ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GIOVANNI AQUARO

Strutture uniformi di spazio precompatto

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 11, nº 3-4 (1957), p. 149-181

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1957_3_11_3-4_149_0>

STRUTTURE UNIFORMI DI SPAZIO PRECOMPATTO

di GIOVANNI AQUARO (Bari)

INTRODUZIONE. — Scopo del presente lavoro è l'esposizione di un procedimento generale di definizione di strutture uniformi di spazio precompatto.

Introdotto « ad hoc » lo strumento essenziale, il « reticolo » sopra uno spazio topologico E, secondo la def. 1 del § 1, il procedimento consiste semplicemente nel far corrispondere univocamente ad ogni reticolo una struttura uniforme di spazio precompatto, detta « associata » al reticolo: la topologia da questa dedotta risulta meno fine della topologia inizialmente data su E.

L'asserita generalità del procedimento viene misurata dal fatto che ad ogni struttura uniforme $\mathcal{U}$ si può far corrispondere univocamente un reticolo la cui struttura uniforme associata $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ è meno fine della data $\mathcal{U}$ e con essa coincide se e solo se $\mathcal{U}$ è una struttura uniforme di spazio precompatto; in ogni caso le topologie dedotte da $\mathcal{U}$ ed $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ sono identiche.

Le conseguenze del procedimento sono svariate e di esse alcune nuove e facilmente riconoscibili dal lettore esperto.

Dal punto di vista metodologico si noterà che la tecnica qui sviluppata ha carattere puramente insiemistico e può essere inquadrata nell'ambito p. es. di [6] (*) cap. II non richiedendo direttamente o indirettamente l'uso intermediario della retta numerica.

Si terrà presente che la terminologia ed il simbolismo sono quelli di [5] e [6] ad eccezione di pochi casi che saranno esplicitamente precisati con adeguati enunciati. A tal proposito si segnala subito che il termine « entourage » di [6] cap. II viene qui tradotto con « adiacenza »; inoltre, diversamente da [6], qui non si richiede che spazii topologici compatti, regolari, uniformizzabili, precompatti ecc., siano separati (di Hausdorff).

Poichè dovremo ripetutamente servircene, converrà enunciare subito alcune definizioni e proposizioni equivalenti ad altre ben note.

(*) I numeri indicati in [ ] si riferiscono all'acclusa Bibliografia.

DEF. 1. — *Si dice che la struttura uniforme $\mathcal{U}$ sull'insieme E è una struttura uniforme di spazio precompatto se per ogni adiacenza V di E per $\mathcal{U}$, esiste un ricovrimento finito di E formata da insiemi piccoli di ordine V. Lo spazio uniforme E si dice precompatto se è definito da una struttura uniforme di spazio precompatto.*

PROP. 1. — *Ad ogni spazio uniforme E, definito dalla struttura uniforme $\mathcal{U}$, si possono far corrispondere univocamente uno spazio uniforme completo $\widetilde{E}$ ed un isomorfismo j di E sopra un sottospazio ovunque denso di $\widetilde{E}$. Se E è separato anche $\widetilde{E}$ è separato ed unico a meno di un isomorfismo.*

DEF. 2. — *Se lo spazio uniforme E è definito dalla struttura uniforme $\mathcal{U}$, lo spazio uniforme completo $\widetilde{E}$ e l'isomorfismo j di cui alla precedente prop. 1, chiamansi rispettivamente completamento di E per $\mathcal{U}$ ed isomorfismo associato.*

PROP. 2. — *Se E è uno spazio uniforme ed $\mathcal{U}$ è la sua struttura uniforme, affinchè E sia precompatto occorre e basta che il completamento di E per $\mathcal{U}$ sia compatto.*

§ 1. — Reticoli e strutture uniformi ad essi associate.

DEF. 1. *Se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ sono gli insiemi delle parti chiuse e, rispettivamente, aperte dello spazio topologico E, chiamasi* **reticolo su** *E ogni parte $\mathcal{R}$ del prodotto $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ di $\mathcal{F}$ per $\mathcal{G}$ che verifichi i seguenti assiomi:*

(R_I) — *$\mathcal{R}$ non è la parte vuota di $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$*

(R_{II}) — *$(F, G) \in \mathcal{R}$ implica $F \subset G$*

(R_{III}) — *$(F_1, G_1) \in \mathcal{R}$ ed $(F_2, G_2) \in \mathcal{R}$ implica $(F_1 \cap F_2, G_1 \cap G_2) \in \mathcal{R}$*

(R_{IV}) — *per ogni $(F, G) \in \mathcal{R}$ esistono due insiemi chiusi A e B di E tali che $E = A \cup B$, $(A, G) \in \mathcal{R}$ e $(B, \complement F) \in \mathcal{R}$.*

La compatibilità di questi assiomi risulta da quanto segue ed in particolare dal teor. 1 del § 2; l'indipendenza di ciascuno degli (R_I), (R_{II}) ed (R_{III}) dagli altri tre restanti è di facile verifica mentre quella di (R_{IV}) dai primi tre è chiarita nella prop. 7 del § 4.

DEF. 2. — *Se $\mathcal{R}$ è un reticolo sullo spazio topologico E, un ricovrimento aperto finito $(G_k)_{1 \leq k \leq n}$ di E dicesi $\mathcal{R}$-riducibile se esiste un ricovrimento chiuso finito $(F_k)_{1 \leq k \leq n}$ di E tale che, per ogni $k = 1, 2, \ldots, n$ sia $(F_k, G_k) \in \mathcal{R}$.*

DEF. 3. — *Se $\mathcal{R}$ è un reticolo sullo spazio topologico E, dicesi* **base associata ad** *$\mathcal{R}$ l'insieme delle parti B dello spazio $E \times E$, prodotto di E per se stesso, tali che esista un ricovrimento aperto finito $\mathcal{R}$-riducibile $(G_k)_{1 \leq k \leq n}$ di E per cui sia $B = \bigcup_{k=1}^{n} (G_k \times G_k)$.*

Con un opportuno adattamento di un procedimento usato in [1] n. 3 prop. 7 indichiamo come ad ogni reticolo si possa associare una struttura uniforme.

TEOR. 1 — *Se $\mathcal{R}$ è un reticolo sullo spazio topologico E, la base associata ad $\mathcal{R}$* (def. 3) *è un sistema fondamentale di adiacenze di una struttura uniforme $\mathcal{U}(\mathcal{R})$ di spazio precompatto su E* (cfr. def. 1 dell'Introduzione) *e la topologia $\mathcal{T}(\mathcal{R})$ dedotta da $\mathcal{U}(\mathcal{R})$ è meno fine della topologia $\mathcal{T}$ data inizialmente su E.*

DIM. Stabiliamo, in primo luogo, che la base $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ associata ad $\mathcal{R}$ è una base di filtro su $E \times E$ ed all'uopo proviamo preliminarmente che:
(1) $A \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$ implica $A \cap B \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$.

Infatti, per la def. 3, esistono due ricovrimenti aperti finiti $\mathcal{R}$-riducibili $(U_h)_{1 \leq h \leq m}$ e $(V_k)_{1 \leq k \leq n}$ di E tali che $A = \bigcup_{h=1}^{m} (U_h \times U_h)$ e $B = \bigcup_{k=1}^{n} (V_k \times V_k)$. Per la def. 2 esistono due ricovrimenti chiusi finiti $(F_h)_{1 \leq h \leq m}$ e $(G_k)_{1 \leq k \leq n}$ di E tali che $(F_h, U_h) \in \mathcal{R}$ per $h = 1, 2, \dots, m$ e $(G_k, V_k) \in \mathcal{R}$ per $k = 1, 2, \dots, n$. Ovviamente è $A \cap B = \bigcup_{h=1}^{m} \bigcup_{k=1}^{n} ((U_h \cap V_k) \times (U_h \cap V_k))$ ed $E = \bigcup_{h=1}^{m} \bigcup_{k=1}^{n} (U_h \cap V_k) = \bigcup_{h=1}^{m} \bigcup_{k=1}^{n} (F_h \cap G_k)$ e da ciò, poichè in forza dell'assioma (R_{III}) si ha $(F_h \cap G_k, U_h \cap V_k) \in \mathcal{R}$ $(h = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, n)$ consegue che $(U_h \cap V_k)_{1 \leq h \leq m, 1 \leq k \leq n}$ è un ricovrimento aperto finito $\mathcal{R}$-riducibile di E e quindi per le deff. 2 e 3, $A \cap B \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$.

Inoltre se Δ_E è la diagonale di $E \times E$, ovviamente si ha che:
(2) $B \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$ implica $\Delta_E \subset B$
(3) $B \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$ implica $B = \overset{-1}{B}$ (dove $\overset{-1}{B}$ è il simmetrico di B).

Poichè sussiste (1), poichè per (R_I), $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ non è la parte vuota di $\mathcal{P}(E \times E)$ (insieme delle parti di $E \times E$) e, poichè per la (2) non contiene la parte vuota di $E \times E$, $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ è una base di filtro su $E \times E$.

Dimostriamo che $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ è un sistema fondamentale di adiacenze di una struttura uniforme su E, per il che basta stabilire che $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ verifica gli assiomi (U'_I), (U'_{II}) ed (U'_{III}) del n. 1, § 1, cap. II di [6]. Evidentemente (U_I') ed (U'_{II}) sussistono in forza di (2) e (3). Passiamo a verificare la (U'_{III}). All'uopo sia $B \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$: per la def. 3 esiste un ricovrimento aperto finito $\mathcal{R}$ — riducibile $(U_k)_{1 \leq k \leq n}$ di E tale che $B = \bigcup_{k=1}^{n} (U_k \times U_k)$. Per la def. 2 esiste un ricovrimento chiuso finito $(F_k)_{1 \leq k \leq n}$ di E tale che per $k = 1, 2, \dots, n$ sia $(F_k, U_k) \in \mathcal{R}$.

Per $k = 1, 2, \dots, n$, posto $V_k = \complement F_k$, in forza dell'assioma (R_{IV}) esistono due insiemi chiusi H_k e G_k di E tali che $E = H_k \cup G_k$, $(H_k, U_k) \in \mathcal{R}$

e $(G_k, V_k) \in \mathcal{R}$. Inoltre per (R_{II}) si ha $F_k \subset U_k$ e quindi è $E = U_k \cup V_k$: dunque (U_k, V_k) è un ricovrimento aperto finito $\mathcal{R}$-riducibile di E e per ciò, posto $A_k = (U_k \times U_k) \cup (V_k \times V_k)$ si ha $A_k \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$ e, posto $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, in forza di (1), si ha $A \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$. Si riconosce che è $A \circ A \subset B$. Infatti sia $x \in E$; poichè è $E = \bigcup_{k=1}^{n} F_k$, esiste un $k = 1, 2, \ldots, n$ tale che $x \in F_k$ e quindi, per la definizione di A_k, si ha $A_k(x) = U_k$. Consegue $A(x) \subset A_k(x) \subset U_k$, $A(x) \times A(x) \subset U_k \times U_k \subset B$, ciò che, A essendo simmetrico al pari di ogni A_k, implica $A \circ A = \bigcup_{x \in E} (\overset{-1}{A}(x) \times A(x)) = \bigcup_{x \in E} (A(x) \times A(x)) \subset B$.

Dunque $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ verifica anche (U'_{III}) e quindi è un sistema fondamentale di adiacenze di una struttura uniforme $\mathcal{U}(\mathcal{R})$ su E.

Supponiamo che V sia un'adiacenza di E per $\mathcal{U}(\mathcal{R})$: esiste un $B \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$ tale che $B \subset V$ e, come al solito, è $B = \bigcup_{k=1}^{n} (U_k \times U_k)$ dove $(U_k)_{1 \leq k \leq n}$ è un ricovrimento aperto finito $\mathcal{R}$-riducibile di E: poichè $(U_k)_{1 \leq k \leq n}$ è un ricovrimento finito di E formato da insiemi piccoli di ordine B e quindi di ordine V, $\mathcal{U}(\mathcal{R})$ è una struttura uniforme di spazio precompatto. Inoltre, poichè B è aperto in $E \times E$, V è un intorno di Δ_E in $E \times E$ e quindi, per ogni $x \in E$, $V(x)$ è un'intorno di x per $\mathcal{T}$. Dunque la topologia $\mathcal{T}(\mathcal{R})$ dedotta da $\mathcal{U}(\mathcal{R})$ è meno fine di $\mathcal{T}$.

Il teorema 1 così dimostrato consente di porre la definizione:

DEF. 4 — *Se $\mathcal{R}$ è un reticolo nello spazio topologico E, la struttura uniforme $\mathcal{U}(\mathcal{R})$ su E, della quale la base associata* (def. 3) *è un sistema fondamentale di adiacenze* (teor. 1) *dicesi* **struttura uniforme associata ad** $\mathcal{R}$ *e la topologia $\mathcal{T}(\mathcal{R})$ su E dedotta da $\mathcal{U}(\mathcal{R})$ chiamasi topologia associata ad $\mathcal{R}$.*

Naturalmente, $\mathcal{T}(\mathcal{R})$, pur essendo meno fine di $\mathcal{T}$, in generale non è identica a $\mathcal{T}$ e se si vuole che $\mathcal{U}(\mathcal{R})$ sia compatibile con $\mathcal{T}$, cioè che sia $\mathcal{T}(\mathcal{R}) = \mathcal{T}$, si devono imporre ad $\mathcal{R}$ delle restrizioni che vengono precisate nella seguente

PROP. 1 — *Se $\mathcal{R}$ è un reticolo sullo spazio topologico E, affinchè la struttura uniforme $\mathcal{U}(\mathcal{R})$ associata ad $\mathcal{R}$* (def. 4) *sia compatibile con la topologia $\mathcal{T}$ di E, è necessario e sufficiente che $\mathcal{R}$ verifichi il seguente assioma* (più restrittivo di (R_I)):

(R'_I) — *Per ogni punto x di E e per ogni intorno V di x esiste un $(F, G) \in \mathcal{R}$ tale che sia $x \in F$ e $G \subset V$.*

DIM. *Necessità.* Supponiamo $\mathcal{U}(\mathcal{R})$ compatibile con la topologia $\mathcal{T}$ di E e V sia un intorno del punto x di E. Esiste allora un'adiacenza W di E per $\mathcal{U}(\mathcal{R})$ tale che $V = W(x)$. Detta $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ la base associata ad $\mathcal{R}$, in forza della def. 4, esiste un $B \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$ tale che $B \subset W$ e quindi, per la def. 3, esiste un ricovrimento aperto finito $\mathcal{R}$-riducibile $(G_k)_{1 \le k \le n}$ di E tale che $B = \bigcup_{k=1}^{n} (G_k \times G_k)$. Per la def. 2 esiste un ricovrimento chiuso finito $(F_k)_{1 \le k \le n}$ di E tale che per ogni $k = 1, 2, \ldots, n$ sia $(F_k, G_k) \in \mathcal{R}$. Esiste un $k = 1, 2, \ldots, n$ tale che $x \in F_k$ donde, per $(\mathrm{R_{II}})$ essendo $F_k \subset G_k$, consegue $x \in G_k$. Per ogni $y \in G_k$ si ha $(x, y) \in G_k \times G_k \subset B \subset W$ e quindi $y \in W(x) = V$ e poi $G_k \subset V$. Dunque $(F_k, G_k) \in \mathcal{R}$, $x \in F_k$, $G_k \subset V_k$ e da ciò $(\mathrm{R'_I})$.

Sufficienza. Supponiamo che $\mathcal{R}$ verifichi l'assioma $(\mathrm{R'_I})$. Siano x un punto di E e V un intorno di x per $\mathcal{T}$. In forza di $(\mathrm{R'_I})$ esiste $(F, G) \in \mathcal{R}$ tale che sia $x \in F$, $G \subset V$. Per $(\mathrm{R_{IV}})$ esistono due insiemi chiusi A e B di E tali che $E = A \cup B$, $(A, G) \in \mathcal{R}$, $(B, \complement F) \in \mathcal{R}$. Dunque $(G, \complement F)$ è un ricovrimento aperto finito $\mathcal{R}$-riducibile di E e quindi, posto $C = (G \times G) \cup ((\complement F) \times (\complement F))$ si ha $C \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$. Poichè è $x \in F$ si ha $C(x) = G \subset V$ donde V è intorno di x per la topologia $\mathcal{T}(\mathcal{R})$ associata ad $\mathcal{R}$ (cfr. def. 4). Dunque $\mathcal{T}(\mathcal{R})$ è più fine di $\mathcal{T}$, ciò che, $\mathcal{T}$ essendo più fine di $\mathcal{T}(\mathcal{R})$ per il teor. 1, dimostra che è $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{R})$ e quindi che $\mathcal{U}(\mathcal{R})$ è compatibile con $\mathcal{T}$.

La proposizione così stabilita, in quanto $(\mathrm{R'_I})$ implica $(\mathrm{R_I})$, giustifica la seguente definizione:

DEF. 5. — *Se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ sono gli insiemi delle parti chiuse e, rispettivamente, aperte dello spazio topologico E, chiamasi* **reticolo regolare su** *E ogni parte $\mathcal{R}$ del prodotto $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ che verifichi l'assioma* $(\mathrm{R'_I})$ *della prop. 1 e gli assiomi* $(\mathrm{R_{II}})$, $(\mathrm{R_{III}})$ *ed* $(\mathrm{R_{IV}})$ *della def. 1.*

Questa definizione, la prop. 1 (sufficienza) ed il teor. 1 consentono di enunciare il teorema.

TEOR. 2 — *Se $\mathcal{R}$ è un reticolo regolare sullo spazio topologico E, la struttura uniforme su E associata ad $\mathcal{R}$ è una struttura uniforme di spazio precompatto compatibile con la topologia di E.*

Sussiste la seguente proprietà estremale.

PROP. 2. — *Se $\mathcal{R}$ è un reticolo sullo spazio topologico E, la struttura uniforme $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ associata ad $\mathcal{R}$ è la meno fine delle strutture uniformi $\mathcal{U}$ su E verificanti la seguente proprietà:*

a) — per ogni $(F, G) \in \mathcal{R}$ esiste un'adiacenza V di E per $\mathcal{U}$ tale che $V(F) \subset G$.

DIM. Sia $(F, G) \in \mathcal{R}$. In base all'assioma $(\mathrm{R_{IV}})$ esistono due insiemi chiusi A e B di E tali che $E = A \cup B$, $(A, G) \in \mathcal{R}$ e $(B, \complement F) \in \mathcal{R}$: dunque $(G, \complement F)$ è un ricovrimento aperto finito $\mathcal{R}$-riducibile di E e quindi, posto $V = (G \times G) \cup ((\complement F) \times (\complement F))$, la V è un'adiacenza di E per $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ e si ha $V(F) = G$. Dunque $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ verifica *a*).

Supponiamo ora che $\mathcal{U}$ sia una qualunque struttura uniforme su E verificante *a*) e V sia una qualunque adiacenza di E per $\mathcal{A}(\mathcal{R})$. In base alla def. 4, esiste un B appartenente alla base associata $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ ad $\mathcal{R}$ tale che $B \subset V$. Per la def. 3 esiste un ricovrimento aperto finito $\mathcal{R}$-riducibile $(G_k)_{1\leq k\leq n}$ di E tale che $B = \bigcup_{k=1}^{n} (G_k \times G_k)$. Per la def. 2 esiste un ricovrimento chiuso finito $(F_k)_{1\leq k\leq n}$ di E tale che, per ogni $k = 1, 2, \dots, n$, sia $(F_k, G_k) \in \mathcal{R}$. Poichè $\mathcal{U}$ verifica la $a)$ per ogni $k = 1, 2, \dots, n$ esiste un'adiacenza W_k di E per $\mathcal{U}$ tale che $W_k(F_k) \subset G_k$.

Poniamo $W = \bigcap_{k=1}^{n} W_k$: ovviamente W è un'adiacenza di E per $\mathcal{U}$: se è $(x, y) \in W$, da $E = \bigcup_{k=1}^{n} F_k$, consegue $x \in F_k$ per almeno un $k = 1, 2, \dots, n$ e quindi $y \in W(F_k) \subset W_k(F_k) \subset G_k$ e poi $(x, y) \in F_k \times G_k \subset G_k \times G_k \subset B \subset V$ donde $W \subset V$: dunque V è un'adiacenza di E per $\mathcal{U}$ ed $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ è meno fine di $\mathcal{U}$.

La proposizione così dimostrata non richiede che $\mathcal{R}$ sia regolare cioè, secondo la prop. 1, che $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ sia compatibile con la topologia di E: conviene per ciò osservare il corollario:

COROLLARIO. — *Se $\mathcal{R}$ è un reticolo regolare sullo spazio topologico E, la struttura uniforme $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ associata ad $\mathcal{R}$ è la meno fine delle strutture uniformi compatibili con la topologia di E e verificanti la $a)$ della prop. 2.*

Per proseguire l'analisi delle strutture uniformi associate a reticoli conviene premettere un:

LEMMA — *Se E è una parte ovunque densa dello spazio uniforme $\widetilde{E}$, se A e B sono parti del sottospazio uniforme E tali che esista un'adiacenza V di tal sottospazio tale che $V(A) \cap B = \emptyset$ allora esiste un'adiacenza $\widetilde{V}$ di $\widetilde{E}$ per cui $\widetilde{V}(A) \cap B = \emptyset$.*

DIM. Esiste un'adiacenza simmetrica W del sottospazio E tale che $W \circ W \subset V$. Risulta $W(A) \cap W(B) = \emptyset$: poichè E è sottospazio uniforme di $\widetilde{E}$ esiste un'adiacenza $\widetilde{W}$ di $\widetilde{E}$ tale che sia $W = \widetilde{W} \cap (E \times E)$; assumiamo un'adiacenza aperta $\widetilde{V}$ di $\widetilde{E}$ tale che $\widetilde{V} \subset \widetilde{W}$. Risulta $\widetilde{V}(A) \cap B = \emptyset$. Per dimostrarlo, essendo $B \subset \widetilde{V}(B)$ basta riconoscere che è $\widetilde{V}(A) \cap \widetilde{V}(B) = \emptyset$. Per assurdo, supponiamo che, viceversa sia $\widetilde{V}(A) \cap \widetilde{V}(B) \neq \emptyset$: poichè $\widetilde{V}(A) \cap \widetilde{V}(B)$ è aperto ed E è ovunque denso in $\widetilde{E}$ risulta $E \cap (\widetilde{V}(A) \cap \widetilde{V}(B)) \neq \emptyset$. Supposto $x \in E \cap (\widetilde{V}(A) \cap \widetilde{V}(B))$ si ha $x \in E$ ed esistono $a' \in A$ e $b' \in B$ tali che $(a, x) \in \widetilde{V}(b, x) \in \widetilde{V}$ e poi $(a, x) \in (A \times E) \cap \widetilde{V} \subset (E \times E) \cap \widetilde{W}$, $(b, x) \in (B \times E) \cap \widetilde{V} \subset (E \times E) \cap \widetilde{W}$ e quindi, essendo $W = \widetilde{W} \cap (E \times E)$, $x \in W(A) \cap W(B)$ il che è escluso. Dnnque è $\widetilde{V}(A) \cap \widetilde{V}(B) = \emptyset$ e da ciò la tesi.

Ciò premesso stabiliamo una proposizione che utilizzeremo ripetutamente.

Prop. 3. — *Se* $\mathcal{R}$ *è un reticolo regolare sullo spazio topologico* E, *se* $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ *è la struttura uniforme associata ad* $\mathcal{R}$, *se* $\tilde{E}$ *è il completamento di* E *per* $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ *e se* j *è l'isomorfismo associato ad* $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ (cfr. def. 2 dell'Introduzione) *ogni volta che per le parti* A *e* B *di* E *esista un* $(F, G) \in \mathcal{R}$ *tale che* $A \subset F$, $B \cap G = \emptyset$, *denotate con* $\overline{j(A)}^{\sim}$ *e* $\overline{j(B)}^{\sim}$ *le aderenze di* $j(A)$ *e* $j(B)$ *in* $\tilde{E}$, *risulta* $\overline{j(A)}^{\sim} \cap \overline{j(B)}^{\sim} = \emptyset$.

Dim. Poichè in forza della prop. 2, esiste un'adiacenza V di E per $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ tale che $V(F) \subset G$ e risulta $A \subset F$, $G \subset \complement B$, si trova $V(A) \subset V(F) \subset G \subset \complement B$ e quindi $V(A) \cap B = \emptyset$. Sia $\tilde{\mathcal{A}}(\mathcal{R})_{j(E)}$ la struttura uniforme indotta su $j(E)$ da $\tilde{\mathcal{A}}(\mathcal{R})$ e sia h l'estensione di j ad $E \times E$ cioè l'applicazione di $E \times E$ su $j(E) \times j(E)$ definita ponendo per ogni $(x, y) \in E \times E$ $h(x, y) = (j(x), j(y))$. Posto $W = h(V)$, poichè j è un isomorfismo di E su $j(E)$ per $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ ed $\tilde{\mathcal{A}}(\mathcal{R})_{j(E)}$, W è un'adiacenza di $j(E)$ per $\tilde{\mathcal{A}}(\mathcal{R})_{j(E)}$ ed inoltre, essendo $V(A) \cap B = \emptyset$, risulta $W(j\,A)) \cap j(B) = \emptyset$. Poichè $j(E)$ è ovunque denso in E, per il lemma precedente esiste un'adiacenza $\tilde{V}$ di $\tilde{E}$ per $\tilde{\mathcal{A}}(\mathcal{R})$ tale che $\tilde{V}(j(A)) \cap j(B) = \emptyset$. Sia $\tilde{W}$ un'adiacenza simmetrica di $\tilde{E}$ per $\tilde{\mathcal{A}}(\mathcal{R})$ tale che $\tilde{W} \circ \tilde{W} \subset \tilde{V}$.

Se fosse $\overline{j(A)}^{\sim} \cap \overline{j(B)}^{\sim} \neq \emptyset$ esisterebbe $x \in \overline{j(A)}^{\sim} \cap \overline{j(B)}^{\sim}$ e quindi sarebbe $\tilde{W}(x) \cap j(A) \neq \emptyset$, $\tilde{W}(x) \cap j(B) \neq \emptyset$ e quindi per un $a \in j(A)$ ed un $b \in j(B)$ sarebbe $a \in \tilde{W}(x)$, $b \in \tilde{W}(x)$ e da ciò W essendo simmetrica, $(a, b) \in \tilde{W} \circ \tilde{W} \subset \tilde{V}$ nonchè $b \in \tilde{V}(j(A))$ ed in fine $b \in \tilde{V}(j(A))' \cap j(B)$ il che è escluso. Dunque è $\overline{j(A)}^{\sim} \cap \overline{j(B)}^{\sim} = \emptyset$.

I seguenti esempii forniscono una prima verifica della compatibilità degli assiomi di reticolo regolare: in entrambi E denota uno spazio topologico, $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ denotano gli insiemi delle parti chiuse e, rispettivamente, aperte di E.

Esempio 1. — Supponiamo che E sia compatto e regolare ed $\mathcal{R}$ sia l'insieme degli $(F, G) \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ tali che $F \subset G$. Poichè E è regolare, cioè verifica l'assioma (O_{III}) di [6] cap. I, § 6, n. 6, se x è un intorno di E e V è un intorno di x, detto $\overset{\circ}{V}$ l'interno di V, esiste un intorno chiuso F di x tale che $F \subset \overset{\circ}{V}$. Posto $G = \overset{\circ}{V}$ si ha $(F, G) \in \mathcal{R}$, $x \in F$ e $G \subset V$ donde l'assioma (R_I') è vero per $\mathcal{R}$. La verifica di (R_{II}) ed (R_{III}) è immediata. Per stabilire (R_{IV}) supponiamo $(F, G) \in \mathcal{R}$. Essendo $F \subset G$, poichè E è compatto e regolare esiste un intorno aperto V di F tale che $\overline{V} \subset G$ (cfr. [10] cap. 5, teor. 10). Posto $A = \overline{V}$ e $B = \complement V$, risulta $E = A \cup B$, con A e B chiusi, ed inoltre da $A \subset G$ e $B \subset \complement F$, consegue $(A, G) \in \mathcal{R}$ e $(B, \complement F) \in \mathcal{R}$: dunque $\mathcal{R}$ vèrifica (R_{IV}) e quindi è un reticolo regolare su E. Si ritrova così un risultato ben noto di A. Weil: ogni spazio compatto e regolare risulta uniformizzabile (cfr. teor. 2).

Esempio 2. — Denotiamo ora con $\mathcal{R}$ l'insieme degli $(F, G) \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ tali che esista un $U \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ (cioè simultaneamente chiuso ed aperto) per cui $F \subset U \subset G$. Poichè E stesso è aperto e chiuso, è chiaro che $\mathcal{R}$ verifica $(\mathrm{R_I})$. Che $\mathcal{R}$ soddisfi anche $(\mathrm{R_{II}})$ ed $(\mathrm{R_{III}})$ è immediato. Per provare $(\mathrm{R_{IV}})$ supponiamo $(F, G) \in \mathcal{R}$: esiste un $U \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ tale che $F \subset U \subset G$. Posto $A = U$ e $B = \complement U$, risulta $E = A \cup B$, $A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, $B \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ ed è $A \subset G$ e $B \subset \complement F$: in conseguenza è $(A, G) \in \mathcal{R}$ e $(B, \complement F) \in \mathcal{R}$ e da ciò $(\mathrm{R_{IV}})$ risulta verificato da $\mathcal{R}$ che, così, è un reticolo su E.

La struttura uniforme $\mathcal{A}$ associata ad $\mathcal{R}$ (def. 4) è qui chiamata *struttura uniforme 0-dimensionale su E*. Per la def. 4, la base $\mathcal{B}$ associata ad $\mathcal{R}$ (def. 3) è un sistema fondamantale di adiacenze di E per $\mathcal{A}$. Denotiamo con $\mathcal{U}$ il filtro generato da $\mathcal{B}$ cioè il filtro delle adiacenze di $\mathcal{A}$: un altro sistema fondamentale di adiacenze per $\mathcal{A}$ è l'insieme $\mathcal{B}_0$ delle parti B di $E \times E$ della forma $B = \bigcup_{k=1}^{n} (U_k \times U_k)$ dove $(U_k)_{1 \leq k \leq n}$ è una partizione aperta (e quindi chiusa) finita di E. Per dimostrarlo, poichè è $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{U}$ e $\mathcal{B}$ è una base di $\mathcal{U}$, basta solo stabilire che per ogni $B \in \mathcal{B}$ esiste un $B_0 \in \mathcal{B}_0$ tale $B_0 \subset B$.

Sia dunque $B \in \mathcal{B}$: per la def. 3, esiste un ricovrimento aperto finito $\mathcal{R}$-riducibile $(G_k)_{1 \leq k \leq n}$ di E tale che $B = \bigcup_{k=1}^{n} (G_k \times G_k)$. Per la def. 2 esiste un ricovrimento chiuso finito $(F_k)_{1 \leq k \leq n}$ di E tale che per ogni $k = 1, 2, \dots, n$ sia $(F_k, G_k) \in \mathcal{R}$. Ciò implica che, per ogni $k = 1, 2, \dots, n$ esiste un insieme chiuso ed aperto W_k di E tale che $F_k \subset W_k \subset G_k$. Sia $V_1 = W_1$ e, per $k = 2, 3, \dots, n$, $V_k = W_k \cap (\complement \bigcup_{j=1}^{k-1} W_j)$. Evidentemente ogni V_k è aperto e chiuso (eventualmente vuoto), risulta $V_h \cap V_k = \emptyset$ se è $h \neq k$ ed è $E = \bigcup_{k=1}^{n} V_k$. Siano $k_1, k_1, \dots, k_p$ quelli degli indici $k = 1, 2, \dots, n$ tali che $V_k \neq \emptyset$. Posto $U_l = V_{k_l}$ per ogni $l = 1, 2, \dots, p$, $(U_l)_{1 \leq l \leq p}$ è una partizione aperta finita di E e quindi, posto $B_0 = \bigcup_{l=1}^{p} (U_l \times U_l)$, si ha $B_0 \in \mathcal{B}_0$ ed inoltre, se è $l = 1, 2, \dots, p$ risulta $U_l \times U_l \subset V_{k_l} \times V_{k_l} \subset W_{k_l} \times W_{k_l} \subset G_{k_l} \times G_{k_l} \subset B$ donde $B_0 \subset B$. Dunque $\mathcal{B}_0$ è un sistema fondamentale di adiacenze per $\mathcal{A}$.

Notiamo ora che, in forza della prop. 1, $\mathcal{A}$ è compatibile con la topologia di E, cioe $\mathcal{R}$ è un reticolo regolare, se e solo se per ogni punto x di E e per ogni intorno V di x esiste un $U \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ tale che sia $x \in U \subset V$: in altre parole:

α) — *Affinchè la struttura uniforme 0-dimensionale sullo spazio topologico E sia compatibile con la topologia di E occorre e basta che E sia 0-dimensionale secondo Menger-Uryshon* (cfr. [4]).

Ciò premesso, sia $\widetilde{E}$ il completamento di E per $\mathscr{A}$ (cfr. def. 2 della Introduzione) e sia $\widetilde{\mathscr{A}}$ la struttura uniforme (di spazio completo) di $\widetilde{E}$: poichè $\mathscr{A}$, per il teor. 1, è una struttura uniforme di spazio precompatto, in forza della prop. 2 dell'Introduzione, $\widetilde{E}$ è compatto. Dimostriamo che *se E è O-dimensionale secondo Menger-Uryshon, altrettanto accade ad $\widetilde{E}$.* (cfr. [11]).

Sia j l'isomorfismo associato ad $\mathscr{A}$ (cfr. def. 2 dell'Introduzione): $j(E)$ è ovunque denso in $\widetilde{E}$ e, detta $\widetilde{\mathscr{A}}_{j(E)}$ la struttura uniforme indotta da $\widetilde{\mathscr{A}}$ su $j(E)$, j risulta un isomorfismo di E su $j(E)$ per $\mathscr{A}$ ed $\widetilde{\mathscr{A}}_{j(E)}$.

Denotata con $\overline{X}^{\sim}$ l'aderenza in $\widetilde{E}$ di una qualunque parte X di $\widetilde{E}$ osserviamo che:

β) — *Se* $(U_k)_{1\leq k\leq n}$ *è una partizione aperta finita di* E, $(\overline{j(U_k)}^{\sim})_{1\leq k\leq n}$ *è una partizione aperta finita di* $\widetilde{E}$.

Infatti, per ogni $h = 1, 2, \dots, n$, U_h è aperto e chiuso e quindi è $(U_h, U_h) \in \mathcal{R}$ e quindi per ogni $k = 1, 2, \dots, n$ con $k \neq h$, essendo $U_h \cap U_k = \emptyset$, per la prop. 3 consegue $\overline{j(U_h)}^{\sim} \cap \overline{j(U_k)}^{\sim} = \emptyset$. Inoltre, ovviamente, è $\widetilde{E} = \overline{j(E)}^{\sim} = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{j(U_k)}^{\sim}$ e da ciò la β).

Ciò premesso, W sia una qualunque adiacenza di $\widetilde{E}$ per $\widetilde{\mathscr{A}}$ e W' sia una adiacenza chiusa di $\widetilde{E}$ tale che $W' \subset W$. Posto $V = W' \cap (j(E x j(E)$, ovviamente V è una adiacenza di $j(E)$ per $\widetilde{\mathscr{A}}_{j(E)}$. Detta h l'estensione di j ad $E \times E$, cioè l'applicazione (biunivoca) di $E \times E$ su $j(E) \times j(E)$ definita ponendo per ogni $(x, y) \in E \times E$, $h(x, y) = (j(x), j(y))$, poichè j è uniformemente continua per $\mathscr{A}$ ed $\widetilde{\mathscr{A}}_{j(E)}$, la $\overset{-1}{h}(V)$ è un'adiacenza di E per $\mathscr{A}$. Poichè $\mathcal{B}_0$ è un sistema fondamentale di adiacenze per $\mathscr{A}$, esiste una partizione aperta finita $(U_k)_{1\leq k\leq n}$ di E tale che $\bigcup\limits_{k=1}^{n} (U_k \times U_k) \subset \overset{-1}{h}(V)$. Risulta:

$$\bigcup_{k=1}^{n} (\overline{j(U_k)}^{\sim} \times \overline{j(U_k)}^{\sim}) = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{h(U_k \times U_k)}^{\sim} = \overline{h\,(\bigcup_{k=1}^{n} (U_k \times U_k))}^{\sim} \subset \overline{h(\overset{-1}{h}(V))}^{\sim} \subset$$
$$\overline{V}^{\sim} \subset \overline{W'}^{\sim} = W' \subset V.$$

Poniamo $B = \bigcup\limits_{k=1}^{n} (\overline{j(U_k)}^{\sim} \times \overline{j(U_k)}^{\sim})$: per la osservazione β), $\overline{(j(U_k)}^{\sim}{}_{1\leq k\leq n}$ è una partizione aperta finita di $\widetilde{E}$ e quindi B è un'adiacenza di $\widetilde{E}$ per la struttura uniforme O-dimensionale $\widetilde{\mathscr{A}}_0$, su $\widetilde{E}$. Dunque $\widetilde{\mathscr{A}}_0$, è più fine di $\widetilde{\mathscr{A}}$; da ciò consegue che la topologia $\widetilde{\mathcal{T}}_0$ su $\widetilde{E}$ dedotta da $\widetilde{\mathscr{A}}_0$ è più fine della topologia $\widetilde{\mathcal{T}}$ dedotta da $\widetilde{\mathscr{A}}$ cioè dalla topologia di spazio uniforme e compatto di cui è munito $\widetilde{E}$. Ciò e, poichè per il teor. 2. $\widetilde{\mathcal{T}}_0$ è meno fine di $\widetilde{\mathcal{T}}$, dimostra che $\widetilde{\mathcal{T}}_0$ è identica a $\widetilde{\mathcal{T}}$; dunque $\widetilde{\mathscr{A}}_0$ è compatibile con la topologia di $\widetilde{E}$ ed $\widetilde{E}$, per la α), è O-dimensionale secondo Menger-Uryshon.

§ 2. — Reticoli generati da una struttura uniforme.

Nel precedente § 1 ad ogni reticolo abbiamo associato una struttura uniforme. Uno degli obbiettivi di questo § 2 è, reciprocamente, quello di associare ad ogni struttura uniforme un reticolo regolare: a tal fine premettiamo due lemmi.

LEMMA 1. — *Se A e B sono parti dello spazio uniforme E e se V è una adiacenza di E tale che $V(A) \subset B$, esiste un'ulteriore adiacenza W di E tale che $W(\overline{A}) \subset B$.*

DIM. Basta assumere W come adiacenza simmetrica di E tale che $W \circ W \subset V$.

LEMMA 2. — *Se A e B sono parti dello spazio uniforme E e se esiste un'adiacenza V di E tale che $V(A) \cap B = \emptyset$, esiste un'ulteriore adiacenza W di E tale che $A \cap W(B) = \emptyset$.*

DIM. Basta assumere W come adiacenza simmetrica di E tale che $W \subset V$.

Ciò premesso indichiamo come ad ogi spazio uniforme si associi un reticolo regolare.

TEOR. 1. — *Se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ sono gli insiemi delle parti chiuse e, rispettivamente, aperte dello spazio uniforme E e se $\mathcal{U}$ è la struttura uniforme di E, l'insieme $\mathcal{R}(\mathcal{U})$ degli $(F, G) \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ tali che esista un'adiacenza V di E per cui $V(F) \subset G$, è un reticolo regolare su E* (cfr. def. 5 § 1).

DIM. Sia $x \in E$ ed U un qualunque intorno di x: esiste un'adiacenza V di E tale che $\overline{V}(x) = \overset{\circ}{U}$ il che, per il lemma 1, implica che esiste un'adiacenza W di E tale che $W(\overline{\{x\}}) \subset \overset{\circ}{U}$. Dunque è $(\overline{\{x\}}, \overset{\circ}{U}) \in \mathcal{R}(\mathcal{U})$, il che, essendo $x \in \overline{\{x\}}$ ed $\overset{\circ}{U} \subset U$ dimostra (R_I') per $\mathcal{R}(\mathcal{U})$. La verifica di (R_{II}) è immediata. Supponiamo $(F_1, G_1) \in \mathcal{R}(\mathcal{U})$ ed $(F_2, G_2) \in \mathcal{R}(\mathcal{U})$: esistono due adiacenze V_1 e V_2 di E tali che $V_1(F_1) \subset G_1$, $V_2(F_2) \subset G_2$. Posto $V = V_1 \cap V_2$ si ha $V(F_1 \cap F_2 \subset G_1 \cap G_2$ e quindi $(F_1 \cap F_2, G_1 \cap G_2) \in \mathcal{R}(\mathcal{U})$ cioè $\mathcal{R}(\mathcal{U})$ verifica (R_{III}).

Per provare (R_{IV}) supponiamo $(F, G) \in \mathcal{R}(\mathcal{U})$: dunque esiste un'adiacenza W_1 di E tale che $W_1(F) \subset G$ e sia W_2 un'adiacenza aperta di E tale che $W_2 \circ W_2 \subset W_1$. Poniamo allora, $A = \overline{W_2(F)}$, $B = \complement W_2(F)$. Evidentemente A e B sono chiusi ed è $E = A \cup B$; inoltre, a causa del lemma 1, essendo $W_2(W_2(F)) \subset W_1(F) \subset G$ esiste un'adiacenza V_1 di E tale che $V_1(A) = V_1(\overline{W_2(F)}) \subset G$: dunque è $(A, G) \in \mathcal{R}(\mathcal{U})$.

Inoltre, a causa del lemma 2, essendo $B \cap W_1(F) = \emptyset$, esiste un'adiacenza V_2 di E tale che $V_2(B) \cap F = \emptyset$ da cui risulta $V_2(B) \subset \complement F$ e $(B, \complement F) \in \mathcal{R}(\mathcal{U})$. Dunque (R_{IV}) sussiste per $\mathcal{R}(\mathcal{U})$ che, in tal guisa, risulta un reticolo regolare su E.

Il teorema così dimostrato, tra l'altro, fornisce una nuova prova della compatibilità degli assiomi (R'_I), (R_{II}), (R_{III}) ed (R_{IV}) e quindi quella di (R_I), (R_{II}), (R_{III}) ed (R_{IV}). Ci sarà comoda la seguente:

DEF. 1. — *Se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ sono gli insiemi delle parti chiuse e, rispettivamente, aperte dello spazio uniforme E e se $\mathcal{U}$ è la struttura uniforme di E, il reticolo regolare $\mathcal{R}(\mathcal{U})$ su E* (cfr. teor. 1) *insieme degli $(F, G) \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ tali che sia $V(F) \subset G$ per almeno un'adiacenza V di E per $\mathcal{U}$, chiamasi* **reticolo generato da** $\mathcal{U}$ *e la struttura uniforme associata ad $\mathcal{R}(\mathcal{U})$* (cfr. def. 4, § 1) *chiamasi* **struttura uniforme associata ad** $\mathcal{U}$.

Questa definizione ed il teor. 1 di cui sopra consentono di enunciare la:

PROP. 1. — *Se E è uno spazio uniforme definito dalla struttura uniforme $\mathcal{U}$, la struttura uniforme associata ad $\mathcal{U}$ è una struttura uniforme di spazio precompatto compatibile con la topologia su E dedotta da $\mathcal{U}$.*

La nozione di reticolo regolare fornisce una nuova caratterizzazione della uniformizzabilità:

PROP. 2. — *Condizione necessaria e sufficiente affinchè lo spazio topologico E sia uniformizzabile è che esista un reticolo regolore su E.*

DIM. *Necessità.* Consegue dal teor. 1.

Sufficienza. Consegue dal teor. 2 del § 1.

Al fine di proseguire l'analisi della struttura uniforme associata ad una data premettiamo due lemmi.

LEMMA 3. *Se E è uno spazio uniforme ed $\mathcal{U}$ è la sua struttura uniforme, se $\mathcal{R}(\mathcal{U})$ è il reticolo generato da $\mathcal{U}$* (cfr. def. 1) *affinchè il ricovrimento aperto finito $(G_k)_{1 \leq k \leq n}$ di E risulti $\mathcal{R}(\mathcal{U})$ - riducibile* (cfr. def. 2, § 1) *è necessario e sufficiente che esistano un'adiacenza V di E per $\mathcal{U}$ ed un ricovrimento chiuso finito $(F_k)_{1 \leq k \leq n}$ di E tale che sia $V(F_k) \subset G_k$ per ogni $k = 1, 2, \ldots, n$.*

DIM. *Necessità.* Se $(G_k)_{1 \leq k \leq n}$ è un ricovrimento aperto finito $\mathcal{R}(\mathcal{U})$-riducibile di E, esiste un ricovrimento chiuso finito $(F_k)_{1 \leq k \leq n}$ di E (cfr. def. 2, § 1) tale che per ogni $k = 1, 2, \ldots, n$ sia $(F_k, G_k) \in \mathcal{R}(\mathcal{U})$: dunque per $k = 1, 2, \ldots, n$ esiste un'adiacenza V_k di E tale che $V_k(F_k) \subset G_k$. Posto $V = \bigcap_{k=1}^{n} V_k$ consegue $V(F_k) \subset G_k$ per ogni $k = 1, 2, \ldots, n$ ed inoltre V è adiacenza di E per $\mathcal{U}$.

Sufficenza. È ovvia.

LEMMA 4. — *Se E è uno spazio uniforme ed $\mathcal{U}$ è la sua struttura uniforme, affinchè una parte A di $E \times E$ sia un'adiacenza di E per la struttura uniforme $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ associata ad $\mathcal{U}$* (cfr. def. 1) *è necessario e sufficiente che esistano un ricovrimento aperto finito $(G_k)_{1 \leq k \leq n}$, un ricovrimento chiuso finito $(F_k)_{1 \leq k \leq n}$ ed una adiacenza V di E tali che sia $\bigcup_{k=1}^{n} (G_k \times G_k) \subset A$ e $V(F_k) \subset G_k$ per $k = 1, 2, \ldots, n$.*

DIM. *Necessità.* Se $\mathcal{R}(\mathcal{U})$ è il reticolo regolare generato da $\mathcal{U}$ (def. 1) la base $\mathcal{B}(\mathcal{R}(\mathcal{U}))$ ad esso associata è un sistema fondamentale di adiacenze per $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ per cui, A essendo adiacenza di E per $\mathcal{A}(\mathcal{U})$, esiste un ricovrimento aperto finito $\mathcal{R}(\mathcal{U})$ - riducibile di E tale che $\bigcup_{k=1}^{n}(G_k \times G_k) \subset A$. Per il lemma 3 (necessità) esistono un ricovrimento chiuso finito $(F_k)_{1 \le k \le n}$ di E ed un'adiacenza V di E tali che $V(F_k) \subset G_k$ per $k = 1, 2, \dots, n$.

Sufficienza. Se $(G_k)_{1 \le k \le n}$ ed $(F_k)_{1 \le k \le n}$ sono ricovrimenti finiti di E il primo aperto ed il secondo chiuso ed esiste un'adiacenza V di E tale che $V(F_k) \subset G_k$ per $k = 1, 2, \dots, n$ e se è $\bigcup_{k=1}^{n}(G_k \times G_k) \subset A$, per il lemma 3 (sufficienza), $(G_k)_{1 \le k \le n}$ è $\mathcal{R}(\mathcal{U})$ - riducibile e quindi $\bigcup_{k=1}^{n}(G_k \times G_k)$ appartiene alla base associata ad $\mathcal{R}(\mathcal{U})$ ed A appartiene ad $\mathcal{A}(\mathcal{U})$.

Ciò premesso possiamo stabilire che:

PROP. 3. — *Se E è uno spazio uniforme ed $\mathcal{U}$ è la sua struttura uniforme, denotata con $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ la struttura uniforme associata ad $\mathcal{U}$* (cfr. def. 1) *si ha che:*

a) — $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ è meno fine di $\mathcal{U}$,

b) — $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ è identica ad $\mathcal{U}$ se e solo se $\mathcal{U}$ è una struttura uniforme di spazio precompatto,

c) — Se F è un qualunque insieme chiuso di E, se $\mathcal{U}_F$ è la struttura uniforme indotta da $\mathcal{U}$ su F, se $\mathcal{A}(\mathcal{U}_F)$ è la struttura uniforme su F associata ad $\mathcal{U}_F$ e se $\mathcal{A}(\mathcal{U})_F$ è la struttura uniforme indotta da $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ su F, risulta $\mathcal{A}(\mathcal{U}_F) = \mathcal{A}(\mathcal{U})_F$.

DIM. di *a*). Sia $\mathcal{R}(\mathcal{U})$ il reticolo generato da $\mathcal{U}$ (def. 1). Se è $(F, G) \in \mathcal{R}(\mathcal{U})$, per la def. 1 esiste un'adiacenza V di E per $\mathcal{U}$ tale che $V(F) \subset G$. Poichè $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ è la struttura uniforme associata ad $\mathcal{R}(\mathcal{U})$, per la prop. 2 del § 1, $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ è meno fine di $\mathcal{U}$.

DIM. di *b*). Se $\mathcal{U}$ è una struttura uniforme di spazio precompatto, dimostriamo che è $\mathcal{A}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ per il che, $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ essendo meno fine di $\mathcal{U}$ a causa di *a*), basterà dimostrare che $\mathcal{U}$ è meno fine di $\mathcal{A}(\mathcal{U})$. Sia V un'adiacenza di E per $\mathcal{U}$ e W sia un'adiacenza *aperta simmetrica* di E per $\mathcal{U}$ tale che $W \circ W \subset V$. Poichè $\mathcal{U}$ è una struttura uniforme di spazio precompatto, esiste un ricovrimento finito $(F_k)_{1 \le k \le n}$ di E formato da insiemi chiusi piccoli di ordine W. Per ogni $k = 1, 2, \dots, n$ sia $G_k = W(F_k)$. Evidentemente $(G_k)_{1 \le k \le n}$ è un ricovrimento aperto di E: posto $B = \bigcup_{k=1}^{n}(G_k \times G_k)$ se è $(x, y) \in B$ si ha $(x, y) \in G_k \times G_k$ per almeno un $k = 1, 2, \dots, n$ e da ciò $x \in W(F_k)$, $y \in W(F_k)$ e, W essendo simmetrica, $(x, y) \in W \circ W \circ W \subset V$ donde $B \subset V$. Da ciò, poichè $(G_k)_{1 \le k \le n}$ ed $(F_k)_{1 \le k \le n}$ sono ricovrimenti finiti il primo aperto ed il secondo chiuso di E ed essendo $W(F_k) = G_k$ per $k = 1$,

$2, \dots n$, in forza del lemma 4 (suffficienza), risulta che V è un'adiacenza di E per $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ ed $\mathcal{U}$ è meno fine di $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ come volevasi.

DIM. di *c*). Cominciamo con lo stabilire che $\mathcal{A}(\mathcal{U})_F$ è meno fine di $\mathcal{A}(\mathcal{U}_F)$ ed, all'uopo, supponiamo che A sia un'adiacenza di F per $\mathcal{A}(\mathcal{U})_F$. Esiste una adiacenza A' di E per $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ tale che $A = (F \times F) \cap A'$ e quindi, per il lemma 4 (necessità), esistono un ricovrimento aperto finito $(G'_k)_{1 \leq k \leq n}$, un ricovrimento chiuso finito $(F'_k)_{1 \leq k \leq n}$ ed un'adiacenza V' di E tali che $V'(F'_k) \subset G'_k$ per $k = 1, 2, \dots, p$ ed $\bigcup_{k=1}^{n} (G'_k \times G'_k) \subset A'$. Siano $k_1, k_2, \dots, k_p$ quelli degli indici $1, 2, \dots, n$ per i quali $F'_k \cap F \neq \emptyset$ e, per ogni $i = 1, 2, \dots, p$, sia $G_i = F \cap G'_{k_i}$, $F_i = F \cap F'_{k_i}$, $V = (F \times F) \cap V'$. Ovviamente $(G_i)_{1 \leq i \leq p}$ ed $(F_i)_{1 \leq i \leq p}$ sono ricovrimenti finiti, il primo aperto ed il secondo chiuso, di F e risulta $V(F_i) \subset G_i$ per ogni $i = 1, 2, \dots, p$. Ciò, V essendo un'adiacenza di F per $\mathcal{U}_F$, in forza del lemma 4 (sufficienza) dimostra che, posto $B = \bigcup_{i=1}^{p} (G_i \times G_i)$, B è un'adiacenza di F per $\mathcal{A}(\mathcal{U}_F)$; risulta inoltre $B \subset A$. Dunque A è un'adiacenza di F per $\mathcal{A}(\mathcal{U}_F)$ e per ciò $\mathcal{A}(\mathcal{U})_F$ è meno fine di $\mathcal{A}(\mathcal{U}_F)$.

Reciprocamente, dimostriamo che $\mathcal{A}(\mathcal{U}_F)$ è meno fine di $\mathcal{A}(\mathcal{U})_F$. Supponiamo dunque che A sia un'adiacenza di F per $\mathcal{A}(\mathcal{U}_F)$. In base al lemma 4 (necessità) esistono un ricovrimento aperto finito $(G_k)_{1 \leq k \leq n}$, un ricovrimento chiuso finito $(F_k)_{1 \leq k \leq n}$ ed un'adiacenza V' di F per $\mathcal{U}_F$ tali che $V(F_k) \subset G_k$ per ogni $k = 1, 2, \dots, n$ ed $\bigcup_{k=1}^{n} (G_k \times G_k) \subset A$. Poichè V è un'adiacenza di F per $\mathcal{U}_F$ esiste un'adiacenza V di E per tale che $V = (F \times F) \cap V'$. Sia W' un'adiacenza aperta simmetrica di E per $\mathcal{U}$ tale che $W' \circ W' \subset V'$. Per ogni $k = 1, 2, \dots, n$ poniamo $G'_k = W' \circ W'(F_k)$ e $F'_k = \overline{W'(F_k)}$: ovviamente G'_k ed F'_k sono parti rispettivamente aperte e chiuse di E. Essendo $W'(W'(F_k)) = W' \circ W'(F_k) = G'_k$, per il lemma 1 esiste un'adiacenza W'_k di E per $\mathcal{U}$ tale che $W'_k(F'_k) = W'_k(\overline{W'(F_k)}) \subset G'_k$ per ogni $k = 1, 2, \dots, n$.

Sia poi $F'_{n+1} = \complement\, W'(F)$ e $G'_{n+1} = \complement\, F$: essendo $F'_{n+1} \cap W'(F) = \emptyset$, dal lemma 2 consegue che esiste un'adiacenza W'_{n+1} di E per $\mathcal{U}$ tale che $W'_{n+1}(F'_{n+1}) \cap F = \emptyset$ donde $W'_{n+1}(F'_{n+1}) \subset \complement\, F = G'_{n+1}$. In conclusione, per ogni $k = 1, 2, \dots, n, n+1$, è $W'_k(F'_k) \subset G'_k$ il che, essendo $E = \bigcup_{k=1}^{n+1} F'_k$, dimostra che $B' = \bigcup_{k=1}^{n+1} (G'_k \times G'_k)$, per il lemma 4 (sufficienza), è un'adiacenza di E per $\mathcal{A}(\mathcal{U})$.

Poichè è $G'_{n+1} = \complement\, F$ si ha $G'_{n+1} \cap F = \emptyset$ donde, posto $B = (F \times F) \cap B'$ si ha

$$B = \bigcup_{k=1}^{n} ((G'_k \cap F) \times (G'_k \cap F)) \tag{1}$$

Sia $k = 1, 2, \ldots, n$: risulta per definizione $G'_k = W' \circ W'(F_k)$ e quindi se è $x \in G'_k \cap F$ consegue $x \in W' \circ W'(F_k) \cap F \subset V'(F_k) \cap F$ e per ciò è $x \in F$ ed esiste un $y \in F_k$ tale che $(x, y) \in V'$: essendo $F_k \subset F$ si ha $(x, y) \in (F_k \times F) \cap V' \subset (F \times F) \cap V' = V$ e quindi $x \in V(F_k) \subset G_k$. Dunque è $G'_k \cap F \subset G_k$ e, per (1), $B \subset A$: poichè B è un'adiacenza di F per $\mathcal{A}(\mathcal{U})_F$ altrettanto accade di A e quindi $\mathcal{A}(\mathcal{U}_F)$ è meno fine di $\mathcal{A}(\mathcal{U})_F$. In definitiva è $\mathcal{A}(\mathcal{U}_F) = \mathcal{A}(\mathcal{U})_F$ e la prop. 3 è completamente dimostrata.

Dalla proposizione così stabilita deduciamo alcuni corollari il primo dei quali fornisce una proprietà estremale della struttura uniforme associata ad una data che può essere raffrontata con quella stabilita nel coroll. prop. 2, § 1 (cfr. anche [6] cap. IX, § 1 eserc. 6, *b*)).

COROLLARIO 1. — *Se E è uno spazio uniforme ed $\mathcal{U}$ è la sua struttura uniforme, la struttura uniforme $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ associata ad $\mathcal{U}$ è la più fine delle strutture uniformi di spazio precompatto su E meno fini di $\mathcal{U}$.*

DIM. Supponiamo che $\mathcal{U}'$ sia una qualunque struttura uniforme di spazio precompatto su E meno fine di $\mathcal{U}$. Siano $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ le topologie dedotte rispettivamente da $\mathcal{U}$ ed $\mathcal{U}'$: poichè $\mathcal{U}'$ è meno fine di $\mathcal{U}$, $\mathcal{T}'$ è meno fine di $\mathcal{T}$. Inoltre per la prop. 3 *b*) risulta $\mathcal{A}(\mathcal{U}') = \mathcal{U}'$. Sia V un'adiacenza di E per $\mathcal{U}'$: per il lemma 4 (necessità) esistono due ricovrimenti finiti $(G'_k)_{1 \leq k \leq n}$ ed $(F'_k)_{1 \leq k \leq n}$ di E, il primo aperto ed il secondo chiuso per $\mathcal{T}'$ ed esiste un'adiacenza W' di E per $\mathcal{U}'$ tale che $W'(F'_k) \subset G'_k$ per ogni $k = 1, 2, \ldots, n$ ed $\bigcup_{k=1}^{n} (G'_k \times G'_k) \subset V'$. Poichè ciascun G'_k è aperto e ciascun F'_k è chiuso per $\mathcal{T}$ e poiche W' è anche adiacenza di E per $\mathcal{U}$, in forza al lemma 4 (sufficienza), risulta che V' è un'adiacenza di E per $\mathcal{A}(\mathcal{U})$. Dunque $\mathcal{U}'$ è meno fine di $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ ciò che, per la prop. 1, dimostra la tesi.

Ulteriore corollario della prop. 3 è il seguente:

COROLLARIO 2. — *Se $\mathcal{U}'$ ed $\mathcal{U}''$ sono strutture uniformi di spazio precompatto sull'insieme E e se $\mathcal{R}(\mathcal{U}')$ ed $\mathcal{R}(\mathcal{U}'')$ sono i reticoli generati da $\mathcal{U}'$ e, rispettivamente, da $\mathcal{U}''$, da $\mathcal{R}(\mathcal{U}') \equiv \mathcal{R}(\mathcal{U}'')$ consegue $\mathcal{U}' \equiv \mathcal{U}''$.*

DIM. Se $\mathcal{A}(\mathcal{U}')$ ed $\mathcal{A}(\mathcal{U}'')$ sono le strutture uniformi associate ad $\mathcal{U}'$ e rispettivamente $\mathcal{U}''$ e se $\mathcal{A}^*(\mathcal{R}(\mathcal{U}'))$ ed $\mathcal{A}^*(\mathcal{R}(\mathcal{U}''))$ sono le strutture uniformi associate ad $\mathcal{R}(\mathcal{U}')$ e, rispettivamente $\mathcal{R}(\mathcal{U}'')$, richiamate l'ipotesi e la def. 1, in forza della prop. 3 *b*) si ha $\mathcal{U}' = \mathcal{A}(\mathcal{U}') = \mathcal{A}^*(\mathcal{R}(\mathcal{U}')) = \mathcal{A}^*(\mathcal{R}(\mathcal{U}'')) = \mathcal{A}(\mathcal{U}'') = \mathcal{U}''$.

COROLLARIO 3. — *Se ogni struttura uniforme $\mathcal{U}$ compatibile con la topologia dello spazio uniformizzabile E verifica la seguente proprietà:*

a) — *se F e G sono insiemi il primo chiuso ed il secondo aperto di E ed è $F \subset G$ esiste un'adiacenza V di E per $\mathcal{U}$ tale che $V(F) \subset G$,*

allora esiste una sola struttura uniforme compatibile con la topologia di E.

Dim. In base alla prop. 1, in forza della uniformizzabilità di E, esiste almeno una struttura uniforme $\mathcal{U}$ di spazio precompatto compatibile con la topologia di E. Sia $\mathcal{R}(\mathcal{U})$ il reticolo generato da $\mathcal{U}$; se F e G sono insiemi di E il primo chiuso ed il secondo aperto con $F \subset G$, sia V un'adiacenza di E per $\mathcal{U}$, prevista da a), tale che $V(F) \subset G$. Se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ sono gli insiemi delle parti chiuse e, rispettivamente, aperte di E, detto $\mathcal{R}(E)$ l'insieme degli $(F, G) \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ tali che sia $F \subseteq G$, risulta $\mathcal{R}(E) \subset \mathcal{R}(\mathcal{U})$, donde, essendo $\mathcal{R}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{R}(E)$ in forza di ($\mathrm{R_{II}}$) della def. 1, § 1, si conclude $\mathcal{R}(E) = \mathcal{R}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ (cfr. prop. 3 b)). Dunque esiste un sola struttura uniforme di spazio precompatto compatibile con la topologia di E. In base al teor. I di [12], consegue la tesi.

Poichè le strutture uniformi compatibili con la topologia di uno spazio compatto uniformizzabile verificano la a), in conseguenza del teor. 33 di [10] cap. 6 pag. 199 si ritrova un ben noto risultato di A. Weil:

Corollario 4. — *Non può esistere più di una struttura uniforme compatibile con la topologia di uno spazio compatto.*

Proseguiamo ora l'analisi delle strutture uniformi associate in relazione alla uniforme continuità.

Prop. 4 — *Se E ed E' sono spazii uniformi e se $\mathcal{U}$ ed $\mathcal{U}'$ rispettivamente sono le loro strutture uniformi, dette $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ ed $\mathcal{A}(\mathcal{U}')$ le strutture uniformi associate ad $\mathcal{U}$ ed $\mathcal{U}'$ rispettivamente, ogni applicazione f di E in E', uniformemente continua per $\mathcal{U}$ ed $\mathcal{U}'$ è uniformemente continua per $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ ed $\mathcal{A}(\mathcal{U}')$.*

Dim. Supponiamo che A' sia un'adiacenza di E' per $\mathcal{A}(\mathcal{U})$. Per il lemma 4 (necessità) esistono due ricovrimenti finiti $(G'_k)_{1 \leq k \leq n}$ ed $(F'_k)_{1 \leq k \leq n}$ di E, il primo aperto ed il secondo chiuso, ed esiste un'adiacenza V' di E tale che $V'(F'_k) \subset G'_k$ per ogni $k = 1, 2, \ldots, n$.

Sia g l'estensione di f ad $E \times E$, cioè, al solito, l'applicazione di $E \times E$ in $E' \times E'$ definita ponendo, per ogni $(x, y) \in E \times E$, $g(x, y) = (f(x), f(y))$. Posto $V = \overset{-1}{g}(V')$, poichè f è uniformemente continua per $\mathcal{U}$ ed $\mathcal{U}'$, V è un'adiacenza di E per $\mathcal{U}$.

Per ogni $k = 1, 2, \ldots, n$ poniamo $G_k = \overset{-1}{f}(G'_k)$ ed $F_k = \overset{-1}{f}(F'_k)$; $(G_k)_{1 \leq k \leq n}$ ed $(F_k)_{1 \leq k \leq n}$ sono ricovrimenti finiti di E, il primo aperto ed il secondo chiuso; inoltre, come è facile constatare risulta $V(F_k) \subset G_k$. Essendo $\bigcup_{k=1}^{n} (G_k \times G_k) \subset \overset{-1}{g}(A')$, per il lemma 4 (sufficienza), $\overset{-1}{g}(A')$ è un'adiacenza di E per $\mathcal{A}(\mathcal{U})$. Dunque f è uniformemente continua per $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ ed $\mathcal{A}(\mathcal{U}')$.

Consegue il

Corollario — *Se E ed E' sono spazii uniformi, se $\mathcal{U}$ ed $\mathcal{U}'$ sono rispettivamente le loro strutture uniformi e se $\mathcal{U}'$ è una struttura uniforme di* *spazio precompatto, ogni applicazione f di E in E' uniformemente continua per $\mathcal{U}$ ed $\mathcal{U}'$ è anche uniformemente continua per $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ ed $\mathcal{U}'$.*

DIM. Consegue dalla prop. 3 *b*) e dalla precedente prop. 4.

Ricordato che ogni spazio compatto e separato (di Hausdorff) è regolare e quindi che esiste una ed una sola struttura uniforme compatibile con la sua topologia (come si riconosce anche dall'esempio 1 del § 1 e dal coroll. 4 della prop. 3 di questo §), possiamo utilizzare i risultati precedenti per indicare una nuova proprietà di estensione delle applicazioni uniformemente continue.

PROP. 5. — *Se E' è uno spazio compatto e separato ed $\mathcal{U}'$ è l'unica struttura uniforme compatibile con la sua topologia, le seguenti proprietà a) e b) sono equivalenti :*

a) — *Se A è un insieme chiuso di uno spazio uniforme E ed f è un'applicazione uniformemente continua del sottospazio uniforme A nello spazio uniforme E' esiste un'applicazione uniformemente continua $\overline{f}$ di E in E' tale che per ogni $x \in A$ sia $\overline{f}(x) = f(x)$.*

b) — *Se A è una parte chiusa di uno spazio regolare e compatto E ed f è un'applicazione continua del sottospazio A nello spazio E', esiste un'applicazione continua $\overline{f}$ di E in E' tale che per ogni $x \in A$ sia $\overline{f}(x) = f(x)$.*

DIM. *a*) *implica b*). Supposta vera la *a*), A sia una parte chiusa di uno spazio regolare e compatto E ed f sia un'applicazione continua del sottospazio A nello spazio E'. Sia $\mathcal{U}$ l'unica struttura uniforme compatibile con la topologia di E (cfr. esempio 1, § 1 e coroll. 4 della prop. 3 di questo §); la struttura uniforme $\mathcal{U}_A$ indotta da $\mathcal{U}$ su A è (l'unica) compatibile con la topologia del sottospazio A. Poichè A è compatto, la f, come è noto, risulta uniformemente continua per $\mathcal{U}_A$ ed $\mathcal{U}'$, e quindi per *a*) esiste un'applicazione $\overline{f}$ di E in E' uniformemente continua per $\mathcal{U}$ ed $\mathcal{U}'$ tale che per ogni $y \in A$ sia $\overline{f}(x) = f(x)$. Poichè $\overline{f}$ è continua in E la *b*) è verificata.

b) *implica a*). Supponiamo vera la *b*); A sia una parte chiusa di uno spazio uniforme E ed f sia un'applicazione uniformemente continua del sottospazio uniforme A in E'. Denotata con $\mathcal{U}$ la struttura uniforme di E e con $\mathcal{U}_A$ la struttura uniforme indotta da $\mathcal{U}$ su A, come di consueto indichiamo con $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ ed $\mathcal{A}(\mathcal{U}_A)$ le strutture uniformi associate (def. 1) rispettivamente ad $\mathcal{U}$ e ad $\mathcal{U}_A$ e con $\mathcal{A}(\mathcal{U})_A$ la struttura uniforme indotta da $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ su A. Poichè E' è compatto, in forza del coroll. della prop. 4, la f, che per ipotesi è uniformemente continua per $\mathcal{U}_A$ ed $\mathcal{U}'$, è uniformemente continua per $\mathcal{A}(\mathcal{U}_A)$ ed $\mathcal{U}'$: ciò, essendo $\mathcal{A}(\mathcal{U}_A) = \mathcal{A}(\mathcal{U})_A$ in forza della prop. 3 *c*), implica che f è uniformemente continua per $\mathcal{A}(\mathcal{U})_A$ ed $\mathcal{U}'$.

Detto $\widetilde{E}$ il completamento di E per $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ (cfr. def. 2 dell'Introduzione), sia $\widetilde{\mathcal{A}}(\mathcal{U})$ la sua struttura uniforme di spazio completo. Poichè $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ è una struttura uniforme di spazio precompatto, in forza della prop. 2 dell'Introduzione, $\widetilde{E}$ è compatto. Sia j l'isomorfismo associato ad $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ (cfr. def. 2 dell'Introduzione): $j(E)$ è una parte ovunque densa di $\widetilde{E}$ e j è un'isomorfismo di E *su* $j(E)$ per $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ e per la struttura uniforme $\widetilde{\mathcal{A}}(\mathcal{U})_{j(E)}$ indotta da $\widetilde{\mathcal{A}}(\mathcal{U})$ su $j(E)$. L'applicazione h inversa di j è, dunque, un'applicazione (biunivoca) di $j(E)$ *su* E uniformemente continua per $\widetilde{\mathcal{A}}(\mathcal{U})_{j(E)}$ ed $\mathcal{A}(\mathcal{U})$; inoltre si ha:

$$h \circ j(x) = x \qquad \text{per ogni } x \in E . \tag{1}$$

Naturalmente, se $\widetilde{\mathcal{A}}(\mathcal{U})_{j(A)}$ è la struttura uniforme indotta da $\widetilde{\mathcal{A}}(\mathcal{U})$ sulla parte $j(A)$ di $\widetilde{E}$, la restrizione $h_{j(E)}$ di h ad $j(A)$ è un'applicazione di $j(A)$ su A uniformemente continua per $\widetilde{\mathcal{A}}(\mathcal{U})_{j(A)}$ ed $\mathcal{A}(\mathcal{U})_A$ e, per la (1), risulta

$$h_{j(A)}(j(x)) = x \qquad \text{per ogni } x \in A . \tag{2}$$

In conseguenza $f \circ h_{j(A)}$ è un'applicazione di $j(A)$ in E' uniformemente continua per $\widetilde{\mathcal{A}}(\mathcal{U})_{j(A)}$ ed $\mathcal{U}'$. Poichè E' è separato e completo (poichè compatto), in forza del teor. 1, n. 4, § 3, cap. II di [6], esiste un'applicazione uniformemente continua f' del sottospazio uniforme $\overline{j(A)}^{\sim}$ di $\widetilde{E}$ ($\overline{j(A)}^{\sim}$ è l'aderenza di $j(A)$ in $\widetilde{E}$) in E', tale che risulti:

$$f'(x') = f \circ h_{j(A)}(x') \qquad \text{per ogni } x' \in j(A) . \tag{3}$$

La f, dunque, è un'applicazione continua dell'insieme chiuso $\overline{j(A)}^{\sim}$ di $\widetilde{E}$ in E' e ciò, essendosi supposta vera la b) ed $\widetilde{E}$ essendo regolare e compatto, implica che esiste un'applicazione continua f'' di $\widetilde{E}$ in E' tale che risulti

$$f''(x') = f'(x') \qquad \text{per ogni } x' \in \overline{j(A)}^{\sim} \tag{4}$$

e quindi, in forza di (3), tale che risulti:

$$f''(x') = f \circ h_{j(A)}(x') \qquad \text{per ogni } x' \in j(A) . \tag{5}$$

Poichè $\widetilde{E}$ è compatto ed f'' è continua in $\widetilde{E}$, come è noto f'' è uniformemente continua per $\widetilde{\mathcal{A}}(\mathcal{U})$ ed $\mathcal{U}'$. Posto $\bar{f} = f'' \circ j$, la $\bar{f}$ è un'applicazione di E in E' uniformemente continua per $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ ed $\mathcal{U}'$ e ciò, poichè $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ è meno fine di $\mathcal{U}$ in forza della prop. 3 a), dimostra che $\bar{f}$ è uniformemente continua per $\mathcal{U}$ ed $\mathcal{U}'$. Inoltre, in forza di (5) e di (2), per ogni $x \in A$, risulta $\bar{f}(x) = f'' \circ j(x) = f \circ h_{j(A)}(x) = f(h_{j(A)}(j(x))) = f(x)$. Dunque b) implica a) e la prop. 5 è completamente dimostrata.

Ad esempio, osserviamo che se E' è uno spazio di Banach compatto, come è ben noto ([6] cap. X, § 5, eserc. 11, ed anche [3], [8] e [2]) per E' sussiste la *b*) di cui sopra e quindi la prop. 5 ha il corollario:

COROLLARIO. *Se A è una parte chiusa di uno spazio uniforme E e se f è un'applicazione uniformemente continua del sottospazio uniforme A nello spazio di Banach compatto E', esiste un'applicazione uniformemente continua $\overline{f}$ di E in E' tale che per ogni $x \in A$ sia $\overline{f}(x) = f(x)$.*

Da questo corollario, se E' è un intervallo compatto della retta numerica, consegue un risultato indicato da KATĚTOV in [9] (cfr. anche [1]).

§ 3. — Un assioma di separazione caratteristico degli spazii uniformizzabili e la struttura uniforme di Tychonoff-Čech.

Mentre ogni spazio uniformizzabile, oltre ai consueti assiomi di struttura topologica (O_I) ed (O_{II}) di [6] (cap. 1, § 1, n. 1), verifica l'assioma di regolarità (O_{III}) ([6] cap. I, § 6, n. 7; cap. II, § 2, n. 2) il sussistere di (O_{III}) in generale non basta ad assicurare l'uniformizzabilità la quale, come è stato rilevato in più modi ([14] § 2, teor. I; [6] cap. IX, § 1, n. 5; [13] cap. III, § 25, 21.1) può essere caratterizzata solo mediante assiomi di separazione più restrittivi.

La nozione di reticolo regolare può essere utilizzata per caratterizzare l'uniformizzabilità mediante un assioma di separazione che, come è ovvio, è equivalente agli altri già noti ma può essere formulato senza l'uso intermediario della retta numerica (attraverso funzioni reali continue) o dei numeri diadici.

A tal fine premettiamo una definizione:

DEF. 1. *Dicesi successione di Uryshon sullo spazio topologico E, ogni successione $((U_m^{(h)})_{0 \leq h \leq 2^m})_{m \in N}$ (1) di famiglie finite di insiemi aperti di E tali che:*

a) — $U_m^{(h)} = U_{m+1}^{(2h)}$ *per ogni* $m \in N$ *ed ogni* $h = 0, 1, \ldots, 2^m$

b) — $\overline{U_m^{(h)}} \subset U_m^{(h+1)}$ *per ogni* $m \in N$ *ed ogni* $h = 0, 1, \ldots, 2^m - 1$.

DEF. 2 — *Se A e B sono parti dello spazio topologico E, si dice che A è U-contenuto in B se esiste una successione di Uryshon $((U_m^{(h)})_{0 \leq h \leq 2^m})_{m \in N}$ su E tale che $A \subset U_0^{(0)}$, $U_0^{(1)} \subset B$.*

Ci serviremo del lemma seguente che, anche se deve considerarsi sostanzialmente noto, non sembra sia stato esplicitamente enunciato nella forma qui esposta.

---

(1) Denotiamo con N l'insieme dei numeri interi positivi $1, 2, \ldots, n, \ldots$

LEMMA 1. — *Se A e B sono parti dello spazio uniforme E e se esiste un'adiacenza V di E tale che $V(A) \subset B$, allora A è U-contenuto in B.*

DIM. Per ricorrenza determiniamo una successione $(V_n)_{n\in N}$ di adiacenze *aperte e simmetriche* di E tali che $V_0 \subset V$ e, per ogni $n \in N$, $V_{n+1} \circ V_{n+1} \subset V_n$. Ancora per ricorrenza determiniamo una successione $((U_m^{(h)})_{0\le h\le 2^m})_{m\in N}$ di parti aperte di $E \times E$ tali che, detta Δ la diagonale di $E \times E$, risulti:

α) $U_m^{(h)}$ è un insieme aperto di $E \times E$ per ogni $m \in N$ ed $h = 1, 2, \ldots, 2^m$.

β) $U_0^{(0)} = \Delta$, $U_0^{(1)} = V_0$

γ) $U_{m+1}^{(2h)} = U_m^{(h)}$ per ogni $m \in N$ ed $h = 0, 1, \ldots, 2^m$

δ) $V_m \circ U_m^{(h)} \subset U_m^{(h+1)}$ per ogni $m \in N$ ed $h = 0, 1, \ldots, 2^m - 1$.

Per $m = 0$, $(U_m^{(h)})_{0\le h\le 2^m}$ è univocamente determinata da β) e suppostala determinata per un certo $m \in N$ definiamo $(U_{m+1}^{(h)})_{0\le h\le 2^{m+1}}$ ponendo:

$$U_{m+1}^{(2k)} = U_m^{(k)} \quad \text{per } k = 0, 1, \ldots, 2^m$$

$$U_{m+1}^{(2k+1)} = V_{m+1} \circ U_m^{(k)} \quad \text{per } k = 0, \ldots, 2^m - 1$$

Evidentemente, per costruzione, $(U_{m+1}^{(h)})_{0\le h\le 2^{m+1}}$ verifica la α) e la γ): quanto alla δ) essa è di verifica immediata.

Sia $m \in N$ ed $h = 0, 1, \ldots, 2^m - 1$. Si verifica facilmente che è $\overline{U_m^{(h)}(A)} \subset U_m^{(h+1)}(A)$ e da ciò consegue che, se si pone $W_m^{(h)} = U_{m+1}^{(2^m+h)}(A)$ per $m \in N$ ed $h = 0, 1, \ldots, 2^m$, la $((W_m^{(h)})_{0\le h\le 2^m})_{m\in N}$ è una successione di Uryshon su E (cfr. def. 1) ed inoltre è $A \subset W_0^{(0)}$, $W_0^{(1)} \subset B$: dunque A è U-contenuto in B come volevasi.

Dopo ciò è immediato che:

PROP. 1. — *Ogni spazio topologico uniformizzabile E verifica l'assioma:*

(O_{IV}) — *Per ogni punto x di E e per ogni intorno V di x, esiste un intorno W di x tale che $\overline{W}$ sia U-contenuta in V* (cfr. def. 2).

DIM. Sia A un'adiacenza di E per una qualunque struttura uniforme $\mathcal{U}$ compatibile con la topologia di E e tale che $A(x) = V$. Sia B un'adiacenza aperta di E tale che $B \circ B \subset A$. Posto $W = B(x)$, risulta $B(W) = B \circ B(x) \subset A(x) = V$ e quindi, in forza del lemma 1 del § 2 esiste un'adiacenza B_0 di E tale che $B_0(\overline{W}) \subset V$: ciò, in forza del lemma 1 di questo §, W essendo un intorno di x, prova (O_{IV}).

L'assioma (O_{IV}) ora introdotto è evidentemente più restrittivo dell'assioma di regolarità (O_{III}) e può legittimamente considerarsi un assioma di completa regolarità: il lettore esperto, infatti, riconoscerà facilmente la sua equivalenza con l'assioma di completa regolarità di Tychonoff. Di ciò noi diamo dimostrazione indiretta ricordando che detto assioma di Tychonoff, in forza di un ben noto teorema di A. Weil ([6] cap. IX, § 1, n. 5), equivale all'uniformizzabilità e provando, con la proposizione reciproca della prop. 1 di cui sopra, che ogni spazio verificante (O_{IV}) è uniformizzabile. Premettiamo all'uopo la:

PROP. 2. — *Se E è uno spazio topologico verificante l'assioma* (O_{IV}) *e se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ sono gli insiemi delle parti chiuse e, rispettivamente, aperte di E, l'insieme $\mathcal{R}(E)$ degli $(F, G) \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ tali che F sia U-contenuto in G* (def. 2) *è un reticolo regolare su E.*

DIM. Supponiamo che x sia un punto di E e che V sia intorno di x. Poichè sussiste l'assioma (O_{IV}) e poichè l'interno $\overset{\circ}{V}$ di V è un'intorno (aperto) di x, esiste un ulteriore intorno W di x tale che $\overline{W}$ sia U — contenuto in $\overset{\circ}{V}$; si ha dunque $(\overline{W}, \overset{\circ}{V}) \in \mathcal{R}(E)$, $x \in \overline{W}$ e $\overset{\circ}{V} \subset V$ donde per $\mathcal{R}(E)$ sussiste l'assioma (R'_I).

La verifica di (R_{II}) è immediata. Dimostriamo (R_{III}). Supponiamo $(F_1, G_1) \in \mathcal{R}(E)$, $(F_2, G_2) \in \mathcal{R}(E)$. Per la definizione di $\mathcal{R}(E)$ e per le deff. 1 e 2, esistono due successioni di Uryshon su E, $((U_m^{(h)})_{0 \leq h \leq 2^m})_{m \in N}$ e $((V_m^{(h)})_{0 \leq h \leq 2^m})_{m \in N}$ tali che $F_1 \subset U_0^{(0)}$, $U_0^{(1)} \subset G_1$, $F_2 \subset V_0^{(0)}$, $V_0^{(1)} \subset G_2$. Per ogni $m \in N$ ed $h = 0, 1, \ldots 2^m$ poniamo $W_m^{(h)} = U_m^{(h)} \cap V_m^{(h)}$: è immediato riconoscere che $((W_m^{(h)})_{0 \leq h \leq 2^m})_{m \in N}$ è una successione di Uryshon su E e che $F_1 \cap F_2 \subset W_0^{(0)}$, $W_0^{(1)} \subset G_1 \cap G_2$. Dunque è $(F_1 \cap F_2, G_1 \cap G_2) \in \mathcal{R}(E)$ e ciò dimostra (R_{III}) per $\mathcal{R}(E)$.

Per stabilire (R_{IV}) premettiamo un'osservazione preliminare:

α) — *se è* $(F, G) \in \mathcal{R}(E)$ *risulta anche* $(\complement G, \complement F) \in \mathcal{R}(E)$.

Infatti, essendo $(F, G) \in \mathcal{R}(E)$, esiste una successione di Uryshon $((U_m^{(h)})_{0 \leq h \leq 2^m})_{m \in N}$ tale che $F \subset U_0^{(0)}$, $U_0^{(1)} \subset G$. Per ogni $m \in N$ ed $h = 0, 1, \ldots, 2^m$ poniamo $V_m^{(h)} = \complement \overline{U_m^{(2^m - h)}}$: è immediato riconoscere che $((V_m^{(h)})_{0 \leq h \leq 2^m})_{m \in N}$ è una successione di Uryshon e che è $\complement G \subset V_0^{(0)}$, $V_0^{(1)} \subset \complement F$: dunque è $(\complement G, \complement F) \in \mathcal{R}(E)$ e da ciò la α).

Ciò premesso, passiamo a dimostrare (R_{IV}) per $\mathcal{R}(E)$.

Supponiamo $(F, G) \in \mathcal{R}(E)$ e quindi che esista una successione di Uryshon $((U_m^{(h)})_{0 \leq h \leq 2^m})_{m \in N}$ tale che $F \subset U_0^{(0)}$, $U_0^{(1)} \subset G$.

Poniamo $\overset{*}{F} = \overline{U_1^{(1)}}$, $\overset{*}{G} = U_1^{(1)}$ e, per $m \in N$ ed $h = 0, 1, \ldots, 2^m$ poniamo $V_m^{(h)} = U_{m+1}^{(h)}$, $W_m^{(h)} = U_{m+2}^{(2^m \cdot 3 + h)}$. Si riconosce facilmente che $((V_m^{(h)})_{0 \leq h \leq 2^m})_{m \in N}$ e $((W_m^{(h)})_{0 \leq h \leq 2^m})_{m \in N}$ sono successioni di Uryshon su E e che è $F \subset V_0^{(0)}$, $V_0^{(1)} \subset \overset{*}{G}$ e $\overset{*}{F} \subset W_0^{(0)}$, $W_0^{(1)} \subset G$.

Dunque è $(F, \overset{*}{G}) \in \mathcal{R}(E)$, $(\overset{*}{F}, G) \in \mathcal{R}(E)$. Poniamo $A = \overset{*}{F}$ e $B = \complement \overset{*}{G}$. Evidentemente A e B sono insiemi chiusi di E e risulta $E = A \cup B$. Essendo $(\overset{*}{F}, G) \in \mathcal{R}(E)$ si ha $(A, G) \in \mathcal{R}(E)$ mentre, da $(F, \overset{*}{G}) \in \mathcal{R}(E)$, in forza della osservazione α) consegue $(\complement \overset{*}{G}, \complement F) \in \mathcal{R}(E)$ ossia $(B, \complement F) \in \mathcal{R}(E)$.

In conclusione (R_{IV}) è vera per $\mathcal{R}(E)$ che così è un reticolo regolare su E.

Siamo ormai in grado di dimostrare che (O_{IV}) è anche sufficiente per l'uniformizzabilità. Invero si ha:

PROP. 3. — *Se E è uno spazio topologico le seguenti tre proprietà sono equivalenti:*

a) — *E è uniformizzabile.*

b) — *E verifica l'assioma* (O_{IV}).

c) — *Detti $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ gli insiemi delle parti chiuse e, rispettivamente, aperte di E, l'insieme $\mathcal{R}(E)$ degli $(F, G) \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ tali che F sia U-contenuto in G* (cfr. def. 1) *è un reticolo regolare su E.*

DIM. *a)* *implica* *b)*. Consegue dalla prop. 1

b) *implica* *c)*. Consegue dalla prop. 2

c) *implica* *a)*. Consegue dal teor. 2 del § 1.

Dopo ciò siamo in grado di porre una definizione:

DEF. 3. — *Se E è uno spazio topologico verificante l'assioma* (O_{IV}) *e se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ sono gli insiemi delle parti chiuse e, rispettivamente, aperte di E, il reticolo regolare $\mathcal{R}(E)$ su E* (cfr. prop. 2) *insieme degli $(F, G) \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ tali che F sia U — contenuto in G* (def. 2) *chiamasi reticolo di Tychonoff-Čech su E.*

DEF. 4. — *Se E è uno spazio topologico verificante l'assioma* (O_{IV}) *la struttura uniforme $\mathcal{A}(E)$ su E associata al reticolo di Tychonoff-Čech* (deff. 3 e 4 del § 1 e def. 3 di questo §) *chiamasi struttura uniforme di Tychonoff Čech su E.*

Dopo ciò è ovvia la

PROP. 4. — *Se E è uno spazio topologico verificante l'assioma* (O_{IV}), *la struttura uniforme di Tychonoff-Čech su E* (def. 4) *è una struttura uniforme di spazio precompatto compatibile con la topologia di E.*

La struttura uniforme di Tychonoff-Čech è caratterizzata dalla seguente proprietà estremale.

PROP. 5. — *Se lo spazio topologico E verifica l'assioma* (O_{IV}), *la struttura uniforme di Tychonoff-Čech su E è la più fine delle strutture uniformi di spazio precompatto compatibili con la topologia di E.*

DIM. Supponiamo che $\mathcal{U}$ sia una struttura uniforme di spazio precompatto compatibile con la topologia di E e sia $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ la struttura uniforme associata ad $\mathcal{U}$ (cfr. def. 1 del § 2): per *b)* della prop. 3, § 2, si ha $\mathcal{A}(\mathcal{U}) \equiv \mathcal{U}$. Sia V un'adiacenza di E per $\mathcal{U}$. Per il lemma 4, § 2, esistono un ricovrimento aperto finito $(G_k)_{1 \leq k \leq n}$, un ricovrimento chiuso finito $(F_k)_{1 \leq k \leq n}$ ed un'adiacenza W di E per $\mathcal{U}$ tali che sia $\bigcup_{k=1}^{n} (G_k \times G_k) \subset V$ e $W(F_k) \subset G_k$ per ogni $k = 1, 2, \dots, n$: per gli stessi k consegue da lemma 1 che F_k è U — contenuto in G_k e da ciò, denotato con $\mathcal{R}(E)$ il reticolo di Tychonoff Čech su E (def. 3), si ha che $(G_k)_{1 \leq k \leq n}$ è $\mathcal{R}(E)$-riducibile (def. 2, § 1).

Quindi, in forza delle deff. 3 e 4, $\bigcup_{k=1}^{n}(G_k \times G_k)$ è un'adiacenza di E per la struttura uniforme di Tychonoff-Čech $\mathcal{A}(E)$ di E: dunque V è un'adiacenza di E per $\mathcal{A}(E)$ che così risulta più fine di $\mathcal{U}$.

Il seguente corollario fornisce un'ulteriore caratterizzazione della struttura uniforme di Tychonoff-Čech.

COROLLARIO. — *Se $\mathcal{R}(E)$ è il reticolo di Tychonoff-Čech sullo spazio uniforme E verificante l'assioma* ($\mathrm{O_{IV}}$), *la struttura uniforme di Tychonoff-Čech $\mathcal{A}(E)$ su E è l'unica delle strutture uniformi di spazio precompatto $\mathcal{U}$ compatibili con la topologia di E che godono della proprietà:*

a) — per ogni $(F, G) \in \mathcal{R}(E)$ esiste un'adiacenza V di E per $\mathcal{U}$ tale che $V(F) \subset G$.

DIM. Poichè $\mathcal{A}(E)$ è la struttura uniforme associata ad $\mathcal{R}(\mathcal{U})$ (def. 4), per la prop. 2, § 1, $\mathcal{A}(E)$ verifica la a) ed ogni struttura uniforme $\mathcal{U}$ su E verificante la a) è più fine di $\mathcal{A}(\mathcal{U})$. Ma se $\mathcal{U}$ è una struttura uniforme di spazio precompatto compatibile con la topologia di E, per la prop. 5, essa è meno fine di $\mathcal{A}(E)$: quindi si ha $\mathcal{U} \equiv \mathcal{A}(E)$ come volevasi.

PROP. 6 — *Se E ed E' sono spazii topologici verificanti l'assioma* ($\mathrm{O_{IV}}$) *e se $\mathcal{A}(E)$ ed $\mathcal{A}(E')$ sono le strutture uniformi di Tychonoff-Čech su E e, rispettivamente, su E', ogni applicazione continua f di E in E' è uniformemente continua per $\mathcal{A}(E)$ ed $\mathcal{A}(E')$.*

DIM. Denotiamo rispettivamente con $\mathcal{R}(E)$ ed $\mathcal{R}(E')$ i reticoli di Tychonoff-Čech di E ed E' e premettiamo un'osservazione

α) se è $(F', G') \in \mathcal{R}(E')$ si ha $(\overset{-1}{f}(F'), \overset{-1}{f}(G')) \in \mathcal{R}(E)$.

Per provarlo rileviamo che da $(F', G') \in \mathcal{R}(E')$, in forza della def. 3, consegue che F' è U-contenuto in G' e ciò, in forza della def. 2, implica che esiste una successione di Uryshon $((U'^{(h)}_m)_{0 \le h \le 2^m})_{m \in N}$ su E' tale che $F' \subset U'^{(0)}_0$, $U'^{(1)}_0 \subset G'$. Posto $U^{(h)}_m = \overset{-1}{f}(U'^{(h)}_m)$ per ogni $m \in N$ ed ogni $h = 0, 1, \dots, 2^m$ è facile riconoscere che $((U^{(h)}_m)_{0 \le h \le 2^m})_{m \in N}$ è una successione di Uryshon su E e risulta $\overset{-1}{f}(F') \subset U^{(0)}_0$, $U^{(1)}_0 \subset \overset{-1}{f}(G')$ e da ciò la α). Ciò premesso supponiamo che A' sia un'adiacenza di E' per $\mathcal{A}(E')$: esiste un B' appartenente alla base associata ad $\mathcal{R}(E')$ (cfr. deff. 3 e 4 § 1) tale che $B' \subset A'$. Per la def. 3 del § 1 esiste un ricovrimento aperto finito $(G'_k)_{1 \le k \le n}$ di E', $\mathcal{R}(E')$-riducibile tale che $B' = \bigcup_{k=1}^{n}(G'_k \times G'_k)$. Per la def. 2 del § 1 esiste un ricovrimento chiuso finito $(F'_k)_{1 \le k \le n}$ di E' tale che sia $(F'_k, G'_k) \in \mathcal{R}(E')$ per ogni $k = 1, 2, \dots, n$. Consegue che $(\overset{-1}{f}(G'_k))_{1 \le k \le n}$ e $(\overset{-1}{f}(F'_k))_{1 \le k \le n}$ sono ricovrimenti finiti, il primo aperto ed il secondo chiuso, di E e, in forza di

α) per ogni $k = 1, 2, \dots, n$, risulta $(\overset{-1}{f}(F'_k), \overset{-1}{f}(G'_k)) \in \mathcal{R}(E)$. Ciò mostra che, posto $A = \bigcup_{k=1}^{n} (\overset{-1}{f}(G'_k) \times \overset{-1}{f}(G'_k))$, con le solite argomentazioni, A è un'adiacenza di E per $\mathcal{A}(E)$. Detta g l'estensione di f ad $E \times E$, cioè l'applicazione di $E \times E$ in $E' \times E'$ definita ponendo, per ogni $(x, y) \in E \times E$, $g(x, y) = (f(x), f(y))$, si ha $A = \bigcup_{k=1}^{n} \overset{-1}{g}(G'_k \times G'_k) = \overset{-1}{g}(B) \subset \overset{-1}{g}(A')$: dunque $\overset{-1}{g}(A)$ è un'adiacenza di E per $\mathcal{A}(E)$: ciò dimostra che f è uniformemente continua per $\mathcal{A}(E)$ ed $\mathcal{A}(E')$.

Quanto precede ci consente di pervenire alla compattificazione di Tychonoff-Čech-Stone nell'ambiio della teoria dei reticoli.

PROP. 7. — *Se E è uno spazio topologico verificante l'assioma* (O_{IV}), *il completamento $\widetilde{E}$ di E per la struttura uniforme $\mathcal{A}(E)$ di Tychonoff-Čech e l'isomorfismo j associato ad $\mathcal{A}(E)$* (cfr. def. 2 dell'introduzione) *godono delle seguenti proprietà:*

a) — $\widetilde{E}$ è uno spazio regolare e compatto, separato se E è separato.

b) — j è un omeomorfismo di E sopra un sottospazio ovunqne denso di $\widetilde{E}$.

c) — detto h l'omeomorfismo di $j(E)$ sù E, inverso di j, per ogni applicazione continua f di E in un qualunque spazio separato e compatto E' esiste una applicazione continua $\overline{f}$ di $\widetilde{E}$ in E' tale che per ogni $x \in j(E)$ risulti $\overline{f}(x) = f \circ h(x)$.

DIM. Poichè $\widetilde{E}$ è uno spazio uniforme esso è regolare e, poichè $\mathcal{A}(E)$ è una struttura uniforme di spazio precompatto, per la prop. 2 della Introduzione, $\widetilde{E}$ è compatto. Inoltre, se E è separato, dalla prop. 1 della stessa Introduzione, risulta che $\widetilde{E}$ è separato. Dunque a) è vera.

Poichè j è un isomorfismo di E su $j(E)$ e $j(E)$ è ovunque denso in $\widetilde{E}$, la b) è vera.

Detta $\widetilde{\mathcal{A}}(E)_{j(E)}$ la struttura uniforme indotta su $j(E)$ dalla struttura uniforme $\widetilde{\mathcal{A}}(E)$ di $\widetilde{E}$, h è un'applicazione di $j(E)$ su E uniformemente continua per $\widetilde{\mathcal{A}}(E)_{j(E)}$ ed $\mathcal{A}(E)$. Detta $\mathcal{A}(E')$ la struttura uniforme di Tychonoff-Čech dello spazio E' (unica compatibile con la topologia di E' poichè E' è compatto), a causa della prop. 6, ogni applicazione continua f di E in E' è uniformemente continua per $\mathcal{A}(E)$ ed $\mathcal{A}(E')$ e quindi $f \circ h$ è un'applicazione di $j(E)$ in E' uniformemente continua per $\widetilde{\mathcal{A}}(E)_{j(E)}$ ed $\mathcal{A}(E')$. Poichè $j(E)$ è ovunque denso in $\widetilde{E}$ e poichè E' è separato e completo per $\mathcal{A}(E')$, per il teor. 1 del n. 4, § 3, cap. 6, [6], esiste un'applicazione $\overline{f}$ di $\widetilde{E}$ in E' uniformemente continua per $\widetilde{\mathcal{A}}(E)$ ed $\mathcal{A}(E')$ tale che $x \in j(E)$ implichi $\overline{f}(x) = \overline{f} \circ h(x)$. La $\overline{f}$ è continua in $\widetilde{E}$ e da ciò consegue c).

Se E è separato, per a), anche $\widetilde{E}$ è separato ciò che in forza di b) e c), con ben nota argomentazione, caratterizza $\widetilde{E}$ come la compattificazione di Tychonoff-Čech-Stone di E a meno di un omeomorfismo.

Ulteriore conseguenza della prop. 7, della quale conserviamo ipotesi e notazioni, è la seguente.

Supponiamo che E sia separato: ricordato che $\mathcal{A}(E)$ è la struttura uniforme associata ad $\mathcal{R}(E)$, in forza della prop. 7, precedente e della prop. 3 § 1, risulta che $\widetilde{E}$ è uno degli spazii topologici $\widehat{E}$ tali che esista un'applicazione i di E in $\widehat{E}$ per cui:

a') — *$\widehat{E}$ è uno spazio compatto e separato,*

b') — *i è un omeomorfismo di E sopra un sottospazio ovunque denso di $\widehat{E}$,*

c') — *se F' ed F'' sono insiemi chiusi e disgiunti di E tali che $(F', \complement F'') \in \mathcal{R}(E)$ allora è $\overline{i(F')}^{\frown} \cap \overline{i(F'')}^{\frown} = \emptyset$* ($\overline{X}^{\frown}$ è l'aderenza in $\widehat{E}$ della sua parte X).

Supponiamo inoltre che $\widehat{E}$ ed i verifichino a'), b') e c') e sia $\widehat{\mathcal{U}}$ la struttura uniforme che compete ad $\widehat{E}$ quale spazio compatto e separato. La struttura uniforme $\mathcal{U}$ su E, immagine reciproca di $\widehat{\mathcal{U}}$ per i, in quanto i è un omeomorfismo, è compatibile con la topologia di E, è una struttura uniforme di spazio precompatto e quindi, per la prop. 5, è meno fine di $\mathcal{A}(E)$. Inoltre se è $(F, G) \in \mathcal{R}(E)$, poichè F e $\complement G$ sono chiusi e disgiunti, per c') si ha $\overline{i(F)}^{\frown} \cap \overline{i(\complement G)}^{\frown} = \emptyset$. Da ciò, poichè $\widehat{E}$ è compatto, consegue che esiste un'adiacenza $\widehat{V}$ di $\widehat{E}$ tale che $\widehat{V}(\overline{i(F')}^{\frown}) \cap \overline{i(\complement G)}^{\frown} = \emptyset$ e quindi $\widehat{V}(i(F)) \cap i(\complement G) = \emptyset$. Se V è l'adiacenza di E per $\mathcal{U}$ immagine reciproca di $\widehat{V}$ per l'estensione di i ad $E \times E$ si ha $V(F) \cap (\complement G) = \emptyset$ e quindi $V(F) \subset G$. Per la prop. 2, § 1, consegue che $\mathcal{U}$ è più fine e quindi, per quanto sopra, identica ad $\mathcal{A}(E)$. Da ciò, con ben nota argomentazione, si deduce che $\widetilde{E}$ ed $\widehat{E}$ sono omeomorfi.

Dunque $\widetilde{E}$ è uno, e risulta omeomorfo a ciascuno, degli spazii topologici $\widehat{E}$ cui può associarsi un'applicazione i di E in $\widehat{E}$ di guisa che a'), b') e c') siano verificate. Poichè $\widetilde{E}$ è omeomorfo alla compattificazione di Tychonoff-Čech-Stone di E altrettanto accade per ciascun $\widehat{E}$.

§ 4 — Un metodo generale di definizione di reticoli.

Descriviamo ora procedimenti di generazione di reticoli.

DEF. 1. — *Se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ sono gli insiemi delle parti chiuse e, rispettivamente aperte dello spazia topologico E chiamiamo sistema di generatori di reticolo* *su E ogni coppia $(\mathcal{U}, \mathcal{B})$ di insiemi di parti chiuse di E verificante i seguenti assiomi:*

(G_I) — *Esiste un $(F, G) \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ tale che $F \subset G$ ed $(F, \complement G) \in \mathcal{U} \times \mathcal{B}$.*
(G_{II}) — *Da $B' \in \mathcal{B}$ e $B'' \in \mathcal{B}$ consegue $B' \cap B'' \in \mathcal{B}$*
(G_{III}) — *Da $B' \in \mathcal{B}$ e $B'' \in \mathcal{B}$ consegue $B' \cup B'' \in \mathcal{B}$*
(G_{IV}) — *Risulta $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$.*
(G_V) — *Da $A \in \mathcal{U}$ e $B \in \mathcal{B}$ consegue $A \cap B \in \mathcal{U}$*
(G_{VI}) — *Da $A' \in \mathcal{U}$ ed $A'' \in \mathcal{U}$ consegue $A' \cup A'' \in \mathcal{U}$*
$G_{VII})$ — *Se è $(F, G) \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ ed $(F, \complement G) \in \mathcal{U} \times \mathcal{B}$, esistono $A \in \mathcal{U}$ e $V \in \mathcal{G}$ tali che $\complement V \in \mathcal{B}$, $F \subset V \subset A \subset G$.*

Esempii di sistemi di generatori vengono forniti in seguito: per il momento giustifichiamo l'introduzione di essi con la:

PROP. 1. — *Se $(\mathcal{U}, \mathcal{B})$ è un sistema di generatori di reticolo sullo spazio topologico E, l'insieme $\mathcal{R}$ degli $(F, G) \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ tali che $F \subset G$ ed $(F, \complement G) \in (\mathcal{U} \times \mathcal{B}) \cup (\mathcal{B} \times \mathcal{U})$ è uu reticolo su E.*

DIM. La (G_I) dimostra che $\mathcal{R}$ verifica (R_I).

La (R_{II}) sussiste per la definizione di $\mathcal{R}$.

Per verificare (R_{III}) supponiamo $(F', G') \in \mathcal{R}$ ed $(F'', G'') \in \mathcal{R}$. Essendo $F' \in \mathcal{B}$ ed $F'' \in \mathcal{B}$, a causa di (G_{II}) è $F' \cap F'' \in \mathcal{B}$; essendo $\complement G' \in \mathcal{B}$ e $\complement G'' \in \mathcal{B}$, per (G_{III}) è $\complement (G' \cap G'') = (\complement G') \cup (\complement G'') \in \mathcal{B}$; se almeno uno degli F' ed F'' appartiene ad $\mathcal{U}$, poichè l'altro per (G_{IV}) appartiene a $\mathcal{B}$, in forza di (G_V) risulta $F' \cap F'' \in \mathcal{U}$ e quindi $(F' \cap F'', G' \cap G'') \in \mathcal{R}$, mentre, nell'altro caso, per la definizione di $\mathcal{R}$ deve essere $\complement G' \in \mathcal{U}$, $\complement G'' \in \mathcal{U}$ e quindi, per (G_{VI}), $\complement (G' \cap G'') = (\complement G') \cup (\complement G'') \in \mathcal{U}$ ed ancora $(F' \cap F'', G' \cap G'') \in \mathcal{R}$. Dunque $\mathcal{R}$ verifica (R_{III}).

Per stabilire (R_{IV}) snpponiamo $(F, G) \in \mathcal{R}$ e sia $F \in \mathcal{U}$. Per la definizione di $\mathcal{R}$, essendo $F \subset G$, in forza di (G_{VII}) esistono $A \in \mathcal{U}$ e $V \in \mathcal{G}$ tali che $\complement V \in \mathcal{B}$, $F \subset V \subset A \subset G$. Poniamo $B = \complement V$: risulta $E = A \cup B$, $A \subset G$ ed, essendo $A \in \mathcal{U}$, $G \in \mathcal{B}$, si ha $(A, G) \in \mathcal{R}$; da $F \subset V$ consegue poi $B \subset \complement F$ ed, essendo $B \in \mathcal{B}$ e $\complement (\complement F) = F \in \mathcal{U}$ si ha $(B, \complement F) \in \mathcal{R}$. Dunque (R_{IV}) è vera per $\mathcal{R}$ che in tal guisa risulta un reticolo su E (eventualmente non regolare).

La proposizione così dimostrata giustifica le seguenti definizioni.

DEF. 2. — *Se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ sono gli insiemi delle parti chiuse e, rispettivamente, aperte dello spazio topologico E e se $(\mathcal{U}, \mathcal{B})$ è un sistema di generatori di reticolo su E, chiamasi reticolo generato da $(\mathcal{U}, \mathcal{B})$ il reticolo $\mathcal{R}$ su E* (cfr. prop. 1) *insieme degli $(F, G) \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ tali che $(F, \complement G) \in (\mathcal{U} \times \mathcal{B}) \cup (\mathcal{B} \times \mathcal{U})$.*

DEF. 3. — *Se $(\mathcal{U}, \mathcal{B})$ è un sistema di generatori di reticolo sullo spazio topologico E, chiamasi struttura uniforme generata da $(\mathcal{U}, \mathcal{B})$ la struttura uniforme associata* (cfr. def. 4 § 1) *al reticolo generato da $(\mathcal{U}, \mathcal{B})$* (cfr. def. 2).

Passiamo ora ad un rapido studio di alcune proprietà della struttura uniforme generata da un sistema di generatori. All'uopo premettiamo un lemma.

LEMMA 1. — *Se $(\mathcal{U}, \mathcal{B})$ è un sistema di generatori di reticolo sullo spazio topologico E, se è $A \in \mathcal{U}$ e se $(U_k)_{1 \leq k \leq n}$ è un ricovrimento aperto di A tale che per ogni $k = 1, 2, \dots, n$ sia $\complement U_k \in \mathcal{B}$, esistono due ricovrimenti finiti $(V_k)_{1 \leq k \leq n}$ ed $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ di A, il primo aperto ed il secondo chiuso tali che per ogni $k = 1, 2, \dots, n$ $\complement V_k \in \mathcal{B}$, $A_k \in \mathcal{U}$ e $V_k \subset A_k \subset U_k$.*

DIM. Poichè la tesi, in forza di (G_{VII}) è vera per $n = 1$, per induzione completa basterà stabilire che se essa è vera per un certo intero positivo n essa è anche vera per $n + 1$. Sia $(U_k)_{1 \leq k \leq n+1}$ un ricovrimento aperto finito di A tale che per ogni $k = 1, 2, \dots, n, n+1$ sia $\complement U_k \in \mathcal{B}$. Poichè è $A \in \mathcal{U}$ e $\complement U_{n+1} \in \mathcal{B}$, per (G_V) risulta $A \cap (\complement U_{n+1}) \in \mathcal{U}$ e quindi essendo $A \cup (\complement U_{n+1}) \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_k$ e $\complement U_k \in \mathcal{B}$ per ogni $k = 1, 2, \dots, n$, dall'ipotesi di induzione consegue che esistono due ricovrimenti finiti $(V_k)_{1 \leq k \leq n}$ ed $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ di $A \cap (\complement U_{n+1})$, il primo aperto ed il secondo chiuso, tali che per ogni $k = 1, 2, \dots, n$ sia $A_k \in \mathcal{U}$, $\complement V_k \in \mathcal{B}$ e $V_k \subset A_k \subset U_k$. Consegue $A \cap (\complement \bigcup_{k=1}^{n} V_k) \subset U_{n+1}$.

Per ogni $k = 1, 2, \dots n$, è $\complement V_k \in \mathcal{B}$ e quindi in forza di (G_{II}) è $\complement \bigcup_{k=1}^{n} V_k = \bigcap_{k=1}^{n} (\complement V_k) \in \mathcal{B}$, donde, essendo $A \in \mathcal{U}$, in forza di (G_V) è $A \cap (\complement \bigcup_{k=1}^{n} V_k) \in \mathcal{U}$: in forza di (G_{VII}) esistono un'insieme aperto V_{n+1} ed un insieme chiuso A_{n+1} tali che $\complement V_{n+1} \in \mathcal{B}$, $A_{n+1} \in \mathcal{U}$ ed $A \cap (\complement \bigcup_{k=1}^{n} V_k) \subset V_{n+1} \subset A_{n+1} \subset U_{n+1}$. Dunque è $A \subset \bigcup_{k=1}^{n+1} V_k$ e, per ogni $k = 1, 2, \dots, n, n+1$, $A_k \in \mathcal{U}$, $\complement V_k \in \mathcal{B}$ e $V_k \subset A_k \subset U_k$. La tesi è, dunque, vera per induzione completa.

Sussiste allora la seguente.

PROP. 2. — *Se $(\mathcal{U}, \mathcal{B})$ è un sistema di generatori di reticolo sullo spazio topologico E e se $\mathcal{G}(\mathcal{U}, \mathcal{B})$ è la struttura uniforme da esso generata* (cfr. def. 3) *affinchè V sia un'adiacenza di E per $\mathcal{G}(\mathcal{U}, \mathcal{B})$ è necessario e sufficiente che esista nn ricovrimento aperto finito $(G_k)_{1 \leq k \leq n}$ di E tale che sia $\bigcup_{k=1}^{n} (G_k \times G_k) \subset V$, $\complement G_k \in \mathcal{B}$ per ogni $k = 1, 2, \dots, n$ e, se è $E \notin \mathcal{U}$, esista un $k = 1, 2, \dots, n$ tale che $\complement G_k \in \mathcal{U}$.*

DIM. Siano $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ gli insiemi delle parti chiuse e, rispettivamente, aperte di E, $\mathcal{R}$ il reticolo generato da $(\mathcal{U}, \mathcal{B})$ (cfr. def. 2) e $\mathcal{C}(\mathcal{R})$ la base associata ad $\mathcal{R}$ (def. 2, § 1).

Supponiamo che V sia una parte di $E \times E$.

Se V è un'adiacenza di E per $\mathcal{G}(\mathcal{U}, \mathcal{B})$, poichè $\mathcal{G}(\mathcal{U}, \mathcal{B})$, in forza della def. 4 del § 1, ha come sistema fondamentale di adiacenze $\mathcal{C}(\mathcal{R})$, esiste un $B \in \mathcal{C}(\mathcal{R})$ tale che $B \subset V$. Per le deff. 2 e 3 del § 1 esistono due ricovrimenti finiti $(G_k)_{1 \leq k \leq n}$ ed $(F_k)_{1 \leq k \leq n}$ di E, il primo aperto ed il secondo chiuso, tali che per ogni $k = 1, 2, \ldots, n$ sia $(F_k, G_k) \in \mathcal{R}$. Quindi per $k = 1, 2, \ldots, n$ in forza della def. 2, risulta $(F_k, G_k) \in (\mathcal{U} \times \mathcal{B}) \cup (\mathcal{B} \times \mathcal{U})$ e da ciò, in forza di $(\mathrm{G_{IV}})$, si ha $\complement G_k \in \mathcal{B}$, inoltre, se è $E \notin \mathcal{U}$, non potendo essere $F_k \in \mathcal{U}$ per ogni $k = 1, 2, \ldots, n$ perchè allora, in forza di $(\mathrm{G_{VI}})$, sarebbe $E = \bigcup_{k=1}^{n} F_k \in \mathcal{U}$, deve essere $\complement G_k \in \mathcal{B}$ per almeno un $k = 1, 2, \ldots n$.

Reciprocamente supponiamo che $(G_k)_{1 \leq k \leq n}$ sia un ricovrimento aperto finito di E tale che, posto $B = \bigcup_{k=1}^{n} (G_k \times G_k)$ risulti $B \subset V$, sia $\complement G_k \in \mathcal{B}$ per ogni $k = 1, 2, \ldots, n$ e, se è $E \notin \mathcal{U}$, risulti $\complement G_k \in \mathcal{U}$ per almeno un $k = 1, \ldots, n$. Se è $E \in \mathcal{U}$, applicando il lemma 1, dall'essere $E = \bigcup_{k=1}^{n} G_k$, consegue l'esistenza di due ricovrimenti finiti $(V_k)_{1 \leq k \leq n}$ ed $(F_k)_{1 \leq k \leq n}$ di E, il primo aperto ed il secondo chiuso, tali che per ogni $k = 1, 2, \ldots, n$ sia $\complement V_k \in \mathcal{B}$, $F_k \in \mathcal{U}$ e $V_k \subset F_k \subset G_k$. Per ogni $k = 1, 2, \ldots, n$ è dunque $(F_k, G_k) \in \mathcal{R}$ donde in base alle deff. 2 e 3 del § 1, risulta $B \in \mathcal{C}(\mathcal{R})$ e quindi V è un'adiacenza di E per $\mathcal{G}(\mathcal{U}, \mathcal{B})$.

Se, invece, è $E \notin \mathcal{U}$ per ipotesi è $\complement G_k \in \mathcal{U}$ per almeno un $k = 1, 2, \ldots, n$ ed è lecito supporre $\complement G_n \in \mathcal{U}$. Da ciò e da $\complement G_n \subset \bigcup_{k=1}^{n-1} G_k$ con $\complement G_k \in \mathcal{B}$ per $k = 1, 2, \ldots, n-1$, in forza del lemma 1 consegue che esistono due ricovrimenti finiti $(V_k)_{1 \leq k \leq n-1}$ ed $(F_k)_{1 \leq k \leq n-1}$ di $\complement G_n$ tali che per ogni $k = 1, 2, \ldots, n-1$ risulti $V_k \subset F_k \subset G_k$. Posto $F_n = \complement(\bigcup_{k=1}^{n-1} V_k)$ risulta $E = \bigcup_{k=1}^{n} F_k$ e per ogni $k = 1, 2, \ldots, n-1$ è $(F_k, G_k) \in \mathcal{R}$. Inoltre da $\complement G_n \subset \bigcup_{k=1}^{n-1} V_k$ consegue $F_n \subset G_n$: ma per $k = 1, 2, \ldots, n-1$, è $\complement V_k \in \mathcal{B}$ ed allora, per $(\mathrm{G_{II}})$ si ha $F_n = \bigcup_{k=1}^{n-1} \complement V_k \in \mathcal{B}$ il che, essendo $\complement U_n \in \mathcal{U}$, dimostra che è anche $(F_n, G_n) \in \mathcal{R}$. Tutto ciò, in base alle deff. 2 e 3 del § 1 dimostra ancora che è $B \in \mathcal{C}(\mathcal{R})$ e quindi che V è un'adiacenza di E per $\mathcal{G}(\mathcal{U}, \mathcal{B})$.

Diamo un'ulteriore informazione su $\mathcal{G}(\mathcal{U}, \mathcal{B})$ dopo aver premesso il

LEMMA 2. — *Se $(\mathcal{U}, \mathcal{B})$ è un sistema di generatori di reticolo sullo spazio topologico E, se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{G}(\mathcal{U}, \mathcal{B})$ sono rispettivamente il reticolo e la struttura uniforme su E generati da $(\mathcal{U}, \mathcal{B})$* (cfr. deff. 2, e 3), *per ogni struttura uniforme $\mathcal{V}$ su E le seguenti due proprietà sono equivalenti:*

a) — per ogni $(F, G) \in \mathcal{R}$ esiste un'adiacenza V di E per $\mathcal{V}$ tale che $V(F) \subset G$.

b) — *se è* $A \in \mathcal{U}$ *ed* U *è un sistema aperto tale che* $\complement U \in \mathcal{B}$ *ed* $A \subset U$, *esiste un'adiacenza* W *di* E *per* $\mathcal{U}$ *tale che* $W(A) \subset U$.

DIM. *a) implica b)*. Sia vera la *a)*, sia $A \in \mathcal{U}$ ed U sia un insieme aperto tale che $\complement U \in \mathcal{B}$ ed $A \subset U$. Consegue $(A, \complement U) \in \mathcal{U} \times \mathcal{B}$ e quindi $(A, U) \in \mathcal{R}$: tenuto conto di *a)*, consegue *b)*.

b) implica a). Sia vera la *b)* e sia $(F, G) \in \mathcal{R}$: dunque è $F \subset G$, $(F, \complement G) \in (\mathcal{U} \times \mathcal{B}) \cup (\mathcal{B} \times \mathcal{U})$. Se è $(F, \complement G) \in \mathcal{U} \times \mathcal{B}$, essendo vera la *b)* consegue *a)*. Se, invece, è $(F, \complement G) \in \mathcal{B} \times \mathcal{U}$ si ha $\complement G \in \mathcal{U}$, $\complement(\complement F) = F \in \mathcal{B}$ e $\complement G \subset \complement F$ donde, per *b)* esiste una adiacenza W di E per $\mathcal{U}$ tale che $W(\complement G) \subset \complement F$ e quindi $(W(\complement G)) \cap F = \emptyset$: da ciò, per il lemma 2 del § 2 consegue che esiste un'adiacenza V di E per $\mathcal{U}$ tale che $(\complement G) \cap V(F) = \emptyset$ e quindi $V(F) \subset G$: dunque è vera la *a)*.

Dal lemma così dimostrato si deduce la seguente proposizione

PROP. 3. — *Se* $(\mathcal{U}, \mathcal{B})$ *è un sistema di generatori di reticolo sullo spazio topologico* E, *la struttura uniforme* $\mathcal{G}(\mathcal{U}, \mathcal{B})$ *generata da* $(\mathcal{U}, \mathcal{B})$ *è la meno fine delle strutture uniformi* $\mathcal{U}$ *su* E *che verificano la b) del precedente lemma 2.*

DIM. Indicato con $\mathcal{R}$ il reticolo generato da $(\mathcal{U}, \mathcal{B})$, poichè $\mathcal{G}(\mathcal{U}, \mathcal{B})$ per la def. 4 del § 1 è la struttura uniforme associata ad $\mathcal{R}$, in forza della prop. 2 del § 1, $\mathcal{G}(\mathcal{U}, \mathcal{B})$ è la meno fine delle strutture uniformi su E verificanti la *a)* del lemma 2 e quindi, per lo stesso lemma, è la meno fine delle strutture uniformi su E verificanti la *b)* del lemma 2 medesimo, donde la tesi.

Gli assiomi da (G_I) a (G_{VII}), come già si è affermato, sono compatibili: di ciò diamo verifica mediante la seguente proposizione.

PROP 4. — *Se* $\mathcal{F}$ *e* $\mathcal{K}$ *sono gli insiemi delle parti chiuse e, rispettivamente, chiuse e compatte dello spazio regolare localmente compatto* E, *risulta che:*

a) — $(\mathcal{K}, \mathcal{F})$ *è un sistema di generatori di reticolo su* E,

b) — *la struttura uniforme* $\mathcal{G}(\mathcal{K}, \mathcal{F})$ *generata da* $(\mathcal{K}, \mathcal{F})$ (cfr. deff. 3) *è la meno fine delle strutture uniformi compatibili con la topologia di* E

c) — *affinchè* V *sia un'adiacenza di* E *per* $\mathcal{G}(\mathcal{K}, \mathcal{F})$ *è necessario e sufficiente che esista un ricovrimento aperto finito* $(G_k)_{1 \leq k \leq n}$ *di* E *tale che sia* $\bigcup_{k=1}^{n} (G_k \times G_k) \subset V$ *e, se* E *non è compatto, tale* $\complement G_k$ *sia compatto per almeno un* $k = 1, 2, \ldots, n$.

DIMOSTRAZIONE di *a)*. Sia x un punto di E e V sia un intorno di x: l'interno $\overset{\circ}{V}$ di V è un intorno aperto di x, onde, E essendo regolare e localmente compatto, come è ben noto ([10] cap. 5, teor. 17; [6] cap. I, § 10, coroll. prop. 9) esiste un intorno chiuso e compatto K di x tale che $K \subset \overset{\circ}{V}$. Denotato con $\mathcal{R}$ il reticolo generato da $(\mathcal{U}, \mathcal{B})$ si ha che è $(K, \complement \overset{\circ}{V}) \in \mathcal{K} \times \mathcal{F}$ e quindi $(K, \overset{\circ}{V}) \in \mathcal{R}$. Dunque:

α) — per ogni punto x di E e per ogni intorno V di x esiste un $(F, G) \in \mathcal{R}$ tale che $x \in F$ e $G \subset V$.

Ciò dimostra in primo luogo che per $(\mathcal{K}, \mathcal{F})$ sussiste (G_{I}). La verifica degli assiomi da $(\mathrm{G}_{\mathrm{II}})$ a $(\mathrm{G}_{\mathrm{VI}})$ è immediata. Quanto alla $(\mathrm{G}_{\mathrm{VII}})$, supponiamo che K ed U siano insiemi di E, il primo chiuso e compatto ed il secondo aperto con $K \subset U$. Poichè E è regolare e compatto, come è ben noto ([10] cap. 5, teor. 18; [6] cap. I, § 10, prop. 10) esiste un intorno aperto G di K tale che $\overline{G}$ sia compatto e contenuto in U: ciò, essendo $\overline{G} \in \mathcal{K}$ e $\complement G \in \mathcal{F}$, dimostra $(\mathrm{G}_{\mathrm{VII}})$ per E. Dunque è vera la a).

Dimostrazione di b). La α) di cui sopra prova che $\mathcal{R}$ è un reticolo regolare (cfr. def. 5 § 1) e quindi $\mathcal{G}(\mathcal{K}, \mathcal{F})$ è compatibile con la topologia di E. Inoltre sia $K \in \mathcal{K}$ ed U sia un insieme aperto di E tale che $K \subset U$: come è ben noto ([10] cap. 6, teor. 33; [6] cap. II, § 4, prop. 1) per ogni struttura uniforme $\mathcal{U}$ compatibile con la topologia di E esiste un'adiacenza V di E per $\mathcal{U}$ tale che $V(F) \subset G$. Dunque $\mathcal{U}$ verifica la b) del lemma 2 e per ciò $\mathcal{G}(\mathcal{K}, \mathcal{F})$, essendo per la prop. 3 la meno fine delle strutture uniformi su E compatibili con la topologia di E e verificanti la b) del lemma 2, è meno fine di $\mathcal{U}$. Ciò dimostra la validità di b).

Dimostrazione di c). Consegue dalla prop. 2.

Se E è separato una ben nota argomentazione consente di stabilire che il completamento di E per $\mathcal{S}(\mathcal{U}, \mathcal{B})$ (cfr. def. 2 dell'Introduzione) non è altro che la compattificazione di Alexandroff di E (a meno di un omeomorfismo).

Indichiamo ora un procedimento di costruzione di generatori di reticolo suscettibile di comode utilizzazioni. Premettiamo una definizione:

Def. 4. — *Un insieme $\mathcal{S}$ di parti chiuse dello spazio topologico E dicesi un sottosistema di generatori di reticolo su E se verifica i seguenti assiomi.*

$(\mathrm{S}_{\mathrm{I}})$ — *Esistono un insieme chiuso F ed un insieme aperto G di E tali che $F \subset G$ ed $(F, \complement G) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$.*

$(\mathrm{S}_{\mathrm{II}})$ — *Da $F' \in \mathcal{S}$ ed $F'' \in \mathcal{S}$ consegue $F' \cap F'' \in \mathcal{S}$.*

$(\mathrm{S}_{\mathrm{III}})$ — *Da $F' \in \mathcal{S}$ ed $F'' \in \mathcal{S}$ consegue $F' \cup F'' \in \mathcal{S}$.*

$(\mathrm{S}_{\mathrm{IV}})$ — *Se F e G sono parti di E, la prima chiusa e la seconda aperta ed è $F \subset G$ nonchè $(F, \complement G) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$, allora esistono un insieme chiuso A ed un insieme aperto V di E tali che $(A, \complement V) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ ed $F \subset V \subset A \subset G$.*

Consegue ovviamente la

Prop. 5. — *Se $\mathcal{S}$ è un sottosistema di generatori di reticolo sullo spazio topologico E, $(\mathcal{S}, \mathcal{S})$ è un sistema di generatori di reticolo su E.*

Dopo ciò conviene introdurre la

Def. 5. — *Se $\mathcal{S}$ è un sottosistema di generatori di reticolo sullo spazio topologico E, chiamasi struttura uniforme generata da $\mathcal{S}$ la struttura uniforme generata* (def. 3) *dal sistema di generatori di reticolo $(\mathcal{S}, \mathcal{S})$.*

PROP. 6. — *Se $\mathcal{G}(\mathcal{S})$ è la struttura uniforme generata dal sottosistema di generatori di reticolo $\mathcal{S}$ sullo spazio topologico E, affinchè V sia un'adiacenza di E per $\mathcal{G}(\mathcal{S})$ è necessario e sufficiente che esista un ricovrimento aperto $(G_k)_{1\leq k\leq n}$* di *E tale che $\bigcup_{k=1}^{n}(G_k \times G_k) \subset V$ e per ogni $k = 1, 2, \ldots, n$, $\complement G_k \in \mathcal{S}$.*

DIM. Per la def. 5, $\mathcal{G}(\mathcal{S})$ è la struttura uniforme generata dal sistema di generatori di reticolo $(\mathcal{S}, \mathcal{S})$. Supponiamo che F e G siano insiemi di E, il primo chiuso ed il secondo aperto tali che $F \subset G$ e tali che $(F, \complement G) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ (cfr. assioma (S_I)). Per (S_{IV}) esistono $A \in \mathcal{S}$ ed un insieme aperto V di E tale che $\complement V \in \mathcal{S}$ per cui $F \subset V \subset A \subset G$. Risulta $E = A \cup (\complement V)$ e quindi per (S_{III}) è $E \in \mathcal{S}$: ciò, per la prop. 2, dimostra la tesi.

Quanto sopra viene ora utilizzato in due esempii.

PROP. 7. — *Se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ sono gli insiemi delle parti chiuse e, rispettivamente, aperte dello spazio topologico E e se $\mathcal{R}$ è l'insieme degli $(F, G) \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ tali che $F \subset G$, le seguenti tre proposizioni sono equivalenti.*

a) — *$\mathcal{R}$ è un reticolo su E.*

(O_V) — *Per ogni insieme chiuso F di E ed ogni intorno aperto U di F esiste un intorno aperto V di F in E tale che $\overline{V} \subset U$.*

b) — *$\mathcal{F}$ è un sottosistema di generatori di reticolo su E* (def. 4).

DIM. *a*) *implica* (O_V). Supposto che $\mathcal{R}$ sia un reticolo su E, sia $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ la struttura uniforme associata ad $\mathcal{R}$ (cfr. def. 4, § 1). Supponiamo che F sia un insieme chiuso ed U un suo intorno aperto in E: si ha $(F, U) \in \mathcal{R}$ e quindi per la prop. 2 del § 1 esiste un'adiacenza W_0 di E per $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ tale che $W_0(F) \subset U$. Sia W un'adiacenza di E per $\mathcal{A}(\mathcal{R})$, aperta per la topologia prodotto per se stessa della topologia $\mathcal{T}(\mathcal{R})$ dedotta da $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ su E, con l'ulteriore ipotesi $W \circ W \subset W_0$: consegue $W(W(F)) = W \circ W(F) \subset W_0(F) \subset U$. Ciò per il lemma 1 del § 2, implica che, detta A l'aderenza di $W(F)$ per $\mathcal{T}(\mathcal{R})$, esiste un'adiacenza W_1 di E per $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ tale che $W_1(A) \subset U$. Consegue $A \subset U$: detta $\overline{W(F)}$ l'aderenza di $W(F)$ per la topologia $\mathcal{T}$ data inizialmente su E, poichè per il teor. 1 del § 1, $\mathcal{T}$ è più fine di $\mathcal{T}(\mathcal{R})$, si ha $\overline{W(F)} \subset A \subset U$. Sempre perchè $\mathcal{T}$ è più fine di $\mathcal{T}(\mathcal{R})$, $W(F)$ essendo un intorno aperto di F per $\mathcal{T}(\mathcal{R})$, $W(F)$ è un intorno àperto di F per $\mathcal{T}$ ed è $\overline{W(F)} \subset U$. Ciò implica la (O_V).

(O_V) *implica b*). Infatti $\mathcal{F}$ verifica (S_I), (S_{II}) ed (S_{III}) e, se E verifica (O_V), $\mathcal{F}$ verifica anche (S_{IV}) come è ovvio.

b) *implica a*). Supposto che $\mathcal{F}$ sia un sottosistema di generatori di reticolo su E, per la prop. 5, $(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ è un sistema di generatori di reticolo su E: sia $\mathcal{R}^*$ il reticolo su E generato da $(\mathcal{F}, \mathcal{F})$: evidentemente è $\mathcal{R} = \mathcal{R}^*$. Poichè $\mathcal{R}^*$ è un reticolo su E consegue la *a*).

La proposizione così dimostrata prova, come è ovvio, l'indipendenza degli assiomi di reticolo della def. 1 del § 1 e indica relazioni tra spazii normali e reticoli.

Indichiamo un ulteriore esempio di utilizzazione della nozione di sottosistema di generatori di reticolo.

Ricordiamo che si dice *perifericamente compatto* ogni spazio topologico verificante l'assioma:

(R C) — *Ogni punto dello spazio è dotato di un sistema fondamentale di intorni aperti aventi frontiera compatta.*

Conviene ora premettere un lemma:

LEMMA 3. — *Se F ed U sono parti la prima chiusa e la seconda aperta dello spazio regolare perifericamente compatto E, se è $F \subset U$ e se la frontiera $Fr.(U)$ di U è compatta, esiste un intorno aperto V di F avente frontiera compatta e tale che $\overline{V} \subset U$.*

DIM. Essendo $F \cap (Fr.(U)) = \emptyset$ ed in forza della regolarità di E e dell'assioma (R C) di cui sopra, risulta un ricovrimento aperto di $Fr.(U)$ l'insieme $\mathcal{R}$ delle parti aperte V di E tali che $Fr.(V)$ sia compatta, sia $V \cap (Fr.(U)) \neq \emptyset$ ed esista un intorno aperto W di F tale che $W \subset U$ e $V \cap W = \emptyset$. Poichè $Fr.(U)$ è compatta, $\mathcal{R}$ contiene un ricovrimento aperto finito $(U_k)_{1 \leq k \leq n}$ di $Fr.(U)$. Poniamo:

$$A = U \cap (\complement \bigcup_{k=1}^{n} U_k). \tag{1}$$

Come è ovvio si ha $A \subset U$; inoltre A è chiuso e, poichè dalla (1) consegue $Fr.(A) \subset Fr.(U) \cup (\bigcup_{k=1}^{n} Fr.(U_k))$, la $Fr(A)$, come insieme chiuso del sottospazio compatto $Fr.(U) \cup (\bigcup_{k=1}^{n} Fr.(U_k))$, è compatta.

Dimostriamo che F è contenuto nell'interno $\overset{\circ}{A}$ di A. Sia $k = 1, 2, \dots, n$; essendo $U_k \in \mathcal{R}$ esiste un intorno aperto V_k di F tale che sia $V_k \subset U$ ed $U_k \cap V_k = \emptyset$: posto $W = \bigcap_{k=1}^{n} V_k$, si ha $W \subset V_k \subset \complement U_k$, $W \subset \bigcap_{k=1}^{n} (\complement U_k) = \complement (\bigcup_{k=1}^{n} U_k)$ donde, essendo anche $W \subset U$, consegue $W \subset U \cap (\complement (\bigcup_{k=1}^{n} U_k)) = A$. Da ciò, poichè W è aperto e contiene F, consegue $F \subset \overset{\circ}{A}$ come volevasi.

Posto $V = \overset{\circ}{A}$, si ha $Fr.(V) = Fr.(\overset{\circ}{A}) \subset Fr.(A)$ e quindi, come insieme chiuso del sottospazio compatto $Fr.(A)$, la $Fr.(V)$ è compatta e ciò, V essendo intorno aperto di F ed essendo $V = \overset{\circ}{A} \subset A$ e $\overline{V} \subset \overline{A} = A \subset U$, dimostra la tesi.

Dopo ciò è immediato riconoscere che:

PROP. 8. — *Se E è uno spazio regolare perifericamente compatto, l'insieme $\mathcal{F}^*$ delle parti chiuse aventi frontiera compatta di E, è un sottosistema di generatori di reticolo su E, la struttura uniforme $\mathcal{G}(\mathcal{F}^*)$ generata da $\mathcal{F}^*$* (cfr. def. 5) *è compatibile con la topologia di E ed affinchè V sia un'adiacenza di E per $\mathcal{G}(\mathcal{F}^*)$ occorre e basta che esista un ricovrimento aperto $(G_k)_{1 \leq k \leq n}$ di E tale che sia $\bigcup_{k=1}^{n} (G_k \times G_k) \subset V$ e per ogni $k = 1, 2, \dots, n$, la $Fr.(G_k)$ sia compatta.*

DIM. Sia x in qualunque punto di E e V un intorno di x: per l'assioma (R C) esiste un intorno aperto G di x avente frontiera compatta e tale che $G \subset V$: poichè E è regolare esiste un intorno chiuso U di x tale che $U \subset G$. Per il lemma 3 precedente esiste un intorno aperto W di U avente frontiera compatta e tale che $\overline{W} \subset G$. Posto $F = \overline{W}$ si ha $Fr.(F) \subset Fr.(W)$ e quindi F è un insieme chiuso avente frontiera compatta ed è $F \subset G$. Ciò dimostra che $\mathcal{F}^*$ verifica (S_I), (S_{II}) ed (S_{III}) sono ovvii ed (S_{IV}) consegue dal lemma 3. Dunque $\mathcal{F}^*$ è un sottosistema di generatori di reticolo su E (def. 4) e per ciò (prop. 5) $(\mathcal{F}^*, \mathcal{F}^*)$ è un sistema di generatori di un reticolo $\mathcal{R}$ su E il quale, per quanto sopra è regolare (def. 5, § 1) e quindi la struttura uniforme $\mathcal{G}(\mathcal{F}^*)$ generata da $\mathcal{F}^*$ è compatibile con la topologia di E (prop. 1, § 1). La prop. 6 completa la dimostrazione della tesi.

Si osserverà ulteriormente che $\mathcal{G}(\mathcal{F}^*)$ è una struttura uniforme di spazio precompatto e quindi il completamento di E per $\mathcal{G}(\mathcal{F}^*)$ è compatto: per ulteriori proprietà di tale completamento si potranno sviluppare considerazioni analoghe a quelle di [11].

Benchè esuli dalla teoria degli spazii uniformi, può forse avere interesse l'osservare che il lemma 1, in forza delle propp. 4 *a*), 7 *b*) ed 8 implica che:

Se E è uno spazio topologico ed A è un insieme chiuso di E, se si verifica uno dei seguenti casi α), β) e γ)

α) — E è regolare e localmente compatto

β) — E è normale

γ) — E è regolare e perifericamente compatto,

se A nel caso α) è compatto e nel caso γ) ha frontiera compatta e se $(U_k)_{1 \leq k \leq n}$ è un ricovrimento aperto di A tale che nel caso γ) $Fr.(U_k)$ sia compatta per ogni $k = 1, 2, \dots, n$, allora esiste un ulteriore ricovrimento aperto finito $(V_k)_{1 \leq k \leq n}$ di A tale che, per ogni $k = 1, 2, \dots, n$, sia $\overline{V}_k \subset U_k$, nel caso α) $\overline{V}_k$ sia compatto e nel caso γ) $Fr(V_k)$ sia compatta.

(cfr. per α), [7] cap. X, § 50, teor. A; per β), [6] cap. IX, § 4, n. 3 prop. 3; per γ), [11] § 1, lemma 1).

BIBLIOGRAFIA

[1] G. AQUARO - *Funzioni reali uniformemente separati negli spazii uniformi ed applicazioni agli spazii normali;* Ann. Mat. Pura ed Applic. serie IV, tomo XXXIX, 1955.

[2] » *Sopra talune estensioni del teorema di prolungamento di Uryshon-Tietze;* Riv. Mat. Univ. di Parma **6** (1955).

[3] R ARENS - *Extensions of functions on fully normal spaces;* Pacific J. Math. **2** (1952).

[4] B BANASCHEWSKI - *Uber null dimensionale Räume;* Math. Nachr. **13** (1955).

[5] N. BOURBAKI - *Theorie des Ensembles* (Fascicule des Resultats); Hermann & Cie., Paris (1951).

[6] » *Topologie Générale;* Hermann & Cie., Paris (1951).

[7] P. HALMOS - *Measure Theory;* Van Nostrand Comp. New-York (1950).

[8] O. HANNER - *Solid spaces and absolute retracts;* Ark. Mat. **1** (1951).

[9] M. KATĚTOV - *On real-valued functions in topological spaces;* Fundam. Mathem, tom. XXXVII (1951).

[10] J. L. KELLEY - *General Topology;* Van Nostrand Comp. New-York (1955).

[11] K. MORITA - *On bicompactifications of semibicompact spaces;* Science Rep. of Tokyo Bunrika Dajgaku; vol. 4, n. 92-97 (1952).

[12] W. F. NEWNS - *Uniform spaces with unique structure;* Am. Jour. of Math. vol. LXXIX, n. 1 (1957)

[13] G. NÖBELING - *Grundlagen der analytischen Topologie;* Grund. Math. Wissen. Band LXXII; Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg (1954).

[14] A. WEIL - *Sur les espaces a structure uniforme;* Hermann & Cie. Paris (1938).