ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LIONELLO LOMBARDI

Sulla semicontinuità degli integrali di Fubini-Tonelli

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 12, nº 1-2 (1958), p. 129-153

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1958_3_12_1-2_129_0>

SULLA SEMICONTINUITÀ DEGLI INTEGRALI DI FUBINI - TONELLI

di LIONELLO LOMBARDI (Milano)

Introduzione

La teoria degli integrali di Fubini-Tonelli è stata oggetto di ricerche dei proff. Faedo e Magenes. Al Faedo si debbono le condizioni necessarie e sufficienti per la continuità di tali funzionali, nonchè alcune condizioni necessarie per la loro semicontinuità. Il Magenes si è occupato, in uno studio sistematico, di dare condizioni sufficienti per la semicontinuità e l'esistenza dell'estremo, trattando anche le corrispondenti equazioni di Eulero: queste ricerche concernono una classe di integrali di Fubini-Tonelli, « quasi-regolari positivi », secondo la definizione data dal Magenes stesso.

Nel presente lavoro, che costituisce una rielaborazione della mia tesi di laurea presso l'Università di Pisa, sull'argomento « Integrali di Fubini-Tonelli » propostomi dal prof. Faedo, io do un'altra definizione di integrale quasi-regolare positivo. Con tale definizione, e con un'ipotesi ausiliaria, dimostro che *ogni integrale quasi-regolare positivo è semicontinuo inferiormente.* Non mi sembra che i miei risultati siano riconducibili a quelli del Magenes; nè d'altra parte conosco esempi in cui, pur avendosi la quasi-regolare positività, l'ipotesi ausiliaria introdotta non sia verificata.

§ 1. — **Definizioni.**

1. *Campo A* : Insieme aperto dello spazio cartesiano S_4 (x, z, y_1, y_2).

2. *Punti* P, Q, Q_0: P è il generico punto del campo A, e Q il generico punto del piano cartesiano (y_1', y_2') di cui chiamo Q_0 l'origine.

3. *Funzione* $f(P, Q)$: funzione continua assieme alle sue derivate

$$f_{y_1'}, f_{y_2'}, f_{y_1'y_1'}, f_{y_2'y_2'}, f_{y_1'x}, f_{y_2'z}.$$

4. *Bilinea C* : è una coppia di funzioni $y_1 = y_1(x)$ $(a \leq x \leq b)$, $y_2 = y_2(z)$ $(c \leq z \leq d)$, reali ed assolutamente continue, tali che tutti i punti del tipo $(x, z, y_1(x), y_2(z))$, che appunto chiameremo « punti della bilinea », siano

contenuti in A. Una bilinea è pertanto una superficie dello spazio S_4 (x, z, y_1, y_2).

5. *Ordinarietà.* Una bilinea si dice *ordinaria* se esiste finito l'integrale (di Lebesgue)

$$I(y_1, y_2) = \int_a^b \int_c^d f[x, z, y_1(x), y_2(z), y_1'(x), y_2'(z)]\, dx\, dz .$$

Nel seguito ometteremo per brevità, quando non vi sia possibilità di equivoco, l'indicazione dei limiti nell'integrale.

6. *Classe 1, 2, lipschizianità.* Una bilinea C si dice di classe 1 [di classe 2], [lipschiziana], se le funzioni $y_1(x)$ e $y_2(y)$, che chiameremo «componenti della C», hanno continue le derivate prime [hanno continue le derivate prime e seconde], [sono lipschiziane]. Tutte queste bilinee sono ordinarie, qualunque sia la funzione f.

7. *Topologia.* Se C è una bilinea e ϱ un numero > 0, diremo *intorno ϱ della C* l'insieme dei punti di A la cui distanza in S_4 dai punti della bilinea è $\leq \varrho$. Per brevità, chiameremo $\overline{C}$ una bilinea le cui componenti siano $\overline{y}_1(x)$ $(\overline{a} \leq x \leq \overline{b})$, e $\overline{y}_2(z)$ $(\overline{c} \leq z \leq \overline{d})$. Una bilinea C si dirà *appartenente propriamente* all'intorno ϱ della $\overline{C}$, se è

a) $|a - \overline{a}| < \varrho/4$, $|b - \overline{b}| < \varrho/4$, $|c - \overline{c}| < \varrho/4$, $|d - \overline{d}| < \varrho/4$.

b) Per ogni x comune ai segmenti ab e ab è

$$|y_1(x) - \overline{y}_1(x)| < \varrho/2$$

c) Per ogni z comune ai segmenti cd e cd è

$$|y_2(z) - \overline{y}_2(z)| < \varrho/2$$

d) Per ogni $x < \overline{a}$ ed appartenente ad ab e per ogni $z < \overline{c}$ ed appartenente a cd è

$$|y_1(x) - \overline{y}_1(\overline{a})| < \varrho/4 \qquad |y_2(z) - \overline{y}_2(\overline{c})| < \varrho/4$$

e) Per ogni $x > \overline{b}$ ed appartenente a ab e per ogni $z > \overline{d}$ ed appartenente a cd è

$$|y_1(x) - \overline{y}_1(\overline{b})| < \varrho/4 \qquad |y_2(z) - \overline{y}_2(\overline{d})| < \varrho/4 .$$

Tutti i punti della C appartengono quindi all'intorno ϱ della $\overline{C}$. [1]

---

(1) Problemi di Calcolo d. V. concernenti funzionali che presentano analogie con gli integrali di F. T. sono stati studiati mediante metriche diverse:

v. ad esempio M. PICONE, *Lez. di Analisi Funzionale* (Cap. II, § 2-3), Tumminelli Roma, 1946.

G. FICHERA 1) *Sull'ubicazione e l'unicità delle estremanti del polinomiale quadratico nella sfera di Hilbert* (Pubbl. INAC n. 160, 1949.

G. FICHERA: *Sui funzionali continui con la metrica di Fréchet.* (Atti Lincei, 1947, vol. II, fasc. 2).

8. $I(y_1, y_2)$, *sua semicontinuità.* Se $\overline{C}$ è una bilinea ordinaria, l'integrale

$$I(\overline{y}_1, \overline{y}_2) = \int_{\overline{a}}^{\overline{b}}\int_{\overline{c}}^{\overline{d}} f[x, z, \overline{y}_1(x), \overline{y}_2(z), \overline{y}_1'(x), \overline{y}_2'(z)]\, dx\, dz\,,$$

che il Faedo [1] (¹) ha chiamato *integrale di Fubini-Tonelli*, si dirà semicontinuo inferiormente [superiormente] [continuo], su C se, nella topologia dello spazio delle bilinee testè introdotta, si ha, considerando $I(y_1, y_2)$ come un funzionale definito sulle bilinee ordinarie,

$$\min_{C\to\overline{C}} \lim I(y_1, y_2) \geq I(y_1, y_2) \qquad [\max_{C\to\overline{C}} \lim I(y_1, y_2) \leq I(y_1, y_2)]$$

$$[\lim_{C\to\overline{C}} I(y_1, y_2) = I(y_1, y_2)]\,.$$

Se su $\overline{C}$ risulta $I(\overline{y}_1, \overline{y}_2) = +\infty$, si dirà che $I(y_1, y_2)$ è semicontinuo inferiormente su $\overline{C}$ se è $\lim_{C\to\overline{C}} I(y_1, y_2) = +\infty$.

9. *Funzione* $S(P, Q)$: è una funzione arbitraria, reale e continua con S_{xz}.

10. $B_S^f(P, Q, \overline{Q})$. Se $\overline{Q} \equiv (\overline{y}_1', \overline{y}_2')$ è un altro generico punto del piano (y_1', y_2'), definiamo

1.1 $$B_S^f(P, Q, \overline{Q}) = f(P, \overline{Q}) + (\overline{y}_1' - y_1') f_{y_1'}(P, Q) + (\overline{y}_2' - y_2') f_{y_2'}(P, Q) + \\ + (\overline{y}_1' - y_1')(\overline{y}_2' - y_2')\, S(P, Q)\,.$$

La funzione B_S^f è *bilineare* nelle $\overline{y}_1', \overline{y}_2'$.

11. *Funzione* $\mathcal{E}_S^f(P, Q, \overline{Q})$ *di Weierstrass*: è definita da

1.2 $$\mathcal{E}_S^f(P, Q, \overline{Q}) = f(P, \overline{Q}) - B_S^f(P, Q, \overline{Q})\,.$$

12. *Integrali* $Sqrp$ *e* qrp. Diremo che $I(y_1, y_2)$ è $Sqrp$ (quasi-regolare positivo rispetto ad S) se è sempre

1.3 $$\mathcal{E}_S^f(P, Q, \overline{Q}) \geq 0$$

Diremo che $I(y_1, y_2)$ è qrp (quasi-regolare positivo) se esiste almeno una funzione S tale che $I(y_1, y_2)$ sia $Sqrp$ (²).

(¹) V. bibliografia finale per i numeri tra [ ].

(²) Il Magenes chiama invece qrp un integrale quando esso soddisfa alle seguenti 3 condizioni

$$1.\ f_{y_1'y_1'} \geq 0 \qquad 2.\ f_{y_2'y_2'} \geq 0$$

3. $f(P, Q)$ è la somma di una funzione non negativa e di una del tipo

$$A(P) + y_1' B(P) + y_2' C(P) + y_1' \cdot y_2' D(P)\,.$$

13. *Funzione* $f_S(P, Q)$. Se $I(y_1, y_1)$ e $Sq\,r\,p$, definiamo

$$f_S(P, Q) = \mathcal{E}_S^f(P, Q_0, Q) = f(P, Q) - B_S^f(P, Q_0, Q)$$

La f_S si ottiene cioè sottraendo da $f(P, Q)$ la funzione bilineare $B_S^f(P, Q_0, Q)$ relativa all'origine Q_0. Per la 1.3 è $f_S(P, Q) \geq 0$.

Inoltre, posto

$$\overline{S}(P, Q) = S(P, Q) - S(P, Q_0),$$

$$\overline{I}(y_1, y_2) = \int_a^b\!\!\int_c^d f_S\,dx\,dz$$

$\overline{I}(y_1, y_2)$ è $\overline{S}q\,r\,p$. Infatti è

$$\mathcal{E}_{\overline{S}}^{f_s}(P, Q, \overline{Q}) = f_S(P, Q) - B_{\overline{S}}^{f_s}(P, Q, \overline{Q}) = \mathcal{E}_S^f(P, Q, \overline{Q}).$$

È poi, avendosi $B_S^f(P, Q_0, Q_0) = f(P, Q_0)$,

$$f_S(P, Q_0) = 0$$

per ogni P.

14. *Funzione* φ^R. Sia dato un integrale $I(y_1, y_2)\,q\,r\,p$. Consideriamo un nuovo integrale $\overline{I}(y_1, y_2) = \iint f_S\,dx\,dz$, dedotto da esso secondo la definizione N. 13. Se R è un numero > 0 indicheremo con φ^R una funzione di P e Q soddisfacente alle condizioni seguenti

1) Sia continua con $\overset{R}{\varphi}_{y_1'}, \overset{R}{\varphi}_{y_2'}, \overset{R}{\varphi}_{y_1'y_1'}, \overset{R}{\varphi}_{y_2'y_2'}, \overset{R}{\varphi}_{y_1'x}, \overset{R}{\varphi}_{y_2'z}$.

2) Sia tale che l'integrale $\iint \varphi^R\,dx\,dz$ sia $q\,r\,p$.

3) Risulti sempre $0 \leq \varphi^R \leq f_S$ ed inoltre, per $y_1'^2 + y_2'^2 \leq R$, $\varphi^R = f_S$.

4) Esista almeno una funzione $S(P, Q)$, tale che $I_R(y_1, y_2) = \iint \varphi^R\,dx\,dz$ sia $Sq\,r\,p$, ed almeno un numero W, tali che sia sempre

a) $$\left|\overset{R}{\varphi}_{y_1'}\right| < W(1 + |y_2'|)$$

b) $$\left|\overset{R}{\varphi}_{y_2'}\right| < W(1 + |y_1'|)$$

c) $$|S| < W.$$

Osservazione. Ponendo $\varphi^R = f_S$, sarebbero soddisfatte le condizioni 1), 2) e 3), ma in generale la 4) non lo è: basta considerare l'esempio $f = y_1'^2 + y_2'^2$ per sincerarsene. Il significato della funzione φ^R è quello di una funzione avente tutte le proprietà della f_S, coincidente con la f_S stessa per P qualsiasi e per Q nel cerchio di centro Q_0 e di raggio R, ed avente, fuori di questo cerchio, un comportamento all'infinito simile a quello di una funzione bilineare nelle y_1' e y_2': se la f è bilineare in questi suoi argomenti, ponendo $\varphi^R = f_S$ si verifica subito che è verificata una condizione del tipo 4): infatti la bilinearità della f implica quella della f_S.

15. *Integrale* $a \cdot b$. $I(y_1, y_2)$ si dice $a \cdot b$ (asintoticamente bilinearizzabile) se, per ogni numero reale positivo R, si conosce un procedimento per costruire una φ^R.

Osservazione. Come vedremo in seguito, un integrale $I(y_1, y_2)$ può essere contemporaneamente $Sqrp$ e S^*qrp, in cui $S(P, Q)$ e $S^*(P, Q)$ sono due funzioni diverse. Si possono quindi dedurre da $\iint f\,dx\,dz$ due diversi integrali $\bar{I}(y_1, y_1)$: cioè $\iint f_S\,dx\,dz$ e $\iint f_{S^*}\,dx\,dz$. Ora, se si conosce un procedimento di asintotica bilinearizzazione a partire da f_S, se ne deduce immediatamente un altro a partire da f_{S^*}: basta a tal fine notare che la funzione $f_S - f_{S^*}$ è bilineare nelle y_1', y_2'. L'asintotica bilinearizzabilità è quindi intrinseca all'integrale considerato, e non dipende da una particolare scelta della funzione $S(P, Q)$.

§ 2. — Alcuni criteri e critiche alle definizioni.

Faccio ora alcune osservazioni atte a motivare la definizione di integrale $q \cdot r \cdot p$.

Base del mio studio è il seguente teorema, dovuto a S. Faedo [2]

Se $A(P)$, $B(P)$, $C(P)$, $D(P)$ sono funzioni continue in tutto il campo A assieme alle loro derivate B_x, C_z e D_{xz}, allora

$$2.1 \qquad I(y_1, y_2) = \iint [A(D) + y_1'(x) B(P) + y_2'(z) C(P) + y_1'(x) \cdot y_2'(z) D(P)]\,dx\,dz$$

è continuo su ogni bilinea del campo (¹). *Inoltre ogni integrale continuo ha la forma* 2.1 [S. Faedo, [1], [2].]

(¹) Non è necessario dire «bilinea ordinaria» dato che questo particolare integrale esiste finito su ogni bilinea. Quest'osservazione ci sarà utile in seguito.

Tonelli, trattando il problema della semicontinuità dell'integrale $\mathcal{J}(y) = \int f[x, y(x), y'(x)]\, dx$, ha dato la seguente definizione di integrale $\mathcal{J}(y)$ quasi regolare positivo [I, vol. 1]: « $\mathcal{J}(y)$ si dice $q\,r\,p$ quando, per x, y nel campo A e per y' qualunque, è

$$\mathcal{E}(x, y, y', \overline{y'}) = f(x, y, \overline{y'}) - f(x, y, y') - (\overline{y'} - y') \cdot f_{y'}(x, y, y') \geq 0 \,.»$$

Ricordiamo che Tonelli chiama « figurativa » di $\mathcal{J}(y)$ la funzione $f(x, y, y')$, considerata però come funzione della sola y', per x e y fissati. La definizione di integrale $q\,r\,p$ si può quindi dare in questi termini, perfettamente equivalenti ai precedenti.

« $\mathcal{J}(y)$ si dice $q \cdot r \cdot p$ quando, comunque fissati x e y nel campo A, la figurativa di $\mathcal{J}(y)$ è una funzione concava verso l'alto (in senso debole) ».

Sempre Tonelli, nella stessa opera, ha dimostrato che

Condizione caratteristica affinchè un integrale $\mathcal{J}(y)$ sia continuo è che la sua figurativa, per ogni (x e y) in A, sia una funzione lineare (¹) *della y'.*

Osserviamo che il fatto che $f(y')$ sia una funzione concava verso l'alto, significa che per ogni $\overline{y'}$ esiste una funzione *lineare* di y', che chiameremo $L^{\overline{y'}}(y')$, tale che sia $L^{\overline{y'}}(\overline{y'}) = f(\overline{y'})$, e soddisfacente per ogni y' alla condizione $L^{\overline{y'}}(y') \leq f(y')$. Ora gli integrali che hanno una figurativa di tipo $L^{y'}(\overline{y'})$ sono appunto quelli continui, e quindi possiamo dare questa terza definizione, equivalente alle due precedenti, di quasi-regolare positività.

« L'integrale $\mathcal{J}(y)$ si dice $q\,r\,p$, quando, comunque fissati $\overline{x}, \overline{y}, \overline{y'}$, con $(\overline{x}, \overline{y})$ in A, esiste un integrale $\overline{\mathcal{J}}(y) = \int \overline{f}(x, y, y')\, dx$ continuo, tale che sia $f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{y'}) = \overline{f}(\overline{x}, \overline{y}, \overline{y'})$, ed inoltre si abbia $f(\overline{x}, \overline{y}, y') \geq \overline{f}(\overline{x}, \overline{y}, y')$ per ogni y' ».

Partendo dal concetto di quasi regolare positività, Tonelli ha dimostrato il suo fondamentale

TEOREMA: *Ogni integrale $\mathcal{J}(y)$ $q\,r\,p$ è semicontinuo inferiormente.*

L'ultima forma data alla definizione di integrale $\mathcal{J}(y)\, q\,r\,p$ mette in rilievo il legame esistente fra quasi-regolare positività e continuità.

Il teorema di Faedo ci dice quali sono gli integrali $I(y_1, y_2)$ continui: sono cioè quelli la cui figurativa (la f cioè considerata come funzione della sola Q) è una funzione *bilineare*, per ogni P fissato, delle y_1', y_2'.

Ho quindi dato la definizione di integrale $I(y_1, y_2)\, q\,r\,p$, in modo che fra quasi-regolare positività e continuità degli integrali di Fubini-Tonelli corra la stessa relazione che vi è nel caso di $\mathcal{J}(y)$. Infatti la definizione 12, tenuto conto delle definizioni 10 e 11, equivale alla seguente

---

(¹) In generale non omogenea.

« $I(y_1, y_2)$ si dice $q\,r\,p$, quando, comunque fissati $\overline{P}$ e $\overline{Q} \equiv (\overline{y_1'}, \overline{y_2'})$, esiste un integrale continuo $\overline{I}(y_1, y_2) \equiv \iint \overline{f}(P, Q)\, dx\, dz$, che in generale dipendenderà da $\overline{P}$ e da $\overline{Q}$, tale che si abbia

a) $$f(\overline{P}, \overline{Q}) = \overline{f}(\overline{P}, \overline{Q})$$

b) $$f(\overline{P}, Q) \geq \overline{f}(\overline{P}, Q) \quad \text{per ogni } Q \text{ ».}$$

OSSERVAZIONE. Si noti che la definizione di integrale $I(y_1, y_2)\,q\,r\,p$ dipende da un elemento indeterminato: la funzione S. Questo fatto non trova riscontro nel caso di $\mathcal{I}(y)$. Infatti, nel caso di $\mathcal{I}(y)$ la figurativa di integrale continuo $\overline{L^{y'}}(y')$, di cui si è parlato, è perfettamente determinata: il suo grafico non può essere altro che la tangente nel punto $(\overline{y'}, f(\overline{y'}))$ al grafico della figurativa di $\mathcal{I}(y)$. Nel caso di $I(y_1, y_2)$ la cui figurativa è una superficie, succede invece che, fissati $\overline{P}$ e $\overline{Q}$, possono esistere varie funzioni bilineari di y_1', y_2', soddisfacenti alle condizioni a) e b). Per esempio, se è $f = y_1'^2 + y_2'^2$, ponendo

$$f = f(\overline{y_1'}, \overline{y_1'}) + 2\overline{y_1'}\,(y_1' - \overline{y_1'}) + 2\overline{y_2'}\,(y_2' - \overline{y_2'}) + k\,(y_1' - \overline{y_1'})\,(y_2' - \overline{y_2'}),$$

le a) e b) sono soddisfatte per qualunque k soddisfacente alla $|k| \leq 2$. (Si veda anche l'osservazione dopo il 3° criterio di $q\,r\,p$ pag. 139).

In altri termini, se $S_0(P, Q)$ è una qualunque funzione continua con S_{0xz}, soddisfacente in più alla $|S_0| \leq 2$, allora l'integrale

$$I(y_1, y_2) = \iint (y_1'^2 + y_2'^2)\, dx\, dz$$

e $S_0\,q\,r\,p$.

Concludiamo quindi che la necessità di introdurre un elemento indeterminato nella definizione di integrale di Fubini-Tonelli $q\,r\,p$ è dovuta alla natura di questi funzionali, e non ad una sostanziale diversità fra questa trattazione e quella che Tonelli ha svolto per il problema della semicontinuità di $\mathcal{I}(y)$.

Darò ora alcuni criteri, tutti di immediata dimostrazione, atti a verificare la $q\,r$ positività di $I(y_1, y_2)$. Premetto il seguente

TEOREMA: *Condizione necessaria affinchè l'integrale $I(y_1, y_2)$ sia $q\,r\,p$ è che si abbia contemporaneamente*

2.2 a) $f_{y_1'y_1'} \geq 0$ b) $f_{y_2'y_2'} \geq 0$.

Infatti, per le 1.1, 1.2, 1.3, fissati P e Q e posto $\overline{y}_2' = y_2'$, si ha

$$f(P\,,\,\overline{Q}) - f(P\,,\,Q) - (\overline{y}_1' - y_1') \cdot f_{y_1'}(P\,,\,Q) \geq 0\,,$$

il che significa che, fissati comunque P e y_2', la $f(P\,,\,Q)$ considerata come funzione della sola y_1', è concava verso l'alto: ne segue la 2.2 a). Analogamente si ottiene la 2.2 b). Queste condizioni non sono però sufficienti a garantire la $q\,r$ positività. Consideriamo infatti l'esempio

$$f \equiv e^{2(y_1' - y_2')^2} + 1/2\,(y_1'^4 + y_2'^4) + 1/3\,(y_1'^3\,y_2' + y_1'\,y_2'^3) - 2y_1'^2\,y_2'^2 - 1$$

Si ha

$$f_{y_1'y_1'} > 22\,y_2'^2 - 30\,y_1'\,y_2' + 12\,y_1'^2 \geq 0$$

$$f_{y_2'y_2'} > 22\,y_1'^2 - 30\,y_1'\,y_2' + 12\,y_2'^2 \geq 0\,.$$

Prendiamo $\overline{Q} = (\overline{y}_1'\,,\,\overline{y}_2')$ sulla retta di equazione $y_1' = y_2'$. Se esistesse una funzione S tale che $I(y_1\,,\,y_2)$ fosse $S\,q\,r\,p$, essendo $f(P\,,\,Q_0) = f_{y_1'}(P\,,\,Q_0) = f_{y_2'}(P\,,\,Q_0) = 0$, dovrebbe aversi, essendo $\mathcal{E}_S^f\,(P\,,\,Q_0\,,\,Q) \geq 0$,

$$f(P\,,\,Q) \geq y_1'^2\,S\,(P\,,\,Q_0) \tag{2.3}$$

per ogni Q tale che sia $y_1' = y_2'$.

Per P fissato, $S\,(P\,,\,Q_0)$ è un numero.

Si noti che, sulla retta $y_1' = y_2'$ è sempre

$$f = -\,1/2\,y_1'^4$$

e quindi

$$\lim_{\overline{y}_1' \to \infty} f(\overline{Q}) - y_1'^2\,S\,(P\,,\,Q) = -\,\infty\,;$$

non potrebbe pertanto esser sempre vera la 2.3 [1].

1° *Criterio di quasi regolare positività. Se* f *ha la forma* $A(P,Q) + y_1'B(P,Q) + y_2'C(P,Q) + y_1'\,y_2'\,D\,(P,Q)$, $I\,(y_1\,,\,y_2)$ *è* $S\,q\,r\,p$ *con* $S = D\,(P,Q)$.

Infatti, per la 1.1, è

$$B_S^f(P\,,\,Q\,,\,\overline{Q}) \equiv f(P\,,\,\overline{Q})$$

---

[1] Questo integrale è già stato preso in considerazione dal Magenes, il quale ha dimostrato che esso non è semicontinuo.

e quindi per la 1.2

$$\mathcal{E}_S^f(P, Q, \bar{Q}) \equiv 0 .$$

Osservazione. Notiamo il fatto, di immediata verifica, che, detto $S\,q\,r\,n$ (quasi regolare negativo) un integrale per cui sia sempre $\mathcal{E}_S^f \leq 0$, se un integrale è contemporaneamente $S_1\,qrp$ e $S_2\,qrn$, ha una figurativa bilineare nelle y_1', y_2': quindi, per il Teorema di Faedo, esso è continuo.

Si può facilmente verificare che, in questo caso, è necessariamente $S_1 \equiv S_2$.

2^0 *Criterio di quasi regolare positività: Se la figurativa di $I(y_1, y_2)$ è, per ogni P, una funzione convessa verso l'alto in senso debole, $I(y_1, y_2)$ è $S\,q\,r\,p$ con $S \equiv 0$.*

Infatti B_S^f, considerata come funzione della sola Q, ha come grafico il piano tangente alla figurativa di $I(y_1, y_2)$ nel punto P, Q. Per la supposta convessità di questa figurativa, il piano tangente non si trova mai al di sopra di essa. Quindi, per la 1.2, è sempre $\mathcal{E}_S^f \geq 0$.

Osservazione. Questa condizione di convessità, della figurativa, che, com'è noto [Tonelli 1, vol. 1; 2. S. Cinquini [1]] è necessaria e sufficiente a garantire la semicontinuità degli integrali semplice $\mathcal{I}(y)$ e doppio $\mathcal{I}_D(z)$ del calcolo delle variazioni, è invece sufficiente (dato che, come vedremo in seguito, la $q\,r$ positività ha come conseguenza la semicontinuità) ma non già necessaria, per la semicontinuità di $I(y_1, y_2)$. Per sincerarcene basta considerare l'esempio

$$\iint y_1' \cdot y_2'\, dx\, dz .$$

Quest'integrale è $q\,r\,p$ per il nostro 1^0 criterio, ed è inoltre continuo per il Teorema di Faedo. La sua figurativa non è però una funzione convessa: si ha infatti

$$f_{y_1'y_1'} \cdot f_{y_2'y_2'} - f^2_{y_1'y_2'} \equiv -1 .$$

In altri termini, la convessità della figurativa, che caratterizza la semicontinuità di $\mathcal{I}(y)$ e di $\mathcal{I}_D(z)$, è stata assunta da Tonelli come definizione di quasi-regolare positività. Nel caso di $I(y_1, y_2)$, gli integrali con figurativa convessa non sono invece che un caso particolare di integrali semicontinui; la nostra definizione di integrale $I(y_1, y_2)$ $q\,r\,p$ comprende quindi altri casi, oltre a quelli relativi a figurative convesse: ad esempio quello testè considerato.

COROLLARIO. *Se è $f_x \equiv f_{y_1} \equiv f_{y_1'} \equiv 0$, ossia se $I(y_1, y_2)$ non dipende dalla prima componente, e se inoltre è sempre*

2.4 $$f_{y_2' y_2'} \geq 0$$

$I(y_1, y_2)$ è $q\,r\,p$.

Infatti è in questo caso $f_{y_1' y_1'} \equiv f_{y_1' y_2'} \equiv 0$. Per la 2.4 la figurativa è quindi convessa verso l'alto.

Si noti che, tenendo conto della definizione data da Tonelli di integrale $\mathfrak{J}(y)$ $q\,r\,p$, e del fatto che un integrale $\mathfrak{J}(y)$ può sempre essere considerato come un particolare integrale di Fubini-Tonelli, soddisfacente appunto alle

$$f_x \equiv f_{y_1} \equiv f_{y_1'} \equiv 0,$$

questo corollario si può enunciare così:

Un integrale semplice di linea $\mathfrak{J}(y)$ $q\,r\,p$, è $q\,r\,p$ anche considerato come integrale di bilinea, ossia come integrale di Fubini-Tonelli.

Un analogo corollario si ottiene scambiando il ruolo delle (x, y_1, y_1') con quello delle (z, y_2, y_2').

3° *Criterio di quasi regolare positività. Se le f_i $(i = 1 \ldots n)$ sono funzioni tali che gli integrali $I_i(y_1, y_2) = \iint f_i \, dx\, dz$ siano S_i $q\,r\,p$, e se $V_i(P)$ sono funzioni reali non negative, continue con le loro derivate rispetto ad x ed a z, allora, posto*

$$f = \sum_1^n {}_i f_i \cdot V_i, \qquad S = \sum_1^n {}_i S_i \cdot V_i$$

l'integrale $I(y_1, y_2) = \iint f dx\, dz$ è $S\,q\,r\,p$.

La dimostrazione si ottiene semplicemente scrivendo la 1.3 per ciascuna f_i, moltiplicandone i membri per V_i (conservando il senso delle disuguaglianze in virtù dell'ipotesi $V_i \geq 0$) e sommando membro a membro.

1° *Esempio di integrale $q\,r\,p$.* $I(y_1, y_2) = \iint [y_1'^2 + y_2'^2] \, dx\, dz$ è $q\,r\,p$.

Infatti $\iint y_1'^2 \, dx\, dz$ e $\iint y_2'^2 \, dx\, dz$ sono $q\,r\,p$ in conseguenza del corollario al 2° criterio. Applicando il 3° criterio, con $V_1 \equiv V_2 \equiv 1$, si ottiene l'asserto.

Lo stesso può vedersi osservando che $y_1'^2 + y_2'^2$ è una funzione convessa verso l'alto, ed applicando direttamente il 2° criterio.

OSSERVAZIONE. Si noti che la funzione S, rispetto a cui l'integrale dell'esempio 1^0 è $S\,q\,r\,p$, non è determinata in maniera univoca. Infatti qualunque sia la funzione S, purchè soddisfi alla $|S| \leq 2$, si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^f_S = y_1'^2 + y_2'^2 - y_1'^2 - y_2'^2 - 2y_1'(y_1' - y_1') - 2y_2'(y_2' - y_2') - \\ - S(y_1' - y_1')(y_2' - y_2') = (y_1' - y_1')^2 + (y_2' - y_2')^2 - \\ - S(y_1' - y_1')(y_2' - y_2') \geq 0\,.\end{aligned}$$

In altri casi invece, esiste una sola S tale da rendere $S\,q\,r\,p$ un dato integrale. Se per esempio è $f \equiv y_1' y_2'$, $I(y_1, y_2)$ è $S\,q\,r\,p$ allora ed allora soltanto che è

$$S \equiv f_{y_1' y_2'} \equiv 1\,.$$

2^0. *Esempio di integrale* $q\,r\,p$. Gli integrali finora considerati sono tutti $S^*\,q\,r\,p$, ove si ponga $S^* \equiv f_{y_1' y_2'}$. Diamo un esempio in cui questo non avviene. Sia

$$I(y_1, y_2) = \iint [y_1'^2 \cdot y_2'^2]\, dx\, dz\,.$$

Quest'integrale è $S^0\,q\,r\,p$, in cui $S^0 \equiv 2y_1' \cdot y_2' = 1/2 f_{y_1' y_2'}$. Si ha infatti, eseguendo i conti

$$\mathcal{E}^f_{S_0} \equiv (y_1' y_2' - y_1' y_2')^2 \geq 0\,.$$

Ma esso non è $S^*\,q\,r\,p$. Si verifica infatti che è

$$\mathcal{E}^f_{S^*}(P; 1, 1; 0, 0) = -1\,.$$

3^0. *Esempio di integrale* $q\,r\,p$. Se $A_i(P)$ $(i = 1 \ldots 7)$ sono funzioni continue con le loro derivate rispetto a x ed a z, e se inoltre A_5, A_6 e A_7 non sono mai negative, il polinomio

$$2.5 \quad p(P, Q) = A_1 + A_2 y_1' + A_3 y_2' + A_4 y_1' y_2' + A_5 y_1'^2 + A_6 y_2'^2 + A_7 y_1'^2 y_2'^2$$

è tale che

$$I(y_1, y_2) = \iint p\, dx\, dz$$

è $q\,r\,p$.

Infatti $\iint [A_1 + A_2 y_1' + A_3 y_2' + A_4 y_1' y_2']\, dx\, dz$ è $q\,r\,p$ per il 1^0 criterio. $\iint y_1'^2\, dx\, dz$ e $\iint y_1'^2\, dx\, dz$ lo sono per il corollario al 2^0 criterio. $\iint y_1'^2 y_2'^2\, dx\, dz$

lo è per quanto si è visto nel 2^0 esempio. Applicando il 3^0 criterio con $V_1 \equiv 1$, $V_2 \equiv A_5$, $V_3 \equiv A_6$, $V_4 \equiv A_7$ si trova l'asserto.

Criteri di asintotica bilinearizzabilità.

Com'è noto, un problema che possiamo chiamare di « asintotica linearizzazione » si presenta già per gli integrali semplici di linea $\mathfrak{J}(y)$ [v. Tonelli, 1, vol. 1, pag. 398]. Si tratta in questo caso di sostituire alla funzione f un'altra funzione g, avente le stesse proprietà di differenziabilità di f, con figurativa convessa, tale che sia sempre $f \geq g \geq 0$ e, per $|y'| < R$, $f = g$, la quale, inoltre, abbia limitata in tutto il campo la derivata g'_y. Esiste anzi una trasformazione del tutto generale, che ci permette di trasformare qualsiasi f, e per ogni fissato R, in una funzione g. Ossia ogni integrale $\mathfrak{J}(y)$ $q\,r\,p$ è asintoticamente linearizzabile. Nel nostro caso invece, non ho trovato alcuna costruzione valida in ogni caso, che ci permetta di trasformare qualsiasi f_S in una φ_R. Poichè, di conseguenza, bisognerà procedere caso per caso, darò alcuni criteri di asintotica in bilinearizzabilità, atti a servire di indicazione per il metodo da seguire.

1^0. *Criterio di asintotica bilinearizzabilità. Se la figurativa di $I(y_1, y_2)$ è, per ogni P, una superficie di rivoluzione, cioè se,posto $\varrho = \sqrt{y_1'^2 + y_2'^2}$, è $f(P, Q) = F(P, \varrho)$, $I(y_1, y_2)$ se è $q\,r\,p$ è $a \cdot b$.*

La f_S viene in questo caso ad avere a sua volta una figurativa di rivoluzione. Sarà cioè $f_S(P, Q) = F(P, \varrho)$: infatti sarà $f_S(P, Q) = f(P, Q) - f(P, Q_0)$: e questo per ogni S tale che $I(y_1, y_2)$ sia $S\,q\,r\,p$.

La φ_R si può *sempre* costruire ponendo

$$\varphi_R(P, Q) = \begin{cases} F(P, \varrho) & \text{per } \varrho \leq R \\[2mm] F(P, R) + (\varrho - R)\dfrac{\partial F}{\partial \varrho}(P, R) + \displaystyle\int_R^{\varrho} \dfrac{\partial_2 E}{\partial^2 \varrho}(P, \xi) \cdot \left(2 - \dfrac{\xi}{R}\right) \cdot (\varrho - \xi)\, d\xi & \\ & \text{per } R \leq \varrho \leq 2R \\[2mm] F(P, R) + R\dfrac{\partial F}{\partial \varrho}(P, R) + \displaystyle\int_R^{2R} \dfrac{\partial_2 F}{\partial^2 \varrho}(P, \xi) \cdot \left(2 - \dfrac{\xi}{R}\right) \cdot (\varrho - \xi)\, d\xi + & \\ \quad + (\varrho - 2R) \cdot \left(\dfrac{\partial F}{\partial \varrho}(P, R) + \displaystyle\int_R^{2R} \dfrac{\partial_2 F}{\partial^2 \varrho}(P, \xi)\left(2 - \dfrac{\xi}{R}\right) d\xi\right) & \\ & \text{per } \varrho \geq 2R\,. \end{cases}$$

Si noti che la φ_R così definita ha a sua volta come figurativa una superficie di rivoluzione: la quale, per $\varrho \geq 2R$, è un cono. Sono quindi soddisfatte le condizioni 4 della definizione 14. Le condizioni 1 lo sono per i teoremi di derivazione sotto il segno. Essendo per ipotesi $I((y_1, y_2)$ $q\,r\,p$, sarà sempre $\frac{\partial_2 F}{\partial \varrho^2} \geq 0$, da cui segue, come si verifica, $\frac{\partial_2 \varphi R}{\partial \varrho^2} \geq 0$. Ossia la figurativa della φ_R è concava verso l'alto. Si verifica facilmente che è soddisfatta anche la 3) condizione della definizione 14.

2^0 *Criterio di* $a \cdot b$. *Se* $I(y_1, y_2)$ *è* $q\,r\,p$ *ed inoltre è* $f_x \equiv f_{y_1'} \equiv f_{y_1} \equiv 0$ (*oppure* $f_z \equiv f_{y_2} \equiv f_{y_2'} \equiv 0$), *l'integrale è* $a \cdot b$.

In questo caso infatti il nostro funzionale, come abbiamo già osservato, può essere trattato come un integrale di linea $\mathfrak{J}(y)$: gli si può applicare senz'altro la trasformazione indicata da Tonelli per la linearizzazione di $\mathfrak{J}(y)$ [vedi Tonelli I, vol. 1, pag. 398].

3^0 *Criterio di* $a \cdot b$. *Se è* $f \equiv A(P) + B(P)\,y_1' + C(P)\,y_2' + D(P)\,y_1'\,y_2'$, $I(y_1, y_2)$ *é* $a \cdot b$.

Si ha in questo caso $S \equiv 0$, e basta quindi porre $\varphi_R \equiv f_S$.

4^0 *Criterio di* $a \cdot b$. *Se* $V_i(P)$ *sono funzioni continue con le loro derivate rispetto ad* x *e a* z, *e non negative, e se* $f_i(P, Q)$ $(i = 1 \dots n)$ *sono funzioni tali che* $I_i(y_1, y_2) = \iint f_i\,dx\,dz$ *siano integrali* $q\,r\,p$ *e* $a \cdot b$, *allora anche* $I(y_1, y_2) = \iint \sum_1^n{}_i\, V_i f_i\,dx\,dz$ *é* $q\,r\,p$ *e* $a \cdot b$.

Tenuto conto del 3^0 criterio di $q\,r\,p$, basterà notare che la condizione 4) della definizione 14 si conserva per sommazione: ossia, se φ_{Ri} è la trasformata della f_i, basterà porre $\varphi_R = \sum_1^n{}_i\, V_i\,\varphi_i$.

§ 3. — Semicontinuità.

a) La semicontinuità sulle bilinee lipschiziane.

I^0 *Teorema di semicontinuità. Se* $I(y_1, y_2)$ *é* $q\,r\,p$ *esso é semicontinuo su ogni bilinea lipschiziana.*

Precisiamo innanzi tutto che l'essere $I(y_1, y_2)$ semicontinuo su di una bilinea lipschiziana significa essere semicontinuo su di essa rispetto a tutto l'insieme delle bilinee del campo, e non già rispetto al solo sottoinsieme delle bilinee lipschiziane.

Sia ora $C_0(y_{10}(x), y_{01}(z), a_0 \leq x \leq b_0, c_0 \leq z \leq d_0)$ una bilinea lipschiziana qualunque. Essa è certamente ordinaria [1].

In conseguenza dell'assoluta continuità delle funzioni $y_{01}(x)$, $y_{01}(z)$, comunque fissato ε, con $0 < \varepsilon < 1$, si può trovare una bilinea $\pi \equiv (\pi_1(x), \pi_2(z), a_0 - \varepsilon/4 \leq x \leq b_0 + \varepsilon/4, c_0 - \varepsilon/4 \leq z \leq d_0 + \varepsilon/4)$ di classe 2 appartenente propriamente all'intorno ε della C_0, tale che risulti, se R è il maggiore fra i moduli di lipschizianità delle $y_{01}(x)$, $y_{02}(z)$

$$3.1 \qquad |\pi_1'(x)| < R \qquad |\pi_2'(z)| < R .$$

Si può supporre inoltre che detti rispettivamente E_1 e E_2 gli insiemi misurabili degli intervalli $a_0 b_0$ [risp. $c_0 d_0$], in cui non esiste finita la y_{01}' [y_{02}'] oppure non è

$$|\pi_1'(x) - y_{01}'(x)| < \varepsilon \qquad [|\pi_2'(z) - y_{02}'(z)| < \varepsilon]$$

sia

$$3.2 \qquad \text{mis}\, E_1 < \varepsilon \qquad \text{mis}\, E_2 < \varepsilon .$$

Per la definizione di $\mathcal{E}_S^f$ si ha, per ogni P appartenente all'intorno ϱ della C_0, con $0 < \varrho \leq \varepsilon$, e per ogni Q,

$$3.3 \qquad f(P, Q) = \mathcal{E}_S^f[P; \pi_1'(x), \pi_2'(z); y_1', y_2'] + f(P; \pi_1'(x), \pi_2'(z)] +$$
$$+ [y_1' - \pi_1'(x)] \cdot f_{y_1'}[P; \pi_1'(x), \pi_2'(z)] + [y_1' - \pi_2'(z)] \cdot f_{y_2'}[P; \pi_1'(x), \pi_2'(z)] +$$
$$+ [y_1' - \pi_1'(x)] \cdot [y_2' - \pi_2'(z)] \cdot S[P; \pi_1'(x), \pi_2'(z)] .$$

La 3.3 è vera qualunque sia la funzione S. Facciamo ora intervenire l'ipotesi che $I(y_1, y_2)$ sia $S\,q\,r\,p$, ossia che sia sempre $\mathcal{E}_S^f \geq 0$. Allora, se C è una bilinea ordinaria qualsiasi appartenente propriamente all'intorno ϱ della C_0, è

$$3.4 \qquad \int_a^b\!\!\int_c^d \mathcal{E}_S^f[x, z, y_1(x), y_2(z); \pi_1'(x), \pi_2'(z); y_1'(x), y_2'(z)]\, dx\, dz \geq 0 .$$

---

(1) È bene notare che la quasi regolare positività di un integrale implica che se una bilinea non è ordinaria, su di essa è $I(y_1, y_2) = +\infty$. Si ha infatti, per la $S\,q\,r$ positività

$$f(P, Q) \geq f(P, Q_0) + y_1' f_{y_1'}(P, Q_0) + y_2' f_{y_2'}(P, Q_0) + y_1' y_2' S(P, Q_0) = g(P, Q)$$

Ora $\iint g\, dx\, dz$ esiste finito su qualunque bilinea: ne segue quanto volevamo dimostrare.

Sia M un numero maggiore di massimi moduli delle funzioni

$$f_{y_1'}[P, Q], \quad f_{y_2'}[P, Q], \quad S[P, Q]$$

per P variabile sulla bilinea C_0 e per Q variabile nel quadrato del piano y_1', y_2' in cui è $|y_1'| \leq R$, $|y_2'| \leq R$.

Per ogni coppia di numeri x, z, con $a_0 \leq x \leq b_0$, $c_0 \leq z \leq d_0$, ma tali che x non appartenga a E_1 e z non appartenga a E_2, essendo, per il teorema del valor medio, se P è sulla bilinea C_0

$$|f(P, Q) - f(P; \pi_1'(x), \pi_2'(z))| < 2\varepsilon M,$$

si avrà

$$\mathcal{E}_S^f[x, z, y_{01}(x), y_{02}(z); \pi_1'(x), \pi_2'(z); y_{01}'(x), y_{02}'(z)] < M(\varepsilon^2 + 4\varepsilon).$$

Quindi, tenendo conto delle 3.1, è

$$\text{3.5} \qquad \int_{a_0}^{b_0}\int_{c_0}^{d_0} \mathcal{E}_S^f[x, z, y_{01}(x), y_{02}(z); \pi_1'(x), \pi_2'(z); y_{01}'(x), y_{02}'(z)]\, dx\, dz <$$

$$< 5\varepsilon M(b_0 - a_0)(d_0 - c_0) +$$

$$+ M(8R + 4R^2)[\text{mis } E_1 (b_0 - a_0) + \text{mis } E_2 (d_0 - c_0) + \text{mis } E_1 \cdot \text{mis } E_2].$$

Allora, per le 3.2 e 3.4 è

$$\text{3.6} \qquad \int_a^b\int_c^d \mathcal{E}_S^f[x, z, y_1(x), y_2(z); \pi_1'(x), \pi_2'(z); y_1'(x), y_2'(z)]\, dx\, dz -$$

$$- \int_{a_0}^{b_0}\int_{c_0}^{d_0} \mathcal{E}_S^f[x, z, y_{01}(x), y_{02}(z); \pi_1'(x), \pi_2'(z); y_{01}'(x), y_{02}'(z)]\, dx\, dz > -k\varepsilon$$

in cui

$$k = M[5(b_0 - a_0)(d_0 - c_0) + (8R + 4R^2)(1 + b_0 + d_0 - a_0 - c_0)]$$

è numero positivo che non dipende da ε ne dalla bilinea C.

Per le 3.3 e 3.6, posto $\lambda \equiv [x, z, y_1(x), y_2(z); \pi_1'(x), \pi_2'(z)]$ e $\lambda_0 \equiv$ $\equiv [x, z, y_{01}(x), y_{02}(z), \pi_1'(x), \pi_2'(z)]$, sarà

$$I(y_1, y_2) - I(y_{01}, y_{02}) > -k\varepsilon + \int_a^b\int_c^d \{f(\lambda) - \pi_1'(x) \cdot f_{y_1'}(\lambda) - \pi_2'(y) \cdot f_{y_2'}\lambda -$$

$$- [y_1'(x)\,\pi_2'(z) + y_2'(z)\,\pi_1'(x)] \cdot S(\lambda) + y_1'(x) f_{y_1'}(\lambda) + y_2'(z) f_{y_2'}(\lambda) +$$

$$+ [y_1'(x)\,y_2'(z) + \pi_1'(x)\,\pi_2'(z)]\,S(\lambda)\}\,dx\,dz -$$

$$- \int_{a_0}^{b_0}\!\!\int_{c_0}^{d_0} \{f(\lambda_0) - \pi_1'(x) f_{y_1'}(\lambda_0) - \pi_2'(z) f_{y_2'}(\lambda_0) - [y_{01}'(x)\,\pi_2'(z) + y_{02}'(z)\,\pi_1'(x)] \cdot S(\lambda_0) +$$

$$+ y_{01}'(x) f_{y_1'}(\lambda_0) + y_{02}'(z) f_{y_2'}(\lambda_0) + [y_{01}'(x)\,y_{02}'(z) + \pi_1'(x)\,\pi_2'(z)]\,S(\lambda_0)\}\,dx\,dz\,.$$

Per la continuità delle funzioni $\pi_1'(x)$, $\pi_1''(x)$, $\pi_2'(z)$, $\pi_2''(z)$, possiamo applicare il teorema di Faedo al primo integrale al secondo membro dell'ultima disuguaglianza: il quale integrale risulta pertanto essere continuo: ossia possiamo determinare un numero $\bar{\varrho}(\varepsilon) > O$, tale che, purchè si abbia $\varrho \leq \bar{\varrho}(\varepsilon)$, la differenza fra i due integrali al secondo membro sia minore di ε. Sarà quindi, per ogni bilinea ordinaria appartenente propriamente all'intorno ϱ della C_0,

$$I(y_1, y_2) - I(y_{01}, y_{02}) > -\varepsilon(1 + k)$$

il che prova l'asserto.

OSSERVAZIONE. Questa dimostrazione è indipendente dall'operazione di asintotica bilinearizzazione.

b) La semicontinuità sulle bilinee ordinarie.

Nel precedente teorema l'ipotesi della lipschizianità della bilinea C_0 era servita a scrivere le 3.1, a determinare il numero M, ed in conclusione a stabilire la 3.6.

Ora vedremo che ad una relazione del tipo della 3.6 possiamo arrivare senza alcuna ipotesi sulla C_0, ma valendoci però di una ipotesi limitativa sulla f. Vale infatti il seguente

II^0 *Teorema di semicontinuità: Se $I(y_1, y_2)$ é $S\,q\,r\,p$, e se per ogni parte chiusa e limitata A' di A si può trovare un numero W, tale che, per $P \in A'$ e Q qualunque sia*

$$|f_{y_1'}(P, Q)| < W(1 + |y_2'|)\,; \quad |f_{y_2'}(P, Q)| < W(1 + |y_1'|)\,; \quad |S(P, Q)| < W\,,$$

allora $I(y_1, y_2)$ é semicontinuo inf. su ogni bilinea.

OSSERVAZIONE. Si noti che le ipotesi poste su $I(y_1, y_2)$ implicano che ogni bilinea è ordinaria.

DIMOSTRAZIONE. Sia C_0 una qualunque bilinea, e ϱ' la distanza in S_4 fra i suoi punti (che costituiscono un insieme chiuso e limitato di S_4) e la frontiera del campo A. Sia ε un numero arbitrario, soddisfacente alle $0 < \varepsilon < 1$, $\varepsilon < \varrho'/2$.

Come nel caso precedente, costruiamo la bilinea π, con le stesse proprietà, tranne, naturalmente quella espressa dalle 3.1, che dipende dalla lipschizianità della C_0. Possiamo anzi supporre che gli insiemi E_1 e E_2, anzichè alle 3.2, soddisfino alle relazioni

$$3.2' \qquad \int_{E_1} [|y'_{01}(x)| + |\pi'_1(x)|]\, dx < \varepsilon \int_{E_2} [|y'_{02}(z)| + |\pi'_2(z)|]\, dz < \varepsilon\,,$$

e che inoltre la variazione totale di $\pi_1(x)$ $[\pi_2(z)]$ su $a_0 b_0$ $[c_0 d_0]$ non superi quella di $y_{01}(x)$ $[y_{02}(z)]$.

Per ogni P contenuto nell'intorno di raggio ε della C_0 e per ogni Q sarà di nuovo valida la 3.3, e quindi, per ogni bilinea C appartenente propriamente a quell'intorno, varrà la 3.4.

Sia ora A' l'insieme dei punti dell'intorno chiuso di raggio $\varrho'/2$ della C_0. Esso è un insieme limitato. Sia W il numero di cui all'enunciato, corrispondente a A'. Per tutti gli x di $a_0 b_0$ non appartenenti ad E_1 e per tutti gli z di $c_0 d_0$ non appartenenti ad E_2 sarà

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}^f_S [x, z, y_{01}(x), y_{02}(z); \pi'_1(x), \pi'_2(z); y'_{01}(x), y'_{02}(z)] < \\ &< 2\varepsilon [W(1 + |y'_{01}(x)| + 1 + |y'_{02}(z)|] + \varepsilon^2 W < \\ &< 2\varepsilon\, W(3 + |y'_{01}(x)| + |y'_{02}(z)|)\,. \end{aligned}$$

Quindi, chiamando V_{01} $[V_{02}]$ la variazione totale della funzione $y_{01}(x)$ $[y_{02}(z)]$ sull'intervallo $a_0 b_0$ $[c_0 d_0]$, tenendo conto delle 3.2', è

$$3.5' \qquad \begin{aligned} &\int_{a_0}^{b_0}\int_{c_0}^{d_0} \mathcal{E}^f_S [x, z, y_{01}(x), y_{02}(z); \pi'_1(x), \pi'_2(z); y'_{01}(x), y'_{02}(z)]\, dx\, dz < \\ &< \varepsilon \{2W[3(b_0 - a_0)(d_0 - c_0) + V_{01} + V_{02}] + \\ &+ 4W[d_0 + b_0 - a_0 - c_0 + V_{01} + V_{02}) + 1/2\, W(V_{01} + V_{02})]\} = k_1 \varepsilon \end{aligned}$$

in cui k_1 è un numero che non dipende da ε nè dalle C e π, ma solo dalla C_0. Si deduce quindi una relazione analoga alla 3.6, in cui soltanto al posto di k figura k_1.

Indi, proseguendo il ragionamento esattamente come nella dimostrazione del 1^0 teorema di semicontinuità, si arriva all'asserto.

Esempio 1^0. Un caso elementare in cui sono verificate le ipotesi di questo teorema è quello in cui è $f = A(P) + y_1' B(P) + y_2' C(P) + y_1' y_2' D(P)$; in questo caso si può porre

$$W = 1 + \max_{A'} [| B(P) | + | C(P) | + | D(P) |].$$

Esempio 2^0. Un caso non banale di integrale che rientra nelle ipotesi di questo teorema è quello in cui è

$$f = \theta_1(P) \sqrt{\theta_2(P) + \theta_3(P) \cdot y_1'^2},$$

ove $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ sono funzioni reali non negative, continue assieme alle derivate $\theta_{1_x}, \theta_{2_x}, \theta_{3_x}, \theta_{1_z}, \theta_{2_z}, \theta_{3_z}$. Infatti $I(y_1, y_2)$ è in questo caso $S\,q\,r\,p$ per il 2^0 criterio, con $S_0 \equiv 0$. Basta poi porre $W(A') = \max_{A'} [\theta_1(P) \cdot \theta_3(P)]$.

OSSERVAZIONE. Le condizioni del II^0 teorema non sono necessarie per la semicontinuità: infatti se è $f = y_1'^2$, $I(y_1, y_2)$ è semicontinuo, in quanto rientra nell'ipotesi del 3^0 teorema di semicontinuità, che dimostreremo nelle pagine seguenti. Tuttavia è, per ogni P ed ogni y_2' fissati

$$\lim \frac{\partial f}{\partial y_1'} = + \infty$$

il che contrasta con le ipotesi del 2^0 teorema.

Si tratta ora di eliminare le ipotesi sulla f, che abbiamo testè visto essere restrittive. Ciò si ottiene dimostrando il seguente

III^0 *Teorema di semicontinuità: « Ogni integrale* $q\,r\,p$ *ed a.b. è semicontinuo inferiormente su ogni bilinea ordinaria ».*

OSSERVAZIONE 1^a. Se $I(y_1, y_2)$ è un integrale $S\,q\,r\,p$, l'integrale $\overline{I}(y_1, y_2) = \iint f_S\, dx\, dz$ esiste finito su tutte e sole le bilinee ordinarie per $I(y_1, y_2)$: infatti $I(y_1, y_2) - \overline{I}(y_1, y_2) = \iint [f - f_S]\, dx\, dz$ esiste finito su ogni bilinea, dato che, secondo la definizione 13, la funzione $f - f_S$ è bilineare nelle y_1', y_2' [1].

Inoltre, per lo stesso motivo e per il teorema di Faedo, l'integrale $\iint [f - f_S]\, dx\, dz$ è continuo. Pertanto, al fine di dimostrare che su di una

---

[1] Vedi anche nota [1] a pag. 8.

data bilinea è semicontinuo $I(y_1, y_2)$, è sufficiente far vedere che vi è semicontinuo $\overline{I}(y_1, y_2)$.

Osservazione 2. Per quanto si è detto nell'osservazione che segue la definizione 14, non sarà necessario, ove vi sia ambiguità, specificare la scelta della funzione S nel passare dalla f alla f_S ed alla φ_S.

Dimostrazione. Per quanto è stato testè osservato, basta dimostrare che è semicontinuo su ogni curva ordinaria l'integrale $\overline{I}(y_1, y_2)$. Sia C_0 una curva ordinaria. Fissato $\varepsilon > 0$, si può trovare un numero R, tale che detto A_1 $[A_2]$ l'insieme misurabile del segmento $a_0 b_0$ $[c_0 d_0]$ in cui non esiste finita la y'_{01} $[y'_{02}]$ oppure non è verificata la

$$|y'_{01}| < R \qquad [|y'_{02}| < R],$$

detto T l'insieme dei punti (x, z) del rettangolo $a_0 b_0 \times c_0 d_0$ in cui è $x \in A_1$ oppure $z \in A_2$, e $C(T)$ il complementare di T rispetto al rettangolo, sia

$$\iint_T f_S[x, z, y_{01}(x), y_{02}(z); y'_{01}(x), y'_{02}(z)]\, dx\, dz < \varepsilon/2 \text{ (}^1\text{)}.$$

Ne segue, essendo $f_S \geq 0$

3.7 $$I(y_{01}, y_{02}) - \iint_{C(T)} f_S[x, z, y_{01}(x), y_{02}(z); y'_{01}(x), y'_{02}(z)]\, dx\, dz < \varepsilon/2.$$

Passiamo ora a considerare la φ_R, e notiamo che l'integrale $I_R(y_1, y_2) = \iint \varphi_R\, dx\, dz$ soddisfa alle condizioni del secondo teorema di semicontinuità; avendosi sempre

3.8 $$0 \leq \varphi_R \leq f_S$$

$I_R(y_1, y_2)$ esiste finito sulla C_0. Si può cioè trovare un numero $\varrho > 0$, tale che, se C è una qualunque bilinea ordinaria appartenente propriamente all'intorno ϱ della C_0, è

$$I_R(y_1, y_2) > I_R(y_{01}, y_{02}) - \varepsilon/2.$$

---

(1) L'esistenza del numero R segue all'essere C_0 una bilinea ordinaria.

Per le 3.7 e 3.8 è poi

$$\overline{I}(y_{01}, y_{02}) - I_R(y_{01}, y_{02}) < \varepsilon/2 ,$$

e quindi

$$\overline{I}(y_1, y_2) > \overline{I}(y_{01}, y_{02}) - \varepsilon$$

per ogni bilinea C appartenente propriamente al detto intorno: ossia $\overline{I}(y_1, y_2)$ è semicontinuo sulla C_0.

c) La semicontinuità in tutto il campo.

Sia ora C_0 una bilinea non ordinaria per l'integrale $I(y_1, y_2)$ $q\,r\,p$. Per quanto abbiamo osservato (v. nota a pag. 142) è certamente

$$I(y_{01}, y_{02}) = +\infty .$$

Concluderemo quindi la nostra trattazione della semicontinuità degli integrali di Fubini-Tonelli, provando che, supposta l'asintotica bilinearizzabilità di $I(y_1, y_2)$, è

$$\lim_{C \to C_0} I(y_1, y_2) = +\infty ,$$

ossia dimostrando il seguente

IV[0] *Teorema di semicontinuità: Ogni integrale $q\,r\,p$ e $a\,b$ é semicontinuo inf. su ogni bilinea non ordinaria.*

A questo si arriva modificando opportunamente il ragionamento seguito nella dimostrazione del II[0] e III[0] teorema di semicontinuità.

Si noti intanto che l'integrale

$$\iint [f - f_S]\, dx\, dz$$

esiste finito ed è continuo anche sulla C_0, e che pertanto è

$$\overline{I}(y_{01}, y_{02}) = +\infty . \tag{3.9}$$

Basterà cioè anche in questo caso dimostrare la semicontinuità di $\overline{I}(y_1, y_2)$, ossia che è

$$\lim_{C \to C_0} (\overline{I}(y_1, y_2)) = +\infty .$$

La 3.9 implica che, comunque fissato $R > 0$, detto T' l'insieme dei punti del rettangolo $a_0 b_0 \times c_0 d_0$ in cui è

$$|y'_{01}(x)| > R \quad \text{oppure} \quad |y'_{02}(z)| > R,$$

esso è misurabile e che, detto $C(T')$ il suo complementare rispetto al rettangolo, è

$$\lim_{R \to +\infty} \iint_{C(T')} f_S [x, z, y_{01}(x), y_{02}(z); y'_{01}(x), y'_{02}(z)] \, dx\, dz = +\infty .$$

Sia ora k un numero positivo arbitrario, e R tale che sia

3.10 $$\iint_{C(T')} f_S [x, z, y_{01}(x), y_{02}(z); y'_{01}(x), y'_{02}(z)] \, dx\, dz > k + 1 .$$

Riprendendo il ragionamento col quale si è dimostrato il III^0 Teorema di semicontinuità, consideriamo la funzione φ_R. Notiamo che, per le condizioni 4 cui soddisfa la φ_R, e per il 2^0 teorema di semicontinuità, $I_R(y_1, y_2)$ esiste finito ed è semicontinuo inferiormente sulla C_0. Si può trovare cioè un numero $\varrho > 0$ tale che, se C è una qualunque bilinea ordinaria appartenente propriamente all'intorno ϱ della C_0, è

$$I_R(y_1, y_2) > I_R(y_{01}, y_{02}) - 1 .$$

Essendo sempre $f_S \geq \varphi_R$, è

$$I_R(y_{01}, y_{02}) \geq \iint_{C(T')} \varphi_R (x, z, y_{01}(x), y_{02}(z); y'_{01}(x), y'_{02}(z)] \, dx\, dz =$$

$$= \iint_{C(T')} f_S [x, z, y_{01}(x), y_{02}(z), y'_{01}(x), y'_{02}(z)] \, dx\, dz$$

e per la 3.10

$$I(y_1, y_2) > k . \qquad \text{c. v. d.}$$

Da questo teorema segue il seguente corollario di ovvia dimostrazione

COROLLARIO I. *Se C é un insieme di bilinee ordinarie per un integrale $I(y_1, y_2)$ q r p e a b, e C_0 una bilinea d'accumulazione per esse, e se esiste un numero H tale che per ogni C é $I(y_1, y_2) \leq H$, allora C_0 é ordinaria.*

Potremo dire che $I(y_1, y_0)$ è «semicontinuo inferiormente in tutto il campo», quando lo è su tutte le bilinee, ordinarie o no. I teoremi III^0 e

IV^0 si possono quindi riassumere nel seguente

Teorema generale di semicontinuità: Se $I(y_1, y_2)$ é $q\,r\,p$ e $a\,b$ esso é semicontinuo inferiormente in tutto il campo.

COROLLARIO II. Nelle ipotesi del corollario I, è

$$I(y_{01}, y_{02}) \leq H.$$

§ 4. — L'integrale $I(y, y)$.

Diciamo «simmetrica» una bilinea $C \equiv [y_1(x), y_2(z);\ a \leq x \leq b;\ c \leq z \leq d]$, se è contemporaneamente

$$a = c \qquad\qquad b = d$$

$$y_1(x) = y_2(x),$$

ossia se le sue componenti sono uguali.

Chiameremo $I(y, y)$ un integrale $I(y_1, y_2)$ considerato però definito solamente sulle bilinee simmetriche del campo A. Se C_0 è una bilinea simmetrica ordinaria per un certo integrale $I(y, y)$, si dirà che questo è semicontinuo inferiormente su di essa, se per ogni $\varepsilon > 0$, si può trovare un $\varrho > 0$, tale che ogni bilinea ordinaria simmetrica, appartenente propriamente, nel senso della topologia delle bilinee in generale, all'intorno ϱ della C_0, soddisfa alla

4.1 $$I(y, y) > I(y_0, y_0) - \varepsilon.$$

Se invece C_0 non è ordinaria, la 3.1 sarà sostituita dalla

4.1′ $$I(y, y) > \varepsilon.$$

Essendo $I(y, y)$ un particolare $I(y_1, y_2)$, tutte le condizioni atte ad assicurare la semicontinuità di $I(y_1, y_2)$ valgono a fortiori a garantire quella di $I(y, y)$.

Dai teoremi del II paragrafo possiamo quindi dedurre direttamente altrettanti corollari di semicontinuità di $I(y, y)$, che enuncio, sottintendendo che, quando si tratta di $I(y, y)$, con la parola «bilinea» s'intende indicare una bilinea simmetrica.

I^0 *Corollario di semicontinuità.* «*Se $I(y, y)$ é $q\,r\,p$ esso é semicontinuo inferiormente su ogni bilinea lipschiziana*».

II^0 *Corollario di semicontinuità.* « *Se* $I(y, y)$ *é* $S\,q\,r\,p$, *e se per ogni parte chiusa e limitata* A' *di* A *si può trovare un numero* W, *tale che per* $P \in A'$ *e* Q *qualunque sia sempre*

$$|f_{y_1'}| < W[1 + |y_2'|] \qquad |f_{y_1'}| < W[1 + |y_2'|] \qquad |S| < W$$

$I(y, y)$ *é semicontinuo in tutto il campo* ».

Osservazione 1. Anche qui, come nel caso del II^0 Teorema, ogni bilinea è ordinaria.

Osservazione 2. Si noti che il fatto di trattare con integrali $I(y, y)$ anzichè $I(y_1, y_2)$ non comporta alcuna semplificazione dell'enunciato del II^0 corollario rispetto a quello del II^0 teorema.

III *Corollario di semicontinuità.* « *Ogni* $I(y, y)$ $q\,r\,p$ *e* $a \cdot b$ *è semicontinuo inferiormente su ogni bilinea ordinaria* ».

IV *Corollario di semicontinuità.* « *Ogni* $I(y, y)$ $q\,r\,p$ *e* $a \cdot b$ *è semicontinuo inferiormente su ogni bilinea* C_0 *per cui sia*

$$I(y_0, y_0) = +\infty . \tag{4.2}$$

Osservando che se $I(y, y)$ è $q\,r\,p$, ogni bilinea non ordinaria soddisfa alla 3.2 (vedi nota pag. 22), concludiamo col seguente

Corollario generale di semicontinuità. « *Ogni* $I(y, y)$ $q\,r\,p$ *e* $a \cdot b$ *é semicontinuo inferiormente in tutto il campo* ».

§ 5.

Viene del tutto naturale di passare dal concetto di « bilinea » a quello di « trilinea »: essa sarà costituita da una terna di funzioni $[y_1(x), y_2(z), y_3(t), a \leq x \leq b, c \leq z \leq d, e \leq t \leq f]$ assolutamente continue. Analogamente potremo prendere in considerazione la classe delle n-linee, la cui definizione è l'ovvia estensione di quella delle classi delle bilinee e trilinee.

Potremo considerare integrali di Fubini-Tonelli estesi alle n-linee. Nel caso delle trilinee questi funzionali saranno definiti dalla

$$I(y_1, y_2, y_3) =$$
$$= \int_a^b \int_c^d \int_e^f f[x, y, z, y_1(x), y_2(z), y_3(t); y_1'(x), y_2'(z), y_3'(t)]\, dx\, dz\, dt .$$

Se la trilinea è « simmetrica » (vedi paragrafo precedente) si scriverà

$$I(y, y, y) = \int_a^b\int_a^b\int_a^b f[x, z, t, y(x), y(z), y(t); y'(x), y'(z), y'(t)]\, dx\, dz\, dt .$$

Analogamente per $n > 3$.

Tutti i risultati ottenuti nei precedenti paragrafi si estendono facilmente dai funzionali di bilinea a quelli di n-linea, senza sostanzialmente incontrare difficoltà maggiori di quelle che si incontrano, nell'analisi elementare, passando dallo studio delle funzioni di 2 a quelle di n variabili reali. Ometterò di conseguenza le definizioni e gli enunciati dei teoremi concernenti le n-linee e gli integrali dipendenti da esse, e mi limiterò ad indicare come va esteso il concetto di « $q\,r$ positività » di un funzionale, che è alla base di questo lavoro, quando si passi da una bilinea ad una trilinea.

Nel caso delle trilinee, porremo, com'è naturale

$$P = [x, y, t, y_1, y_2, y_3] ;\quad Q = [y_1', y_2', y_3'] ;\quad \overline{Q} = [\overline{y_1'}, \overline{y_2'}, \overline{y_3'}] .$$

DEFINIZIONE: *Noi diremo che* $I(y_1, y_2, y_3)$ *é* $q\,r\,p$, *se esistono 4 funzioni* $S_1(P)$, $S_2(P)$, $S_3(P)$ e $T(P)$, *reali e continue con le loro derivate* S_{1xz}, S_{1zt}, S_{2xt}, T_{xzt}, *tali che, per ogni* P, Q, $\overline{Q}$ *sia*

$$\mathcal{E}^f_{S_1, S_2, S_3, T}(P, Q, \overline{Q}) = f(P, \overline{Q}) - B^f_{S_1, S_2, S_3, T}(P, Q, Q) =$$

$$= f(P, Q) - [f(P, Q) + (\overline{y_1'} - y_1') f_{y_1'}(P, Q) + (\overline{y_2'} - y_2') f_{y_2'}(P, Q) +$$

$$+ (\overline{y_3'} - y_3') f_{y_3'}(P, Q) + (\overline{y_1'} - y_1')(\overline{y_2'} - y_2') S_3(P, Q) +$$

$$+ (\overline{y_2'} - y_2')(\overline{y_3'} - y_3') S_1(P, Q) + (\overline{y_1'} - y_1')(\overline{y_3'} - y_3') S_2(P, Q) +$$

$$+ (\overline{y_1'} - y_1')(\overline{y_2'} - y_2')(\overline{y_3'} - y_3') T(P, Q)] \geq 0 .$$

Istituto Matematico del Politecnico di Milano

BIBLIOGRAFIA

S. CINQUINI: « *Condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali doppi del Calcolo delle Variazioni* », Ann. Mat. pura ed Appl., S. IV, T. X, 1932.

S. FAEDO:

1. *Cond. nec. per la semicontinuità di un nuovo tipo di funzionali.* (Ann. mat. pura ed appl., 1944).
2. *Un nuovo tipo di funzionali continui* (Rend. di Mat. e delle sue applicazioni, Roma, IV, fasc. III-IV, 1943).
3. *Sulle cond. di Legendre e di Weierstrass per gli integrali di Fubini-Tonelli.* (Rend. di Padova, 1950).

E. MAGENES: *Intorno agli integrali di Fubini-Tonelli.*

1. « *Cond. suff. per la semicontinuità* » (Ann. Sc. Norm., 1948).
2. « *Teoremi di esistenza dell'estremo* » (Ann. Sc. Norm., 1949).
3. *Sul minimo relativo degli integrali di F.-T.* (Giornale di Battaglini, S. IV, vol. 79, 1949-50).
4. *Sulle cond. di Eulero relative ai problemi di calcolo delle variazioni degli integrali di F.-T.* (Rend. del sem. Mat. di Padova, 1950).
5. *Un'osservazione sulle cond. necessarie per la semicontinuità degli integrali di F.-T.* (Rend. di Padova, 1950).
6. *Sul minimo semi-forte degli integrali di F.-T.* (Rend. di Padova, 1951).

L. TONELLI:

1. « *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni* » (Ed. Zanichelli, Bologna, voll. I e II).
2. « *Sur la semicontinuité des intégrales doubles du calcul des variations* » (Acta Math., Uppsala, 1929).