PROPOSIZIONE 11.16: *L'applicazione $u \to Pu$ è continua da $C^\infty(\bar{\pi}) \cap K(\pi)$, munito della topologia di $K(\pi)$, in $K(R^n)$.*

Osserviamo che a causa delle (11.15) Pu è una funzione continua con le derivate fino all'ordine $m-1$ e la derivata $D^{\bar{p}}Pu$, nel senso delle distribuzioni, è una funzione sommabile data dall'espressione:

$$(11.16) \qquad D^{\bar{p}}Pu = \begin{cases} D^{\bar{p}}u(x) & x_n > 0 \\ \sum\limits_s^{1\dots m} (-1)^m s^m \lambda_s D^{\bar{p}} u(x', -s\,x_n) & x_n < 0 \end{cases}$$

Se v è una funzione di $\mathcal{D}(R^n)$ risulta:

$$(11.17) \qquad \langle D^{\bar{p}}Pu, v\rangle = \int_{R^n} D^{\bar{p}}Pu\,v\,dx = \int_{\pi} D^{\bar{p}}u\,w(x)\,dx$$

ove

$$w(x) = v(x) + (-1)^m s^m \lambda_s v\left(x', -\frac{x_n}{s}\right)\left(-\frac{1}{s}\right).$$

Risulta dalla (11.15) che per $x_n = 0$ si ha: $\gamma w = 0$.

Se ora $v \in H^{m-1}(R^n)$, $w \in H_0^m(\pi)$ e l'applicazione $v \to w$ è continua da $\mathcal{D}(R^n)$ in $H_0^{m-1}(\pi)$ munito della topologia di $H^{m-1}(R^n)$ e quindi si può prolungare da $H^{m-1}(R^n)$ in $H_0^{m-1}(\pi)$.

Dalla (11.17), poichè l'integrale $\int_\pi D^{\bar{p}}u\,w(x)\,dx$ può essere considerato come indicante la dualità fra $H^{-(m-1)}(\pi)$ e $H_0^{m-1}(\pi)$ segue che $D^{\bar{p}}Pu \in H^{-(m-1)}(R^n)$ e che la stessa relazione ha luogo per ogni $v \in H^{m-1}(R^n)$.

È facile ora provare che $Pu \in K(R^n)$ e inoltre che è verificata la proposizione 11.16.

Dalla (11.13) e dalla 11.16 risulta allora che l'applicazione $u \to Pu$, definita in $C^\infty(\pi) \cap K(\pi)$ dalla (11.14), si prolunga per continuità in $K(\pi)$, rimanendo continua da $K(\pi)$ a $K(R^n)$ e in particolare $Pu(x) \equiv u(x)$ in π.

Premesso ciò dimostriamo che: $K(R^n) \simeq H^1(R^n)$. Infatti mediante la trasformata di FOURIER si deduce, se $u \in K(R^n)$, che:

$$\hat{u}, \xi_i\hat{u} \in L^2(R^n), \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad \text{e} \quad \frac{\xi_n^m \hat{u}}{(1 + |\xi|)^{m-1}} \in L^2(R^n).$$

Occorre dimostrare che $\xi_n \hat{u} \in L^2(R^2)$. Ciò segue facilmente tenendo conto che per opportune costanti, si ha:

$$|\xi_n| \leq c_1 \frac{|\xi_n|^m}{(1 + |\xi|)^{m-1}} + c_2(1 + |\xi'|)$$

ove

$$|\xi'|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \ldots + \xi_{n-1}^2 .$$

Possiamo allora concludere che se $u \in C^\infty(\overline{\pi}) \cap K(\pi)$ segue $Pu \in H^1(R^n)$.

Il lemma di LIONS segue immediatamente osservando che se $u \in K(\omega)$, φu con $\varphi \in \mathcal{D}(R^n, \omega)$ si può considerare come una funzione di $K(\pi)$ e pertanto $\in K(R^n)$. Ciò implica che $u \in H^1(\sigma_r)$ con $r < R$. c. v. d. ([27])

c) Prima di terminare questo numero osserviamo che i ragionamenti fin qui svolti ci permettono di assicurare che le formule di maggiorazione trovate alla fine del n. 10 si estendono in modo ovvio.

Ci interessa per il seguito segnalare che la formula (10.27) sussiste anche, in virtù dei risultati ottenuti in questo numero, quando $t \equiv (t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n)$ con $|t| \leq m$. Si ha cioè

$$\| \varphi u \|_{2m,\omega} \leq c \,(\| f \|_{0,\omega} + \| u \|_{m,\omega} + ||| g |||) \tag{11.18}$$

ove $||| g |||$ è data dalla (10.28) o dalla (10.30) nelle stesse ipotesi su g ivi fatte e con c indipendente da u.

Si osservi poi che la (10.26) quando sia $\mathcal{V} \equiv H_0^m(\omega)$ vale anche se $s \equiv (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ con $|s| \leq k$.

([27]) È interessante osservare, aprendo una breve parentesi, che il tipo di dimostrazione ora dato permette di risolvere una questione relativa a certi spazi di distribuzioni che si pone abbastanza naturalmente a proposito delle ipotesi F_k) e F_k^*) da noi introdotte nel n. 10 : *dato un insieme Ω aperto e limitato di R^n, ogni distribuzione T tale che $D^p\, T \in H^{-m}(\Omega)$ per $|p| \leq k$, verifica anche la $T \in H^{-m+k}(\Omega)$?* (la reciproca è vera come si è visto nel n. 10.). J. L. Lions ha ottenuto in proposito i seguenti risultati che ci ha gentilmente comunicati : si possono dare esempi di aperti Ω per cui la risposta a tale questione è negativa; essa è però affermativa se la frontiera di Ω è *una varietà di classe $C^{(m+k)}$ cioè $m + k$ — volte differenziabile con continuità.* La dimostrazione di questo risultato si ottiene riportando il problema, mediante una opportuna trasformazione di coordinate, al seguente teorema: Sia π il semispazio di R^n con $x_n > 0$ e sia T una distribuzione su π tale che

$$D_{x'}^s\, T \in H^{-m}(\pi), \; |s| \leq k, \; \frac{\partial^k T}{\partial x_n^k} \in H^{-m}(\pi)$$

allora $T \in H^{-m+k}(\pi)$. E questo teorema si ottiene proprio con una dimostrazione del tipo di quella ora data per il lemma 11.2.

N. 12. *Problemi al contorno « regolarizzabili ».*

Mostreremo ora come possono applicarsi i risultati del n. 11 per ottenere la regolarizzazione delle soluzioni di una vasta classe di problemi fra quelli considerati nei nn. 5-9.

Le notazioni che usiamo qui sono quelle considerate in quei numeri.

Ricordiamo allora il risultato più completo ottenuto dal punto di vista esistenziale come conseguenza diretta della ipotesi di V-ellitticità; precisamente ricordiamo il problema 9.2, risolto col teorema 9.3.

Con le notazioni e i simboli ivi usati si ha:

Esiste, per ogni $f \in Q'$ e $g \in (V(\Gamma))'$, una e una sola soluzione $u \in V\,[H_0^m(\Omega) \subset V \subset H^m(\Omega)]$ della equazione funzionale

$$(12.1) \qquad a(u, v) + \langle Bu, \overline{\gamma v} \rangle = \langle f, \overline{v} \rangle + \langle g, \overline{\gamma v} \rangle \qquad \text{per ogni } v \in V$$

dove $a(u, v)$, Bu soddisfano alle ipotesi fatte nel n. 5 e inoltre la forma $((u, v)) = a(u, v) + \langle Bu, \overline{\gamma v} \rangle$ è V-ellittica, cioè

$$|((v, v))| \geq \alpha \, \| v \|_m^2 \qquad \text{con} \qquad \alpha > 0 \quad \text{per ogni } v \in V.$$

In tutto questo numero, salvo che in f) e g), *faremo per semplicità l'ipotesi che i coefficienti a_{pq} siano indefinitamente derivabili in $\overline{\Omega}$*, anche se detta ipotesi potrebbe essere di volta in volta opportunamente attenuata.

Consideriamo un punto P_0 qualunque di Ω, che potremo senz'altro supporre l'origine delle coordinate, e diciamo $\omega = \sigma_R$ un intorno sferico di P_0 tutto contenuto in Ω; indichiamo con $\mathcal{V}$ il sottospazio di V costituito dalle funzioni che hanno supporto in $\overline{\omega}$; in particolare $\varphi u \in \mathcal{V}$, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$. In virtù della V-ellitticità di $((u, v))$ e del carattere locale della V-ellitticità (v. n. 7), la forma $((u, v))$ verifica l'ipotesi α) del n. 10.

Si ha allora il seguente teorema:

TEOREMA 12.1: *Se $f \in Q'$ e $\langle f, v \rangle$ verifica l'ipotesi F_{k-1} $(k \geq 1)$ in particolare $f_\omega \in H^{-m+k}(\sigma_R))$, la soluzione u di cui al teorema 9.3 è tale che*

$$u \in H^{m+k}(\sigma_r) \qquad\qquad r < R.$$

Esso discende unicamente dal teorema 10.2 in quanto le ipotesi β_{k-1}), γ_{k-1}) sono automaticamente verificate.

Il teorema precedente risolve quindi esaurientemente il problema della regolarizzazione delle soluzioni del problema 9.2 nell'interno di Ω; si ha in particolare che se $f \in C^\infty(\Omega)$ allora anche $u \in C^\infty(\Omega)$.

Di qui si può anche ricavare facilmente (tenuto conto del teorema 7.7 il quale assicura la validità per la forma $((u, v)) = a(u, v) + \lambda(u, v)$, della condizione α) del n. 10, nell'ipotesi che Au sia fortemente ellittico) il seguente

TEOREMA 12.2: *Se Au è fortemente ellittico in Ω e $f \in C^\infty(\Omega)$ ogni soluzione di $Au = f$ appartiene pure a $C^\infty(\Omega')$ non appena essa appartenga ad $H^m(\Omega')$ dove Ω' è un qualunque dominio tale che $\bar{\Omega}' \subset \Omega$.*

Con nomenclatura ormai assai diffusa (v. ad. es. SCHWARTZ [3]) il teorema 12.2 dice che Au è *ipoellittico*, se è fortemente ellittico.

Ricordiamo a questo proposito che il problema della *ipoellitticità* degli operatori differenziali si può porre più in generale nel seguente modo: *Ogni distribuzione $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ soluzione di $Au = f$ in Ω è indefinitamente differenziale, se tale è f?*

Il problema è stato studiato da numerosi Autori e particolarmente in questi anni; si ha in proposito il seguente notevole risultato di cui si conoscono oggi numerose dimostrazioni (v. ad es. quella di SCHWARTZ in [3]): *Ogni operatore ellittico* (nel senso della def. 4.1) *è ipoellittico.*

Ci sono naturalmente operatori ipoellittici che non sono ellittici (ad es. quello del calore); particolarmente notevoli sono i recenti lavori di HÖRMANDER [2], BROWDER [4], MALGRANGE [1] dedicati alla caratterizzazione degli operatori ipoellittici.

Ritorniamo ora al problema della regolarizzazione dei problemi al contorno. Per trattare la regolarizzazione degli stessi problemi « alla frontiera », consideriamo un punto P_0 di Γ ed un intorno opportuno $J(P_0)$ sufficientemente regolare di P_0, tale che $J(P_0) \cap \Omega$ si possa rappresentare mediante funzioni indefinitamente derivabili su una « semisfera » σ'_R. Effettuando allora il cambiamento di variabili X determinato dalle suddette funzioni, il problema (9.2) viene trasformato in un altro analogo.

La « trasformata » della soluzione di 9.2 verificherà allora nell'intorno σ'_R l'equazione « trasformata » della (12.1), che prenderà il posto della (10.14) del n. 10. Ora dai teoremi del n. 7 (carattere locale della V-ellitticità e teor. 7.1) si deduce che l'ipotesi α) sarà verificata in conseguenza della V-ellitticità. Aggiungiamo ora l'ipotesi che la classe $\mathcal{V}$ delle funzioni, trasformate di quelle di V, le quali hanno supporto la cui intersezione col semispazio $x_n > 0$ appartiene a σ'_R, sia del tipo $(\mathcal{N})$.

In tal modo per la regolarizzazione alla frontiera ci si potrà avvalere del teorema 11.2 e si otterrà così il seguente:

TEOREMA 12.3: *Nella ipotesi del teorema 9.3 (cioè $((u, v))$ è V-ellittica; $f \in Q'$ e $g \in (V(\Gamma))')$ e se inoltre, effettuato il cambiamento di variabili locale X di cui sopra sono soddisfatte le ipotesi $\beta_{k-1})$, $\gamma_{k-1})$, $F_{k-1})$ e la classe $\mathcal{V}$ è di tipo $(\mathcal{N})$, allora*

$$u \in H^{m+k}(\sigma'_r) \quad r < R$$

Naturalmente il risultato così enunciato andrebbe precisato, ma non ci sembra il caso di insistere, almeno per ora, ulteriormente in questo senso.

Vogliamo piuttosto segnalare espressamente i risultati che si possono ottenere per i problemi al contorno più significativi già presi in considerazione nei nn. 5-9 per il teorema di esistenza.

a) Problema di DIRICHLET (condizioni al contorno omogenee):

Si ha in proposito (NIRENBERG [2]).

TEOREMA 12.4: *Se Au è «fortemente ellittico»* (v. n. 7) *e se f verifica la condizione*

(12.2) $$D^t f \in H^{-m+1}(\Omega) \quad t \equiv (t_1, \ldots, t_n) \mid t \mid \leq k-1 \,, k \text{ intero} > 0$$

oppure in particolare se

(12.3) $$f \in H^{-m+k}(\Omega)$$

allora per λ sufficientemente grande il problema di DIRICHLET *con condizioni al contorno omogenee per l'equazione:*

$$Au + \lambda u = f$$

ammette una e una sola soluzione u che appartiene ad $H^{m+k}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$.

Se in particolare la f è indefinitamente derivabile in $\overline{\Omega}$ anche u è indefinitamente derivabile in $\overline{\Omega}$.

L'esistenza della soluzione segue dal teorema 7.7, poichè la (12.2) assicura che $f \in H^{-m}(\Omega)$ e quindi basta nel teorema 7.7 prendere $Q \equiv H_0^m(\Omega)$ da cui $Q' \equiv H^{-m}(\Omega)$.

L'appartenenza di u ad $H^{m+k}(\Omega)$ segue allora chiaramente dal teorema 11.2 poichè in questo caso $Bu \equiv 0$, $g \equiv 0$, e la classe $H_0^m(\Omega)$ è ovviamente di tipo $(\mathfrak{N})$.

Conseguenza dei risultati ora stabiliti è la validità della seguente formula:

(12.4) $$\| u \|_{m+k, \Omega} \leq c \; \| f \|_{-m+k, \Omega}$$

con c indipendente da u.

Infatti dalla (10.26) (v. anche osservazione finale del n. 11) si ricava, tenuto conto che $\overline{\Omega}$ è un compatto di R^n, che:

$$\| u \|_{m+k, \Omega} \leq c \left(\| f \|_{-m+k, \Omega} + \| u \|_{m, \Omega} \right)$$

con c indipendente da u.

D'altra parte poichè, nelle nostre ipotesi, $Au + \lambda u$ istituisce un isomorfismo di $H_0^m(\Omega)$ su $H^{-m}(\Omega)$, si ha:

$$\| u \|_{m, \Omega} \leq c \, \| f \|_{-m, \Omega}$$

e quindi la (12.4). Dalla (12.4) può naturalmente anche dedursi la seguente:

$$\| u \|_{m+k,\Omega} \leq c\,(\| Au \|_{-m+k,\Omega} + \| u \|_{0,\Omega}) \tag{12.5}$$

Si osservi, peraltro, che la (12.5) vale anche per l'equazione $Au = f$ purchè $a(u, v)$ sia $H_0^m(\Omega)$-ellittico.

b) Problema di NEUMANN (condizioni al contorno omogenee).

TEOREMA 12.5: *Se Au verifica la condizione algebrica* (7.8) *o le ipotesi del teorema* 7.9 *e se $f \in H^k(\Omega)$, $k \geq 0$, allora per λ sufficientemente grande il problema di* NEUMANN *con condizioni al contorno omogenee per l'equazione:*

$$Au + \lambda u = f$$

ammette una e una sola soluzione u che appartiene ad $H^{k+2m}(\Omega)$.

Anche qui l'esistenza scende dai teoremi 7.9 e 7.8 e l'appartenenza di $u \in H^{k+2m}(\Omega)$ segue dal teorema 11.2 poichè $Bu \equiv 0$, $g \equiv 0$ e la classe $H^m(\Omega)$ è di tipo $(\mathfrak{N})$.

Si osservi però che, in virtù del teorema 9.3 e del solito teorema 11.2, il teorema 12.5 potrebbe estendersi al caso di condizioni al contorno non omogenee: $T(u) = g$. Occorrerà allora fare su g ipotesi che permettano di verificare la $\beta_k)$ del n. 10. Si ha ad es., tenuto conto di quanto detto alla fine dei n. 10 e 11,

TEOREMA 12.6: *Se* $\langle g, \gamma \bar{v} \rangle = \sum_{i=0}^{m-1} \int_\Gamma g_i \overline{\gamma_i v}\, d\sigma$, *dove g_i è una funzione $\in L^2(\Gamma)$ e tale che le sue derivate (rispetto ai parametri che definiscono Γ) fino all'ordine $i + k + 1$ appartengono pure a $L^2(\Gamma)$; se inoltre $f \in H^k(\Omega)$; allora per λ sufficientemente grande il problema di Neumann*

$$Au + \lambda u = f \qquad \text{in} \quad \Omega.$$

$$\mathcal{L}_0 u = g_0, \ldots, \mathcal{L}_{m-1} u = g_{m-1} \qquad su \quad \Gamma$$

dove $\mathcal{L}_0 u, \ldots, \mathcal{L}_{m-1} u$ sono gli operatori che compaiono nella formnla di Green (5.17), *ammette una e una sola soluzione appartenente a $H^{k+2m}(\Omega)$.*

c) Problemi intermedi del 1^0 *tipo.* Anche a questi problemi si possono applicare i procedimenti di regolarizzazione dèi numeri precedenti. È evidente infatti che se lo spazio $\mathcal{V}$ è costituito dalle funzioni di $H^m(\Omega)$ per cui $\gamma_1 v = \gamma_2 v = \ldots = \gamma_k v = 0$, $k \leq m$, esso è di tipo $(\mathfrak{N})$ ove $\Phi \equiv \mathfrak{D}(\omega, R^n)$ Se invece $\mathcal{V}$ è costituito dalle funzioni di $H^m(\Omega)$ per cui $\gamma_{i_1} v = \gamma_{i_2} v = \ldots$

$\ldots = \gamma_{i_k} v = 0$, occorre scegliere Φ di tipo particolare; ma si osservi che assumendo, come di solito si fa, per le $\varphi \in \Phi$ funzioni della sola $|x|$, la proprietà $\varphi v \in \mathcal{V}$ per $v \in \mathcal{V}$ è soddisfatta.

d) Problemi « misti » di Dirichlet-Neumann: Valgono per questi problemi risultati « locali » nell'intorno di ogni punto che non appartenga alla varietà Γ^* di separazione su Γ della porzione di Γ_1 in cui vengono assegnati i « dati di DIRICHLET » (omogenei) da quella Γ_2 in cui vengono assegnati i « dati di NEUMANN ». Ma, a differenza di quanto succede per il problema di DIRICHLET e per quello di NEUMANN la classe $\mathcal{V}$ non è del tipo $(\mathcal{O}\!\mathcal{T})$ nell'intorno dei punti di Γ^* e quindi i procedimenti non sono applicabili. Ma di più, anche facendo uso di altri procedimenti non si potranno ottenere risultati di regolarizzazione del tipo di quelli indicati in *a*) e *b*); in altri termini, l'ipotesi $f \in H^k(\Omega)$ non implica che $u \in H^{k+2m}(\Omega)$. Infatti se ciò fosse vero il teorema di SOBOLEV (cfr. n. 2) implicherebbe, per k sufficientemente grande, che $u \in C^1(\overline{\Omega})$ e questo è, come è noto, assurdo, se f non è di tipo particolare. (cfr. FICHERA [5], LIENARD [1]).

Nel caso particolare $m = 1$, ritorneremo su questo problema alla fine del numero.

e) Aggiunta di operatori frontiera: Uno studio più approfondito andrebbe fatto per chiarire meglio quali ipotesi sull'operatore Bu, che compare nel problema 9.2, possano assicurare previa la trasformazione locale nell'intorno di ogni punto P_0 di Γ di cui si è detto all'inizio, il verificarsi delle condizioni γ_k) del n. 10. È comunque ormai abbastanza semplice, e lasciamo ciò al lettore, vedere come gli ordinari problemi di derivata obliqua regolare per le equazioni del secondo ordine possano essere trattati con questo procedimento; e del resto per le osservazioni fatte al n. 5 questi problemi si possono considerare come problemi di NEUMANN relativi ad una opportuna decomposizione di Au. Si riottengono così risultati del tipo di quelli noti di GIRAUD anche se in ipotesi più onerose sui dati del problema; ad es. *il problema* $-\Delta u + \lambda u = f$ *in* Ω, $\dfrac{du}{d\nu} + \eta \dfrac{du}{d\sigma} = g$ *su* Γ (v. n. 5, *b*)) *ammette per* λ *sufficientemente grande una e una sola soluzione* $u \subset H^{k+2}(\Omega)$, *se* $f \in H^k(\Omega)$, g e η *sono funzioni di* σ *derivabili* $k+1$ *volte e con derivata* $k+1$*-ma* $\in L^2(\Gamma)$.

Per il teorema di SOBOLEV del n. 2 la funzione $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, se $k > \dfrac{n}{2} - 1$.

f) Il procedimento di regolarizzazione esposto, che, come abbiamo visto, si può applicare ad una vasta categoria di problemi, consiste nel dimostrare che la soluzione u appartiene agli spazi $H^k(\Omega)$ con k opportunamente grande, se i dati sono sufficientemente regolari. Tale tipo di regolarizzazione può chiamarsi « regolarizzazione hilbertiana ».

Ma osserviamo che si possono considerare anche altri tipi di regolarizzazione, come ad es. quello più generale consistente nel cercare di dimostrare che la soluzione appartiene a spazi del tipo $H^{k,\alpha}(\Omega)$, se i dati sono regolari.

Questi tipi di regolarizzazione sono legati al noto teorema di CALDERON-ZYGMUND [1] su certi operatori singolari integrali e al teorema di SOBOLEV citato nel n. 2. In questo ordine di idee, sempre in ipotesi di regolarità per i coefficienti e per il dominio Ω, si confronti per la regolarizzazione « all'interno » di Ω BROWDER [2] e NIRENBERG [3]. Risultati alla « frontiera », nel caso del problema di DIRICHLET con condizioni al contorno omogenee sono stati annunciati da BROWDER [3] e KOSHELEV [1]. Nel caso di equazioni del secondo ordine lo stesso problema è stato trattato da GRECO [1] e GAGLIARDO [3] anche con condizioni al contorno non omogenee.

Questi risultati conducono, per il problema di DIRICHLET, in luogo della (12.5), alla limitazione:

$$\| u \|_{H^{m+k,\alpha}(\Omega)} \leq c \{ \| u \|_0 + \| Au \|_{H^{-m+k,\alpha}(\Omega)} \} \tag{12.6}$$

Si osservi che di qui, a causa del teorema citato di SOBOLEV, si può dedurre anche che:

$$\| u \|_{H^{m+h,\nu(\alpha,h)}(\Omega)} \leq c \{ \| u \|_0 + \| Au \|_{H^{-m+k,\alpha}(\Omega)} \} \tag{12.7}$$

ove h assume tutti i valori compresi fra $-m$ e k e $\nu(\alpha, h)$ è una opportuna funzione di α ed h, deducibile dall'applicazione stessa del teorema di SOBOLEV e in particolare tale che $\nu(\alpha, k) = \alpha$.

In particolare, per $k = 0$ e $h = -m$ si ha:

$$\| u \|_{L^{\nu}(\Omega)} \leq c \{ \| u \|_0 + \| Au \|_{H^{-m,\alpha}(\Omega)} \} \tag{12.8}$$

ove $\dfrac{1}{\nu} = \dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{m}{n}$.

Ma non tutti i problemi V-ellittici (V sottospazio chiuso di $H^m(\Omega)$ contenente $H_0^m(\Omega)$) sono regolarizzabili con i procedimenti di questi tipi e ciò sostanzialmente per due motivi: il primo motivo è che la condizione richiesta per $\mathcal{V}$ di essere di tipo $(\mathfrak{N})$ non è soddisfatta (ad es. ciò avviene se facendo $m = 2$ si considera il sottospazio V di $H^2(\Omega)$ tale che $\gamma_0 v + \alpha(x) v = 0$ su Γ, con $\alpha(x)$ non costante; e ciò va detto in generale per tutti i problemi intermedi del secondo tipo).

Il secondo motivo è che il significato stesso di regolarizzazione assunto (e cioè la validità per la u di risultati del tipo di quelli ottenuti nei numeri 10 e 11 o della (12.6)) può non essere il più idoneo (ad es. cfr. i problemi misti di DIRICHLET-NEUMANN oppure problemi in cui i coefficienti a_{pq} non sono sufficientemente regolari).

Agli inconvenienti del primo tipo risponde un procedimento ideato da ARONSZAJN e SMITH in un lavoro non ancora pubblicato (se ne può vedere però l'esposizione fattane da LIONS in [5]); questo procedimento è in sostanza un ulteriore ampliamento di quello da noi esposto nei nn. 10-11, poichè consiste fondamentalmente nel cercare di riportare lo spazio $\mathcal{V}$ ad uno del tipo ($\mathcal{N}$) con l'aggiunta ad ogni v di $\mathcal{V}$ di opportune funzioni compensatrici (in modo che ad es. se $\varphi_{\varrho_h} v$ non appartiene a $\mathcal{V}$ vi appartenga però la funzione $\varphi_{\varrho_h} v - w_h$, dove w_h è la funzione compensatrice).

Noi non svilupperemo però qui questo procedimento. Osserviamo solo che anche con questo metodo non sono state superate le difficoltà del secondo tipo di cui abbiamo detto sopra. Purtroppo poco si conosce finora a proposito di queste, specie per equazioni di ordine superiore al secondo. Ci sembra che si tratti qui di estendere il significato di regolarizzazione, sostituendo alle maggiorazioni finora cercate maggiorazioni del tipo (12.7) *solo per quei valori di h (opportuni) che il problema stesso consente,* e non per *tutti* i valori di $h \leq k$, come è in sostanza nella (12.6).

In questo nuovo ordine di idee sono i recenti risultati di STAMPACCHIA [8] per $m = 1$, ottenuti sfruttando una tecnica introdotta da DE GIORGI [1] nello studio dell'analiticità all'interno delle estremali di integrali multipli; ne daremo ora un cenno. Riferiamoci per semplicità alla equazione ellittica autoaggiunta del secondo ordine nel campo reale; sia allora u una funzione $\widetilde{H}^1(\Omega)$ (sottospazio delle funzioni reali di $H^1(\Omega)$), la quale soddisfi la relazione

$$\int_\Omega \sum_{i.k} a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_k} \, dx + \lambda \int_\Omega uv \, dx = \langle f, v \rangle \tag{12.9}$$

per ogni $v \in V$ [V sottospazio chiuso di $\widetilde{H}^1(\Omega)$ tale che $H_0^1(\Omega) \cap \widetilde{H}^1(\Omega) \subset \subset V \subset \widetilde{H}^1(\Omega)$], $u \in V$.

Questa relazione, come abbiamo visto al n. 5, traduce i problemi al contorno relativi all'equazione: $Au + \lambda u = f$, ove $Au = -\sum \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k}$.

Supponiamo che Ω soddisfi all'« ipotesi di cono » del tipo di quelle considerate da SOBOLEV (cfr. SOBOLEV [2] e GAGLIARDO [2]). Siano a_{ik} funzioni reali misurabili e limitate in Ω, $f \in L^\alpha(\Omega)$ e $\lambda > 0$. Indichiamo con $t_k^+(\tau)$ [$t_k^-(\tau)$] la funzione definita per $(-\infty, +\infty)$ dalle posizioni:

$$t_k^+(\tau) = 0 \quad \text{se } \tau \leq k \quad \text{e} \quad t_k^+(\tau) = \tau - k \quad \text{se } \tau \geq k$$

$$[t_k^-(\tau) = \tau - k \quad \text{se } \tau \leq k \quad \text{e} \quad t_k^-(\tau) = 0 \quad \text{se } \tau \geq k].$$

Indichiamo ora con K^+ [K^-] i valori di $k \in R^1$ per cui $t_k^+(u(x)) \in V$ [$t_k^-(u(x)) \in V$] per ogni $u \in V$.

Si può dimostrare allora che *se per* $k_2 \leq 0 \leq k_1$ *si ha* $(k_1, +\infty) \subset K^+$, $(-\infty, k_2) \subset K^-$ *e* $f \in H^{-1,\alpha}(\Omega)$ *con* $\alpha > n$ *la funzione* $u(x) \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ *è limitata in* $\overline{\Omega}$.

Come conseguenza di questo risultato e di un noto teorema di M. RIESZ, si possono ottenere formule di maggiorazione proprio del tipo (12.7) con $h=0$; si ha ad es., se $V \equiv H_0^1(\Omega) \cap \widetilde{H}^1(\Omega)$, $\lambda > 0$, $\alpha \geq \dfrac{2n}{n+2}$

$$\| u \|_{H^{0,\nu}(\Omega)} \leq c \, \| f \|_{H^{0,\alpha}(\Omega)}$$

dove $\dfrac{1}{\nu} > \dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{2}{n}$; inoltre se $\alpha > n$ si ha:

$$\sup_{\overline{\Omega}} \; | u | \leq c \, \| f \|_{H^{-1,\alpha}(\Omega)} \tag{12.10}$$

Osserviamo che il risultato ora richiamato permette di ottenere un teorema più preciso di quanto non si fosse ottenuto in *d*) per il problema *misto* nel caso di equazione del secondo ordine, in quanto lo spazio V relativo, pur non essendo del tipo $(\mathcal{N})$, soddisfa alla condizione richiesta nelle considerazioni precedenti.

Lo stesso può dirsi per i problemi di trasmissione (n. 7, *d*)) per i quali, data la particolare natura della discontinuità dei coefficienti, si possono ottenere anche ulteriori precisazioni (rinviamo per ciò a STAMPACCHIA [6]).

Ricordiamo anche, sempre per $m = 1$, che nel caso di due sole variabili $n = 2$, già NIRENBERG [1], aveva ottenuto maggiorazioni nel caso di coefficienti soltanto limitati utilizzando tecniche introdotte essenzialmente da C. B. MORREY [2] in questioni di Calcolo delle Variazioni. Sempre per $m = 1$ e $n = 2$ sono da ricordare anche i risultati di BERS e NIREMBERG [1] e [2].

g) Per concludere desideriamo anche ricordare che sempre nel caso delle equazioni del secondo ordine, sono stati sviluppati anche altri tipi di tecniche, allo scopo di ottenere risultati di regolarizzazione, i quali siano il più vicino possibile a quelli della letteratura classica e quindi in un certo senso più fini dei precedenti. Queste tecniche utilizzano in modo essenziale la *soluzione fondamentale* dell'equazione $Au + \lambda u = 0$ e la teoria dei potenziali « generalizzati ». Diamone un breve cenno prendendo in considerazione il problema di NEUMANN per la equazione reale autoaggiunta e precisamente consideriamo l'equazione $(u, v \in \widetilde{H}^1(\Omega))$

$$\int_\Omega \sum_{i,k} a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_k} dx + \lambda \int_\Omega uv \, dx = \int_\Omega fv \, dx + \int_\Gamma a g \gamma_0 v \, d\sigma . \tag{12.11}$$

Nell'ipotesi che $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in L^2(\Gamma)$ e i coefficienti a_{ik} siano sufficientemente regolari in modo che esista una soluzione fondamentale dell'equazione $Au + \lambda u = 0$ in un dominio $\Omega' \supset \overline{\Omega}$ (ciò è certamente vero se gli $a_{ik} \in C^{2,\alpha}(\Omega')$ e $\lambda \geq 0$), dalla (12.11) si ottiene allora integrando per parti, supposto v sufficientemente regolare,

$$\int_\Omega uAv\,dx + \lambda \int_\Omega uv\,dx + \int_\Gamma a\gamma_0 u \frac{\partial v}{\partial \nu^*}\,d\sigma = \int_\Omega fv\,dx + \int_\Gamma ag\,v\,d\sigma$$

e quindi

$$(12.12) \qquad \int_\Gamma a\gamma_0 u(y) \frac{d}{d\nu_y^*} s(x, y)\,d_y\sigma - \int_\Gamma ag(y)\,s(x, y)\,d_y\sigma - \int_\Omega f(y)\,s(x, y)\,dy = 0$$

per ogni $x \in \Omega' - \Omega$; mentre con un ragionamento assai noto si deduce che quasi ovunque per $x \in \Omega$, si ha:

$$(12.13) \qquad u(x) = \int_\Gamma a\gamma_0 u(y) \frac{d}{d\nu_y^*} s(x, y)\,d_y\sigma - \int_\Omega f(y)\,s(x, y)\,dy - \int_\Gamma ag(y)\,s(x, y)\,d\sigma_y.$$

Da tali relazioni sfruttando risultati ormai classici di teoria del potenziale (v. ad es. MIRANDA [3]) si può dedurre, supponendo $f \in L^2(\Omega)$, che $u \in H^2(\omega)$ per ogni dominio ω con $\overline{\omega} \subset \Omega$ e che, per quasi tutti i punti ξ di Γ è

$$\lim_{x \to \xi \text{ (su } \nu_\xi)} \frac{du}{d\nu_\xi^*} = g(\xi)$$

(teorema di *inversione della formula di Green,* v. AMERIO [1]).

Se poi si restringono le ipotesi su f e g, per es. se si suppone che $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $g \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$, si ottiene che $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^{2,\alpha}(\omega)$ per ogni $\overline{\omega} \subset \Omega$ (v. ad es. FICHERA [6]); infatti passando al limite nella (12.13) per $x \to \xi$ si ottiene per quasi tutti gli ξ di Γ

$$\frac{1}{2} u(\xi) = \int_\Gamma a\,\gamma_0\,u(y) \frac{ds(\xi, y)}{d\nu_y^*}\,d_y\sigma - \int_\Gamma ag(y)\,s(\xi, y)\,d_y\sigma - \int_\Omega f(y)\,s(\xi, y)\,dy$$

Poichè per ξ e y su Γ risulta $\dfrac{ds(\xi, y)}{d\nu_y^*} = O\left(\dfrac{1}{|\xi - y|^{n-2}}\right)$, con semplici iterazioni e tenendo conto delle ipotesi fatte su f e g si ha che $\gamma_0 u \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$. La tesi è allora conseguenza di note proprietà di teoria del potenziale (v. ad es. MIRANDA [3]). Si osservi che si è così ottenuto un risultato di tipo classico sul problema di NEUMANN.

Considerazioni analoghe si possono fare anche per il problema misto e per quello di derivata obliqua regolare (v. FICHERA [2], MAGENES [3], [5]) anche se per questi problemi non si ottengono risultati così completi per le difficoltà che intervengono nei punti di separazione su Γ delle condizioni al contorno (problema misto), e nella considerazione di integrali a valor principale (problema di derivata obliqua).

Questo procedimento non è stato finora esteso al caso di equazioni di ordine superiore essendo legato all'esistenza di soluzioni fondamentali e ad una teoria generalizzata del potenziale, di cui si conosce ancora poco (possiamo citare i lavori di AMERIO [2], FICHERA [1], [3], PINI [4] ed uno recente di AGMON [1]). Naturalmente sarebbe assai interessante estendere questo procedimento, così come gli altri procedimenti di cui abbiamo parlato in questo numero e finora legati ad $m = 1$, al caso di equazioni di ordine superiore. E i problemi aperti sono numerosi e assai interessanti.

N. 13. *Analiticità delle soluzioni.*

A questo punto può inserirsi il problema della analiticità delle soluzioni quando i dati siano analitici.

È noto che tale risultato è stato previsto per le equazioni del secondo ordine già fin da HILBERT e va infatti a volte sotto il nome di problema di HILBERT.

L'analiticità all'interno di Ω è stata dimostrata con diversi procedimenti da diversi Autori; solo recentemente però è stato considerato il problema anche sulla frontiera Γ; un lavoro di MORREY e NIRENBERG del 1957 [1] risolve la questione nel caso del problema di DIRICHLET, secondo un ordine di idee vicino a quello esposto nei nn. 10-12.

In questo numero noi vedremo che il metodo di MORREY-NIRENBERG si può applicare, cosa che gli stessi MORREY-NIRENBERG hanno osservato, ad una vasta categoria di problemi al contorno e lo faremo anche nell'ipotesi che i dati al contorno non siano nulli.

a) Esponiamo anzitutto il risultato centrale che serve per l'analiticità sulla frontiera Γ. Fissiamo la nomenclatura e le ipotesi.

Sia $\omega_r = \sigma_r'$ e ricordiamo che π_0 è lo spazio $(x_1, x_2 \ldots x_{n-1}, 0)$, $x' \equiv \equiv (x_1, \ldots, x_{n-1})$, $x \equiv (x', x_n)$, e $D_{x'}^q u$ indica una qualunque derivata fatta rispetto alle variabili $(x_1, \ldots, x_{n-1})$.

Siano poi assegnati in $\overline{\omega}_{R_0}$ (R_0 fissato) l'operatore a coefficienti analitici

$$Au = \sum_{|p| \leq 2m} b_p(x)\, D^p u$$

e in $\partial_1 \omega_{R_0}$ (cfr. n. 10) un certo numero ($\leq 2m$) di operatori di frontiera a coefficienti analitici

$$L_i u = \sum_{|p| \leq 2m-1-i} b_p^{(i)}(x') D^p u \qquad i = 0, \ldots, 2m-1$$

(si osservi che $D^p u$ può essere una qualunque derivata di u anche fatta rispetto ad x_n). L'ipotesi che i coefficienti b_p e $b_p^{(i)}$ siano analitici porta come conseguenza l'esistenza di tre costanti positive R_1, c, c_1, $0 < R_1 < R_0$, $c \geq 2$ tali che

$$(13.1) \qquad \Big(\sum_{|q|=j} |D^q b_p(x)|^2\Big)^{1/2} \leq j!\; c^j c_1$$

per ogni x di $\overline{\omega}_{R_1}$, $j = 0, 1, 2 \ldots$, e

$$(13.2) \qquad \Big(\sum_{|q|=j} |D_{x'}^q b_p^{(i)}(x')|^2\Big)^{1/2} \leq j!\; c^j c_1$$

per ogni x' di $\partial_1 \omega_{R_1}$, $j = 0, 1, \ldots$.

Le funzioni u che considereremo in questo numero, se non sarà diversamente detto, saranno senz'altro supposte $\in C^\infty(\overline{\omega}_{R_0})$.

Sia ora $\varrho(t)$ una ben determinata funzione di t $(-\infty < t < +\infty)$ indefinitamente differenziabile e tale che $\varrho(t) = 1$ per $t \leq 0$ e $\varrho(t) \equiv 0$ per $t \geq 1$; per ogni coppia di numeri r e h con $0 < r < r + h < R_0$ poniamo $\varphi_{r,h}(x) = \varrho\left(\dfrac{|x| - r}{h}\right)$.

Introduciamo allora la seguente *ipotesi fondamentale*:

13.I *Esista una costante c_2 tale che per ogni funzione u e per $0 < r < r + h < R_0$ valga la*

$$(13.3) \qquad d^2_{0,R_0}(\varphi_{r,h} u) \leq c_2 \left\{ \| A(\varphi_{r,h} u)\|^2_{0,\omega_{R_0}} + \sum_{i=0}^{2m-1} \| L_i(\varphi_{r,h} u)\|^2_{i+\frac{1}{2},\pi_0} \right\}$$

dove $d^2_{0,r}(w) = \sum_{|q|=2m} \| D^q w\|^2_{0,\omega_r}$ *e dove si pensi* $L_i(\varphi_{r,h} u)$, *che è a supporto contenuto in* $\partial_1 \omega_{r+h}$, *prolungato in tutto* π_0 *ponendolo* $= 0$ *in* $\pi_0 - \partial_1 \omega_{r+h}$.

Si ha allora il seguente

Teorema 13.1: *Esiste una costante c_3 indipendente da u, r e h tale che per ogni funzione u e per $0 < r < r + h < R_0$, $r > h$ si ha*

$$(13.4) \quad d^2_{0,r}(u) \leq c_3 \left\{ \| \varphi_{r,h} A u \|^2_{0,\omega_{r+h}} + \sum_{i=0}^{2m-1} \| \varphi_{r,h} L_i u \|^2_{i+\frac{1}{2},\pi_0} + \sum_{j=0}^{2m-1} \| u \|^2_{j,\omega_{r+h}} \cdot h^{2j-4m} \right\}.$$

Si osservi intanto che dall'ipotesi 13.I si ha

$$d_{0,r}^2(u) = d_{0,r}^2(\varphi_{r,h}\, u) \leq d_{0,r+h}^2(\varphi_{r,h}\, u) \leq c_2 \left\{ \| A(\varphi_{r,h} u)\|^2_{0,\omega_{r+h}} + \sum_{i=0}^{2m-1} \| L_i(\varphi_{r,h} u)\|^2_{i+\frac{1}{2},\pi_0} \right\}.$$

Ma d'altra parte si ha

$$A(\varphi_{r,h}\, u) = \varphi_{r,h}\, Au + \sum_{1 \leq |q| \leq 2m} D^q \varphi_{r,h}\, A_q\, u$$

dove gli $A_q\, u$ sono opportuni operatori a coefficienti analitici in ω_{R_0} e di ordine $\leq 2m - |q|$; e anche

$$L_i(\varphi_{r,h}\, u) = \varphi_{r,h}\, L_i\, u + \sum_{1 \leq |s| \leq 2m-i-1} D^s \varphi_{r,h}\, L_{i,s}\, u$$

dove, analogamente, gli $L_{i,s}\, u$ sono opportuni operatori a coefficienti analitici in $\partial_1 \omega_{R_0}$ di ordine $\leq 2m - 1 - i - |s|$. D'altra parte è pure in ω_{R_0}, poichè $h < r$, $|D^p \varphi_{r,h}(x)| \leq c' h^{-|p|}$ e

$$\|D^s \varphi_{r,h}\, L_{i,s}\, u\|_{i+\frac{1}{2},\pi_0} \leq c'' \| D^s \varphi_{r,h}\|_{i+1,\omega_{r+h}} \cdot \| u \|_{2m-|s|,\omega_{r+h}}$$

con c' e c'' costanti indipendenti da u, p, r e h.

Sicchè in definitiva si ha la (13.4).

Introduciamo ora le nuove seguenti norme:

$$e_{k,r}(u) = \left(\sum_{|q|=k} \| \varphi_{r,h}\, D^q_{x'}\, u \|^2_{0,\omega_{r+h}} \right)^{1/2}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \text{ con } h = \frac{R-r}{k+1}.$$

$$e_{i,k,r}(u) = \left(\sum_{|q|=k} \| \varphi_{r,h}\, D^q_{x'}\, u \|^2_{i+\frac{1}{2},\pi_0} \right)^{1/2}, \quad \begin{cases} k = 0, 1, 2, \ldots \\ i = 0, 1, \ldots, 2m-1 \end{cases} \text{ con } h = \frac{R-r}{k+1}$$

$$d_{k,r}(u) = \left(\sum_{|q|=2m} \sum_{|p|=k} \| D^q D^p_{x'}\, u \|^2_{0,\omega_r} \right)^{1/2}, \quad k = 0, 1, 2 \ldots$$

$$d_{k,r}(u) = \left(\sum_{|q|=2m+k} \| D^q\, u \|^2_{0,\omega_r} \right)^{1/2}, \quad k = -2m, -2m+1, \ldots, 0$$

$$M_{R,k}(u) = \frac{1}{k!} \sup_{\frac{R}{2} \leq r < R} (R-r)^{2m+k}\, e_{k,r}(u), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$M_{i,R,k}(u) = \frac{1}{k!} \sup_{\frac{R}{2} \leq r < R} (R-r)^{2m+k}\, e_{i,k,r}(u), \qquad \begin{matrix} k = 0, 1, 2, \ldots \\ i = 0, 1, \ldots, 2m-1 \end{matrix}$$

$$N_{R,k}(u) = \frac{1}{[k!]} \sup_{\frac{R}{2} \leq r < R} (R-r)^{2m+k} d_{k,r}(u), \quad k = -2m, -2m+1, \ldots, 0, 1 \ldots$$

dove $[k!] = k!$ se $k \geq 0$ e $= 1$ se $k < 0$.

Osserviamo che si ha facilmente per j, l, k interi ≥ 0

$$(13.5) \qquad \sum_{|q|=j-l} \sum_{|p|=k} |D^q D^p_{x'} u|^2 \leq \begin{cases} \displaystyle\sum_{|q|=j} \sum_{|p|=k-l}{}' |D^q D^p_{x'} u|^2 & \text{per } l \leq k \\ \displaystyle\sum_{|q|=j+k-l} |D^q u|^2 & \text{in ogni caso}. \end{cases}$$

Di qui si ricavano per $k \geq 0$ e $0 \leq j \leq 2m$ le

$$(13.6) \qquad \sum_{|p|=k} d^2_{-j,r}(D^p_{x'} u) \leq d^2_{k-j,\,r}(u).$$

Si hanno inoltre ovviamente le

$$(13.7) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{|p|=k} e^2_{0,r}(D^p_{x'} u) = e^2_{k,r}(u) \\ \displaystyle\sum_{|p|=k} e^2_{i,0,r}(D^p_{x'} u) = e^2_{i,k,r}(u). \end{cases}$$

Con la nomenclatura ora introdotta la (13.4) si può dunque scrivere anche, quando $h = \dfrac{R-r}{k+1}$,

$$(13.8) \qquad d^2_{0,r}(u) \leq c_3 \left\{ e^2_{0,r}(Au) + \sum_{i=0}^{2m-1} e^2_{i,0,r}(L_i u) + \sum_{j=1}^{2m} d^2_{-j,r+h}(u) \cdot h^{-2j} \right\}$$

Si ha allora il seguente

Teorema 13.2: *Esiste un numero $c_4 > 0$ (indipendente da u e da R e da k) tale che per ogni u, per ogni $R < R_1$ e per ogni $k > 0$ sia*

$$(13.9) \qquad N_{R,k}(u) \leq c_4 \left\{ M_{R,k}(A\,u) + \sum_{i=0}^{2m-1} M_{R,k,i}(L_i\,u) + \sum_{j=1}^{2m} N_{R,k-j}(u) + \right.$$
$$\left. + \sum_{\tau=1}^{2m+k} (c\,R)^\tau N_{R,k-\tau}(u) \right\}.$$

Si consideri infatti una qualunque derivata « tangenziale » $D^q_{x'} u$ con $|q| = k$ e si applichi ad essa il teorema 13.1 nella forma (13.8) prendendo

$\frac{R}{2} \leq r < R$ e $h = \frac{R-r}{k+1}$; si ha

$$d^2_{0,r}(D^q_{x'} u) \leq c_3 \left\{ e^2_{0,r}(A\, D^q_{x'} u) + \sum_{i=0}^{2m-1} e^2_{i,0,r}(L_i\, D^q_{x'} u) + \right. \tag{13.10}$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{2m} d^2_{-j,r+h}(D^q_{x'} u) \cdot h^{-2j} \right\}.$$

D'altra parte, tenuto conto della regola di derivazione del prodotto e del fatto che $\binom{q_1}{s_1}\binom{q_2}{s_2}\ldots\binom{q_n}{s_n} \leq \binom{k}{j}$ se i q_i e gli s_i sono interi positivi o nulli tali che

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_n = k, \quad s_1 + s_2 + \ldots + s_n = j,$$

si ha:

$$\sum_{|q|=k} |A\, D^q_{x'} u| \leq \sum_{|q|=k} |D^q_{x'} A\, u| + \sum_{|p| \leq 2m} \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} \sum_{|s|=j} |D^s_{x'} b_p| \sum_{|t|=k-j} |D^t_{x'} D^p u|;$$

$$\sum_{|q|=k} |L_i\, D^q_{x'} u| = \sum_{|q|=k} |D^q_{x'} L_i\, u| + \sum_{|p| \leq 2m-1-i} \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} \sum_{|s|=j} |D^s_{x'} b^{(i)}_p| \sum_{|t|=k-j} |D^t_{x'} D^p$$

Dalla (13.10), sommando per $|q| = k$, tenuto conto delle (13.1), (13.2), (13.6) e (13.7), si ha allora

$$d_{k,r}(u) \leq c_5 \left\{ e_{k,r}(A\, u) + \sum_{i=0}^{2m-1} e_{i,k,r}(L_i\, u) + \sum_{j=1}^{2m} d_{k-j,r+h}(u)\, h^{-j} + \right. \tag{13.11}$$

$$+ \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} j!\, c^j\, c_1 \left(\sum_{|p| \leq 2m} \sum_{|t|=k-j} \| D^t_{x'} D^p u \|^2_{0,\omega_{r+h}} \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{2m-1} \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} j!\, c^j\, c_1 \cdot \left(\sum_{|p| \leq 2m-1-i} \sum_{|t|=k-j} \| \varphi_{r,h} D^t_{x'} D^p u \|^2_{i+\frac{1}{2},\pi_0} \right)^{1/2} \right\}.$$

con c_5 numero positivo indipendente da u, r, h, k, R.

Poichè si ha $\| \varphi_{r,h} v \|_{i+\frac{1}{2},\pi_0} \leq c_6 \| v \|_{i+1,\omega_{r+h}}$ con c_6 costante indipendente da v, l'ultimo termine del secondo membro della (13.11) può essere maggiorato col penultimo, sicchè si ottiene

$$(13.12)\qquad d_{k,r}(u) \leq c_5 \Big\{ e_{k,r}(Au) + \sum_{i=0}^{2m-1} e_{i,k,r}(L_i u) + \sum_{j=1}^{2m} d_{k-j,\, r+h}(u) \cdot h^{-j} +$$
$$+ c_7 \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} j!\, c^j \Big(\sum_{|p| \leq 2m} \ \sum_{|t| = k-j} \| D_{x'}^t D^p u \|^2_{0,\, \omega_{r+h}} \Big)^{1/2} \Big\}$$

con c_7 indipendente da u, r, h, k.

Se ora si applicano le (13.5) all'ultimo termine della (13.12), si ottiene

$$(13.13)\qquad d_{k,r}(u) \leq c_5 \Big\{ e_{k,r}(Au) + \sum_{i=0}^{2m-1} e_{i,\,k,\,r}(L_i u) + \sum_{j=1}^{2m} d_{k-j,\, r+h}(u) \cdot h^{-j} +$$
$$+ c_7 \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{2m} \binom{k}{j} j!\, c^j\, d_{k-j-l,\, r+h}(u) \Big\}.$$

Moltiplichiamo ora ambo i membri della (13.13) per $\dfrac{1}{k!}(R - r)^{2m+k}$, teniamo conto che per come si è scelto h si ha

$$\frac{1}{k!}(R - r)^{2m+k} e_{k,r}(Au) = \frac{(R - (r + h))^{2m+k}}{k!} \frac{(R - r)^{2m+k}}{(R - (r + h))^{2m+k}} e_{k,r}(Au) \leq$$
$$\leq \Big(1 + \frac{1}{k}\Big)^{2m+k} M_{R,k}(Au)$$

e analogamente

$$\frac{1}{k!}(R - r)^{2m+k} e_{i,k,r}(L_i u) \leq \Big(1 + \frac{1}{k}\Big)^{2m+k} M_{i,R,k}(L_i u)$$

$$\frac{1}{k!}(R - r)^{2m+k} j! \binom{k}{j} d_{k-j-l,\, r+h}(u) \leq \frac{[(k-j-l)!]}{(k-j)!} R^{j+h} \Big(1 + \frac{1}{k}\Big)^{2m+k-j-l} N_{R,k-j-l}(u)$$

$$\frac{1}{k!}(R - r)^{2m+k} d_{k-j,\, r+h}(u) \cdot h^{-j} \leq \frac{1}{k!}(k+1)^j [(k-j)!] \Big(1 + \frac{1}{k}\Big)^{2m+k-j} \cdot N_{R,k-j}(u).$$

La (13.13) diventa allora

$$\frac{1}{k!}(R - r)^{2m+k} d_{k,r}(u) \leq c_5 \Big(1 + \frac{1}{k}\Big)^{2m+k} \Big\{ M_{R,k}(Au) + \sum_{i=0}^{2m-1} M_{i,R,k}(L_i u) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{2m} \frac{1}{k!}(k+1)^j \Big(1 + \frac{1}{k}\Big)^{-j} [(k-j)!]\, N_{R,k-j}(u) +$$
$$+ c_7 \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{2m} c^j R^{j+l} \frac{[(k-j-l)!]}{(k-j)!} \Big(1 + \frac{1}{k}\Big)^{-j-l} N_{R,k-j-l}(u) \Big\}.$$

Di qui, tenuto conto anche che $\dfrac{k^j\,[(k-j)\,!]}{k\,!} \leq j^j$ si ha

$$\frac{1}{k\,!}\,(R-r)^{2m+k}\,d_{k,r}(u) \leq c_8 \Big\{ M_{R,k}(A\,u) + \sum_{i=0}^{2m-1} M_{i,R,k}(L_i\,u) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{2m} N_{R,k-j}(u) + \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{2m} (c\,R)^{j+l}\,N_{R,k-j-l}(u) \Big\}$$

con c_8 indipendente da u, r, k, R.

Prendendo l'estremo superiore per $\frac{R}{2} \leq r < R$ e ponendo $j + l = \tau$, tenuto conto che $c \geq 2$, si ottiene allora la (13.9). c. v. d.

Supponiamo ora che fissata $u \in C^\infty(R_0)$ sia $A\,u = f$, $L_i\,u = g_i$ con f e g_i analitici rispettivamente in ω_{r_0} e $\partial_1\,\omega_{R_0}$; potremo allora supporre, modificando eventualmente le costanti c_1, c e R_1 precedenti, che sia

$$\Big(\sum_{|q|=k} |\,D^q f(x)\,|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \leq k\,!\,c^k\,c_1 \qquad \text{per} \quad x \in \overline{\omega}_{R_1} \qquad k = 0\,,1\,,2\,,\ldots$$

$$\Big(\sum_{l=0}^{i+1} \sum_{|q|=k+l} |\,D^q_{x'}\,g_i(x')\,|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \leq k\,!\,c^k\,c_1 \qquad \text{per} \quad x' \in \partial_1\,\omega_{R_1} \qquad k = 0\,,1\,,\ldots$$

(ricordiamo che $(k+1+i)\,! \leq c'\,2^k\,k\,!$ con c' costante indipendente da k, per $0 \leq i \leq 2m-1$).

Si ha allora per $R < R_1$

$$M_{R,k}(f) \leq \frac{1}{k\,!}\,R^{2m+k} \Big(\sum_{|q|=k} \int_{\omega_R} |\,D^q_{x'} f\,|^2\,dx \Big)^{1/2} \leq$$

$$\leq R^{2m+k}\,c^k \cdot R^{\frac{n}{2}}\,\beta_n$$

dove β_n^2 è il volume della sfera unitaria nello spazio a n-dimensioni e analogamente, poichè $\|\,w\,\|_{i+\frac{1}{2},\pi_0} \leq \tilde{c}\,\|\,w\,\|_{i+1,\pi_0}$ (v. ad es. SCHWARTZ [3]) con $\tilde{c}$ costante,

$$M'_{i,R,k}(g_i) \leq \tilde{c}\,\frac{1}{k\,!}\,R^{2m+k} \Big(\sum_{l=0}^{i+1} \sum_{|q|=k+l} \int_{\partial_1\omega_R} |\,D^q_{x'}\,g_i\,|^2\,dx' \Big)^{1/2} \leq$$

$$\leq \tilde{c}\,R^{2m+k}\,c^k\,R^{\frac{n-1}{2}}\,\beta_{n-1}\,.$$

La (13.9) diventa allora per ogni k e $R < R_1$

$$N_{R,k}(u) \leq c_4 \left\{ c_9 (cR)^k + \sum_{j=1}^{2m} N_{R,k-j}(u) + \sum_{\tau=1}^{2m+k} (cR)^\tau N_{R,k-\tau}(u) \right\} \tag{13.14}$$

con c_9 costante opportuna indipendente da R e k. Di qui si può allora ottenere l'esistenza di due costanti M e λ con $\lambda \geq 1$ tali che per $R < R_1$ valgano le

$$N_{R,k}(u) \leq M\lambda^k \qquad k = -2m, -2m+1, \ldots \tag{13.15}$$

Si ponga infatti

$$\lambda = (3c_4 + 1)(cR_1 + 1)$$

e si prenda poi M tale che $M \geq 3\, c_4\, c_9$ e inoltre che la (13.15) valga per $k = -2m, -2m+1, \ldots, 0$.

Allora la (13.15) si dimostra per induzione in virtù delle (13.14); infatti, suppostala vera per valori più piccoli di $k > 0$, si ha per $R < R_1$ dalla (13.14)

$$\frac{N_{R,k}(u)}{\lambda^k} \leq c_4 \left\{ c_9 \frac{(cR_1)^k}{\lambda^k} + \sum_{j=1}^{2m} M\lambda^{-j} + \sum_{\tau=1}^{2m+k} M \left(\frac{cR_1}{\lambda}\right)^\tau \right\} \leq$$
$$\leq \frac{M}{3} + \frac{Mc_4}{\lambda - 1} + \frac{Mc_4}{\dfrac{\lambda}{cR_1} - 1} \leq M .$$

L'analiticità di u segue allora dal seguente

TEOREMA 13.3: *Se $u \in C^\infty(\overline{\omega}_R)$ ed esistono due costanti M e $\lambda \geq 1$ tali che*

$$N_{R,k}(u) \leq M\lambda^k, \quad k = -2m, -2m+1, \ldots \tag{13.16}$$

allora i dati di Cauchy su $\partial_1 \omega_R$, e cioè le derivate $\dfrac{\partial^j u}{\partial x_n^j}$, $j = 0, 1, \ldots, 2m-1$, per $x_n = 0$, sono funzioni analitiche delle variabili $(x_1, \ldots, x_{n-1})$.

Dalle (13.16) e dalla definizione di $N_{R,k}(u)$ si ha facilmente

$$\sum_{|q|=k} \int_{\omega_r} \left| \frac{\partial^j}{\partial x_n^j} D^q_{x'} u \right|^2 dx \leq [M\, k!\, \lambda^k (R-r)^{1-k}]^2$$

$$\left. \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{|q|=k} \int_{\omega_r} \left| \frac{\partial^{j+1}}{\partial x_n^{j+1}} D^q_{x'} u \right|^2 dx \\ \displaystyle\sum_{|q|=k+1} \int_{\omega_r} \left| \frac{\partial^j}{\partial x_n^j} D^q_{x'} u \right|^2 dx \end{array} \right\} \leq [M\, k!\, \lambda^k (R-r)^{-k}]^2$$

per $\dfrac{R}{2} \leq r < R$ e $0 \leq j \leq 2m-1$.

Tenendo conto della relazione

$$\int_{\partial_1 \omega_r} |v|^2 \, dx' \leq c_{10} \left[\frac{1}{r} \int_{\omega_r} |v|^2 \, dx + r \int_{\omega_r} |\operatorname{grad} v|^2 \, dx \right]$$

si ha allora

$$\left(\sum_{|q|=k} \int_{\partial_1 \omega_r} \left| \frac{\partial^j}{\partial x_n^j} D_{x'}^q u \right|^2 dx' \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\overline{M} \, \overline{\lambda}^k \, k!}{(R-r)^k} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

per $\frac{R}{2} \leq r < R$ e dove $\overline{M}$ e $\overline{\lambda}$ sono opportune costanti con $\lambda \geq 1$.

Non è allora difficile dimostrare (v. ad es. MORREY-NIRENBERG [1] Lemma 2.3), tenuto conto del teorema di SOBOLEV richiamato nel n. 2, che si ha

$$\left(\sum_{|q|=k} \left| D_{x'}^q \frac{\partial^j u}{\partial x_n^j} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq c_{11} \frac{\overline{M} \, \overline{\lambda}^{k + \left[\frac{n}{2}\right] + 1} \, 2^k k!}{(R-r)^{\left[\frac{n}{2}\right] + 1 + k}} \qquad \begin{aligned} k &= 0, 1, 2, \ldots \\ j &= 0, 1, \ldots, 2m-1 \end{aligned}$$

per $x' \in \partial_1 \omega_R$, $|x'| \geq r$, $\frac{R}{2} \leq r < R$; da cui appunto l'analiticità di $\frac{\partial^j u}{\partial x_n^j}$ in un intorno dell'origine in $\partial_1 \omega_R$.

L'analiticità di u in un intorno dell'origine in ω_R è allora conseguenza di un ben noto risultato sull'analiticità delle soluzioni del problema di CAUCHY (v. ad es. JOHN [1]). Possiamo dunque concludere col

TEOREMA 13.4: *Se i coefficienti b_p, $b_p^{(i)}$ e i dati f e g_i sono analitici e se vale l'ipotesi* 13.I, *allora ogni soluzione del problema*

$$Au = f, \qquad L_i u = g_i$$

che sia di classe $C^\infty(\omega_{R_0})$, è analitica in un intorno dell'origine.

Si osservi però che si potrebbe anche, in modo analogo a quanto fatto da MORREY-NIRENBERG per il problema di DIRICHLET, dimostrare direttamente con ragionamenti simili a quelli ora fatti, l'analiticità di u, senza far ricorso al suddetto risultato relativo al problema di CAUCHY.

b) Il risultato ora ottenuto ci servirà in *c*) per dimostrare l'analiticità sulla frontiera Γ delle soluzioni dei problemi al contorno. Il risultato corrispondente per l'analiticità nell'interno di Ω si può ora ottenere con gli stessi procedimenti usati in *a*). Si supporrà questa volta che $\omega_r = \sigma_r$ e all'ipotesi 13.I si sostituirà la

13.II: *Esista una costante* c_2 *tale che per ogni funzione* $u \in C^\infty(\overline{\omega}_{R_0})$ *e ogni* r, h, *con* $0 < r < r + h < R_0$ *valga la*

$$d^2_{0,R_0}(\varphi_{r,h}\, u) \leq c_2 \| A(\varphi_{r,h} u) \|^2_{0,\omega_{R_0}}. \tag{13.17}$$

In questa ipotesi si ha allora che *se* $u \in C^\infty(\omega_{R_0})$, $Au = f$, *e i coefficienti* b_p *e* f *sono analitici in* ω_{R_0}, *allora* u *è analitica in tutto un intorno opportuno dell'origine.*

Il procedimento è del tutto analogo a quello eseguito in *a*), salvo che questa volta si considereranno sempre tutte le derivate $D^p u$ anzichè solo quelle tangenziali $D^p_{x'} u$, estendendo con ciò le definizioni di $d_{k,r}(u)$, $N_{R,k}(u), \ldots$; le stesse dimostrazioni si semplificano per l'assenza di operatori di frontiera e dalla relazione analoga alla (13.16) si può direttamente ricavare l'analiticità di u, con i procedimenti adoperati per il teorema 13.3, senza fare ricorso al risultato sulla analiticità della soluzione del problema di Cauchy. Non ci sembra dunque il caso di rifare qui tutte le dimostrazioni (per i dettagli si può vedere Morrey-Nirenberg [1, n. 5]).

c) Passiamo invece all'applicazione ai problemi al contorno per le equazioni ellittiche.

Osserviamo subito che i *risultati ottenuti in a*) *e b*) *sono conseguenza solamente delle ipotesi* 13.I, e 13.II; non solo, ma dalle stesse dimostrazioni fatte in *a*) e *b*) risulta chiaro che si sarebbe potuto supporre verificate le 13.I, e 13.II per funzioni di $C^{2m}(\overline{\omega}_{R_0})$ anzichè di $C^\infty(\overline{\omega}_{R_0})$. Si ha dunque che i risultati ottenuti saranno applicabili a tutti quei problemi al contorno per i quali saranno valide le 13.I e 13.II per funzioni $u \in C^{2m}(\overline{\omega}_{R_0})$.

Apriamo qui allora una parentesi. Si pone evidentemente a questo punto il problema: *per quali operatori* Au e $L_i u$ *saranno valide le* 13.I *e* 13.II *per ogni* $u \in C^{2m}(\overline{\omega}_{R_0})$? Ebbene si ritrova qui in sostanza un problema *di coercività secondo* Aronszajn di certe forme quadratiche. Si consideri infatti nella classe W delle w di $C^{2m}(\overline{\omega}_{R_0})$ e nulle identicamente in un intorno di $\partial_2 \dot{\omega}_{R_0}$, la forma quadratica

$$\tilde{a}(w, w) = \| Aw \|^2_{0,\omega_{R_0}} + \sum_{i=0}^{2m-1} \| L_i w \|^2_{i+\frac{1}{2}, \pi_0}.$$

La 13.I *equivale allora alla coercività su* W *di* $\tilde{a}(w, w)$, *cioè al fatto che esiste un* λ_0 *tale che*

$$\tilde{a}(w, w) + \lambda_0 \| w \|^2_{0,\omega_{R_0}} \geq \alpha \| w \|^2_{2m,\omega_{R_0}} \qquad \alpha > 0 .$$

per ogni $w \in W$.

Il problema è dunque il seguente: *in quali ipotesi su* A *e gli* L_i, $\tilde{a}(w, w)$ *è coerciva su* W*?*

Se poi si volesse la 13.I solo per le u tali che $L_i(\varphi_{r,h} u) = 0$ su $\partial_1 \omega_{R_0}$, allora si avrebbe in sostanza da dimostrare la coercività della forma $\tilde{a}(w, w) = \| Aw \|^2_{0,\omega_{R_0}}$ sulla sottoclasse W^* di W, tale che $L_i w = 0$ su $\partial_1 \omega_{R_0}$.

Ed in questo senso possono essere utilizzati i risultati già citati di ARONSZAJN [2] e di SCHECHTER [2], [3]; il problema è però nella sua generalità ancora aperto ([28]), così come in sostanza si è visto nel n. 7 circa il problema della V-ellitticità, che è ad esso strettamente connesso (in realtà si tratta proprio di due aspetti dello stesso problema, quello messo in luce da ARONSZAJN della coercività di certe forme quadratiche).

Chiudiamo comunque ora la parentesi e ritorniamo ai nostri problemi al contorno. Nei nn. 10-12 abbiamo già messo in evidenza, per una vasta classe di problemi, maggiorazioni quali la (13.3) e la (13.17). Anzitutto si ha

TEOREMA 13.5: ***Qualunque sia il problema al contorno, se esso è*** V***-ellittico, la soluzione trovata col teorema 9.3 è analitica in*** Ω ***ogni qualvolta i coefficienti*** a_{pq} ***e il termine noto*** f ***siano analitici in*** Ω.

Infatti dall'ipotesi di V-ellitticità, tenuto conto del suo carattere locale (v. n. 7 *a*)), segue che il problema di DIRICHLET per ogni sfera ω_{R_0} interna ad Ω è $H_0^m(\omega_{R_0})$-ellittico. Di qui, osservando inoltre che, fissato $u \in C^\infty(\omega_{R_0})$, la funzione $w = \varphi_{r,h} u$ risolve il problema di DIRICHLET su ω_{R_0} per l'equazione $Aw = A(\varphi_{r,h} u)$, si deduce, scrivendo per w la (12.4) per $k = m$, l'ipotesi 13.II e quindi l'analiticità della u.

Questo teorema esaurisce dunque il problema dell'analiticità in Ω delle soluzioni dei problemi al contorno da noi considerati.

Vale la pena però di aggiungere qualche ulteriore osservazione *sul problema dell'analiticità delle soluzioni delle equazioni ellittiche*, indipendentemente dalle considerazioni di condizioni al contorno. Il problema è infatti classico e numerosi sono gli Autori che se ne sono interessati; esso può formularsi nella sua massima generalità come segue:

Dato nell'insieme aperto Ω *un operatore* Au *differenziale lineare ed ellittico a coefficienti analitici in* Ω, *dimostrare che ogni soluzione nel senso delle distribuzioni dell'equazione* $Au = f$ *è analitica in* Ω, *se* f *è analitica in* Ω.

([28]) Si veda in proposito il recentissimo lavoro di *Agmon* [2] citato nella nota ([23]).

Tenuto conto delle considerazioni fatte nel n. 7 noi possiamo ad es. affermare che la *ellitticità forte di Au è sufficiente perchè ogni soluzione di $Au = f$ che appartenga ad $H^m(\Omega)$ sia analitica in Ω*. Il problema però ha, come è noto, risposta affermativa anche *se Au è solo ellittico* (nel senso del n. 4) e *u è una distribuzione di $\mathcal{D}'(\Omega)$*.

Numerose sono ora le dimostrazioni di questo notevole risultato; (per le indicazioni bibliografiche cfr. JOHN [3]). Si osservi che in virtù del risultato richiamato nel n. 12 sulla ipoellitticità degli operatori ellittici, e per quanto si è detto, basterà in sostanza dimostrare che se l'operatore è ellittico vale la ipotesi 13.II per $u \in C^\infty(\overline{\omega}_{R_0})$; il che si può abbastanza facilmente fare mediante l'uso della *trasformata di* FOURIER (si veda ad es. il n. 5 di MORREY-NIRENBERG [1]).

Ritorniamo ora ai problemi al contorno e all'analiticità sulla frontiera. Non è difficile collegare la maggiorazione (13.3) con la (11.18) in modo da ottenere una vasta classe di problemi al contorno per i quali può dedursi l'analiticità della soluzione anche su Γ, in dipendenza del fatto che i dati siano analitici (e naturalmente fra i dati va messo anche il dominio Ω la cui frontiera Γ dovrà supporsi analitica). Ci limiteremo qui a ricordarne alcuni fra i più noti

PROBLEMA DI DIRICHLET (con condizioni omogenee al contorno): si supponga allora la forma $a(u, v)$ associata ad Au $H_0^m(\Omega)$-ellittica; le condizioni al contorno si riducono qui alle $\gamma_i u = 0$ $(i = 0, \ldots, m-1)$. Se $\omega_{R_0} = \sigma'_{R_0}$ e, previa la trasformazione di coordinate X di cui al n. 12 (si supporrà inoltre che le funzioni che determinano X siano analitiche), $u \in C^{2m}(\omega_{R_0})$ e $\gamma_i u = 0$ $(i = 0, \ldots, m-1)$ su $\partial_1 \omega_{R_0}$, la funzione $w = \varphi_{r,h} u$ risolve in ω_{R_0} il problema di DIRICHLET per l'equazione $Aw = A(\varphi_{r,h} u)$. A causa del carattere locale della V-ellitticità e osservando che il teorema 6.2 vale anche nel caso di domini quali ω_{R_0} (v. n. 6 *c*)) si deduce: $\| \varphi_{r,h} u \|_{m,\omega_{R_0}} \leq$ $\leq c \| A(\varphi_{r,h} u) \|_{0,\omega_{R_0}}$ (c indipendente da r, h, u). Di qui, applicando la (11.18) alla funzione $\varphi_{r,h} u$, considerata in Ω, e prendendo $\omega = \sigma'_{R_1}$ con $R_1 > R_0$ e $\varphi \equiv 1$ in ω_{R_0}, $|\varphi| \leq 1$ in ω, si deduce

$$\| \varphi_{r,h} u \|_{2m,\omega_{R_0}} \leq \| \varphi\varphi_{r,h} u \|_{2m,\omega} \leq c \| A(\varphi_{r,h} u) \|_{0,\omega} = c \| A(\varphi_{r,h} u) \|_{\omega_{R_0}}$$

(c indipendente da r, h, u); da cui la (13.3) e quindi *l'analiticità in $\overline{\Omega}$ della soluzione del problema di* DIRICHLET.

PROBLEMA DI NEUMANN: anche questo problema rientra nella nostra trattazione; ricordiamo infatti che l'equazione traducente tale problema

$$a(u, v) = \langle f, \overline{v} \rangle + \langle g, \gamma \overline{v} \rangle \qquad \text{per} \quad v \in H^m(\Omega)$$

equivale formalmente al problema

$$Au = f \quad \text{in } \Omega , \qquad L_i u = g_i , \qquad i = 0 , \ldots , m-1 \qquad \text{su } \Gamma$$

dove $L_i u = \mathcal{L}_i u$ e gli $\mathcal{L}_i u$ sono esattamente quelli che compaiono nella formula di GREEN (15.17) del n. 5 *b*). Da quanto detto nei nn. 11, 12 tutte le ipotesi necessarie alla trattazione sono verificate quando sia supposta la $H^m(\Omega)$-ellitticità di $a(u, v)$. Anche qui si ragiona in modo analogo a quanto fatto per il problema di DIRICHLET. Si applica la (11.18) alla funzione $\varphi_{r,h} u$, con $\omega = \sigma'_{R_1}$, e si elimina poi il termine $\| \varphi_{r,h} u \|_{m,\omega}$ osservando che la funzione $w = \varphi_{r,h} u$ è soluzione (unica) in ω_{R_0} del problema misto di DIRICHLET-NEUMANN: $Aw = A(\varphi_{r,h} u)$ in ω_{R_0}, $\gamma_i w = 0$ $(i = 0 , \ldots , m-1)$, su $\partial_2 \omega_{R_0}$, $\mathcal{L}_i w = \mathcal{L}_i (\varphi_{r,h} u)$ $(i = 0 , \ldots , m-1)$ su $\partial_1 \omega_{R_0}$ (gli operatori $\mathcal{L}_i w$ sono quelli che compaiono nella (5.17) applicata a ω_{R_0}), per il quale vale ancora il teorema 6.2, a causa della proprietà locale della V-ellitticità, e quindi risulta

$$\| \varphi_{r,h} u \|_{m,\omega_{R_0}} \leq c \left\{ \| A(\varphi_{r,h} u) \|_{0,\omega_{R_0}} + \sum_{i=0}^{m-1} \| \mathcal{L}_i(\varphi_{r,h} u) \|_{i+\frac{1}{2}, \pi_0} \right\}$$

con c indipendente da r, h, u. *Dunque per il problema di* NEUMANN *con condizioni al contorno anche non omogenee, vale il teorema della analiticità della soluzione in* $\overline{\Omega}$.

Considerazioni analoghe valgono per i *problemi intermedi* del I tipo così come sono stati da noi trattati e risolti nel n. 9 (si osservi che anche in questo caso $\varphi_{r,h} \in \Phi$) e precisamente per i problemi

$$\begin{aligned} &Au = f \quad \text{in } \Omega \\ &\gamma_{i_1} u = 0 , \ldots , \gamma_{i_k} u = 0 \qquad 0 \leq i_2 < i_2 \ldots < i_k \leq m-1 \quad \text{su } I \\ &\mathcal{L}_j u = g_j \quad \text{su } \Gamma \end{aligned}$$

dove j percorre i valori tra 0 ed $m-1$ diversi da $i_1, i_2 \ldots i_k$ e $\mathcal{L}_i u$ è l'operatore che compare nella formula di GREEN (5.17). Per esso vale dunque il teorema dell'analiticità della soluzione.

Ma anche *problemi intermedi del secondo tipo* possono rientrare nella nostra trattazione; e precisamente i problemi del tipo, usando i simboli introdotti nel n. 5, *d*) e l'impostazione del n. 9,

$$Au = f \quad \text{in } \Omega ; \qquad \gamma_{j_s} u - \sum_{h=1}^{m-k} \beta_{s,h} \gamma_{i_h} u = 0 \qquad s = 1 , \ldots , k \quad \text{su } \Gamma$$

$$L_{i_h} u = g_{i_h} \qquad h = 1 , \ldots , m-k \quad \text{su } \Gamma .$$

Naturalmente occorrerà anzitutto che la classe V che li determina sia, previa la trasformazione X di cui nel n. 12, del tipo $(\mathcal{N})$, per poter applicare i procedimenti dei nn. 10-12; quando ciò avvenga e inoltre la classe Φ contenga le funzioni $\varphi_{r,h}$, l'ipotesi 13.I è ancora verificata in virtù delle (11.18).

E infine il risultato di a) si può applicare anche ai problemi di tipo f) e g) del n. 5 (problemi di derivata obliqua) purchè essi siano V-ellittici e siano verificate le condizioni di applicabilità dei procedimenti dei nn. 10-12.

CAPITOLO IV.

ALTRE IMPOSTAZIONI DEI PROBLEMI AL CONTORNO

14. — *Metodi funzionali a integrale di Dirichlet anche non finito.*

a) I procedimenti fin qui seguiti, ad eccezione in parte di quanto detto nel numero 9, hanno condotto a soluzioni $u \in H^m(\Omega)$; inoltre abbiamo messo in rilievo nel n. 9 le difficoltà che si incontrano per lo studio delle condizioni al contorno non omogenee. Vogliamo ora sviluppare altre teorie che si propongono di trattare i problemi in altri spazi in condizioni di massima generalità anche per i dati al contorno. Questi procedimenti, non necessariamente legati alla ellitticità del problema, consistono essenzialmente nel dare una opportuna interpretazione (si potrebbe dire « per dualità) della relazione funzionale (3.1).

L'idea risale sostanzialmente a SOBOLEV-VISHIK e a FICHERA ed è stata sviluppata, sia pure in forma e casi diversi, in SOBOLEV-VISHIK [1], FICHERA [8] e LIONS [4]. Noi qui la esporremo in forma assai generale seguendo soprattutto il lavoro [4] di LIONS.

Riprendiamo in considerazione il problema 5.1 e il problema aggiunto di 5.1, cui abbiamo accennato nel n. 8:

$$A^* w = f, w \in N^* \tag{14.1}$$

Supponiamo che i coefficienti $a_{pq}(x)$ siano la restrizione a Ω di certe funzioni $\mathcal{A}_{pq}(x)$ indefinitamente differenziabili in R^n e limitate con tutte le loro derivate e siano

$$\mathcal{A}\, u = \sum_{|p|,|q|\leq m} (-1)^{|p|} D^p (\mathcal{A}_{pq}(x)\, D^q u)$$

$$\mathcal{A}^* w = \sum_{|p|,|q|\leq m} (-1)^{|p|} D^p (\overline{\mathcal{A}}_{pq} D^q w)$$

Indipendentemente da ogni ipotesi di ellitticità, supponiamo che in corrispondenza dei numeri μ e $\nu > 1$, h e k interi ≥ 0, sia verificata l'ipotesi:

14. I: *A^* è un isomorfismo di $N^* \cap H^{h,\nu}(\Omega)$ su $H^{k,\mu}(\Omega)$.*

L'ipotesi 14. I, se si munisce $N^* \cap H^{h,\nu}(\Omega)$, come d'abitudine, della norma somma delle norme in N^* e in $H^{h,\nu}(\Omega)$, equivale anche a dire che:

α) *esiste una costante c tale che per ogni $w \in N^* \cap H^{h,\nu}(\Omega)$ si ha*

$$\| w \|_{H^{h,\nu}(\Omega)} + \| w \|_{N^*} \leq c\, A^* w \|_{H^{k,\mu}(\Omega)}$$

β) *$A^* w$ esaurisce $H^{k,\mu}(\Omega)$ al variare di w in $N^* \cap H^{h,\nu}(\Omega)$*

Ebbene si ha allora il seguente:

TEOREMA 14.1: *Nella ipotesi* 14. I *per ogni distribuzione $S \in H_{\overline{\Omega}}^{-h,\nu'}$* (cfr. n. 2 *d*)) *esiste una e una sola distribuzione $\mathcal{U} \in H_{\overline{\Omega}}^{-k,\mu'}$ tale che*

$$\langle \mathcal{A}\, \mathcal{U}, \overline{v} \rangle = \langle S, \overline{v} \rangle \tag{14.2}$$

per ogni $v \in H^{h,\nu}(R^n)$ e tale che $v_\Omega \in N^*$. $\left(\dfrac{1}{\nu} + \dfrac{1}{\nu'} = 1 \,;\; \dfrac{1}{\mu} + \dfrac{1}{\mu'} = 1\right)$

La dimostrazione di questo teorema si può far discendere rapidamente dal teorema 3.1.

Ricordato anzitutto (v. n. 2, teorema 2.3) che $\omega\, S \in (H^{h,\nu}(\Omega))'$, consideriamo l'equazione funzionale, al variare di w in $H^{h,\nu}(\Omega) \cap N^*$,

$$\langle T, \overline{A^* w} \rangle = \langle \omega\, S, \overline{w} \rangle \tag{14.3}$$

nell'incognita T elemento di $(H^{k,\mu}(\Omega))'$

Posto $\mathcal{B}_1 = H^{\nu,h}(\Omega)$ $\quad \mathcal{B}_2 = H^{k,\mu}(\Omega)$

$$\mathcal{V} = H^{h,\nu}(\Omega) \cap N^*, \quad M_1(v) = \overline{v}, \quad M_2(v) = \overline{A^* v},$$

in virtù delle α) e β) sopra ricordate, il teorema 3.1 ci assicura l'esistenza e l'unicità della T soluzione di (14.3).

Posto allora (v. n. 1 teor. 2.3) $\mathcal{U} = \pi\, T$ si ha per ogni $v \in H^{h,\nu}(R^n)$ e tale che $v_\Omega \in N^*$

$$\langle T, \overline{A^* v_\Omega} \rangle = \langle T, \overline{(A^* v)_\Omega} \rangle = \langle \mathcal{U}, \overline{A^* v} \rangle = \langle \mathcal{A}\, \mathcal{U}, \overline{v} \rangle$$

D'altra parte

$$\langle \omega S , \overline{v_\Omega} \rangle = \langle S , \vartheta (\overline{v_\Omega}) \rangle = \langle S , \overline{v} \rangle$$

e dunque la (14.3) scritta per $w = v_\Omega$ dà proprio la (14.2), anzi, per lo stesso ragionamento fatto in senso inverso, si ha che (14.2) e (14.3) sono equivalenti. Dunque il teorema è dimostrato.

Vediamo ora come l'equazione (14.2) traduce il problema al contorno per l'operatore A.

Si tratta precisamente di *separare* in (14.2) quella parte che generalizza l'abituale significato dell'equazione $A u = f$ (f dato in Ω) da quella che generalizza invece le condizioni al contorno.

Ricordiamo che si suole indicare con T_Ω la restrizione ad Ω di una distribuzione qualunque T su R^n; T_Ω è allora un elemento di $\mathcal{D}'(\Omega)$, di più se $T \in H^{-k,\alpha}(R^n)$, $T_\Omega \in H^{-k,\alpha}(\Omega)$, ($k$ intero ≥ 0, $\alpha > 1$).

Osserviamo ancora che se K è un compatto regolare contenuto in Ω e v una qualunque funzione di $H^{k,\alpha}(R^n)$ non è difficile decomporre v nella somma di due funzioni $v^{(1)}$ e $v^{(2)}$, $v = v^{(1)} + v^{(2)}$, dove $v^{(1)}$ ha supporto contenuto in Ω e $v^{(2)}$ ha supporto contenuto in $\complement(K)$ (complementare di K).

Ciò premesso è immediato ricavare dalla (14.2) che la soluzione $\mathcal{U}$ gode delle seguenti proprietà:

1⁰) « *verifica l'equazione prefissata in* Ω » *e precisamente*

$$A\, \mathcal{U}_\Omega = S_\Omega$$

nel senso delle distribuzioni in Ω, *cioé*

$$\langle \mathcal{U}_\Omega , A^* \varphi \rangle = \langle S_\Omega , \varphi \rangle \qquad \textit{per ogni} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

2⁰) « *assume i valori prefissati su* Γ » *nel senso che per ogni* v *fissata di* $H^{h,\nu}(R^n)$ *e tale che* $v_\Omega \in N^*$ *si ha*:

$$\lim_{K \to \Omega} \{ \langle (\mathcal{A}\, \mathcal{U})_{\complement(K)} , \overline{v^{(2)}} \rangle - \langle S_{\complement(K)} , \overline{v^{(2)}} \rangle \} = 0$$

o anche

$$\lim_{K \to \Omega} \{ \langle \mathcal{U}_{\complement(K)} , \overline{A^* v^{(2)}} \rangle - \langle S_{\complement(K)} , \overline{v^{(2)}} \rangle \} = 0 .$$

La condizione 2⁰) potrà caso per caso essere interpretata in modo anche più preciso e concreto.

Il teorema 14.1 si basa essenzialmente sulla ipotesi 14.I e sul teorema di isomorfismo 2.3. Si comprende quindi come il procedimento adoperato possa applicarsi anche in altri casi, sostituendo gli spazi del tipo $H^{k,\alpha}(\Omega)$ con altri spazi per i quali si possono stabilire ipotesi quali la 14.1 e teoremi di isomorfismo quali il teor. 2. 3.

In questo senso si possono adoperare anche gli spazi $C^k(\Omega)$ e i loro duali e si ottiene allora con dimostrazione analoga a quella del teor. 14.1, sfruttando il teor. 2.4. :

TEOREMA 14.2: *Se per k e h interi ≥ 0 A^* è un isomorfismo di $N^* \cap C^h(\bar{\Omega})$ su $C^k(\bar{\Omega})$, allora per ogni S di $\mathfrak{D}_{\bar{\Omega}}^{-h}$ esiste una e una sola distribuzione $\mathcal{U}$ in $\mathfrak{D}_{\bar{\Omega}}^{-k}$ tale che*

$$\langle \mathcal{A}\,\mathcal{U}, \bar{v} \rangle = \langle S, \bar{v} \rangle \quad \textit{per ogni} \quad v \in \mathfrak{D}^h(R^n)$$

e tale che $v_\Omega \in N^*$.

Si comprende anche che negli spazi $C^k(\bar{\Omega})$ non occorre partire dal problema 5.1 così come è stato impostato nel n. 5; l'essenziale è poter dare un significato preciso, fissata la decomposizione di $A\,w$ (v. n. 4) in operatori elementari, al problena omogeneo aggiunto :

$$A^*\,w = f \quad \text{in } \Omega \qquad \text{e} \qquad L^*\,w = 0 \quad \text{su } \Gamma$$

in modo che A^* sia un isomorfismo del sottospazio di $C^h(\bar{\Omega})$ verificante la $L^*(w) = 0$, su $C^k(\bar{\Omega})$.

E interessante sarebbe pure applicare il procedimento sostituendo agli spazi $H^{k,\alpha}(\Omega)$ e $C^k(\bar{\Omega})$ gli spazi $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Non insistiamo ulteriormente, in quanto ci sembra di aver sufficientemente chiarito l'idea informatrice di questo metodo.

Vogliamo solamente osservare che proprio in virtù del teorema 3.1 nei risultati ora visti si può anche *separare il teorema di esistenza da quello di unicità*; ad esempio nel teorema 14.1 la sola ipotesi α) assicura l'esistenza di almeno una soluzione di (14.2); la β) assicura invece l'unicità.

b) Abbiamo già detto come il metodo ora esposto non sia legato alla ellitticità dell'operatore $A\,u$, ma esclusivamente al verificarsi di ipotesi quali la 14.I e quella del teor. 14.2.

E in questo senso si può porre in generale il problema delle determinazioni di condizioni algebriche sugli operatori $A\,u$ e $L\,u$ che assicurino la validità di tale ipotesi.

In questo più generale problema rientra ad es. quello della coercività di certe forme quadratiche secondo ARONSZAJN (v. n. 7 e n. 13). In ogni caso è evidente che i risultati ottenuti nei capitoli II e III attraverso i metodi ad integrale di DIRICHLET finito si possono utilizzare senz'altro per applicare il metodo ora esposto ai problemi ellittici.

Gli stessi teoremi di esistenza per il problema 5.1 *e in particolare il teorema* 6.2 *possono evidentemente essere interpretati come condizioni* 14.I *e adoperati per applicare il teorema* 14.1. *Ma sono soprattutto i risultati di regolarizzazione dei* nn. 10-13 *e in particolare i teoremi del* n. 12 *che danno luogo alle applicazioni più significative.*

Ad esempio nel caso del problema di DIRICHLET il teorema 12.4 assicura la validità della 14.I. con $h = k + 2m$, $\nu = \mu = 2$, e si ottiene così applicando il teorema 14.1 il

TEOREMA 14.3: *Nell'ipotesi che Au sia «fortemente ellittico» e λ sufficientemente grande per ogni distribuzione $S \in H_{\overline{\Omega}}^{-k+2m}$, $(k \geq 0)$, esiste una e una sola $\mathcal{U} \in H_{\overline{\Omega}}^{-k}$ tale che*

$$\langle \mathcal{A}\,\mathcal{U} + \lambda\,\mathcal{U}, \overline{v} \rangle = \langle S, \overline{v} \rangle \tag{14.4}$$

per ogni $v \in H^{k+2m}(R^n)$ soddisfacente su Γ alle condizioni: $\gamma_0 v = 0, \ldots, \gamma_{m-1} v = 0$.

Anche il problema di NEUMANN può essere trattato sfruttando il teorema 12.5 e quello 14.1; si ha allora:

TEOREMA 14.4: *Se Au verifica la condizione algebrica* (7.8) *o le ipotesi del teorema* 7.9 *e λ è sufficientemente grande, per ogni $S \in H_{\overline{\Omega}}^{-k+2m}$, $(k \geq 0)$ esiste una e una sola $\mathcal{U} \in H_{\overline{\Omega}}^{-k}$ tale che*

$$\langle \mathcal{A}\,\mathcal{U} + \lambda\,\mathcal{U}, \overline{v} \rangle = \langle S, \overline{v} \rangle \quad \textit{per ogni} \quad v \in H^{k+2m}(R^n).$$

Un teorema generale, analogo ai teoremi 14.3 e 14.4 *varrà in definitiva per tutti quei problemi in cui si possa assicurare la validità del teorema* 12.3.

E così pure immediata applicazione possono avere i risultati di cui si è fatto cenno nel n. 12 *f*) (v. in particolare la congettura sulla maggiorazione (12.7)). In questo senso *dunque i risultati del capitolo* II e III (*a integrale di Dirichlet finito*) *sono alla base anche di questo nuovo metodo a integrale di Dirichlet non finito.*

Questa nuova teoria è però assai più generale; essa comprende infatti come è abbastanza facile vedere i risultati esistenziali ottenuti nel cap. II.

Essa ha però bisogno di essere maggiormente approfondita e sviluppata sotto diversi punti di vista e in particolare sotto quello dell'*interpretazione* delle condizioni al contorno e sotto quello della *regolarizzazione* della soluzione sulla frontiera (la regolarizzazione all'interno di Ω è anche ora risolta ovviamente dal risultato generale richiamato nel n. 13 *c*)).

Sull'interpretazione delle condizioni al contorno sono anche ora valide le considerazioni generali fatte in *a*). Nel caso che già si sapesse che la soluzione U appartiene a $H^m(\Omega')$ per ogni dominio Ω' sufficientemente regolare e tale che $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ si potrebbe abbastanza facilmente, sfruttando la formula di GREEN (9.5), ottenere una nuova interpretazione delle condizioni al contorno. Ma il problema rimane in generale aperto.

c) Ci sembra utile terminare questo numero prendendo in considerazione il caso particolare delle equazioni del secondo ordine. Ciò servirà sia a chiarire meglio e a interpretare in modo concreto, in un caso particolare l'equazione (14.2) e le analoghe, sia ad accennare alle questioni aperte nel problema della interpretazione delle condizioni al contorno e della regolarizzazione della soluzione.

Sia ad esempio da studiare il problema di DIRICHLET

$$A\, u = f \text{ in } \Omega \qquad u = \varphi_0 \text{ su } \Gamma$$

con $f \in L^2(\Omega)$ e $\varphi_0 \in L^2(\Gamma)$ e $Au = -\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\, a_{ik}\, \frac{\partial}{\partial x_k}\, u$.

Ebbene f e φ_0 determinano facilmente una distribuzione S di $H^{-2}_{\overline{\Omega}}$; precisamente si ha che al variare di v in $H^2(R^n)$

$$\int_\Omega f\, v\, d\, x + \int_\Gamma \varphi_0 \frac{d\, v}{d\, \nu^*}\, d\, \sigma$$

è una forma lineare e continua su $H^2(R^n)$ e dunque uguale a $\langle S, v\rangle$ con S distribuzione di $H^{-2}(R^n)$ ovviamente a supporto contenuto in $\overline{\Omega}$.

Sia allora $\mathcal{U}$ la soluzione del problema secondo il teorema 14.3 (il quale è valido in questo caso anche se $\lambda = 0$); la (14.4) diventa:

$$\langle \mathcal{A}\, \mathcal{U}, \overline{v}\rangle = \int_\Omega f\, \overline{v}\, d\, x - \int_\Gamma \varphi_0 \frac{d\, \overline{v}}{d\, \nu^*}\, d\sigma$$

per tutte le v di $H^2(R^n)$ aventi traccia $\gamma_0\, v = 0$ su Γ.

D'altra parte detta u la restrizione di $\mathcal{U}$ a Ω, si ha $u \in H^0(\Omega)$ e inoltre $\mathcal{U} = \tilde{u}$. Si ottiene allora

$$\langle \mathcal{A}\, \mathcal{U}, \overline{v}\rangle = \langle \mathcal{U}, \overline{\mathcal{A}^*\, v}\rangle = (u, A^*\, v_\Omega)_0 = \int_\Omega u\, \overline{A^*\, v}\, d\, x$$

e dunque la (14.3) diventa la

$$\int_{\Omega} u\, A^* v\, d x = \int_{\Omega} f v\, d x - \int_{\Gamma} \varphi_0 \frac{d v}{d \nu^*} d\sigma$$

per ogni $v \in H^2(R^n)$ e tale che $\gamma_0 v = 0$ su Γ.

Di qui con artifici abituali si ottiene che quasi ovunque in Ω

$$(14.4) \qquad u(y) = \int_{\Omega} f(x)\, G(y, x)\, d x - \int_{\Gamma} \varphi_0(x) \frac{d\, G(y, x)}{d \nu_x^*} d_x \sigma$$

dove $G(y, x)$ è la funzione di GREEN per il problema di DIRICHLET; la (14.4) è la formula risolutiva usuale da cui si possono trarre le interpretazioni abituali della condizione $u = \varphi_0$ su Γ. Si ritrovano così le soluzioni già note (ad esempio quella di CIMMINO [1]).

Si osservi anche che in questa ipotesi l'esistenza della funzione di GREEN è assicurata dai procedimenti dei cap. II e III, in virtù del fatto che esiste in grande la soluzione fondamentale $s(x, y)$ di $A u = 0$ (supposti naturalmente i coefficienti di $A u$ sufficientemente regolari come è d'abitudine).

Considerazioni analoghe valgono anche per tutti gli altri problemi di tipo $(\mathfrak{N})$ relativi alle equazioni ellittiche del secondo ordine.

Esse potrebbero probabilmente essere estese anche al caso $m > 1$ qualora si conoscesse la soluzione fondamentale di $A u$ in grande. Ma il problema è attualmente ancora aperto. Si conosce però la soluzione fondamentale in piccolo e il *nucleo* di GREEN per il problema al contorno dato, quando esso si sappia risolvere con i metodi dei cap. II e III, e diverse proprietà dello stesso (v. LIONS [1], GARNIR [1], [2] SCHWARTZ [4], ARONSZAJN [3]. È probabile, ma il problema è aperto, che ciò possa servire a dire qualcosa nell'ordine di idee ora accennato, onde interpretare più precisamente le condizioni al contorno e regolarizzare la soluzione.

15. — *Sulla decomposizione dell'operatore A u in operatori elementari di tipo generale.*

Come abbiamo detto fin dall'inizio del n. 4, nella trattazione fin qui svolta abbiamo assunto come operatori elementari per assegnare l'operatore $A u$ le singole derivate parziali di ordine non superiore all'ordine dell'operatore.

Questo del resto è il modo più naturate di considerare le equazioni a derivate parziali.

Altri problemi al contorno si possono però inquadrare nello schema della teoria esistenziale svolta nei n. 5-9, quando gli operatori si considerano come decomposti in operatori elementari più generali. Di questo daremo un rapido cenno rimandando per maggiori dettagli alla tesi di LIONS [1].

Questa teoria, in un certo senso, va al di là del compito che ci siamo proposto in questo lavoro (cioè lo studio dei problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali ellittiche), in quanto essa può essere applicata anche ad operatori astratti (anche integro-differenziali) o, nell'ambito dell'equazioni differenziali, a problemi che nella trattatistica classica non sono considerati ellittici. Ma ci sembra utile darne sia pure rapidamente un cenno, sia perchè con essa si possono completare alcuni aspetti della teoria delle equazioni ellittiche sia anche perchè essa suggerisce molti interessanti problemi che si sembra utile sottolineare.

Troverà così la sua risoluzione ad esempio il problema al contorno:

$$\Delta^2 u + \lambda u = f \text{ in } \Omega$$

$$\left.\begin{aligned} &\Delta u = 0 \\ &\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{su } \Gamma$$

considerato nel n. 7 *c*), ma non risolto nella vecchia impostazione, che pure può considerarsi come un problema ellittico.

Nella stessa teoria si potrà ad esempio inquadrare il problema

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \lambda u = f \text{ in } \Omega$$

$$u = 0 \qquad \text{su } \Gamma$$

che nella impostazione classica non viene considerato come ellittico.

Siano A_i $(i = 1, \ldots, d)$ operatori lineari e continui che applicati ad elementi di $\mathcal{D}$ (porremo $\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{D}$ e $\mathcal{D}'(\Omega) = \mathcal{D}'$) generano elementi di L^2 $(L^2 = L^2(\Omega))$, ed applicati ad elementi di L^2 generano elementi di $\mathcal{D}'$; più precisamente sia $A_i \in \mathcal{L}(\mathcal{D}, L^2)$; $A_i \in \mathcal{L}(L^2, \mathcal{D}')$.

Indicheremo con A_i^* l'aggiunto di A_i in quanto elemento di $\mathcal{L}(L^2, \mathcal{D}')$; nel senso che

$$\langle A_i^* f, \bar{\varphi} \rangle = (f, A_i \varphi)_0$$

$$f \in L^2, \varphi \in \mathcal{D}, A_i^* \in \mathcal{L}(L^2, \mathcal{D}').$$

Se g_{ij} sono funzioni misurabili e limitate introdurremo l'operatore $A \in \mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ come segue:

$$A\,\varphi = \sum_{i,j=1}^{d} A_i^* \,(g_{ij}\, A_j\, \varphi)\,.$$

Si ottiene quindi l'operatore (4.3) quando A_i rappresenta una qualunque derivata parziale $D^p u$, con $|p| \leq m$.

Vediamo ora come si possa introdurre la classe $\mathcal{E}(A)$ che sostituisce $H^m(\Omega)$ nella teoria del cap. II.

Indicheremo con $\mathcal{E}(A)$ lo spazio delle funzioni $u \in L^2$ tali che $A_i u$, a priori elementi di $\mathcal{D}'$, sia in L^2 per ogni $i = 1, 2 \ldots, \nu$. Questo spazio, quando si introduce in esso il prodotto scalare

$$(u, v)_{\mathcal{E}(A)} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{d} (A_i\, u, A_i\, v)_0$$

risulta uno spazio di Hilbert completo.

Prenderà il ruolo di $H_0^m(\Omega)$ lo spazio $\mathcal{E}_0(A)$ costituito dalla chiusura di $\mathcal{D}$ in $\mathcal{E}(A)$.

Come si possa svolgere una teoria analoga a quella dei nn. 4-6 appare evidente.

Consideriamo un sottospazio V chiuso di $\mathcal{E}(A)$ contenente $\mathcal{D}(A)$:

$$\mathcal{D} \subset V \subset \mathcal{E}(A) \subset \mathcal{D}'$$

e poi uno spazio Q normale di distribuzioni coincidente in generale con L^2 a meno che $V \equiv \mathcal{E}_0(A)$ (Problema di DIRICHLET).

Consideriamo per $u, v \in V$ la forma sesquilineare

$$((u, v)) = \sum_{i,j}^{d} (g_{ij}\, A_i\, u, A_j\, v)_0$$

Diremo con Lions che essa è V-ellittica rispetto allo spazio $\mathcal{E}(A)$ (*meglio sarebbe forse dire V-regolare*) *se:*

$$|\,((u, u))\,| \geq \alpha \,\|\, u\,\|^2_{\mathcal{E}(A)}$$

Il teorema esistenziale analogo al teorema 6.2 può allora facilmente ancora dimostrarsi.

Dopo questi brevi cenni si comprende bene come possa ampliarsi notevolmente la teoria precedente, ma notevoli problemi aperti si presentano immediatamente, fra questi citeremo l'analogo di quello della coercività e quello della regolarizzazione delle soluzioni. Detti problemi non sono ancora stati affrontati in tutta la loro generalità; si osservi ad es. che i procedimenti del cap. III non sono qui senz'altro applicabili, perchè sono legati essenzialmente alla struttura degli spazi $H^k(\Omega)$.

Senza trattenerci oltre sugli sviluppi di tale estensione osserviamo quanto può dirsi per l'esempio del n. 7 *c*). Abbiamo visto che il problema

$$\Delta^2 u + \lambda u = f \text{ in } \Omega$$

$$\Delta u = 0 , \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta u = 0 \text{ su } \Gamma ,$$

quando $\Delta^2 u$ è dato dalla decomposizione (4.2) con $\eta = 0$ e $\mu = 1$, e quindi si considera nella classe $H^2(\Omega)$, non è V-ellittico.

Se invece si assume come operatore elementare l'operatore Δu e quindi Δ^2 è decomposto in $\Delta^2 = \Delta \cdot \Delta$ e si considera di conseguenza la classe $\mathcal{E}(\Delta)$ delle funzioni u per cui $u \in L^2$, $\Delta u \in L^2$, la forma

$$((u , v)) = \int_\Omega \Delta u \, \overline{\Delta v} \, d x + \lambda \int_\Omega u \, \overline{v} \, d x$$

è V-ellittica per $\lambda > 0$.

Da tale punto di vista è risolubile in modo unico in $\mathcal{E}(\Delta)$ il problema (di NEUMANN)

$$\Delta^2 u + \lambda u = f \qquad \text{in } \Omega , \qquad \lambda > 0 \tag{15.1}$$

$$\Delta u = 0 , \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta u = 0 \qquad \text{su } \Gamma \tag{15.2}$$

A questo punto si inserisce l'interessante questione relativa alla regolarizzazione della soluzione.

Essa può in questo caso particolare essere così trattata.

Dalla relazione, che traduce il problema (15.1), (15.2):

$$\int_\Omega \Delta u \, \overline{\Delta v} \, d x = \int_\Omega (f - \lambda u) \, \overline{v} \, d x \tag{15.3}$$

si può dedurre, in virtù del teorema di inversione di AMERIO [1] già richiamato nel n. 12 *g*) e di un noto teorema di FRIEDRICHS [1] che

$$\Delta u \in H_0^2(\Omega)$$

Se ora supponiamo $f \in H^k(\Omega)$ $(k \geq 0)$ dalla equazione (15.1) applicando l'operatore Δ ad ambo i membri e tenuto conto delle condizioni al contorno $\Delta u = 0$, $\dfrac{\partial \Delta u}{\partial \nu} = 0$ si deduce per il teorema 12.4 (v. più esattamente l'osservazione a proposito della (12.5)) che

$$\Delta u \in H^{2+k}(\Omega)$$

e quindi poichè $\lambda u = f - \Delta^2 u$ si deduce che $u \in H^k(\Omega)$.

Osservazione: In tutto questo lavoro ci siamo limitati allo studio dei problemi al contorno per una sola equazione; i procedimenti qui usati e i risultati ottenuti si lasciano però estendere anche ai sistemi di equazioni di tipo ellittico; per una breve esposizione in quest'ordine di idee si può vedere la conferenza di Magenes [6], nella quale si trovano anche le ulteriori indicazioni bibliografiche; si vedano anche i lavori di Campanato [1] [2].

BIBLIOGRAFIA

S. AGMON — 1) *Multiple Layer potentials*... (Comm. pure appl. Math., 10, 1957, pp. 179-240).

L. AMERIO — 1) *Sul calcolo delle soluzioni*... (Amer. Journal of Math., 69, 1947, pp.447-489); 2) *Sull'integrazione dell'equazione* $\Delta_{2k} u = f$ (Ann. Mat. pura appl., 24, 1945, pp. 119-138).

N. ARONSZAJN — 1) *Boundary value of functions with finite* DIRICHLET *integral* (Technical Report n. 14 — University of Kansas, 1955, pp. 77-94); 2) *On coercive integro-differential quadratic forms* (idem, pp. 94-106); 3) *Theory of reproducing Kernels* (Trans. Amer. Math. Soc., 68, 1950, pp. 337-404).

N. ARONSZAJN-K. T. SMITH — 1) *Functional spaces and functional completion* (Ann. Inst. Fourier, 6, 1956, pp. 125-185).

V. M. BABICH — 1) *Sul problema del prolungamento delle funzioni* (in russo) (Uspekhi Mat. Nauk, 8, 2, (54), 1953, pp. 111-113).

V. M. BABICH-L. N. SLOBODETSKY — 1) *Sulla limitatezza dell' integrale di* DIRICHLET (in russo) (Doklady Akad. Nauk., 106, 1956, pp. 604-608).

L. BERS - L. NIRENBERG — 1) *On a represeutation theorem*... (Atti Cong. Int. Equaz. Lin. der. parz. di Trieste, 1954. pp. 111-140); 2) *On linear and non linear elliptic*... (idem, pp. 141-167).

N. BOURBAKI — 1) *Espace vectoriels topoligiques* — cap. III, IV, V — (Paris-Hermann, 1955).

F. E. BROWDER — 1) *Strongly elliptic systems of differential equations* (*Contributions to the theory of partial diff. equations* — Ann. of Math. Studies n. 33, Princeton, 1954, pp. 15-51); 2) *On regularity properties*.... (Comm. pure appl. Math., 9, 1956, pp. 351-356); 3) *On regularity properties at the Boundary*... (Bull. Amer. Math. Soc., Abstract, 62, 1956, pp. 381); 4) *Regularity theorems*... (Proc. Nat. Acad. U. S. A., 43, 1956, pp. 234-236).

R. CACCIOPPOLI — 1) *Sui problemi di esistenza di* RIEMANN (Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, II, 6, 1937, pp. 177-187); 2) *Limitazioni integrali per le soluzioni*... (Giorn. Mat. BATTAGLINI, 30, 1950-51, pp. 186-212).

A. P. CALDERON-A. ZYGMUND — 1) *On the existence of singular integrals* (Acta Math., 88, 1952, pp. 85-139).

S. CAMPANATO — 1) *Sul problema di derivata obliqua regolare per un sistema di equazioni differenziali lineari del secondo ordine di tipo elltitico* (Di prossima pubblicazione); 2) *Sulla regolarità delle soluzioni del problema di* M. PICONE *relativo a sistemi di equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico* (Di prossima pubblicazione).

G. CIMMINO — 1) *Nuovo tipo di condizioni al contorno*... (Rend. Circ. Mat. Palermo, 61, 1937, pp. 177-224); 2) *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di tipo ellittico* (Rend. Sem. Mat. Fis., Milano, 23, 1952, pp. 255-286).

R. COURANT-D. HILBERT — 1) *Methoden der Mathematischen Physik,* Vol. II, (Berlin, Spinger 1937).

E. DE GIORGI — 1) *Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari* (Mem. Accad. Sc. Torino, III, 3, 1957, pp. 25-43).

J. DENY-J. L. LIONS — 1) *Les Espaces de* B. LEVI (Ann. Inst. Fourier, 5, 1953-54, pp. 305-370).

S. FAEDO —1) *Su un principio di esistenza nell'analisi lineare* (Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, III, 11, 1957, pp. 1-8).

G. FICHERA — 1) *Teoremi di completezza*... (Giorn. Mat. BATTAGLINI, IV, 77, 1947, pp. 184-199); *Analisi esistenziali*... (Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, III, 1, 1948, pp. 75-100); 3) *Teoremi di esistenza per il problema biiperarmonico* (Rend. Ac. Lincei, 5, 1948, pp. 319-324); 4) *Esistenza del minimo*... (Rend. Ac. Lincei, 11, 1951, pp. 34-39); 5) *Sul problema della derivata obliqua*... (Boll. U. M. I., III, 7, 1952, pp. 367-377); 6) *Alcuni recenti sviluppi*... (Atti Cong. Int. Equaz. Lin. der. parz. di Trieste, 1954, pp. 174-227); 7) *Lezioni sulle trasformazioni lineari* (Trierte, 1954); 8) *Sulla teoria generale dei problemi al contorno*... (Rend. Acc. Lincei, 21, 1956, pp. 46-55 e 166-172).

K. O. FRIEDRICHS — 1) *A theorem of Lichtenstein* (Duke Math., Jour. 14, 1947, pp. 67-82); 2) *On the differentiability of the solutions*... (Comm. pure appl. math., 6, 1953, pp. 299-326).

B. FUGLEDE — 1) *Extremal length and functional completion* (Acta Math. 98, 1957 pp. 171-219)

E. GAGLIARDO — 1) *Caratterizzazione delle tracce*... (Rend. Sem. Mat. Padova, 27, 1957, pp. 284-305); 2) *Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili* (Ric. di Mat., 7, 1958, pp. 102-137); 3) *Una osservazione sul problema di* DIRICHLET... (in corso di stampa sui Rend. Acc. Sc. Napoli, XXV, 1958).

L. GÅRDING — 1) DIRICHLET'*s problem*... (Math. Scand. I, 1953, pp. 55-72).

H. G. GARNIR — 1) *Problèmes aux limites de la Physique mathématique* (Basel, Birkhanser, 1958); 2) *Nouvelles expressions des noyaux de Green*... (in corso di stampa su Ric. di Mat., 7, 1958).

G. GIRAUD — 1) *Genéralisation d'un type de problèmes*... (Ann. Sc. Norm. Sup. II, 7, 1938, pp. 25-72).

D. GRECO — 1) *Nuove formule integrali di maggiorazione*... (Ric. di Mat., 5, 1956, pp. 126-149); 2) *Un teorema di esistenza per il problema di* DIRICHLET... (Idem, 5, 1956, pp. 150-158).

O. V. GUSEVA — 1) *Sui problemî al contorno per sistemi fortemente ellittici* (in russo) (Doklady Akad. Nauk., 102, 1955, pp. 1069-1072).

L. HÖRMANDER — 1) *On the theory of general*... (Acta Math., 94, 1955, pp. 161-284); 2) *On interior regularity*... (Comm. pure appl. math., 11, 1958, pp. 197-218); 3) *Loeal and global properties of fundamental solutions* (Math. Seandinavica, 5, 1957, pp. 27-39).

F. JOHN — 1) *On linear partial differential equations with analytic coefficients* (Comm. pure appl. math., 2, 1949, pp. 209-253); 2) *The fundamental solution of linear elliptic*... (idem, 3, 1950, pp. 273-304); 3) *Plane waves and spherical means applied to partial differential equations* (New York, Interscience Pubbl., 1955).

A. I. KOSHELEV — 1) *Sulla limitatezza in L^p delle derivate*... (in russo) (Mat. Sbornik, 38, 1956, pp. 359-372).

O. LADYZHENSKAYA — 1) *Sulla chiusura di un operatore ellittico* (in russo) (Doklady Akad. Nauk, 79, 1951, pp. 723-725).

P. D. LAX — 1) *On Cauchy's problem*... (Comm. pure appl. math., 8, 1955, pp. 615-633).

E. E. LEVI — 1) *Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche*... (Rend. Circ. Mat. Palermo, 24, 1907, pp. 275-317); 2) *I problemi dei valori al contorno*... (Mem. Soc. Ital. dei XL, 16, 1909, pp. 1-112).

A. LIENARD — 1) *Problème plan de la dérivée oblique*... (Jour. Ecole Polit., III, 5-7, 1938, pp. 35-158, 177-226).

J. L. LIONS — 1) *Problèmes aux limites en théorie des distributions* (Acta Math., 94, 1955, pp. 1-153): 2) *Sur certains problèmes aux limites*... (Bull. Soc. Math. France, 83, 1955, pp. 225-250); 3) *Sur les problèmes*... (Ann. of Math., 64, 1956, pp. 207-239); 4) *Conditions aux limites de Visik-Soboleff et problèmes mixtes* (C. R. Acad. Sc., Paris, 244, 1957, pp. 1126-1128); 5) *Some questions on elliptic equations* (Tata Inst. of Fundamental Research., Bombay, 1957); 6) *Ouverts m-réguliers* (Revista de la Union Mat., Fis. Argentina, 17, 1955, pp. 103-116).

B. MALGRANGE — 1) *Sur une classe d'opérateurs differentielles hypoelliptiques.* (Bull. Soc. Math. France, 85, fasc. 3, 1957).

E. MAGENES — 1) *Sui problemi al contorno misti...* (Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, III, 8, 1954, pp. 93-120); 2) *Sul teorema dell'alternativa...* (Idem, III, 9, 1955, pp. 161-210); 3) *Sui problemi di derivata obliqua...* (Ann. Math. pura appl. IV, 40, 1955, pp. 143-160); 4) *Recenti sviluppi...* (Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, 27, 1955-56, pp. 75-95); 5) *Il problema della derivata obliqua...* (Rend. Mat. Roma, 16, 1957, pp. 363-414); 6) *Sui problemi al contorno per i sistemi di equazioni...* (In corso di stampa sui Rend. Sem. Mat. di Torino, 1958).

C. MIRANDA — 1) *Formule di maggiorazione...* (Giorn. Mat. Battaglini, 78, 1948-49, pp. 97 118); 2) *Sui sistemi di tipo ellittico...* (Mem. Acc. Lincei, 3, 1952, pp. 85-121); 3) *Equazioni alle derivate di tipo ellittico,* (Berlin, Springer, 1955); 4) *Sul teorema del massimo modulo...* (Rend. Acc. Lincei, 24, 1958, pp. 131-134).

S. MIZOHATA — 1) *Hypoellipticité des équations paraboliques* (Bull. Soc. Math. France, 85, 1957, pp. 15-50).

C. B. MORREY — 1) *Functions of several variables...* (Duke Math. Jour. 6, 1940, pp. 187 215); 2) *Multiple integral problems...* (Univers California Pubbl. Math. I, 1943, pp. 1-130); *Second order elliptic systems...* (Ann. of Math. Studies, n. 33, Princeton, 1954, pp. 101-159).

C. B. MORREY - L. NIRENBERG — 1) *On the analitycity...* (Comm. pure appl. math., 10. 1957, pp. 271-290).

L. NIRENBERG — 1) *On non linear elliptic...* (Comm. pure appl. Math. 6, 1953, pp. 337, 394); 2) *Remarks on strongly elliptic...* (idem, 8, 1955, pp. 649-675); 3) *Estimates and existence...* (idem, 9, 1956, pp. 509-530).

I. G. PETROWSKI — 1) *Sur l'analiticité des solutions...* (Mat. Sbornik, 5, 1939, pp. 3-68).

M. PICONE — 1) *Nuovi metodi risolutivi...* (Atti Acc. Sc. Torino, 75, 1939-40, pp. 413-426),

B. PINI — 1) *Sul problema di Dirichlet...* (Rend. Acc. Lincei, 11, 1953, pp. 325-333); 2) *Una generalizzazione del problema biarmonico fondamentale* (Rend. Sem. Padova, 25, 1956, pp. 196-213); 3) *Sul problema di Dirichlet...* (idem, 26, 1956, pp. 177-200). 4) *Sul comportamento alla frontiera delle derivate delle soluzioni...* (Rend. Sem. Fac. Sc. Cagliari, 26, 1956, pp. 7-29).

G. PRODI — 1) *Tracce sulla frontiera delle funzioni di B. Levi* (Rend. Sem. Mat. Padova, 26, 1956, pp. 36-60); 2) *Tracce di funzioni con derivate di ordine e a quadrato integrabile su varietà di dimensione arbitraria* (in corso di stampa sui Rend. Sem. Mat. Padova).

M. SCHECTHER — 1) *On estimating elliptic...* (Amer. Jour. Math., 79, 1957, pp. 431-443); 2) *On estimating partial differential operators* (Bull. Amer. Math. Soc., 63, 1957, p. 242).

L. SCHWARTZ — 1) *Théorie des distributions* (Paris, Hermann, Vol. I (2a ediz.) 1957; Vol. II, 1951); 2) *Equations aux derivées partielles* (Sem. Schwartz, Paris, 1954); 3) *Su alcuni problemi...* (Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, 27, 1955-56, pp. 211-249); 4) *Théorie des noyaux* (Proc. Int. Cong. Math., 1950, I, pp. 220-230).

S. L. SOBOLEV — 1) *Su un problema ai limiti per le equazioni poliarmoniche* (in russo) (Mat. Sbornik, 2, 1937, pp. 465-499); 2) *Applicazione dell'analisi funzionale alla fisica-matematica* (in russo) (Leningrad, 1950); 3) *Lezioni sulle equazioni iperboliche non lineari* (corso del C.I.M.E., giugno 1956, Varenna, pubbl. Ist. Mat. Univ. Roma).

S. L. SOBOLEV - M. I. VISHIK — 1) *Nuova impostazione generale per i problemi al contorno* . . . (in russo) (Doklady Akad. Nauk., 111, 1956, pp. 521-523).

G. STAMPACCHIA — 1) *Un teorema di calcolo delle variazioni* . . . (Giorn. Mat. Battaglini, 78, 1948-49, pp. 81-96); 2) *Sopra una classe di funzioni* . . . (Ric. di Mat., 1, 1952, pp. 27-54); 3) *Problemi al contorno per equazioni* . . . (Ann. Mat. pura Appl., 33, 1952, pp. 211-238); 4) *Sistemi di equazioni di tipo ellittico* . . . (Ric. di Mat., 1, 1952, pp. 200-226); 5) *Problemi al contorno misti* . . . (Ann. Mat. pura Appl., 40, 1955, pp. 177-193); 6) *Su un problema relativo* . . . (Ric. di Mat. 5, 1956, pp. 2-24); 7) *Completamenti funzionali* . . . (Rend. Mat. Roma, 16, 1957, pp. 415-429); 8) *Contributi alla regolarizzazione della soluzione dei problemi al contorno per equazioni del secondo ordine ellittiche* (in corso di stampa sugli Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 1958).

F. TREVES — 1) *Solution élèmentaire d'equations* . . . (C. R. Acad. Sc. Paris, 242, 1956, pp. 1250-1252).

T. VIOLA — 1) *Sull'esistenza del minimo assoluto* . . . (Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, III, 6, 1952, pp. 109-145).

N. I. VISHIK — 1) *Sui sistemi fortemente ellittici di equazioni differenziali* (in russo) (Mat. Sbornik, 29, 1951, pp. 615-676).

Bibliografia aggiunta a stesura completata.

S. AGMON — 2) *The coerciveness problem for integro-differential forms* (Technical Note N. 5 — The Hebrew University — Jerusalem, may, 1958).

L. DE VITO — 1) *Sulle funzioni ad integrale di Dirichlet finito* (Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, III, 12, 1958, pp. 55-127).

M. SCHECHTER — 3) *Corcivenes of linear* . . . (Comm. pure Appl. Math., 11, 1958, pp. 153-174).

L. HÖRMANDER — 3) In corso di stampa sugli Acta Math., 1958.

S. AGMON. - A. DOUGLIS - L. NIRENBERG — 1) *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions* (in corso di stampa su Comm. pure appl. math.).

S. NASH — 1) *Continuity of solution of parabolic and elliptic equations* (di prossima pubblicazione).

INDICE

CAP. I : *Richiami di nozioni generali*

N. 1 : Richiami sugli spazi lineari topologici e sulle distribuzioni. . . pag. 248
2 : Alcuni spazi particolari di distribuzioni e di funzioni . . . . » 251
3 : Un principio generale di esistenza e di unicità per equazioni funzionali lineari . . . . » 264

CAP. II : *Problemi al contorno per equazioni lineari ellittiche: metodi a integrali di Dirichlet finito.*

N. 4 : Equazioni ellittiche e problemi al contorno: introduzione . . . » 265
5 : Problemi con condizioni al contorno omogenee . . . . . . » 271
6 : Esistenza e unicità della soluzione; V - ellitticità. . . . . . » 280
7 : Condizioni algebriche per la V - ellitticità; coercività della forma ((u , u)) » 283
8 : Applicazione della teoria di Riesz . . . . » 293
9 : Problemi con condizioni al contorno non omogenee . . . . . » 294

CAP. III : *Problemi di regolarizzazione*

N. 10 : Problemi di regolarizzazione; primi teoremi, regolarizzazione all'interno » 303
11 : Regolarizzazione alla frontiera . . . . » 314
12 : Problemi al contorno regolarizzabili . . . . » 321
13 : Analiticità delle soluzioni . . . . » 330

CAP. IV : *Altre impostazioni dei problemi al contorno.*

N. 14 : Metodi funzionali ad integrale di Dirichlet anche non finito . . » 343
15 : Sulla decomposizione dell'operatore Au in operatori elementari di tipo generale . . . . » 349
Bibliografia . . . . » 354

SANDRO FAEDO - *Direttore responsabile.* Finito di stampare il 15 ottobre 1958