Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Salvatore Cherubino
Maria Passaquindici

Sui sistemi di disuguaglianze lineari e su alcune loro applicazioni

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 12, nº 1-2 (1958), p. 31-53

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1958_3_12_1-2_31_0>

SUI SISTEMI DI DISUGUAGLIANZE LINEARI E SU ALCUNE LORO APPLICAZIONI (*)

di SALVATORE CHERUBINO e MARIA PASSAQUINDICI (Pisa)

INTRODUZIONE.

La presente Nota della Sig.na MARIA PASSAQUINDICI deriva in parte da una mia dal titolo: « *Su una disuguaglianza in matrici* » [1] la quale si proponeva soprattutto di trovare condizioni almeno sufficienti perchè un sistema lineare omogeneo di equazioni differenziali ordinarie ammetta, con valori iniziali opportuni, soluzioni tutte positive. Se i coefficienti sono costanti, tale problema equivale sostanzialmente a quello della compatibilità, con valori tutti positivi delle n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, di un sistema di diseguaglianze lineari omogenee nelle variabili stesse. Se il sistema di diseguaglianze non è omogeneo, ci si riduce al caso omogeneo mercè un semplice procedimento ideato dall'Autrice, la quale mostra pure come il metodo, che nella mia Nota era soltanto accennato, può svilupparsi portando alla effettiva costruzione di soluzioni del sistema. Come già nella mia Nota, si considerano anche sistemi a coefficienti variabili, ma limitati. E se ne fanno applicazione alla positività dell'integrale generale di un sistema di equazioni differenziali lineari non omogenee.

La risoluzione dei sistemi di disuguaglianze lineari viene utilizzata nel problema della programmazione lineare e nella ricerca delle condizioni perchè un sistema di polinomi si conservi definito in un opportuno intervallo di variazione della comune indeterminata.

(*) Soltanto l'introduzione del presente lavoro è di S. CHERUBINO: la nota effettiva e cioè i paragrafi 1-5 costituiscono invece la prima parte della tesi di laurea di M. PASSAQUINDICI.

[1] Boll. U. M. I., giugno 1956, s. III, a. XI, pagg. 124-132.

*
* *

Questa premessa è giustificata dal fatto che nel solito metodo di risoluzione del problema della programmazione lineare detto del simplesso [2] non si dà il dovuto rilievo alla risoluzione del sistema di diseguaglianze che lo condiziona.

Il problema può presentarsi così:

Data una funzione lineare omogenea:

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots c_n x_n \tag{1}$$

delle n varlabili (reali) $x_1, x_2, \dots x_n$ con $c_1, c_2, \dots, c_n$ coefficienti (reali) costanti noti, si chiedono il massimo e il minimo di z sotto condizione che le variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ siano non negative e soddisfino un dato sistema di diseguaglianze lineari assegnate, a coefficienti costanti [3].

Se nel secondo membro di (1) si aggiungesse un termine noto d, il problema non cambiarebbe. Se le incognite potessero annullarsi, nella (1) (e nella (2) che seguirà) si sopprimerebbero i termini (e le righe) corrispon-

---

(2) G. B. DANTZIG: *Maximation of linear function subject to linear inequalities* (in Activity Analysis of Production and Allocation, J. Wiley, New York, 1951 pp. 339-347).

G. B. DANTZIG: *A proof of Equivalence of the Programming Problem and the Game Problem* (idem, pp. 330-358).

R. DORFMAN: *Application of the Simplex Method to a Game Theory Problem* (idem, pp. 348-358).

G. B. DANTZIG, W. ORCHARD, HAYS G. WATERS: *Product Form Tableau, for Revised Simplex Method* (Rand Research Memorandum, maggio 1957).

B. GIARDINA, A. LONGO, S. RICOSSA: *La programmazione lineare nell'industria* (ediz. dell'Unione Industr. di Torino, pp. 1-153).

G. TINTNER: *Game Theory, Linear Programming and Input-Output Analysis* (Zeitschrift fur Nationalökonomie, Band XVII, Heft 1, Febbraio 1957, pp. 1-38). Vedi anche «L'Industria», 1957, n. 3-4 (traduzione di A. PREDETTI) p. 505-537 e 653-671.

V. DEL PUNTA: *Una nuova elaborazione del « metodo del simplesso »* (Politica economica, 1957, fasc. luglio-agosto, pp. 603-642).

I. CUTOLO: *Programmazione lineare* [Napoli, Treves (1957) pp. 143]. Nei lavori citati il lettore troverà altre indicazioni bibliografiche che tacciamo per brevità.

(3) Ricordiamo, cfr. ad es. I. C. C. MC KINSEY: *Inctroduction to the theory of games* [Mc Graw-Hill, New York (1952) pp. 291-301] che il problema della programmazione lineare equivale a quello dei giochi rettangolari, come definiti a pag. 6 dell'*Introduction* ora citata: anzi questi sono un pò particolari rispetto a quello (Ibidem, pag. 297). Cfr. anche, oltre al cap. XX di DANTZIG già cit., in Arctivivity Analysis, anche il cap. XIX, pp. 317-329, di GALE, KUHN e TUCKER pp. 317-329.

denti alle incognite che si vogliono eguali a zero: si potrebbero perciò fare tutte le possibili ipotesi, ottenendo funzioni z (e relazioni (2)) distinte, quindi altrettanti problemi come il proposto; così se qualcuno dei coefficienti c_i di z fosse zero. Ciò non è però necessario, bastando richiedere che il vettore incognito $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sia non negativo ($\mathrm{x} \geq 0$).

Indicando con $A = [a_{rs}]$; $r = 1, 2, \ldots, n$; $s = 1, 2, \ldots, p$ la matrice costante ad n righe, p colonne e rango p dei coefficienti del sistema e con $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p)$ un vettore reale dato a p componenti costanti, le condizioni predette si scrivono: [4]

$$\mathrm{x}\, A \geqq \beta\,, \quad \mathrm{x} \geq 0\,. \tag{2}$$

Se nella (2) valesse il segno $\leqq$ anzichè quello $\geqq$ si cambierebbero di segno sia A che β ed avremmo:

$$\mathrm{x}\, A' \geqq \beta'$$

$\mathrm{x} \geq 0$, $A' = -A$, $\beta' = -\beta$.

Invece della (2) potrebbe aversi la limitazione:

$$\gamma \geqq \mathrm{x}\, A \geqq \beta\,, \quad \mathrm{x} \geq 0 \tag{3}$$

con $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p)$ altro vettore reale costante assegnato. La (3) equivale alla diseguaglianza:

$$\mathrm{x}\, [A \mid -A] \geqq (\beta \mid -\gamma)\,; \tag{3'}$$

cioè siamo sempre nel primo caso. Se in questa si avesse $\gamma = \beta$, la (3) equivarrebbe ad:

$$\mathrm{x}\, A = \beta\,, \quad \mathrm{x} \geq 0. \tag{4}$$

Invece di $\mathrm{x} \geq 0$ potrebbe volersi:

$$0 \leq \mathrm{x} \leqq \mathrm{l} = (l_1, l_2, \ldots, l_n) \tag{5}$$

come accade nel caso delle produzioni industriali, in cui $x_1, x_2, \ldots, x_n$ indicano le quantità dei fattori di produzione impiegati nella fabbricazione della quantità z di un certo prodotto, fattori disponibili in quantità limitate.

---

[4] $A \geqq B$ significa che $a_{rs} \geqq b_{rs}$, $r \leqq n$, $s \leqq p$; $\mathrm{x} \geq 0$ significa che gli elementi x_r di x sono tutti non negativi $\mathrm{x} \neq 0$.

In tal caso si porrà:

$$\xi = (\mathrm{x} \,|\, \mathrm{x}) \; ; \; \beta' = (\beta \,|\, - \, l)$$

$$B = \left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & -I \end{array}\right] \tag{6}$$

dove I e $\mathbf{0}$ sono matrici quadrate di ordine n, la prima identica, la seconda nulla e β' è un vettore a $2n$ componenti. Le condizioni richieste si scrivono:

$$\xi B \geqq \beta' \, , \; \xi \geqq 0 \tag{7}$$

tenendo conto che le prime n componenti di ξ sono ordinatamente eguali a quelle di posto $n+1$, $n+2, \ldots, 2n$. Ciò porta solo a una lieve complicazione del metodo generale.

*
* *

Il problema della programmazione lineare può presentarsi in modo del tutto analogo ai problemi di massimo e minimo condizionati dell'analisi matematica.

Si ponga:

$$z = f(x_1, \ldots, x_n; \; y_1, \ldots, y_p; \; z_1, \ldots, z_n) = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n + d \tag{8}$$

$$\varphi_s = \varphi_s(x_1, \ldots, x_n; \; y_1, \ldots, y_p) = \sum_{r=1}^{n} a_{rs} x_r + y_s - \beta_s = 0 \; ; \; (s = 1, \ldots, p) \tag{9}$$

$$\psi_r = \psi_r(x_1, \ldots, x_n; \; z_1, \ldots, z_n) = x_r + z_r - l_r = 0 \; ; \; (r = 1, \ldots, n) \tag{9_1}$$

con le ulteriori condizioni:

$$x_r \geqq 0 \; ; \; z_r \geqq 0 \; ; \; y_s \geqq 0 \; ; \; (r = 1, \ldots, n \; ; \; s = 1, \ldots, p) \tag{9_2}$$

che assegnano alle variabili l'estremo inferiore comune zero e alle x_r e z_r gli estremi superiori comuni l_r. In questa forma è facile dire se e quando esistono il massimo e il minimo di $z = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n + d$ e dare criteri di compatibilità delle condizioni (9) — $(9)_1$ — $(9)_2$.

Rimandiamo per questo ai trattati di Analisi Matematica [5] e ad una nota interna dell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, che il suo illustre Direttore, collega MAURO PICONE, ha avuto la cortesia di inviarmi.

È bene rilevare subito che se la riga:

$$(10) \qquad c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

è combinazione lineare delle colonne di A coi coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, risulta identicamente rispetto alle variabili x_r, y_s:

$$(11) \qquad \mathrm{x}\, c_{-1} = z - d = (\varphi - \mathrm{y} + \beta)\, \lambda_{-1} = \mathrm{x}\, A\, \lambda_{-1}$$

dove si è posto:

$$(12) \qquad \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_p)\,;\ \mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_p)\,;\ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p).$$

Quindi, essendo $\varphi = 0$, z è indipendente da $x_1, \ldots, x_n$ ed è sempre eguale a:

$$(13) \qquad (\beta - \mathrm{y})\, \lambda_{-1} + d\,.$$

Ponendo:

$$(14) \qquad \zeta = (z_1, \ldots, z_n)\,;\ \mathrm{l} = (l_1, \ldots, l_n)$$

le $(9)_1$ si sintetizzano nella

$$(9')_1 \qquad \mathrm{x} = \mathrm{l} - \zeta$$

ed i vettori y e ζ risultano legati dalla relazione:

$$(15) \qquad (\beta - \mathrm{y})\, \lambda_{-1} = (\mathrm{l} - \zeta)\, \mathrm{c}_{-1} = (\mathrm{l} - \zeta)\, A\, \lambda_{-1}$$

cioè dall'altra:

$$(16) \qquad (\zeta\, A - \mathrm{y})\, \lambda_{-1} = (\mathrm{l}\, A - \beta)\, \lambda_{-1}\,.$$

---

(5) Cfr., in particolare, il Vol. I del «Trattato di Analisi Matematica» di PICONE e FICHERA, Roma, Tumminelli, 1954: *Estremi legati o condizionati*, pp. 329-333 (in partic. il teor. V).

Invece y e ζ sono vettori generalmente indipendenti. Se inoltre fosse $y = 0$, z sarebbe costante ed eguale a $\beta \lambda_{-1} + d = z^0$ e la (15) diventerebbe:

$$\zeta\, c_{-1} = l\, c_{-1} - z^{\cdot} + d \tag{17}$$

che aggiungerebbe una nuova condizione alle $(9)_1$, dalle quali discenderebbe solo se si avesse:

$$(\zeta - l)\, c_{-1} = - x c_{-1} \tag{18}$$

identicamente rispetto ad x, cioè se $c = 0$.

Dunque (d'accordo con la Nota interna dell'INAC):

a) *se si ha* $y = 0$ *e* c *è combinazione lineare delle colonne di* A, cioè $c_{-1} = A\, \lambda_{-1}$, *z è costante ed uguale a* $\beta \lambda_{-1} + d$.

b) *se le ipotesi di* a) *non si verificano, il massimo ed il minimo assoluti di* z *esistono e sono sulla frontiera del dominio* (chiuso e limitato) *definito dalle relazioni* $(9) - (9)_1 - (9)_2$.

c) *se* z *è condizionato soltanto dalle* (2), *il dominio definito da queste potrebbe risultare vuoto o non essere chiuso e limitato: allora non è detto che il minimo ed il massimo di* z *esistano* (6).

I teoremi enunciati non si estendono sino a dare un procedimento calcolativo numerico del tutto generale dei problemi di programmazione lineare: si ricorre perciò, ad es., al metodo del simplesso, che si fonda sulla conoscenza di una soluzione base del sistema di disuguaglianze. In questa Nota verranno esposte condizioni sufficienti per la compatibilità dei vincoli ed un metodo, che ne consegue per ottenere soluzioni della (2), in particolare soluzioni base.

Aggiungiamo che se il più grande o il più piccolo valore di z venisse raggiunto da più determinazioni di x (soddisfacenti alle (2)) detto s ($\leqq n$) il massimo numero di queste determinazioni che sono linearmente indipendenti, siano tali ad es. $x', x'', \ldots, x^{(s)}$, esso verrebbe raggiunto anche dalle infinite determinazioni, sempre soddisfacenti alle (2):

$$x = \sum_{h=1}^{s} \mu_h\, x^{(h)}$$

coi coefficienti μ_h tutti $\geqq 0$ e di somma uguale ad 1.

Con linguaggio geometrico, si può dire che il dominio in cui varia il punto x soddisfacente alla (2) è un poliedro convesso dello spazio S_n e che il massimo ed il minimo di z, se ci sono, vengono raggiunti da vertici.

---

(6) Perchè mancherebbe l'ipotesi del teor. di WEIERSTRASS.

Se più punti x danno il massimo (il minimo) di z, sostituendo questo in (1) si ha un S_{n-1} di S_n che interseca il poliedro (passando per un vertice) secondo un altro poliedro convesso.

*
* *

Sulla disuguaglianza $x A \geqq O$ $(x \geq 0)$ (7). Sia $A = [a_{rs}]$ una matrice (reale e costante) di tipo $n \times p$, priva di colonne negative, $x = (x_1, \ldots, x_n) \geq 0$ un n complesso o vettore non negativo. Dicendo $a, b, c, \ldots, l$ le righe successive di A, qualunque sia x, si ha:

$$x A = x_1 a + x_2 b + x_3 c + \ldots + x_n l. \tag{19}$$

Per avere $x A \geqq 0$ sarà necessario che gli addendi al secondo membro siano vettori non tutti negativi ed è sufficiente che, ordinando opportunamente, se occorre, le righe di A, nei vettori

$$x_1 a;\; x_1 a + x_2 b;\; x_1 a + x_2 b + x_3 c;\ldots \tag{20}$$

da un certo punto in poi vada aumentando, o almeno non diminuendo, il numero degli elementi $\geqq 0$ sino a diventare e rimanere uguale a n. Ciò accade certamente se una delle righe, che può sempre supporsi al primo posto, abbia i suoi elementi tutti positivi, perchè allora si possono scegliere $x_2, x_3, \ldots$ tutti > 0 e tali che, fissato a piacere $x_1 > 0$, tutti i vettori (20) riescano non negativi: anzi, si possono fissare a piacere $x_2, \ldots, x_n$ e prendere poi x_1 sufficientemente grande. Analogamente, se la prima riga non è positiva, ma riesce > 0 uno dei vettori intermedi della successione (20).

Se non vi è alcuna riga ad elementi tutti > 0, siano:

$$\left.\begin{array}{ll} (21) & a_1, a_2, \ldots, a_q \\ (22) & b_1, b_2, \ldots, b_q \end{array}\right\} q \leqq n$$

gli elementi corrispondenti di a e b che sono di segno opposto e precisamente > 0 in una riga e $\leqq 0$ nell'altra. Indichiamo con m_a, M_a rispettivamente il minimo elemento positivo fra i (21) e il massimo valore assoluto

(7) Scrivendo $A \geq B$ s'intende che gli elementi di A sono $\geqq$ ma non tutti eguali ai corrispondenti di B.

degli elementi stessi che sono $\leqq 0$; con m_b, M_b gli analoghi minimo e massimo per gli elementi (22). Affinchè le componenti $\geqq 0$ del vettore

$$\mathrm{a}' = x_1\,\mathrm{a} + x_2\,\mathrm{b} \tag{23}$$

siano in numero $\geqq q$ occorre e basta scegliere x_1 ed x_2 tali che [8]:

$$\lambda_1 = \frac{M_a}{m_b} \leqq \frac{x_2}{x_1} \leqq \frac{m_a}{M_b} = \mu_1 ; \qquad x_1 > 0, \tag{24}$$

il che esige:

$$\lambda_1 \leqq \mu_1 . \tag{I}$$

Se gli elementi (22) fossero tutti $\leqq 0$, i (21) sarebbero tutti positivi, $m_b = M_a = 0$, ed il primo membro di (24) si prenderebbe eguale a zero; se i (21) sono tutti $\leqq 0$ quindi i (22) tutti > 0, si ha $m_a = M_b = 0$ e si prenderà $\lambda_2 = +\infty$.

Se $x_2 > 0$ e vale la (24), gli elementi negativi di a′ capitano solo nei posti occupati da elementi negativi oppure zero in entrambi i vettori a e b. Perciò gli elementi $\geqq 0$ di a′ sono in numero non inferiore sia a quelli $\geqq 0$ di a, che a quelli $\geqq 0$ di b. Se si tralasciasse qualcuna delle coppie (21)-(22), M_a non potrebbe aumentare, mentre m_b non potrebbe diminuire, cosicchè λ_1 non aumenterebbe; per analoga ragione μ_1 non diminuirebbe, cioè l'intervallo (λ_1, μ_1) non si restringerebbe. Però l'allargamento di (λ_1, μ_1) potrebbe far diventare $< q$ il numero degli elementi positivi di a′ e non far capitare quelli $\leqq 0$ nei posti che in a e b sono occupati anch'essi da elementi $\leqq 0$. Dunque conviene operare su tutte le q coppie (21) (22). Nel § 1 si vedrà che può occorrere di restringerle (λ_1, μ_1); così i successivi intervalli.

Scegliamo la prima riga di A fra quelle che hanno il massimo numero di elementi $\geqq 0$ e prendiamo $x_1 = 1$, come si può sempre fare essendo x determinabile solo a meno di un fattore scalare positivo arbitrario. Operando su a′ e c, come si è operato su a e b per avere x_2, si otterrà per x_3 una limitazione analoga alla (24) e che, se $x_3 > 0$, $\mathrm{a}'' = x_1\,\mathrm{a} + x_2\mathrm{b} + x_3\mathrm{c}$ ha un numero di elementi $\geqq 0$ non inferiore a quelli di a′ e c. Così proseguendo, se le diseguaglianze analoghe alla (I) via via ottenute col procedere come sopra sono tutte soddisfatte, si otterrà una successione come (20) nei cui vettori il numero degli elementi $\geqq 0$ non può diminuire, quindi ha un

(8) Cfr. la mia Nota cit. (1), formula 5, pag. 2.

massimo. Dico che essendo A priva di colonne ≤ 0, ed $\mathrm{x} > 0$, questo massimo è n. Prima di dimostrare ciò, osserviamo che scegliere a nel modo sopra indicato non è necessario.

Poniamo che il massimo predetto sia $r < n$ e venga raggiunto, ad es., da:

$$\mathrm{a}'' = x_1\,\mathrm{a} + x_2\,\mathrm{b} + x_3\,\mathrm{c}.$$

Possiamo supporre che gli r elementi $\geqq 0$ di a'' sono i primi r, sicchè i rimanenti $n - r$ sono tutti negativi. Per quel che si è già visto a proposito di a' rispetto ad a e b, gli elementi < 0 di a'' capitano solo in posti occupati in a' e c, quindi in a, b e c, da elementi non positivi. Cioè nelle righe a, b, c gli ultimi $n - r$ elementi sarebbero tutti $\leqq 0$. Se in un'altra riga di A, ad es. d, qualcuno degli ultimi $n - r$ posti fosse occupato da un elemento > 0, la combinazione $\mathrm{a}'' + x_4\,d$, con x_4 soddisfaciente ad una limitazione analoga alla (24), avrebbe più di r posti occupati da elementi $\geqq 0$. Dunque, se $r < n$, le ultime $n - r$ colonne di A sarebbero tutte non positive, il che si è escluso.

Si conclude che:

d) *se A è priva di colonne ≤ 0 e se i suoi elementi soddisfanno alla diseguaglianza* (I) *e alle analoghe che via via si deducono dal procedimento indicato,* [9] *è possibile costruire $x \geq 0$ in modo da avere* $\mathrm{x}\,A \geqq 0$.

La catena di diseguaglianze di cui sopra potrebbe cambiare permutando le righe di A e potrebbero cambiare, di conseguenza, anche i vettori $\mathrm{x} \geq 0$ che si costruiscono. Naturalmente, solo le permutazioni che danno una catena di $n - 1$ diseguaglianze, come la (I), soddisfatte dagli elementi di A, danno luogo a vettori $\mathrm{x} \geq 0$ pei quali $\mathrm{x}\,A \geqq 0$ e ad una catena di $n - 1$ intervalli finiti o superiormente illimitati, in cui variano a piacere i rapporti di tutte le variabili a una di esse. Le soluzioni date da una catena sono tutti e soli i punti di un parallelepipedo (con le facce parallele agli iperpiani coordinati) contenuti nel cono poliedrale converso (col vertice nell'origine) rappresentato da $\mathrm{x\,A} \geqq 0$.[10].

---

[9] Queste diseguaglianze, come è dimostrato nel testo della *Sig.na Passaquindici*, operano solo su elementi di A, cioè sono indipendenti dai coefficienti delle combinazioni lineari via via eseguite È questo fatto che dà significato e validità costruttiva alla catena di disuguaglianze cui si accenna.

[10] Cfr. Hermann WEYL: *Elementare Theorie der konvenen Polyeder* [Comm. Math. Helvetia, 7 (1934-1935) pp. 290-306] tradotto in inglese da H. W. KUHN ed A. W. TUCKER in: *Contribution to the theory of Games* [Ann. of Math. Studies, 24, Princeton Univ. Press (1950)]. Cfr., in particolare, D. GALE: *Convex polyedral cones and linear inequalities* ed M. GERSTENHABER: *Theory of convex polyedral cones* [*Activity Analysis*, cit. (2), pp. 287-297

Se A è di rango p e sono linearmente indipendenti, ad es., le prime p righe, si può scrivere $A = \begin{bmatrix} a \\ \lambda \end{bmatrix}$ con λ matrice opportuna ad $n-p$ righe. Basta allora trovare un vettore $x' \geq 0$ pel quale si abbia $x' a \geqq 0$ per avere $(x' \mid 0) A \geqq 0$. Il vettore $(x' \mid 0)$ si dice *soluzione base* di (2); se le p componenti di x' non sono tutte positive, $(x' \mid 0)$ si dice *degenerata*. Il modo di costruire $x' \geq 0$ è ovvio in quel che precede.

§ 1. — Calcolo di soluzioni della diseguaglianza $xA \geqq \beta$, $x \geq 0$.

1. — Cominciamo dal caso $\beta = 0$ e supponiamo che A, matrice costante assegnata di tipo $n \times p$, e rango p soddisfi alle condizioni perchè si abbia $x A \geqq 0$, con $x \geq 0$, indicate nella introduzione del prof. CHERUBINO [11].

Sia a , b , c , . . . , l l'ordinamento delle righe di A, $x_1, \ldots, x_n$ gli elementi di x. Prendiamo $x_1 = 1$ e x_2 nell'intervallo dato dalle (24) e poniamo:

$$a' = a + x_2 b \tag{1.1}$$

$$a'' = a + x_2 b + x_3 c \tag{1.2}$$

con x_3 variabile nell'intervallo assegnato con la limitazione:

$$\lambda_2 = \frac{M_{a'}}{m_c} \leqq x_3 \leqq \frac{m_{a'}}{M_c} = \mu_2 . \tag{1.3}$$

Consideriamo i soliti elementi di a′ che hanno segno opposto ai corrispondenti elementi di c (sempre > 0 in una e $\leqq 0$ nell'altra riga) e diciamo

---

e 298-316]. Un ruolo fondamentale è giuocato dal teorema di MINKOWSKI [*Geometry der Zahlen*, Lipsia, Teubner, (1896-1910)] e WEYL e da uno di von NEUMANN-MORGENSTERN [*Theory of Games and economic behavior*, Princeton Univ. Press. pp. 640 (1947) p. 141] chiamato, questo secondo, « *theorem of the alternative of a matrix* ». Cfr., in particolare, *Activity Analysis*, cit. (2), p. 291 th. I ed Ia, e pp. 294-295, th. 4 e 4a: entrambi questi teoremi si esprimono in matrici con eguaglianza o diseguaglianze lineari. Nel cap. XIX di Activity Analisy cit. (3), a pp. 323 e 325, th. 4 e th. 5, vi sono due condizioni equivalenti necessarie e sufficienti per l'esistenza del massimo o minimo di una funzione lineare. Le stesse, in altra forma (th. 2, p. 51) si trovano sempre per problemi duali, nel IV articolo, di GOLDMAN e TUCKER, in *Linear inequalities and related systems* [KUHN e TUCKER: Ann. of Math. Studies, Princeton Univ. Press, (1956) pp. 322]. Anche quest'altra forma si esprime in matrici.

(11) Questa Nota è la prima parte della mia tesi di laurea: seguirà una seconda con applicazioni di Calcolo delle Matrici e con un'importante applicazione del § 5.

a_r, b_r gli elementi di a e b che entrano in quelli sopradetti di a'. Si trova subito che se:

$$\text{con } b_r > 0 \quad \text{è} \quad a_r + \lambda_1 b_r > 0$$

$$\text{con } b_r < 0 \quad \text{è} \quad a_r + \mu_1 b_r > 0$$

posto:

$$\mu' = \min (a_r + \lambda_1 b_r) ; \mu'' = \min (a_r + \mu_1 b_r) \tag{1.4}$$

si ha:

$$m_{a'} = \min (\mu', \mu'') = \mu. \tag{1.5}$$

Così pure se:

$$\text{con } b_r > 0 \quad \text{è} \quad a_r + \lambda_1 b_r < 0$$

$$\text{con } b_r < 0 \quad \text{è} \quad a_r + \mu_1 b_r < 0$$

ponendo:

$$\lambda' = \max |a_r + \lambda_1 b_r| ; \lambda'' = \max |a_r + \mu_1 b_r| \tag{1.6}$$

risulta

$$M_{a'} = \max (\lambda', \lambda'') = \lambda . \tag{1.7}$$

Dunque la limitazione (1.3) si scrive:

$$\lambda_2 = \frac{\lambda}{m_c} \leqq x_3 \leqq \frac{\mu}{M_c} = \mu_2 . \tag{1.II}$$

Orbene, λ_2 e μ_2 contengono linearmente λ_1 e μ_1, perciò occorre che la diseguaglianza $\lambda_2 \leqq \mu_2$ sia compatibile con l'altra $\lambda_1 \leqq \mu_1$. Se ciò non accadesse non si concluderà senz'altro che la diseguaglianza in oggetto è impossibile; si proverà a restringere l'intervallo (λ_1 , μ_1) in modo da avere un nuovo intervallo (λ_1' , μ_1') contenuto nel precedente e tale che sostituendo λ_1 con λ_1' e μ_1 con μ_1', la disuguaglianza $\lambda_2 \leqq \mu_2$ sia soddisfatta. Solo se ciò risultasse impossibile non esisterebbero soluzioni della diseguaglianza proposta relative all'ordinamento di righe considerato.

Passiamo a calcolare $m_{a''}$ e $M_{a''}$. Si considereranno soltanto gli elementi di a'' che hanno segno contrario a quelli di egual posto in d (sempre $\leqq 0$ nell'una riga e > 0 nell'altra). Occorre anche qui distinguere fra gli elementi di a'' quelli $\leqq 0$ e quelli > 0 e fare le varie possibili ipotesi sui segni degli elementi b_r e c_r che compaiono in quegli elementi di a'': si avranno quattro possibilità secondo che b_r e c_r sono entrambi positivi, entrambi negativi, positivo il primo e negativo il secondo, o viceversa. Sostituendo, nei 4 casi, per x_2, x_3 gli estremi inferiori o superiori dei rispettivi intervalli, si avranno gli elementi di a'' positivi o negativi e di minimo o massimo valore assoluto nei 4 accoppiamenti, determinando così il minimo dei minimi $m_{a''} = \bar{\mu}$ se positivi ed il massimo dei massimi valori assoluti, se negativi, $M_{a''} = \bar{\lambda}$; onde la limitazione:

$$\lambda_3 = \frac{\bar{\lambda}}{m_d} \leqq x_4 \leqq \frac{\bar{\mu}}{M_d} = \mu_3 \tag{1.III}$$

da accordare con le precedenti restringendo, se occorre, uno o entrambi gli intervalli (λ_1, μ_1) e (λ_2, μ_2). E così di seguito.

È ovvio che qualcuno degli intervalli di variazione di $x_2, x_3, x_4, \ldots$ può risultare illimitato, però solo a destra, perchè deve essere $\mathrm{x} \geq 0$.

La ricerca degli estremi degli intervalli in cui variano $x_2, x_3, \ldots$ equivale a risolvere un certo numero di volte il problema della programmazione lineare per funzioni come

$$a_r + x_1 b_r + x_2 c_r + \ldots$$

a $2, 3, 4, \ldots$ termini e per uno o più valori dell'indice r.

Questo fatto accosta il metodo seguito ai suggerimenti di G. W. BROWN e T. C. KOOPMANS, di cui a pp. 379-380 di Activity Analysis cit. (²).

La compatibilità delle diseguaglianze (I), (1.II), ... è sufficiente per l'esistenza di soluzioni di $\mathrm{x}\, A \geqq 0$; $\mathrm{x} \geq 0$, nell'ordine di righe considerato. Si ottiene così un parallelepipedo con facce parallele agli iperpiani coordinati appartenente al dato cono poliedrale convesso di vertice l'origine.

2. — Passiamo al caso $\beta \neq 0$ e diciamo $A^{(i)}$ la matrice che differisce da A per avere la riga i^{ma} moltiplicata per $\varrho > 0$, e con $B^{(i)}$ quella che ha righe tutte nulle meno la i^{ma} che coincide con β. Ci riduciamo così al caso precedente risolvendo, per $\mathrm{x} \geq 0$ ed $x_i = 1$, la diseguaglianza

$$\mathrm{x}\,[A^{(i)} - B^{(i)}] \geqq 0 \tag{1.8}$$

nella quale la riga i^{ma} è $\varrho\, \mathrm{a} - \beta$, a essendo la riga i^{ma} di A. Dico che se $\mathrm{x}\, A \geqq \beta$ è compatibile con $\mathrm{x} \geq 0$, vi è almeno un i per il quale $\varrho\, \mathrm{a} - \beta$, con $\varrho > 0$, ammette qualche elemento > 0. Invero, se così non fosse, qualunque sia $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_n) \geq 0$, si avrebbe sempre, ad es.:

$$\mathrm{y}\, A < n\, \beta \tag{1.9}$$

quindi, per $x = \frac{1}{n} y$, sarebbe :

$$x A < \beta \tag{1.10}$$

contro il supposto, perchè dall'arbitrarietà di $y \geq 0$ seguirebbe quella di $x \geq 0$. Se, ad es., un elemento > 0 di $\varrho a - \beta$ è al primo posto, detti a_1 e β_1 gli elementi al primo posto in a e β, si ha:

$$\varrho a_1 - \beta_1 > 0 , \tag{1.11}$$

diseguaglianza che ci dà un intervallo limitato o illimitato in cui varia $\varrho > 0$. Posto :

$$\bar{a} = \varrho a + \beta', \quad \beta' = - \beta \tag{1.12}$$

$$\bar{a}' = \bar{a} + x_2 b \tag{1.13}$$

si prenderà x_2 tale che :

$$\frac{M_{\bar{a}}}{m_b} \leqq x_2 \leqq \frac{m_{\bar{a}}}{M_b} \tag{1.$\bar{\mathrm{I}}$}$$

nella quale $M_{\bar{a}}$, $m_{\bar{a}}$ si calcolano da $\bar{a} = \varrho a + \beta'$, cioè dagli elementi di a e β e dagli estremi dell'intervallo in cui varia ϱ, come si è fatto per gli analoghi minimo e mssimo relativi ad a'.

Dopo di che, tutto procede come nel caso di $\beta = 0$. Occorrerà solo tener conto del fatto che quando ϱ è illimitato, potrebbe riuscir tale anche $M_{\bar{a}}$. In tal caso, si proverà a cambiare la riga i^{ma} della (1.8) oppure si restringerà l'intervallo in cui varia ϱ per verificare, se possibile, la (1.$\bar{\mathrm{I}}$). E via di seguito. Ricordisi che conviene supporre che A sia di rango p. È ovvio che, anche con $\beta \neq 0$, se il sistema è compatibile si hanno soluzioni base, eventualmente degenerate.

3. — Il procedimento indicato in questo $ può seguirsi anche per risolvere la diseguaglianza :

$$x A > \beta ; \quad x > 0, \quad \text{od} \quad x \geq 0, \tag{1.14}$$

con la sola differenza che in ogni catena di limitazioni per gli elementi di x si deve prendere almeno nell'ultima il solo segno minore, anzichè $\leqq$. Ne segue che l'insieme convesso descritto da x può riuscir aperto e non esservi massimo o minimo per z.

4. — Una questione che talvolta interessa è quella di far sì che la successione (20), ove a sia sostituito da $\overline{a}$, presenti sin da principio i suoi vettori con componenti positive in numero non decrescente, per il che basta che al primo posto si ponga la riga $\varrho\,a - \beta$ scegliendo a e ϱ in modo che essa presenti il massimo numero di elementi positivi, fatto che può interessare di per sè stesso ([12]).

A questo scopo, prendiamo a fra quelle righe di A che, confrontare con β, presentino il massimo numero, diciamolo q, di elementi corrispondenti aventi i segni delle 5 coppie:

$$++\,;\ +0\,;\ +-\,;\ 0-\,;\ -- \tag{1.15}$$

(le altre coppie possibili $0+$; $0\,0$; $-+$; -0 danno in $\varrho\,a - \beta$ solo elementi $\leqq 0$) e siano esse, ad es., quelle degli elementi $a_1, a_2, \dots, a_q$. Si tratta di avere, se possibile:

$$\varrho\, a_h - \beta_h > 0\,;\quad h = 1, \dots, q\,. \tag{1.16}$$

Nelle prime tre coppie (1.15) occorre e basta prendere:

$$\varrho > \frac{\beta_h}{a_h}\,,\quad (a_h > 0)\,; \tag{1.17}$$

per la quarta coppia ϱ è arbitrario, mentre per la quinta occorre:

$$\varrho < \frac{\beta_k}{a_k}\,,\ (a_k < 0). \tag{1.18}$$

([12]) Ad es., se A è la matrice dei coefficienti di scambio in un sistema economico, β il vettore degli interventi pubblici o privati, p quello dei prezzi, può interessare che, oltre ad avere $p\,[I - A] + \beta > 0$, vi sia qualche settore, ad es. il 1^0, pel quale esista un prezzo ϱ tale che $\varrho\,a + \beta$ possegga il maggior numero possibile di elementi positivi. Il che significherebbe che gl'interventi rappresentati dal vettore β sarebbero riusciti a far sì che, nei loro acquisti in quel settore, il maggior numero degli altri non superi certi costi unitari per le rispettive quote di produzione.

Supponendo che A non sia priva di elementi positivi e che a non ne manchi, è possibile soddisfare almeno una delle (1.17), quindi, per $\varrho > 0$ variabile in un certo intervallo limitato almeno inferiormente, $\overline{a} = \varrho\, a - \beta$ avrà certo qualche elemento positivo. Cambiando la riga a di A, pur restando fra quelle che presentano lo stesso numero q di accoppiamenti (1.15) con β, il numero degli elementi positivi ottenibili potrebbe essere diverso, ed anche maggiore del precedente. Diciamo q_1 (certo > 0) il massimo numero di elementi > 0 ottenibili con le righe aventi q coppie come (1.15). Passando a quelle righe di A che presentano un numero di coppie coi segni (1.15) immediatamente inferiore a q, il massimo numero di elementi positivi ottenibili nel modo anzidetto sarà un $q_2 \geqq 0$. Così continuando, si costruisce una successione finita $q_1, q_2, \ldots$ il cui massimo $\overline{q}$, pel fatto che A non manca di elementi positivi, è $\geqq 1$.

La riga a cui corrisponde $\overline{q}$ è quella di A, che moltiplicata per ϱ e diminuita di β, si porterà al primo posto.

§ 2. — A, β, γ variabili.

5. — Gli elementi $a_{rs}, \beta_r, \gamma_r$ di A, β, γ siano funzioni limitate di una o più variabili, appartenenti a un certo insieme $\mathfrak{I}$, e detti m_{rs} e M_{rs} gli estremi inferiore e superiore di a_{rs}, poniamo $m = [m_{rs}]$, $M = [M_{rs}]$.

Siano poi m_β, M_β, m_γ, M_γ i p-complessi orizzontali degli estremi rispettivamente inferiore e superiore di β e γ. Poichè $\gamma \geqq m_\gamma$; $M \geqq A$; $m \leqq A$; $M_\beta \geqq \beta$, perchè sia:

$$(2.1) \qquad \gamma > x\, A > \beta \quad \text{oppure} \quad (2.1)_1 \qquad \gamma \geqq \mathrm{x}\, A \geqq \beta$$

basta avere:

$$(2.2) \quad \begin{cases} m_\gamma > \mathrm{x}\, M \\ \mathrm{x}\, m > M_\beta \end{cases} \quad \text{oppure} \quad (2.2)_1 \begin{cases} m_\gamma \geqq \mathrm{x}\, M \\ \mathrm{x}\, m \geqq M_\beta . \end{cases}$$

Andiamo ora ad indicare un caso in cui le (2.2) equivalgono alla limitazione (2.1), cioè un caso in cui questa ha come conseguenza quella. Così per le $(2.1)_1$ rispetto alle $(2.2)_1$.

Diremo che A, β, γ, i cui elementi sono funzioni limitate di un punto P variabile nell'insieme $\mathfrak{I}$, sono *limitate in senso stretto*, quando gli estremi inferiori, così quelli superiori, dei loro elementi sono raggiunti contemporaneamente in $\mathfrak{I}$: allora $m, M, m_\beta, M_\beta, m_\gamma, M_\gamma$ si diranno estremi di A, β, γ presi in senso stretto. Diremo poi che la coppia *ordinata* $(A\ ,\ \beta)$, e così $(\gamma\ ,\ A)$, è *limitata in senso stretto*, quando, tendendo P a un certo punto di $\mathcal{J}$, gli elementi del primo termine della coppia tendono tutti ai propri estremi inferiori e quelli del secondo termine tendono tutti ai propri estremi superiori ([13]).

Poniamo che le coppie ordinate $(A\ ,\ \beta)$ e $(\gamma\ ,\ A)$ siano entrambe limitate in senso stretto e siano P_0 e Q_0 i punti di accumulazione di $\mathcal{J}$ in cui quelle coppie tendono a raggiungere i loro estremi in senso stretto. Poichè da (2.1) si ha che:

$$(2.3)\quad (\gamma - m_\gamma + m_\gamma) > \mathrm{x}\,[A - M + M]\ ;\ \mathrm{x}\,[A - m + m] > (\beta - M_\beta + M_\beta)\,,$$

passando ai limiti rispettivamente per $P \to Q_0$ e $P \to P_0$ si ha che:

$$(2.4)\qquad m_\gamma > \mathrm{x}\,M\ ; \qquad\qquad (2.5)\qquad \mathrm{x}\,m > M_\beta\,.$$

Riunendo con le (2.2), che hanno per conseguenza la (2.1), si conclude che:

Affinchè valga la limitazione (2.1) *è sufficiente che valgano le* (2.2). *Se le coppie ordinate* $(A\ ,\ \beta)$, $(\gamma\ ,\ A)$ *sono limitate contemporaneamente ed in senso stretto,* allora *le* (2.2) *sono non soltanto sufficienti ma anche necessarie perché valga* (2.1). Analogamente per le $(2.1)_1$, $(2.2)_1$.

La limitazione in senso stretto si ha, ad es,, quando β e γ sono costanti e gli elementi di A sono funzioni lineari di t a cofficienti costanti del tipo:

$$t\,a_{rs} + b_{rs}\,;\ \ \frac{1}{t}\,a_{hk} + b_{hk}$$

secondo che $a_{rs} \geqq 0$ od $a_{hk} < 0$, t variabile nell'intervallo chiuso $(t_0\ ,\ t_1)$, $0 < t_0 < t_1$. Così definita, A tende in senso stretto all'estremo inferiore m od al superiore M, rispettivamente per $t \to t_0$ e $t \to t_1$. Lo stesso per $A = B\,t$ ed $A = e^{B\,t}$, con B matrice non negativa costante arbitaria ([14]). È ovvio come si formino esempi di coppie ordinate limitate in senso stretto.

([13]) Se questi estremi sono massimi o minimi si intendono assunti dagli elementi della coppia in uno stesso punto di $\mathcal{J}$.

([14]) Numerosi altri esempi, con β, γ non necessariamente costanti, si trovano facilmente.

Condizioni sufficienti per la risoluzione della limitazione (2.1) sono state date, in sostanza, nel § 2, n. 4, della Nota del Prof. S. CHERUBINO, citata [1].

6. — Sia $\mu = [\mu_{rs}]$ una matrice dello stesso tipo di A, i cui elementi soddisfano alla relazione $-\mu \leqq \mu_{rs} \leqq \mu \leqq \max M_r$ e consideriamo la matrice:

$$C = A + \mu = [a_{rs} + \mu_{rs}] . \tag{2.5}$$

Condizioni sufficienti affinchè, per $\mathrm{x} > 0$, od $x \geq 0$, sia:

$$\gamma > \mathrm{x}\, C > \beta \qquad \text{oppure} \qquad \gamma \geqq \mathrm{x}\, C \geqq \beta$$

si deducono anch'esse, in modo ovvio, dal § 2, n. 5 della Nota citata [1].

§ 3. — Applicazioni ai sistemi differenziali lineari.

7. — Il sistema differenziale lineare:

$$\mathrm{y}' = \mathrm{y}\, A + \mathrm{f} , \tag{3.1}$$

con $A = [a_{rs}]$, $r , s = 1 , \ldots , n$; $\mathrm{f} = (f_1 , \ldots , f_n)$ funzioni integrabili di t nell'intervallo $(0 , t)$, $y = (y_1 , y_2 , \ldots , y_n)$, ha per integrale generale:

$$\mathrm{y} = \mathrm{c}\, \mathcal{X}(A) + \mathrm{g} \tag{3.2}$$

dove c è un n-complesso orizzontale costante arbitrario, determinazione iniziale di y, $\mathcal{X}(A)$ è la matrizzante destra di A, che nel caso di A costante coincide con l'esponenziale e^{At} e nel caso di A variabile con la somma della serie totalmente convergente:

$$\mathcal{X}(A) = D_0 + D_1 + D_2 + \ldots \tag{3.3}$$

essendo:

$$D_0 = 1 , \; D_k = \int_0^t D_{k-1}(\tau)\, A\,(\tau)\, \mathrm{d}\,\tau ; \; k = 1 \ldots n$$

e g l'n-complesso orizzontale

$$\mathrm{g} = \left[\int_0^t \mathrm{f}\,(\tau)\, \mathcal{X}(A\,(\tau))^{-1}\, \mathrm{d}\tau \right] \mathcal{X}(\mathrm{A}\,(t)) \tag{3.4}$$

che per A costante diventa:

$$g = \left[\int_0^t f(\tau)\, e^{-A\tau}\, d\tau \right] e^{At} = \int_0^t f(\tau)\, e^{A(t-\tau)}\, d\tau . \tag{3.5}$$

Si domanda quali sono le condizioni sufficienti affinchè sia:

$$\gamma > c\, \mathscr{E}(A) > \beta \text{ , oppure} \tag{3.6}$$

$$\gamma \geqq c\, \mathscr{E}(A) \geqq \beta \tag{3.6_1}$$

con β, γ n-complessi (reali) costanti. Se y ha significato solo se positivo, poichè c è la sua determinazione iniziale, sarà necessariamente $c > 0$ ([15]).

8. — Nel caso di A costante, la limitazione da risolvere, rispetto a $c > 0$, è, ad es., nel caso (3.6):

$$\gamma > c\, e^{At} > \beta . \tag{3.7}$$

Dalla serie esponenziale e^{At} si ha che converge la serie dei massimi moduli degli elementi della serie ottenuta da essa sopprimendo i primi due termini e dividendo per t^2. Chiamiamo ν tale somma. Indicando con [1] la matrice di ordine n ad elementi tutti eguali a 1, si ha:

$$I + A\,t + \nu\, t^2\, [1] > e^{At} > I + A\,t - \nu\, t^2\, [1] \tag{3.8}$$

e ponendo:

$$I + A\,t = A'$$

si ha che la (3.7) è conseguenza delle:

$$c\,[A' - \nu\, t^2\, [1]] > \beta ; \quad \gamma > c\,[A' + \nu\, t^2\, [1]] \tag{3.9}$$

([15]) È questo il caso che si presenta, ad es., nelle applicazioni all'economia, delle quali si è occupato il prof. CHERUBINO. Cfr., ad es.; *Matrici non negative e loro applicazioni all'economia ed alla tecnica* [Statistica, Bologna, n. 3, anno XVII, (1957) pagg. 349-364], conferenza tenuta all'Ist. di Geometria dell'Università di Bologna. Può anche volersi $c \geqq 0$.

nelle quali conviene supporre che si abbia già, per una scelta conveniente di $c > 0$ e per t nell'intervallo $(0, t')$:

$$\gamma > c A' > \beta . \tag{3.10}$$

Occorre quindi:

$$c A' - \beta > c \nu t^2 [1]; \quad \gamma - c A' > c \nu t^2 [1]. \tag{3.11}$$

Supponiamo che gli elementi di β e γ siano funzioni lineari di t variabili in un intervallo abbastanza piccolo $(0, t')$ e poniamo $\gamma = \gamma' + \gamma'' t$, $\beta = \beta' + \beta'' t$, $c A' = a + bt$. La (3.10) si scrive:

$$\gamma' + \gamma'' t > a + b t > \beta' + \beta'' t$$

cioè:

$$\left.\begin{array}{ll} (3.12) & t \gtrless \dfrac{a_r - \gamma'_r}{\gamma''_r - b_r}, \text{ secondo che } \gamma''_r > b_r \text{ o } \gamma''_r < b_r \\[2ex] (3.13) & t \gtrless \dfrac{\beta'_r - a_r}{b_r - \beta''_r}, \text{ secondo che } \beta''_r < b_r \text{ o } \beta''_r > b_r \end{array}\right\} r = 1, 2, \ldots, n$$

Da cui:

$$\text{se } \gamma''_r < b_r < \beta''_r ; \; t < \min\left(\frac{\gamma'_r - a_r}{b_r - \gamma''_r}, \frac{a_r - \beta'_r}{\beta''_r - b_r}\right)$$

$$\text{se } \gamma''_r > b_r > \beta''_r : \; t > \max\left(\frac{a_r - \gamma'_r}{\gamma''_r - b'_r}, \frac{\beta'_r - a_r}{b_r - \beta''_r}\right).$$

Le (3.11) danno una seconda limitazione del tipo:

$$\xi_i + \eta_i t > \mu_i t^2 ; \tag{3.11$_1$}$$

dove $\xi_i + \eta_i \; t$; $i = 1, 2, \ldots, n$, sono gli elementi del vettore $cA' - \beta$ oppure $\gamma - c A'$, μ_i i corrispondenti di $c\nu$ [1].

Chiamando t_0 un valore dell'intervallo $(0, t')$ soddisfacente a (3.12)-(3.13), sostituendo nel 1^0 membro di (3-11), ed indicando con $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 t_0$ il minimo valore da esso assunto, con μ il massimo μ_i, la condizione sufficiente per t è:

$$t < + \sqrt{\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 t_0}{\mu}} . \tag{3.14}$$

9. — La matrice A sia funzione di t integrabile in $(0\,,\,t')$. Tenendo presente (3.3), passando alla serie delle matrici modulo ed indicando con B_1 la matrice M [1], si ha (16):

$$\mathscr{X}(A) \leqq \mathrm{I} + t\,B_1 + t^2\,B_1^2 + t^3\,B_1^3 + \ldots$$

Detta ν [1] la somma della serie :

$$B_1^2 + t\,B_1^3 + \ldots$$

si scrive :

$$B_1' + \nu\,t^2\,[1] \geqq \mathscr{X}(A) > B_1' - \nu\,t^2\,[1]$$

dove si è posto :

$$B' = \mathrm{I} + t\,B_1\,.$$

Dopo di che si può procedere come per A costante.

10. — Nel caso di A costante, si è trovato :

$$\mathrm{g} = \int_0^t \mathrm{f}(\tau)\,e^{A\,(t-\tau)}\,\mathrm{d}\,\tau. \tag{3.15}$$

Pel teorema del valor medio, questa si scrive :

$$\mathrm{g} = t\,\mathrm{f}\,(t_1)\,\mathrm{e}^{A\,(t-t_1)}\,;\quad 0 < t_1 < t\,. \tag{3.16}$$

Se l'n-complesso $\mathrm{f}\,(t_1) > 0$, $0 < t_1 \leqq t$, è qualunque, la (3.16) ci mostra che per avere $g > 0$, occorre e basta :

$$e^{A\,(t-t_1)} \geqq 0\,, \tag{3.17}$$

pel che, a sua volta, occorre e basta che gli elementi non principali di A siano $\geqq 0$ (17).

---

(16) S. CHERUBINO : *Calcolo delle Matrici* [Roma, Cremonese (1957)] cap. I, § 12, n. 49, p. 101.

(17) Cfr. la nota (30) a piè di pag. 324 della Mem. di S. CHERUBINO : *Sui fondamenti matematici della teoria dell'equilibrio generale economico* [L'Industria, n. 3 del 1956, pp. 302-336].

Se A è funzione di t e $\mathrm{f}(\tau) \geq 0$, qualunque sia τ in $(0, t)$, sempre per il teorema del valor medio, si ha, tenendo presente (3.4):

$$\mathrm{g} = t\, \mathrm{f}(t_1)\, \mathcal{E}(A(t_1))^{-1}\, \mathcal{E}(A(t))\,;\quad 0 \leq t_1 \leq t\,; \tag{3.18}$$

e perchè sia $\mathrm{g} \geq 0$ con $\mathrm{f}(\tau) \geq 0$ qualunque, occorre e basta che:

$$\mathcal{E}(A(t_1))^{-1}\, \mathcal{E}(A(t)) \geq 0. \tag{3.19}$$

Per t sufficientemente piccolo, t_1 è prossimo a t e perciò (3.19) è prossima alla matrice identica, quindi è prossimamente $\mathrm{g} = t\, \mathrm{f}(t_1)$: tuttavia non si ha $\mathrm{g} \geq 0$ senza ulteriormente condizionare $\mathrm{f}(\tau) \geq 0$.

§ 4. — Sulla programmazione lineare.

11. — Consideriamo la funzione lineare omogenea:

$$z = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n = \mathrm{c}\, \mathrm{x}_{-1} \tag{4.1}$$

dove l'n-complesso x è ≥ 0, indeterminato e soddisfacente alla condizione:

$$A\, \mathrm{x}_{-1} = \mathrm{b}_{-1}\,;\quad \mathrm{x} \geq 0 \tag{4.2}$$

$A = [a_{ij}]$ matrice costante assegnata di tipo $p \times n$, $\mathrm{b} = (b_1, \ldots, b_p)$ un vettore ≥ 0 assegnato e costante assieme all'altro pure orizzontale c, quest'ultimo essendo ad elementi tutti diversi da zero. La (4.2) equivale a:

$$\left[\frac{A}{-A}\right] \mathrm{x}_{-1} \geqq (\mathrm{b} \,|\, -\mathrm{b})_{-1}\,;\quad \mathrm{x} \geq 0\,. \tag{4.3}$$

La matrice A può supporsi a righe linearmente indipendenti, cioè di rango p. Ricordando il n. 2 del § 1, si ha che nella (4.3) vale soltanto il segno eguale e che almeno una colonna di A o di $-A$, ad es. la prima, avrà un elemento positivo, ad es. il primo; perciò $a_1 > 0$ e $\varrho = \dfrac{b_1}{a_1}$. Dalle (4 3), se compatibili, si può avere (ad es., nel modo che abbiamo indicato), una soluzione base, eventualmente degenerata, partendo dalla quale si raggiunge (sempre se possibile) il massimo o il minimo di z, col metodo del simplesso.

§ 5. — Sistemi di polinomi definiti.

12. — Consideriamo i polinomi in x a coefficienti reali (costanti, oppure funzioni limitate di uno o più parametri):

$$a_{r\,0} + a_{r\,1}\, x + \ldots + a_{r\,p}\, x^p \; ; \; r = 1 , \ldots , n \tag{5.1}$$

a termini noti positivi, e proponiamoci di determinare, se esiste, un intervallo $(-\mu , \mu)$, $\mu > 0$, in modo che, per ogni x in esso contenuto, tutti i polinomi (5.1) assumano valore positivo.

I (5.1) sono, per ipotesi, positivi per $x = 0$; per continuità sono tali per valori di $x > 0$ abbastanza piccoli, che indichiamo ancora con x. Consideriamo la matrice

$$\mathcal{A} = \left[\frac{A}{A'}\right]$$

dove A ha per righe i coefficienti dei polinomi (5.1), mentre le righe di A' si ottengono da quelle di A cambiando di segno gli elementi i cui secondi indici sono dispari. Se x è in $(-\mu , \mu)$, vi è anche $-x$; potremo perciò prendere solo $x > 0$ e richiedere che

$$\mathcal{A}\,(1 , x , x^2 , \ldots , x^p)_{-1} > 0 \, . \tag{5.2}$$

Si tratta perciò di trovare soluzioni di

$$\mathcal{A}\, \mathrm{x}_{-1} > 0 \, , \; \mathrm{x} = (x_0 , \ldots , x_p) > 0 \; (^{18}), \tag{5.2'}$$

per le quali

$$x_r = x^r \; ; \; r = 0 , \ldots , p \, . \tag{5.3}$$

Poichè i polinomi (5.1) sono tutti positivi per $x = 0$, la (5.2') è soddisfatta per $\mathrm{x} = (1 , 0 , \ldots , 0)$; quindi lo è ancora se x varia abbastanza poco, rimanendo positivo. Sappiamo come determinare punti che soddisfino alla (5.2'): sia $\mathrm{x}' = (1 , \mu_1 , \mu_2 , \ldots , \mu_p) > 0$ uno di essi: il cono poliedrale convesso, senza frontiera e col vertice nell'origine, rappresentato da (5.2') conterrà tutti i punti del segmento che congiunge l'origine con x',

(18) Qui è applicabile proprio quanto è detto nell'introduzione (e nel § 1) perchè $\mathrm{x} > 0$ e le (5.2') sono compatibili anche per $r \leqq n$ righe qualunque.

le cui coordinate sono tutti e soli i punti degli intervalli $(0\ ,\ \mu_r)$; $r = 0\ ,1\ ,2\ ,\ldots,p\ ,\ \ \mu_0 = 1$, degli assi di riferimento. Per le (5.3), sarà (19):

$$0 < x \leqq \min \sqrt[r]{\mu_r} = \mu$$

e l'intervallo cercato è $(-\ \mu\ ,\ \mu)$.

---

(19) Si conviene che $\sqrt[0]{\mu_0} = \sqrt[0]{1} = 1$. Non sarà difficile fare in modo che μ risulti il più grande possibile.

N.B. Le seconde bozze di questa Nota erano già corrette quando abbiamo ricevuto l'interessante trattato di R. DORFMAN, P. A. SAMUELSON ed R. SOLOW: *Linear programming and economic analysis* [Mc Graw-Hill, New York, (1958) pp. VIII-525]. In questa pregevole opera specializzata non abbiamo trovato indicazioni generali per ottenere soluzioni di diseguaglianze come $xA \geqq 0$, $x \geqq 0$. Il « *complete description method* » della programmazione lineare esposto nel § 13 del Cap. IV, pp. 94-98 ha qualche analogia col metodo da noi seguito nella introduzione e nel § 1, ma non conduce allo scopo da noi raggiunto nel § 5, del quale si vedrà l'importanza nella seconda Nota di M. P.