ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

MAURO PACELLI

Contatto con attrito tra due corpi elastici di forma qualunque : compressione e torsione

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 10, nº 3-4 (1956), p. 155-184

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1956_3_10_3-4_155_0>

CONTATTO CON ATTRITO TRA DUE CORPI ELASTICI DI FORMA QUALUNQUE: COMPRESSIONE E TORSIONE (*)

di MAURO PACELLI (Pisa).

Il presente studio sulla compressione e torsione di due corpi elastici a contatto deve ritenersi il completamento di un gruppo di lavori di autori diversi (R. D. MINDLIN [8], J. L. LUBKIN [9], C. CATTANEO [10], [13]) ai quali dovrò fare frequente riferimento. Con speciale riguardo dovrò riferirmi al lavoro [13], nel quale il problema viene enunciato e studiato per la prima volta nelle condizioni più generali e del quale manterrò le notazioni.

Per completezza riprenderò la questione dal principio, riassumendo a suo luogo in modo organico quei risultati e procedimenti dei precedenti autori che mi occorrerà di utilizzare.

Siano C_1 e C_2 due corpi elastici di forma qualunque limitati da due superficie regolari S_1 e S_2 e costituiti di uno stesso materiale omogeneo e isotropo. Inizialmente S_1 e S_2 siano tangenti in un punto O e sia $\pi \equiv O\,x\,y$ il comune piano tangente. In tale posizione i due corpi vengono assoggettati ad una mutua compressione normale di entità complessiva P, la quale genera un'area di contatto σ ed una distribuzione di sforzi normali $p\,(x\,y)$ nell'area stessa. Supposto inoltre che nella zona di contatto sia presente l'attrito, esercitando su C_1 e C_2 una azione torcente di momento M, attorno alla normale in O a π, si genera in σ, oltre alla distribuzione $p\,(x\,y)$, anche una distribuzione di sforzi tangenziali, di cui indicheremo con $(l\,,m)$ le componenti secondo i due assi ortogonali $(x\,y)$.

Stante la uguale natura elastica dei due corpi a contatto, la presenza di sforzi tangenziali $(l\,,m)$ non altera la distribuzione degli sforzi normali $p\,(x\,,y)$ che pertanto rimangono identici a quelli ottenuti da HERTZ [2], (cfr.

(*) I principali risultati del presente lavoro sono stati già da me esposti concisamente in una Nota dal titolo: « Compressione e torsione di due corpi elastici a contatto » presentata alla Accademia dei Lincei (Rend. Acc. Naz. dei Lincei, cl. sc. fis. mat. nat. Serie VIII, Vol. XXI, Fasc. 5-6).

[4], pag. 193), nel caso di semplice compressione. Precisamente assimilando S_1 e S_2 a superficie del secondo ordine e C_1 e C_2 a suoli elastici per quanto concerne il loro comportamento meccanico, HERTZ ottenne i seguenti risultati:

1) l'area σ di contatto è ellittica con centro in O e assi dipendenti per orientamento e grandezza, dalla forma e dal mutuo orientamento dei due corpi e dalle loro costanti elastiche.

2) assunti gli assi cartesiani (x, y) coincidenti con gli assi di σ e detti a e b i corrispondenti semiassi, sussiste in σ la seguente distribuzione di sforzi normali

$$p(x, y) = \frac{3P}{2\pi a b}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Il problema della ricerca degli sforzi tangenziali in σ, quando sia presente oltre alla compressione normale P anche un momento torcente M, è stato trattato nel 1949 da MINDLIN [8], il quale ne ha dato la soluzione nell'ipotesi, fisicamente giustificabile soltanto in particolari condizioni, di una completa aderenza in σ. Nel 1951 LUBKIN, riprendendo l'ipotesi, formulata nel 1938 da Cattaneo nel problema della compressione obliqua di due corpi elastici [5], che si abbia in σ un parziale scorrimento periferico, ha dato la soluzione esatta del problema nel caso particolare di due sfere. Indipendentemente, e con procedimento matematico diverso, la soluzione dello stesso caso particolare, nelle stesse ipotesi fisiche, veniva anche data nel 1952 da CATTANEO [10] mediante un conveniente sviluppo in serie. Infine CATTANEO, nel 1955, ha trattato il problema della torsione nel caso generale di un'area di contatto ellittica [13], precisando le nuove ipotesi fisiche che la formulazione generale del problema rendeva necessarie e giungendo a soluzioni approssimate con procedimento atto ad ottenere ordini di approssimazione comunque spinti.

Scopo di questa Nota è la ricerca della soluzione esatta ed in termini finiti del problema generale nelle stesse ipotesi poste da CATTANEO in [13], ipotesi che saranno a suo tempo richiamate esplicitamente (cfr. n. 3).

Nella prima parte del presente lavoro si mostra come la ricercata soluzione esatta del problema generale si possa formalmente costruire, con opportune induzioni, a partire dalla analoga soluzione esatta data da LUBKIN nel caso di due sfere. Il procedimento induttivo è suggerito da analogie formali, a priori non prevedibili, e permanenti nei vari ordini di approssimazione, tra le soluzioni approssimate date da CATTANEO rispettivamente nel caso di due sfere [10] e nel caso generale [13].

La seconda parte del lavoro è dedicata al controllo rigoroso della soluzione presunta sulla base delle equazioni integro-differenziali nelle quali si traduce il problema in esame. La verifica (cfr. n. 7), non elementare anche dal punto di vista formale, è preceduta da non brevi ma necessarie precisazioni analitiche che ne giustificano i successivi passaggi (cfr. n. 6).

§ 1.- Richiamo di precedenti ricerche e costruzione induttiva della soluzione del problema in termini finiti.

I. — Soluzione di Lubkin nel caso di due sfere.

Nel 1951 J. L. Lubkin, trattando il problema del contatto tra due sfere soggette a compressione e torsione [9], ammette che, per effetto della sollecitazione torsionalale di momento M (1), si abbia una rotazione di C_1 rispetto a C_2, attorno alla normale comune in O, di entità ω (2), ed un concomitante slittamento parziale in σ (che in tal caso è circolare di raggio a; più precisamente egli suppone che si abbia completa aderenza tra C_1 e C_2 in un'area circolare σ_*, concentrica a σ, di raggio, a priori incognito, $a_* < a$, essendovi invece slittamento nella restante corona circolare τ. Egli ammette inoltre che in τ gli sforzi tangenziali si esplichino con la massima intensità compatibile con la legge dell'attrito, soddisfacendo cioè alla condizione

$$l^2 + m^2 = f^2 p^2 \dots a_* \leq \varrho \leq a \tag{1}$$

dove f indica il valore del coefficiente di attrito statico.

Assunto un sistema di coordinate cilindriche (ϱ , φ , z), con asse z coincidente con la normale comune in O alle due sfere, se indichiamo con $(u_\varrho , u_\varphi , u_z)$ le corrispondenti componenti del generico spostamento e con $\tau_{z,\varrho} , \tau_{z,\varphi}, \sigma_z)$ le componenti dello sforzo sul generico piano $z = \text{cost.}$, le ipotesi ammesse si traducono nelle seguenti condizioni analitiche:

$$\begin{cases} u_\varphi = -\omega \varrho \,, u_\varrho = \sigma_z = 0 & \dots (\varrho \leq a_* \,, z = 0) \\ \tau_{z,\varphi} = \dfrac{3 f P}{2 \pi a^3} \sqrt{a^2 - \varrho^2} \,, \tau_{z,\varrho} = \sigma_z = 0 & \dots (a_* \leq \varrho \leq a \,, z = 0) \\ \tau_{z,\varrho} = \tau_{z,\varphi} = \sigma_z = 0 & \dots (\varrho > a \,, z = 0) \\ \lim\limits_{\sqrt{\varrho^2+z^2} \to \infty} (u_\varrho , u_\varphi , u_z) = 0 & \end{cases} \tag{2}$$

le $(2)_3$ e $(2)_4$ essendo di evidente significato fisico.

---

(1) Le notazioni non sono quelle originarie ma sono state uniformate a quelle adottate nel presente lavoro.

(2) Nel corso di questa Nota supporremo per semplicità $\omega > 0$.

L'autore fa uso di equazioni differenziali stabilite nel 1899 da J. H. MICHELL [3], atte a determinare la distribuzione spaziale degli sforzi in due suoli elastici mantenuti a contatto e soggetti a sollecitazione torsionale, ed interpreta le (2) come condizioni al contorno di tale problema, che nelle attuali condizioni di simmetria assiale, viene ricondotto ad un problema armonico. In tal modo egli giunge alla seguente espressione per lo sforzo tangenziale τ_ω in σ_* $(\tau_\omega = (\tau_{z,\varphi})_{\substack{\varrho \leq a_* \\ z=0}})$:

$$\tau_\omega = \frac{3fP}{\pi^2 a^2} \sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{a^2}} \left[\frac{\pi}{2} + k^2 D(k) F(\lambda, \theta) - K(k) E(\lambda, \theta)\right] \tag{3}$$

dove è posto

$$\lambda = \frac{a_*}{a}\text{[3]}, \; k = \sqrt{1 - \lambda^2}, \; D(k) = \frac{K(k) - E(k)}{k^2},$$

$K(k)$ e $E(k)$ rappresentando gli integrali ellittici completi di prima e di seconda specie e dove $F(\lambda, \theta)$ e $E(\lambda, \theta)$ sono gli integrali ellittici incompleti di prima e seconda specie di modulo λ e angolo

$$\theta = \text{arc sen} \frac{\sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{a_*^2}}}{\sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{a^2}}} \qquad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

Il valore di λ risulta infine legato ad ω dalla relazione

$$\omega = \frac{3fP}{2\pi\mu a^2}[K(k) - E(k)] \tag{4}$$

dove μ indica la seconda costante di LAMÉ.

2. — Soluzioni approssimate date da C. Cattaneo nel caso di due sfere.

Sotto le identiche ipotesi fisiche, ma seguendo un procedimento analitico diverso che si presterà ad una successiva generalizzazione, nel 1952 C. CATTANEO, ha dato, del problema, sempre nel caso di due sfere, sia soluzioni approssimate di vario ordine, sia la soluzione esatta mediante sviluppo in serie.

---

(3) Non si confonda il parametro λ con la prima costante di LAMÉ.

Assimilando ancora i due corpi a semispazi elastici nell'intorno del punto O di contatto, mediante le formule integrali dovute a BOUSSINESQ e CERRUTI, (cfr. [1], pag. 126) che esprimono lo spostamento del generico punto in funzione degli sforzi suscitati nell'area di contatto, egli giunge alle seguenti equazioni integro-differenziali valide in σ

$$(5)\qquad \begin{cases} \varkappa \int\limits_\sigma \frac{l(\xi,\eta)}{r} d\xi\, d\eta - \chi \int\limits_\sigma l(\xi,\eta) \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} d\xi\, d\eta - \chi \int\limits_\sigma m(\xi,\eta) \frac{\partial^2 r}{\partial x\, \partial y} d\xi\, d\eta = -\omega y \\ \varkappa \int\limits_\sigma \frac{m(\xi,\eta)}{r} d\xi\, d\eta - \chi \int\limits_\sigma m(\xi,\eta) \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} d\xi\, d\eta - \chi \int\limits_\sigma l(\xi,\eta) \frac{\partial^2 r}{\partial y\, \partial x} d\xi\, d\eta = \omega x \end{cases}$$

ove è posto

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \quad \varkappa = \frac{1}{2\pi\mu}, \quad \chi = \frac{\lambda}{2\pi\mu(\lambda+\mu)}$$

λ e μ essendo le costanti di LAMÉ comuni ai due corpi elastici. Facendo osservare che l'assenza completa di scorrimenti in σ dà luogo a risultati in contraddizione con le leggi dell'attrito statico, l'Autore ammette come LUBKIN, che esista un'area di perfetta aderenza σ_*, circolare concentrica e interna a σ, e una corona circolare τ di scorrimenti. Egli ammette inoltre che in τ lo sforzo tangenziale (l, m) sia ovunque normale al raggio OP e soddisfi alla (1). Ciò permette di porre in τ

$$(6)\qquad l_\tau = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \qquad m_\tau = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

essendo

$$\varphi(\varrho) = \frac{3fP}{4\pi a}\left(\frac{\varrho}{a}\sqrt{1-\frac{\varrho^2}{a^2}} + \operatorname{arc\,sen}\frac{\varrho}{a} - \frac{\pi}{2}\right)$$

con $\varrho = |OP|$.

Ulteriormente l'Autore, guidato da suggerimenti di carattere fisico, presume che lo sforzo tangenziale in P risulti anche in σ_* come in τ, ortogonale al raggio OP con grandezza dipendente dal raggio medesimo $\varrho = |OP|$. Ciò permette di ritenere anche in σ_* una legge del tipo

$$(7)\qquad l_* = -\frac{\partial(\varphi - \varphi_*)}{\partial y} \qquad m_* = \frac{\partial(\varphi - \varphi_*)}{\partial x}$$

dove φ_* è una incognita funzione di ϱ nulla sul bordo di σ_* assieme alla sua derivata prima, condizione quest'ultima atta ad assicurare la continuità degli sforzi attraverso σ_*.

Sostituendo le (6) e (7) nel sistema (5), egli giunge alla unica equazione integrale

$$(8) \qquad \int_{\sigma_*} \frac{\varphi_*}{r}\, d\,\sigma_* = \int_{\sigma} \frac{\varphi}{r}\, d\,\sigma - \frac{\omega}{2\,\varkappa}\,\varrho^2 + C \qquad \ldots (x\,,y) \text{ in } \sigma_*$$

con C costante indeterminata. Il problema è così ricondotto alla determinazione della funzione $\varphi_*(\varrho)$ e del raggio a_* di σ_* soddisfacenti alla (8).

Il procedimento di approssimazione seguito dall'Autore per risolvere l'equazione (8) si riassume nei seguenti termini. Posto

$$\mu^{(4)} = \left(1 - \frac{\varrho^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \mu_* = \left(1 - \frac{\varrho^2}{a_*^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

egli approssima la funzione $\varphi = \dfrac{3\,f\,P}{4\,\pi\,a}(\mu\sqrt{1-\mu^2} - \text{arc sen}\,\mu)$ col suo sviluppo di MAC-LAURIN secondo le potenze di μ, arrestato ad un certo ordine n,

$$(9) \qquad \varphi \cong \sum_{3\,5}^{2n+1} a_s\,\mu^s$$

e dimostra, facendo uso dei risultati di [7] che la corrispondente soluzione della (8) risulta

$$(10) \qquad \varphi_* = \sum_{3,5}^{2n+1} A_s\,\mu_*^s$$

i coefficienti A_s essendo univocamente determinati.

Mi limito a riportare i risultati di prima e seconda approssimazione per l'interesse che essi avranno nel seguito. Posto ancora $\lambda = \dfrac{a_*}{a}$, si ha:

I approssimazione

$$(11) \qquad l_* - l_\tau = \frac{\partial\,\varphi_*}{\partial\,y} = -\frac{f\,P}{2\pi\,a}\,\lambda^3\,\frac{\partial\,\mu_*^3}{\partial\,y}\,,\; m_* - m_\tau = -\frac{\partial\,\varphi_*}{\partial\,x} = \frac{f\,P}{2\,\pi\,a}\,\lambda^3\,\frac{\partial\,\mu_*^3}{\partial\,x}$$

$$(12) \qquad \omega = \frac{3\,f\,\varkappa\,P\,\pi}{8\,a^2}\,(1-\lambda^2)$$

II approssimazione

$$(13) \qquad \begin{cases} l_* - l_\tau = -\dfrac{f\,P}{2\,\pi\,a}\,\dfrac{\partial}{\partial\,y}\left\{\left[1 + \dfrac{3}{4}(1-\lambda^2)\right]\lambda^3\,\mu_*^3 + \dfrac{3}{10}\,\lambda^5\,\mu_*^5\right\} \\[2ex] m_* - m_\tau = \dfrac{f\,P}{2\,\pi\,a}\,\dfrac{\partial}{\partial\,x}\left\{\left[1 + \dfrac{3}{4}(1-\lambda^2)\right]\lambda^3\,\mu_*^3 + \dfrac{3}{10}\,\lambda^5\,\mu_*^5\right\} \end{cases}$$

---

(4) Da non confondere con la seconda costante di LAMÉ.

$$\omega = \frac{3 f \varkappa P \pi}{64 a^2} [11 - 14 \lambda^2 + 3 \lambda^4]. \tag{14}$$

La (12) o la (14) determinano il raggio incognito a_* in funzione di ω (tramite λ) in prima e seconda approssimazione. Come risulterà da controlli successivi tali approssimazioni equivalgono ad analoghe approssimazioni desunte direttamente dalla soluzione (3), (4) di LUBKIN.

Nella stessa Nota l'Autore dà anche la espressione esatta di φ_* mediante una serie di potenze di μ_* con un procedimento basato sulla possibilità di sviluppare il secondo membro della (8) in serie di una successione di polinomi in ϱ^2, completa rispetto alle funzioni di ϱ^2 regolari in σ. Non riassumerò tale procedimento poichè, per gli scopi del presente lavoro, sono sufficienti le soluzioni approssimate (11)-(14).

3 — Soluzione approssimata data da C. Cattaneo nel caso generale.

In una nota successiva C. CATTANEO tratta l'analogo problema per due solidi elastici omogenei e isotropi limitati da superficie di forma qualunque [1 3], e, assumendo alcune ipotesi fisiche che, in parte, sono la naturale generalizzazione di quelle già adottate nel caso di due sfere, mostra come il procedimento di calcolo approssimato utilizzato in quel caso particolare sia atto a risolvere anche in questo caso il problema con grado di approssimazione comunque spinto. Allo scopo l'Autore ammette le seguenti ipotesi che riporto integralmente e che saranno da me adottate per la ricerca della soluzione esatta:

« I. Continuità. Lo sforzo tangenziale (l, m) è finito e continuo in tutta l'area σ.

II. Validità locale delle leggi di attrito. In tutta σ esso soddisfa alla disuguaglianza

$$l^2 + m^2 \leq f^2 p^2 \tag{15}$$

essendo f il coefficiente di attrito tra i due corpi e p lo sforzo normale.

III. Zone di aderenza e di slittamento. Vi è assenza di slittamento locale in un'area ellittica σ_* di semiassi a_* e b_*, concentrica coassiale omotetica a σ, e interna ad essa. Si producono invece slittamenti nella residua corona ellittica marginale che chiameremo τ.

IV. Struttura analitica degli sforzi e loro direzione. Nell'anello τ gli sforzi tangenziali sono del tipo:

$$l_\tau = \alpha \frac{\partial F(\mu)}{\partial y} \qquad m_\tau = \beta \frac{\partial F(\mu)}{\partial x} \tag{16}$$

dove $F(\mu)$ è una opportuna funzione di $\mu = \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

e

$$\alpha = \frac{\varkappa A (a^2 - b^2) + 2 \chi (B b^2 - A a^2)}{2 \varkappa [\varkappa A B (a^2 - b^2) + \chi (A + B)(B b^2 - A a^2)]} \tag{17}$$

$$\beta = - \frac{\varkappa B (a^2 - b^2) + 2 \chi (B b^2 - A a^2)}{2 \varkappa [A B (a^2 - b^2) + \chi (A + B)(B b^2 - A a^2)]} \tag{18}$$

con $A = \frac{\pi a b}{2} \int_0^\infty \frac{d\psi}{\left(a^2 + \psi\right)^{\frac{3}{2}} \left\{(b^2 + \psi)\psi\right\}^{\frac{1}{2}}}$, $B = \frac{\pi a b}{2} \int_0^\infty \frac{d\psi}{\left(b^2 + \psi\right)^{\frac{3}{2}} \left\{(a^2 + \psi)\psi\right\}^{\frac{1}{2}}}$

(si presume con ciò che lo sforzo tangenziale in τ abbia una ben determinata struttura analitica e abbia inoltre ovunque, in τ, la stessa direzione che esso avrebbe in assenza completa di scorrimento (5).

V. Condizione di massimo sforzo tangenziale compatibile con l'attrito. Subordinatamente alla condizione IV (16) la distribuzione degli sforzi tangenziali in τ è tale che in almeno un punto di τ la II (15) sia soddisfatta per uguaglianza (potendo nei rimanenti punti di τ essere verificata per disuguaglianza) ».

In virtù delle ipotesi II, IV, V, l'Autore determina la $F(\mu)$ e quindi gli sforzi tangenziali in τ:

$$F(\mu) = \frac{3 f P}{4 \pi b \beta} (\mu \sqrt{1 - \mu^2} - \text{arc sen } \mu) \tag{19}$$

$$l_\tau = \frac{3 f P \alpha}{2 \pi b^3 \beta} \frac{\mu y}{\sqrt{1 - \mu^2}}, \quad m_\tau = \frac{3 f P}{2 \pi a^2 b} \frac{\mu x}{\sqrt{1 - \mu^2}} \tag{20}$$

dove, come è già stato detto, si è posto $\mu = \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

---

(5) L'Autore aveva precedentemente dimostrato nella stessa Nota che la soluzione del problema di contatto nel caso di assenza di slittamento era data da

$$l_\tau = \alpha \omega \frac{\partial \mu}{\partial y} \qquad m_\tau = \beta \omega \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

dove α e β hanno appunto l'espressione (17) e (18). Lo stesso risultato era già stato ottenuto, per altra via, da MINDLIN [8].

Anche in questo caso, come gia nel caso di due sfere, l'Autore ricorre alle equazioni di Boussinesq e Cerruti (5). Indicate con l_* e m_* le componenti cartesiane dello sforzo tangenziale in σ_*, le equazioni (5) vengono poste nella seguente forma più comoda:

$$(21)\quad \begin{cases} \displaystyle\iint_{\sigma_*}\left[\varkappa\frac{l_*-l_\tau}{r}-\chi(l_*-l_\tau)\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}-\chi(m_*-m_\tau)\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}\right]d\xi\,d\eta= \\ \displaystyle\qquad =-\iint_{\sigma}\left[\varkappa\frac{l_\tau}{r}-\chi\,l_\tau\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}-\chi\,m_\tau\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}\right]d\xi\,d\eta-\omega y \\ \displaystyle\iint_{\sigma_*}\left[\varkappa\left[\frac{m_*-m_\tau}{r}\right.-\chi(m_*-m_\tau)\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}-\chi(l_*-l_\tau)\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}\right]d\xi\,d\eta= \\ \displaystyle\qquad =-\iint_{\sigma}\left[\varkappa\frac{m_\tau}{r}-\chi\,m_\tau\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}-\chi\,l_\tau\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}\right]d\xi\,d\eta+\omega x \end{cases}$$

In tali equazioni i secondi membri sono noti, mentre si presentano come incognite le funzioni l_*-l_τ, m_*-m_τ definite in σ_*, e i semiassi a_* e b_* di σ_* o, se si vuole, il rapporto

$$(22)\qquad \lambda=\frac{a_*}{a}=\frac{b_*}{b}$$

di omotetia tra σ_* e σ. Seguendo il procedimento di approssimazione già adottato per il caso di due sfere, l'Autore risolve le equazioni (21) ponendo

$$(23)\qquad F(\mu)\cong\sum_{1}^{n}{}_r\,a_r\,\mu^{2r+1}$$

$$(24)\qquad l_*-l_\tau=\frac{\alpha}{\beta}\frac{\partial}{\partial y}\sum_{1}^{n}{}_r\gamma_r^{(n)}\,\mu_*^{2r+1}\,,\quad m_*-m_\tau=\frac{\partial}{\partial y}\sum_{1}^{n}{}_r\,\gamma_r^{(n)}\,\mu_*^{2r+1}.$$

dove è posto

$$\mu_*(x\,,y\,;\lambda)=\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2a^2}-\frac{y^2}{\lambda^2b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

α e β essendo ancora dati dalle (17) e (18). Le a_r sono ovviamente note, mentre le $\gamma_r^{(n)}$ vengono determinate risolvendo un sistema algebrico cui ci si riduce sostituendo le (23) e (24) nelle equazioni (21), e utilizzando i risultati analitici di [12].

Riporto anche ora i risultati di prima e seconda approssimazione.

I approssimazione

$$l_* - l_\tau = \frac{f P a}{2 \pi b \beta} \lambda^3 \frac{\partial \mu_*^3}{\partial y}, \qquad m_* - m_\tau = \frac{f P}{2 \pi b} \lambda^3 \frac{\partial \mu_*^3}{\partial x} \tag{25}$$

$$\omega = - \frac{3 f P}{4 \pi b \beta} (1 - \lambda^2) \tag{26}$$

II approssimazione

$$l_* - l_\tau = \frac{f P a}{2 \pi b \beta} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left[1 + \frac{3}{4} (1 - \lambda^2) \right] \lambda^3 \mu_*^3 + \frac{3}{10} \lambda^5 \mu_*^5 \right\} \tag{27}$$

$$m_* - m_\tau = \frac{f P}{2 \pi b} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[1 + \frac{3}{4} (1 - \lambda^2) \right] \lambda^3 \mu_*^3 + \frac{3}{10} \lambda^5 \mu_*^5 \right\} \tag{28}$$

$$\omega = - \frac{3 f P}{32 \pi b \beta} (11 - 14 \lambda^2 + 3 \lambda^4) \tag{29}$$

Le (26) e (29) determinano λ e quindi, per la (22), a_* e b_*, in funzione di ω, come la più piccola radice che al valore $\lambda = 1$ fa corrispondere $\omega = 0$.

Si può controllare facilmente che tali soluzioni di prima e seconda approssimazione coincidono per $a = b$ con le analoghe approssimazioni nel caso di due sfere. Infatti posto $e = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, e ricordando che è (cfr. [12] pag. 6)

$$A = \frac{\pi b [K(e) - E(e)]}{a^2 - b^2} \qquad B = \frac{\pi [a^2 E(e) - b^2 K(e)]}{b (a^2 - b^2)}$$

si può scrivere

$$\alpha = \frac{b}{2 \varkappa \pi} \frac{\varkappa \frac{K(e) - E(e)}{e^2} + 2 \chi \frac{2 E(e) - (2 - e^2) K(e)}{e^4}}{\varkappa \frac{K(e) - E(e)}{e^2} \frac{E(e) - (1 - e^2) K(e)}{e^2} + \chi E(e) \frac{2 E(e) - (2 - e^2) K(e)}{e^4}}$$

$$\beta = - \frac{a^2}{2 b \pi \varkappa} \frac{\varkappa \frac{E(e) - (1 - e^2) K(e)}{e^2} + 2 \chi (1 - e^2) \frac{2 E(e) - (2 - e^2) K(e)}{e^4}}{\varkappa \frac{K(e) - E(e)}{e^2} \frac{E(e) - (1 - e^2) K(e)}{e^2} + \chi E(e) \frac{2 E(e) - (2 - e^2) K(e)}{e^4}}$$

ed essendo [11]:

$$\lim_{e \to 0} \frac{K(e) - E(e)}{e^2} = \lim_{e \to 0} \frac{E(e) - (1 - e^2) K(e)}{e^2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{e \to 0} \frac{(2 - e^2) K(e) - 2 E(e)}{e^4} = - \frac{\pi}{16}, \ \lim_{e \to 0} E(e) = \frac{\pi}{2}$$

si ottiene

$$\lim_{b \to a} \alpha = \frac{2\,a}{\pi^2\,\varkappa}\,,\ \lim_{b \to a} \beta = \frac{-\,2\,a}{\pi^2\,\varkappa} \tag{30}$$

Dopo di ciò il controllo diviene immediato.

4. Costruzione induttiva della soluzione in termini finiti nel caso generale.

Mostreremo ora che si può costruire una legge formale la quale permette di ottenere la soluzione approssimata del problema nel caso generale a partire dalla analoga soluzione relativa al caso di due sfere e, cosa veramente notevole, che tale legge non dipende dall'ordine di approssimazione considerato.

Per la prima approssimazione si ha:

a) Caso di due sfere

Sforzi tangenziali in σ_*:

$$l_*^{(1)} - l_\tau^{(1)} = \frac{3\,f\,P}{2\,\pi\,a^3}\,\lambda\,\mu_*\,y \qquad m_*^{(1)} - m_\tau^{(1)} = -\,\frac{3\,f\,P}{2\pi\,a^3}\,\lambda\,\mu_*\,x$$

cioè, essendo $l_\tau^{(1)} = -\,\frac{3\,f\,P}{2\,\pi a^3}\,\mu\,y$ e $m_\tau^{(1)} = \frac{3\,f\,P}{2\,\pi\,a^3}\,\mu\,x$ (cfr. [10] pag. 12),

$$l_*^{(1)} - l_\tau^{(1)} = l_\tau^{(1)}\left(-\,\lambda\,\frac{\mu_*}{\mu}\right), \qquad m_*^{(1)} - m_\tau^{(1)} = m_\tau^{(1)}\left(-\,\lambda\,\frac{\mu_*}{\mu}\right) \tag{31}$$

Legame tra ω e λ:

$$\omega = G\,(1 - \lambda^2) \tag{32}$$

con

$$\lambda = \frac{a_*}{a}\,,\ k^2 = 1 - \lambda^2\,,\ \mu_* = \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{a_*^2}\right)^{\frac{1}{2}},\ \mu = \left(k^2 + \lambda^2\,\mu_*^2\right)^{\frac{1}{2}},\ G = \frac{3\,f\,P\,\pi\,\varkappa}{8\,a^2}$$

b) Caso generale

Sforzi tangenziali in σ_*:

$$l_*^{(1)} - l_\tau^{(1)} = -\,\frac{3\,f\,P\,a}{2\,\pi\,b^3\,\beta}\,\lambda\,\mu_*\,y \qquad m_*^{(1)} - m_\tau^{(1)} = -\,\frac{3\,f\,P}{2\,\pi\,b\,a^2}\,\lambda\,\mu_*\,x$$

cioè essendo $l_\tau^{(1)} = \frac{3\,f\,P\,a}{2\,\pi\,b^3\,\beta}\,\mu\,y$ e $m_\tau^{(1)} = \frac{3\,f\,P}{2\,\pi\,b\,a^2}\,\mu\,x$ (cfr. [13] pag. 36)

$$l_*^{(1)} - l_\tau^{(1)} = l_\tau^{(1)} \left(- \lambda \frac{\mu_*}{\mu}\right) \qquad m_*^{(1)} - m_\tau^{(1)} = m_\tau^{(1)} \left(- \lambda \frac{\mu_*}{\mu}\right) \tag{33}$$

Legame tra ω a λ:

$$\omega = G\,(1 - \lambda^2) \tag{34}$$

con

$$\lambda = \frac{a_*}{a} = \frac{b_*}{b}, k^2 = 1 - \lambda^2, \mu_* = \left(1 - \frac{x^2}{a_*^2} - \frac{y^2}{b_*^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \mu = (k^2 + \lambda^2 \mu_*^2)^{\frac{1}{2}}, G = - \frac{3 f P}{4 \pi b \beta}$$

Per la seconda approssimazione, procedendo in modo analogo, si può scrivere (cfr. [10] pag. 13 e [13] pag. 39)

a) Caso di due sfere

Sforzi tangenziali in σ_*:

$$\begin{aligned} l_*^{(2)} - l_\tau^{(2)} &= l_\tau^{(2)} \left\{- \frac{\frac{1}{2}(7 - 3\lambda^2) + \lambda^2 \mu_*^2}{2 + \mu^2} \lambda \frac{\mu_*}{\mu}\right\}, \\ m_*^{(2)} - m_\tau^{(2)} &= m_\tau^{(2)} \left\{- \frac{\frac{1}{2}(7 - 3\lambda^2) + \lambda^2 \mu_*^2}{2 + \mu^2} \lambda \frac{\mu_*}{\mu}\right\} \end{aligned} \tag{35}$$

Legame tra ω e λ:

$$\omega = G \left\{\frac{1}{8}(3\lambda^4 - 14\lambda^2 + 11)\right\} \tag{36}$$

con

$$\lambda = \frac{a_*}{a}, k^2 = 1 - \lambda^2, \mu_* = \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{a_*^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \mu = \left(k^2 + \lambda^2 \mu_*^2\right)^{\frac{1}{2}}, G = \frac{3 f P \pi \varkappa}{8 a^2} \tag{37}$$

b) Caso generale

Sforzi tangenziali in σ_*:

$$\begin{aligned} l_*^{(2)} - l_\tau^{(2)} &= l_\tau^{(2)} \left\{- \frac{\frac{1}{2}(7 - 3\lambda^2) + \lambda^2 \mu_*^2}{2 + \mu^2} \lambda \frac{\mu_*}{\mu}\right\}, \\ m_*^{(2)} - m_\tau^{(2)} &= m_\tau^{(2)} \left\{- \frac{\frac{1}{2}(7 - 3\lambda^2) + \lambda^2 \mu_*^2}{2 + \mu^2} \lambda \frac{\mu_*}{\mu}\right\} \end{aligned} \tag{38}$$

Legame tra ω e λ:

$$\omega = G \left\{\frac{1}{8}(3\lambda^4 - 14\lambda^2 + 11)\right\} \tag{39}$$

con

$$\lambda = \frac{a_*}{a} = \frac{b_*}{b}\,,\; k^2 = 1 - \lambda^2\,,\; \mu_* = \left(1 - \frac{x^2}{a_*^2} - \frac{y^2}{b_*^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{40}$$

$$\mu = (k^2 + \lambda^2 \mu_*^2)\,,\; G = -\frac{3\,f\,P}{4\,\pi\,b\,\beta}$$

Dal confronto delle (31) (32) con le (33) (34) e delle (35) (36) con le (38) (39) appare che, a parità di approssimazione [6], la soluzione nel caso di due sfere e la soluzione nel caso generale possono assumere il medesimo aspetto formale che è sempre del tipo

$$\left\{\begin{aligned} & l_*^{(n)} - l_\tau^{(n)} = l_\tau^{(n)}\,\varphi^{(n)}(\lambda\,,\mu_*) \\ & m_*^{(n)} - m_\tau^{(n)} = m_\tau^{(n)}\,\varphi^{(n)}(\lambda\,,\mu_*) \\ & \omega = G\,h^{(n)}(\lambda) \end{aligned}\right. \tag{41}$$

pur di dare alle lettere $\lambda\,,\mu_*\,,G$, una volta il significato (37) e una volta il significato (40).

Poichè tale legge formale con la quale si passa dalla soluzione relativa al caso di due sfere alla soluzione relativa al caso generale è valida per qualunque ordine di approssimazione, appare naturale tentare di costruire la soluzione esatta relativa al caso generale, applicando la medesima legge alla soluzione esatta data da LUBKIN nel caso di due sfere ((3) (4)).

A tale scopo mostriamo anzitutto che è possibile porre la soluzione di LUBKIN in una forma del tipo (41). Dalle (3) consegue infatti

$$l_* = -\tau_\omega\,\frac{y}{\varrho} = \frac{3\,f\,P}{\pi^2\,a^3}\,\frac{\mu\,y}{\sqrt{1-\mu^2}}\left[\frac{\pi}{2} + k^2\,D(k)\,F(\lambda\,,\theta) - K(k)\,E(\lambda\,,\theta)\right]$$

$$m_* = \tau_\omega\,\frac{x}{\varrho} = \frac{3\,f\,P}{\pi^2\,a^3}\,\frac{\mu\,x}{\sqrt{1-\mu^2}}\left[\frac{\pi}{2} + k^2\,D(k)\,F(\lambda\,,\theta) - K(k)\,E(\lambda\,,\theta)\right]$$

ed essendo (cfr. le (6)) $l_\tau = -\dfrac{3\,f\,P}{2\,\pi\,a^3}\,\dfrac{\mu\,y}{\sqrt{1-\mu^2}}$ ed $m_\tau = \dfrac{3\,f\,P}{2\,\pi\,a^3}\,\dfrac{\mu\,x}{\sqrt{1-\mu^2}}$,

$$\left\{\begin{aligned} & l_* - l_\tau = l_\tau\,\frac{2}{\pi}\,[k^2\,D(k)\,F(\lambda\,,\theta) - K(k)\,E(\lambda\,,\theta)] \\ & m_* - m_\tau = m_\tau\,\frac{2}{\pi}\,[k^2\,D(k)\,F(\lambda\,,\theta) - K(k)\,E(\lambda\,,\theta)] \end{aligned}\right. \tag{42}$$

---

[6] Si potrebbe controllare che la proprietà sussiste per una approssimazione di ordine qualunque.

ove è posto

$$\lambda = \frac{a_*}{a}\,,\ k^2 = 1 - \lambda^2\,,\ \operatorname{sen}\theta = \frac{\mu_*}{\mu}\,,\ \mu_* = \left(1 - \frac{x^2+y^2}{a_*^2}\right)^{\frac{1}{2}},\ \mu = \left(k^2 + \lambda^2\,\mu_*^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Il valore di λ è poi individuato dalla relazione

$$\omega = G\left\{\frac{4}{\pi}\,[K(k) - E(k)]\right\} \tag{43}$$

con $G = \dfrac{3 f P \varkappa \pi}{8\,a^2}$.

Le (42) e (43) sono effettivamente del tipo (41). La materiale sostituzione dei valori (40) per λ, μ_*, G, conduce allora a presumere per il caso generale la seguente soluzione:

$$\boxed{\left.\begin{aligned} l_* - l_\tau &= l_\tau\,\frac{2}{\pi}\,[k^2 D(k)\,F(\lambda,\theta) - K(k)\,E(\lambda,\theta)] \\ m_* - m_\tau &= m_\tau\,\frac{2}{\pi}\,[k^2 D(k)\,F(\lambda,\theta) - K(k)\,E(\lambda,\theta)] \\ \omega &= -\frac{3 f P}{\pi^2\,b\,\beta}\,[K(k) - E(k)] \end{aligned}\right\}\left(1 - \frac{x^2}{a_*^2} - \frac{y^2}{b_*^2} \geq 0\right)} \tag{44}$$

dove è:

$$l_\tau = \frac{3 f P \alpha}{2\pi b^3 \beta}\,\frac{\mu y}{\sqrt{1-\mu^2}}\ ^{(7)},\ m_\tau = \frac{3 f P}{2\pi a^2 b}\,\frac{\mu x}{\sqrt{1-\mu^2}},\ \lambda = \frac{a_*}{a} = \frac{b_*}{b},\ k = \sqrt{1-\lambda^2},$$

$$\mu_* = \left(1 - \frac{x^2}{a_*^2} - \frac{y^2}{b_*^2}\right)^{\frac{1}{2}},\ \mu = \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\mu_*}{\mu}\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right),\ F(\lambda,\theta) = \int_0^\theta \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\operatorname{sen}^2\varphi}},$$

$$E(\lambda,\theta) = \int_0^\theta \sqrt{1-\lambda^2\operatorname{sen}^2\varphi}\,d\varphi,\ K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}},$$

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}\,d\varphi,\ D(k) = \frac{K(k) - E(k)}{k^2}$$

(7) α e β hanno ancora il significato (17) e (18).

Fin qui non si tratta che di una semplice presunzione. Un primo controllo parziale si ha osservando che le (44) per $a = b$ si riducono in virtù delle (30) alla soluzione (3) (4) relativa al caso di due sfere.

Un secondo controllo parziale può aversi verificando che la soluzione (44) differisce dalla approssimazione $n - ma$ ottenuta da CATTANEO a meno di infinitesimi d'ordine superiore ad n rispetto ad $1 - \lambda$. Riportiamo appresso i calcoli relativi alle prime due approssimazioni.

Ricordando che è $\operatorname{sen} \theta = \dfrac{\mu_*}{\mu}$ e $\mu^2 - \lambda^2 \mu_*^2 = k^2$ per note formule di derivazione degli integrali ellittici (cfr. [11], pag. 282) si ha

$$\frac{\partial F(\lambda,\theta)}{\partial \lambda} = \frac{E(\lambda,\theta) - k^2 F(\lambda,\theta)}{k^2 \lambda} - \frac{\mu_* \sqrt{1-\mu^2}}{\mu k^2}, \quad \frac{\partial E(\lambda,\theta)}{\partial \lambda} = \frac{E(\lambda,\theta) - F(\lambda,\theta)}{\lambda}$$

$$\frac{\partial F(\lambda,\theta)}{\partial \theta} = \frac{\mu}{k}, \quad \frac{\partial E(\lambda,\theta)}{\partial \theta} = \frac{k}{\mu}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} = \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{k \lambda^2 \mu_*}$$

$$\frac{d}{dk}[K(k) - E(k)] = \frac{k\, E(k)}{\lambda^2}, \quad \frac{d}{dk} K(k) = \frac{E(k) - \lambda^2 K(k)}{k \lambda^2}$$

Se quindi poniamo

$$\varphi(x, y; \lambda) = \frac{2}{\pi}[k^2 D(k) F(\lambda, \theta) - K(k) E(\lambda, \theta)] \tag{45}$$

si ottiene

$$\frac{\partial \varphi(x, y; \lambda)}{\partial \lambda} = -\frac{2}{\pi} E(k) \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\lambda^2 \mu \mu_*} \tag{46}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, y; \lambda)}{\partial \lambda^2} = \frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu} \frac{\dfrac{E(k) - K(k)}{k^2} \lambda^4 \mu_*^2 - E(k)[2\lambda^2 \mu_*^2 - \mu^2 + 1]}{\lambda^5 \mu_*^3}.$$

Da ciò consegue per le (33), (38) e (44)

$$\left(\frac{\partial l_*}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=1} = \left(\frac{\partial l_*^{(1)}}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=1} = \left(\frac{\partial l_*^{(2)}}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=1} = -\frac{3 f P a}{2 \pi b^3 \beta} \frac{y}{\mu}$$

$$\left(\frac{\partial^2 l_*}{\partial \lambda^2}\right)_{\lambda=1} = \left(\frac{\partial^2 l_*^{(2)}}{\partial \lambda^2}\right)_{\lambda=1} = \frac{3 f P a}{4 \pi b^3 \beta} \frac{\mu^2 + 2}{\mu^3} \neq \left(\frac{\partial^2 l_*^{(1)}}{\partial \lambda^2}\right)_{\lambda=1}$$

$$\left(\frac{\partial^3 l_*}{\partial \lambda^3}\right)_{\lambda=1} \neq \left(\frac{\partial^3 l^{(2)}}{\partial \lambda^3}\right)_{\lambda=1}$$

Questi risultati ci assicurano che $l_*(x, y; \lambda)$ e $l_*^{(1)}(x, y; \lambda)$ differiscono per termini di ordine superiore al primo in $1-\lambda$, mentre $l_*(x, y; \lambda)$ ed $l_*^{(2)}(x, y; \lambda)$ differiscono per termini d'ordine superiore al secondo in $1-\lambda$. Inoltre, poichè risulta (cfr. [11] pag. 297)

$$K(k) - E(k) = \frac{\pi}{4}\left(k^2 + \frac{3}{8} k^4 + \frac{15}{64} k^6 + \ldots\right)$$

dalla $(44)_3$, trascurando termini di grado superiore al secondo in k (al primo in $1-\lambda$) si ottiene

$$\omega = -\frac{3 f P}{4 \pi b \beta} k^2$$

la quale coincide con l'analoga relazione (26) ottenuta da CATTANEO (nel caso generale) in prima approssimazione, e trascurando termini di grado superiore al quarto in k (al secondo in $1-\lambda$) si ha

$$\omega = -\frac{3 f P}{4 \pi b \beta}\left(k^2 + \frac{3}{8} k^4\right)$$

che coincide con la (29), ottenuta in seconda approssimazione.

Se quanto precede vale a spiegare le induzioni con cui è stata formalmente ricavata la (44), resta tuttavia necessario un controllo rigoroso della formula medesima. Ciò è quanto faremo nel seguente paragrafo.

§ 2. - VERIFICA DELLA SOLUZIONE.

5 — Una utile trasformazione dei primi membri del sistema integro-differenziale (21) in corrispondenza alla soluzione presunta.

Mostreremo ora con tutto rigore che le (44) forniscono la effettiva distribuzione degli sforzi tangenziali nell'area di perfetta aderenza σ_* di semiassi

$$a_* = \lambda a, \qquad b_* = \lambda b \qquad (\lambda = \sqrt{1-k^2}) \tag{47}$$

Per tale scopo faremo uso delle equazioni integro-differenziali (21). Poniamo anzitutto

$$F(x, y; \xi, \eta) = \varkappa \frac{l_\tau}{r} - \chi l_\tau \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - \chi m_\tau \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} \tag{48}$$

$$(49)\qquad \Phi(x,y;\xi,\eta)=\varkappa\frac{m_\tau}{r}-\chi\, m_\tau\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}-\chi\, l_\tau\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}$$

con

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\,,\ l_\tau=\frac{3fPa}{2\pi b^3\beta}\frac{\mu\eta}{\sqrt{1-\mu^2}},\ m_\tau=\frac{3fP}{2\pi a^2 b}\frac{\mu\xi}{\sqrt{1-\mu^2}}\ (\mu(\xi,\eta)).$$

Ciò premesso, sostituiamo nelle equazioni (21) in luogo delle incognite funzioni $l_* - l_\tau$, $m_* - m_\tau$, la soluzione presunta (44). Con le posizioni (45) (48) (49) esse divengono

$$(50)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_{\sigma_*}\varphi(\xi,\eta;\lambda)F(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta=-\int_\sigma F(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta-\omega y\\ &\int_{\sigma_*}\varphi(\xi,\eta;\lambda)\Phi(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta=-\int_\sigma \Phi(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta+\omega x \end{aligned}\right.\qquad (x,y)\ \text{in}\ \sigma_*$$

Poichè $F(xy;\xi\eta)$ e $\Phi(xy;\xi\eta)$ sono funzioni note, dobbiamo verificare che le (50) restano identicamente soddisfatte se alla $\varphi(\xi,\eta;\lambda)$ si sostituisce l'espressione (45) e i semiassi di σ_* sono individuati dalle $(44)_3$ e (47).

Effettueremo la verifica soltanto per la prima delle (50), valendo lo stesso procedimento per la seconda equazione. Alla verifica formale, che verrà eseguita al n. 7, facciamo precedere, nel prossimo n. 6, alcune precisazioni analitiche, necessarie al completo rigore della dimostrazione [8].

Alcune proprietà delle funzioni $\varphi(\xi,\eta;\lambda)$ ed $\mathcal{F}(x,y;\lambda)=$

$$=\int_{\sigma_*(\lambda)}\varphi(\xi,\eta;\lambda)\,F(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\,.$$

I) Fissato un valore di λ nell'intervallo aperto (0,1) la funzione $\varphi(\xi,\eta;\lambda)$ è continua nell'insieme chiuso σ_* (luogo dei punti (ξ,η) per cui risulta $1-\frac{\xi^2}{\lambda^2 a^2}-\frac{\eta^2}{\lambda^2 b^2}\geq 0$).

Tale proprietà è immediata conseguenza della definizione stessa (45).

II) Nello stesso intervallo aperto $(0,1)$ la $\varphi(\xi,\eta;\lambda)$ è funzione continua di λ, uniformemente rispetto a (ξ,η) in σ_*.

---

[8] Chi accetti la legittimità di alcune operazioni analitiche (di passaggio al limite o di derivazione sotto il segno di integrale) può senz'altro passere al n. 7.

La proprietà è conseguenza immediata della definizione (45).

III) Al tendere di λ ad 1 la classe di funzioni in ξ e η $\varphi(\xi, \eta; \lambda)$, ciascuna definita nel corrispondente campo $\sigma_*(\lambda)$, converge (non uniformemente in σ_*) al valore costante -1.

Ricordando che è $\operatorname{sen}\theta = \frac{\mu_*}{\mu}$ si ha (cfr. [11] pag. 11)

$$\lim_{\lambda \to 1} k^2 F(\lambda, \theta) = \lim_{k \to 0} k^2 \log \frac{4}{k} = 0 , \lim_{\lambda \to 1} E(\lambda, \theta) = 1$$

$$\lim_{\lambda \to 1} \frac{K(k) - E(k)}{k^2} = \frac{\pi}{4}, \qquad \lim_{\lambda \to 1} K(k) = \frac{\pi}{2}$$

e quindi

$$\lim_{\lambda \to 1} \varphi(\xi, \eta; \lambda) = -1 \tag{51}$$

Osservando poi che la funzione $\frac{\mu_*}{\mu} = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2}\right)}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2}\right)}}$ non converge uniformemente ad 1, per λ tendente ad 1, si può asserire che neppure la $\varphi(\xi, \eta; \lambda)$ converge uniformemente.

(IV) La funzione $\varphi(\xi, \eta; \lambda)$ si annulla sul contorno $l_*(\lambda)$ di $\sigma_*(\lambda)$.

Su $l_*(\lambda)$ è $\mu_*(\xi, \eta; \lambda) = 0$ e quindi $\theta = \operatorname{arc\,sen} \frac{\mu_*}{\mu} = 0$. Essendo inoltre (cfr. [11] pag. 10) $F(\lambda, 0) = E(\lambda, 0) = 0$, si ha per la definizione stessa di $\varphi(\xi, \eta; \lambda)$

$$\varphi(\xi, \eta; \lambda) = 0 \qquad \text{su } l_*(\lambda) \tag{52}$$

V) Posto $g(\xi, \eta; \lambda) = \frac{3fP}{\pi^2 b} E(k)\, \mu_*(\xi, \eta; \lambda)$, $f(x, y; \xi, \eta) = = \varkappa \frac{\alpha}{\beta} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \chi \frac{\alpha}{\beta} \frac{\partial^3 r}{\partial x^2 \partial y} - \chi \frac{\partial^3 r}{\partial x^2 \partial y}$ e, sul contorno $l_*(\lambda)$ di $\sigma_*(\lambda)$ di normale n orientata verso l'interno di $\sigma_*(\lambda)$, $q(x, y; \xi, \eta) = \varkappa \frac{1}{r} \cos \widehat{ny} - - \chi \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \cos \widehat{ny} - \chi \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} \cos \widehat{nx}$ vale la seguente identità in $\sigma_*(\lambda)$, qualunque siano λ e $\bar{\lambda}\,(\geq \lambda)$ nell'intervallo (0,1) $\left(\varphi_\lambda(\xi, \eta; \bar{\lambda}) = \left(\frac{\partial \varphi(\xi, \eta; \lambda)}{\partial \lambda}\right)_{\lambda = \bar{\lambda}}\right)$:

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_*(\lambda)} \varphi_\lambda(\xi, \eta; \bar{\lambda})\, F(x, y; \xi\, \eta)\, d\xi\, d\eta &= \int_{\sigma_*(\lambda)} g(\xi, \eta; \bar{\lambda}) f(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \, - \\ &- \int_{l_*(\lambda)} g(\xi, \eta; \bar{\lambda})\, q(x, y; \xi, \eta)\, dl \end{aligned} \tag{53}$$

Ricordando che è

$$(54)\qquad \begin{aligned} \varphi_\lambda(\xi,\eta;\lambda) &= -\frac{2}{\pi}E(k)\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\lambda^2\,\mu\,\mu_*}\,,\quad l_\tau = \frac{3fPa}{2\pi b^3\beta}\,\frac{\mu\,\eta}{\sqrt{1-\mu^2}}\,,\\ m_\tau &= \frac{3fP}{2\pi b\,a^2}\,\frac{\mu\,\xi}{\sqrt{1-\mu^2}} \end{aligned}$$

posto $\bar{k}=\sqrt{1-\bar{\lambda}^2}$. $\bar{\mu}_* = \mu_*(\xi,\eta;\bar{\lambda})$ si ottiene

$$\int_{\sigma_*(\lambda)}\varphi_\lambda(\xi,\eta;\bar{\lambda})\,F(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = -\frac{3fPa}{\pi^2 b\beta}\varkappa E(\bar{k})\int_{\sigma_*(\lambda)}\frac{\eta}{\bar{\lambda}^2 b^2\bar{\mu}_*}\,\frac{1}{r}\,d\xi\,d\eta +$$

$$+\frac{3fPa}{\pi^2 b\beta}\chi E(\bar{k})\int_{\sigma_*(\lambda)}\frac{\eta}{\bar{\lambda}^2 b^2\bar{\mu}_*}\,\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\,d\xi\,d\eta + \frac{3fP}{\pi^2 b}\chi E(\bar{k})\int_{\sigma_*(\lambda)}\frac{\xi}{\bar{\lambda}^2 a^2\bar{\mu}_*}\,\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}\,d\xi\,d\eta$$

cioè

$$\int_{\sigma_*(\lambda)}\varphi_\lambda(\xi,\eta;\bar{\lambda})\,F(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = \frac{3fPa}{\pi^2 b\beta}\varkappa E(\bar{k})\int_{\sigma_*(\lambda)}\frac{\partial\bar{\mu}_*}{\partial\eta}\,\frac{1}{r}\,d\xi\,d\eta -$$

$$-\frac{3fPa}{\pi^2 b\beta}\chi E(\bar{k})\int_{\sigma_*(\lambda)}\frac{\partial\bar{\mu}_*}{\partial\eta}\,\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\,d\xi\,d\eta - \frac{3fP}{\pi^2 b}\chi E(\bar{k})\int_{\sigma_*(\lambda)}\frac{\partial\bar{\mu}_*}{\partial\xi}\,\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}\,d\xi\,d\eta$$

Se infine facciamo uso delle formule di trasformazione

$$(55)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma_*}f(\xi\,\eta)\,h(x\,y\,\xi\,\eta)\,d\xi\,d\eta &= \int_{\sigma_*}\frac{\partial f(\xi\,\eta)}{\partial\xi}\,h(x\,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta +\\ &\quad + \int_{l_*}f(\xi\,\eta)\,h(x\,y\,\xi\,\eta)\cos\widehat{nx}\,dl\\ \frac{\partial}{\partial y}\int_{\sigma_*}f(\xi,\eta)\,h(x\,y\,\xi\,\eta)\,d\xi\,d\eta &= \int_{\sigma_*}\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial\eta}\,h(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta +\\ &\quad + \int_{l_*}f(\xi,\eta)\,h(x,y;\xi,\eta)\cos\widehat{ny}\,dl \end{aligned}\right.$$

(valide sia per $h(x,y;\xi,\eta)=r$ sia per $h(x,y;\xi,\eta)=\dfrac{1}{r}$ (cfr. [6], pag. 210) qualora $f(\xi,\eta)$ sia continua con derivate prime continue in σ_*). si giunge al risultato enunciato.

È inoltre utile per il seguito osservare che:

1^b fissato (ξ, η), $g(\xi, \eta; \lambda)$ è funzione crescente di λ nell'intervallo $(0,1)$.

2^o $g(\xi, \eta; \lambda)$ è funzione continua di (ξ, η) nell'insieme chiuso $\sigma_*(\lambda)$.

3^o $f(x, y; \xi, \eta)$ è sommabile rispetto a (ξ, η) nell'insieme $\sigma\,[\sigma_*(1) = \sigma]$.

VI) Detto λ_0 un qualunque numero positivo minore o uguale ad 1, se $\bar{\lambda}$ verifica la limitazione $\lambda_0 \geq \bar{\lambda} \geq \lambda$ si ha:

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_{l_*(\lambda)} g(\xi, \eta; \bar{\lambda})\, q(x, y; \xi, \eta)\, d\,l = 0 \tag{56}$$

Poichè sul $l_*(\lambda)$ è $\dfrac{\xi^2}{a^2} + \dfrac{\eta^2}{b^2} = \lambda^2$, si ha:

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_{l_*(\lambda)} g(\xi, \eta; \bar{\lambda}) q(x, y; \xi, \eta)\, d\,l = \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{3fP}{\pi^2 b} E(\bar{k}) \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\bar{\lambda}^2}} \int_{l_*(\lambda)} q(x, y; \xi, \eta)\, d\,l$$

ed essendo

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} E(\bar{k}) = E(k_0)\ (k_0 = \sqrt{1 - \lambda_0^2}), \quad \lim_{\lambda \to \lambda_0} \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\bar{\lambda}^2}} = 0,$$

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_{l_*(\lambda)} q(x, y; \xi, \eta)\, d\,l = \int_{l_*(\lambda_0)} q(x, y; \xi, \eta)\, d\,l$$

resta dimostrata la (56). L'ultimo limite si può calcolare per es: procedendo nel modo seguente. Per le formule di trasformazione (55) si ha

$$\int_{l_*} q(x, y; \xi, \eta)\, d\,l = \varkappa \int_{l_*} \frac{1}{r} \cos \widehat{n\,y}\, d\,l - \chi \int_{l_*} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \cos \widehat{n\,y}\, d\,l - \chi \int_{l_*} \frac{\partial^2 r}{\partial x\, \partial y} \cos \widehat{n\,x}\, d\,l =$$

$$= \varkappa \int_{\sigma_*} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r}\, d\,\sigma - \chi \int_{\sigma_*} \frac{\partial^3 r}{\partial x^2\, \partial y}\, d\,\sigma - \chi \int_{\sigma_*} \frac{\partial^3 r}{\partial x^2\, \partial y}\, d\,\sigma$$

e quindi posto $v(x, y; \xi, \eta) = \varkappa \dfrac{\partial}{\partial y} \dfrac{1}{r} - \chi \dfrac{\partial^3\, \partial r}{\partial x^2\, \partial y} - \chi \dfrac{\partial^3 r}{\partial x^2\, \partial y}$,

$$\int_{l_*(\lambda)} q(x, y; \xi, \eta)\, d\,l = \int_{\sigma_*(\lambda)} v(x, y; \xi, \eta)\, d\,\xi\, d\,\eta$$

E poichè risulta, per l'assoluta continuità dell'integrale $\displaystyle\int_{\sigma_*(\lambda)} v(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$,

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_{\sigma_*(\lambda) - \sigma_*(\lambda_0)} v(x, y; \xi, \eta)\, d\,\xi\, d\,\eta = 0$$

resta dimostrato che è

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_{l_*(\lambda)} q(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = \int_{l_*(\lambda_0)} q(x, y; \xi, \eta)\, dl$$

VII) Fissato (x, y) comunque nel piano si ha:

$$\lim_{\lambda \to 1} \mathscr{F}(x, y; \lambda) = -\int_{\sigma} F(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \ (^9) \tag{57}$$

Cominciamo ad osservare che per la (51) e per la continuità di $\varphi_\lambda(\xi, \eta; \lambda)$ rispelto a λ, nell'intervallo aperto (0,1), si può scrivere

$$\varphi(\xi, \eta; \lambda) + 1 = (1 - \lambda)\, \varphi_\lambda(\xi, \eta; \bar{\lambda})$$

dove $\bar{\lambda}$ rappresenta un opportuno valore compreso tra λ ed 1 $(\bar{\lambda} \geq \lambda)$. Ciò premesso si ha

$$\left| \mathscr{F}(x, y; \lambda) + \int_{\sigma} F(x, y; \xi \eta)\, d\xi\, d\eta \right| =$$

$$= \left| \int_{\sigma_*(\lambda)} \varphi(\xi, \eta; \lambda) F(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \int_{\sigma} F(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \right| =$$

$$= \left| \int_{\sigma_*(\lambda)} [\varphi(\xi, \eta; \lambda) + 1]\, F(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \int_{\sigma - \sigma_*(\lambda)} F(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{\sigma_*(\lambda)} (1 - \lambda)\, \varphi_\lambda(\xi, \eta; \bar{\lambda})\, F(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \right| + \left| \int_{\sigma - \sigma_*(\lambda)} F(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \right|$$

Per la (53), ricordando le proprietà della $g(\xi, \eta; \lambda)$ [cfr. V), infine], si ha ancora

$$\left| \mathscr{F}(x, y; \lambda) + \int_{\sigma} F(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \right| \leq (1 - \lambda) \left| \int_{\sigma_*(\lambda)} g(\xi, \eta; \bar{\lambda}) f(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \right.$$

$$\left. + (1 - \lambda) \right| \int_{l_*(\lambda)} g(\xi, \eta; \bar{\lambda})\, q(x, y; \xi, \eta)\, dl \left| + \right| \int_{\sigma - \sigma_*(\lambda)} F(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \left| \leq \right.$$

$$\leq (1 - \lambda) \int_{\sigma} |g(\xi, \eta; 1)|\, |f(x, y; \xi, \eta)|\, d\xi\, d\eta +$$

$$+ \left| \int_{\sigma - \sigma_*(\lambda)} F(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \right| + (1 - \lambda) \left| \int_{l_*(\lambda)} g(\xi, \eta; \bar{\lambda})\, q(x, y; \xi, \eta)\, dl \right|$$

---

(9) Non essendo verificate, in questo caso, le ipotesi assunte negli ordinari teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale, occorre dimostrare la (57) con procedimento particolare.

Fissato ora $\varepsilon > 0$ arbitrario si può determinare corrispondentemente tre numeri positivi $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ tali che per $1 - \lambda < \delta_1$ (essendo $F(x, y; \xi, \eta)$ sommabile in σ), risulti

$$\left| \int_{\sigma - \sigma_*(\lambda)} F(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

per $1 - \lambda < \delta_2$

$$(1 - \lambda) \int_\sigma |g(\xi, \eta; 1)| \, |f(x, y; \xi, \eta)| \, d\xi\, d\eta < \frac{\varepsilon}{3}$$

e per $1 - \lambda < \delta_3$ (cfr. (56))

$$(1 - \lambda) \left| \int_{l_*(\lambda)} g(\xi, \eta; \bar{\lambda})\, q(x, y; \xi, \eta)\, dl \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Indicato con δ il minore dei numeri $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, per $1 - \lambda < \delta$ si ha quindi

$$\left| \mathcal{F}(x, y; \lambda) + \int_\sigma F(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \right| < \varepsilon$$

c. v. d.

VIII) Fissato comunque (x, y) in σ, risulta

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \mathcal{F}(x, y; \lambda) = \int_{\sigma_*(\lambda)} g(\xi, \eta; \lambda) f(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \qquad (0 < \lambda < 1) \tag{58}$$

Dimostriamo in un primo momento che $\mathcal{F}(x, y; \lambda)$ ammette derivata sinistra rispetto a λ e che tale derivata coincide col secondo membro della (58). Indichiamo con λ_0 un valore compreso tra 0 e 1 supponiamo $0 < \lambda < \lambda_0$. Poichè $\varphi(\xi, \eta; \lambda_0)$ e $\varphi_\lambda(\xi, \eta; \lambda_0)$ sono definite in ogni ellisse $\sigma_*(\lambda)$ con $\lambda < \lambda_0$, si può scrivere:

$$\frac{\mathcal{F}(x, y; \lambda) - \mathcal{F}(x, y; \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \left\{ \int_{\sigma_*(\lambda)} \varphi(\xi, \eta; \lambda)\, F(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta - \right.$$

$$\left. - \int_{\sigma_*(\lambda_0)} \varphi(\xi, \eta; \lambda_0)\, F(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \right\} =$$

$$= \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \int_{\sigma_*(\lambda)} [\varphi(\xi, \eta; \lambda) - \varphi(\xi, \eta; \lambda_0)]\, F(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta -$$

$$- \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \int_{\sigma_*(\lambda_0) - \sigma_*(\lambda)} \varphi(\xi, \eta; \lambda_0)\, F(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

Per il teorema del valor medio e per la (53), si ha:

$$\int_{\sigma_*(\lambda)} \frac{\varphi(\xi,\eta;\lambda)-\varphi(\xi,\eta;\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0} F(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = \int_{\sigma_*(\lambda)} \varphi_\lambda(\xi,\eta;\bar\lambda)\,F(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta =$$

$$= \int_{\sigma_*(\lambda)} g(\xi,\eta;\bar\lambda) f(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta - \int_{l_*(\lambda)} \varphi(\xi,\eta;\bar\lambda)\,q(x,y;\xi,\eta)\,dl =$$

$$= \int_{\sigma_*(\lambda)} g(\xi,\eta;\lambda_0) f(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta + \int_{\sigma_*(\lambda)} [g(\xi,\eta;\bar\lambda)-g(\xi,\eta;\lambda_0)] f(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta -$$

$$- \int_{l_*(\lambda)} g(\xi,\eta;\bar\lambda)\,q(x,y;\xi,\eta)\,dl = \int_{\sigma_*(\lambda_0)} g(\xi,\eta;\lambda_0) f(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta -$$

$$- \int_{\sigma_*(\lambda_0)-\sigma_*(\lambda)} g(\xi,\eta;\lambda_0) f(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta + \int_{\sigma_*(\lambda)} [g(\xi,\eta;\bar\lambda)-g(\xi,\eta;\lambda_0)] f(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta -$$

$$- \int_{l_*(\lambda)} g(\xi,\eta;\bar\lambda)\,q(x,y;\xi,\eta)\,dl.$$

Si ha pertanto

$$\left| \frac{\mathcal{F}(x,y;\lambda)-\mathcal{F}(x,y;\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0} - \int_{\sigma_*(\lambda_0)} g(\xi,\eta;\lambda_0) f(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{\sigma_*(\lambda_0)-\sigma_*(\lambda)} g(\xi,\eta;\lambda_0) f(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \right| +$$

$$+ \int_{\sigma_*(\lambda)} |g(\xi,\eta;\bar\lambda)-g(\xi,\eta;\lambda_0)|\,|f(x,y;\xi,\eta)|\,d\xi\,d\eta +$$

$$+ \left| \int_{l_*(\lambda)} g(\xi,\eta;\bar\lambda)\,q(x,y;\xi,\eta)\,dl \right| + \left| \frac{1}{\lambda-\lambda_0} \int_{\sigma_*(\lambda_0)-\sigma_*(\lambda)} \varphi(\xi,\eta;\lambda_0)\,F(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \right|.$$

Consideriamo ora il

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{1}{\lambda-\lambda_0} \int_{\sigma_*(\lambda)-\sigma_*(\lambda_0)} \varphi(\xi,\eta;\lambda_0)\,F(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\,.$$

Posto

$$\psi(x,y;\lambda) = \int_{\sigma_*(\lambda)} \varphi(\xi,\eta;\lambda_0)\,F(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

il limite considerato coincide con la derivata sinistra rispetto a λ, per $\lambda = \lambda_0$, di $\psi(x, y; \lambda)$. Poichè la $\varphi(\xi, \eta; \lambda_0) F(x, y; \xi, \eta)$ non dipende da λ ed è integrabile in $\sigma_*(\lambda)$, posto $\beta(\xi, \lambda) = b\sqrt{\lambda^2 - \frac{\xi^2}{a^2}}$, si ha

$$\frac{\partial \psi(x, y; \lambda)}{\partial \lambda} = a \int_{-\beta(+a\lambda,\lambda)}^{\beta(a\lambda,\lambda)} \varphi(a\lambda, \eta, \lambda_0) F(x, y; a\lambda, \eta)\, d\eta -$$

$$- a \int_{-\beta(-a\lambda,\lambda)}^{\beta(-a\lambda,\lambda)} \varphi(-a\lambda, \eta, \lambda_0) F(x, y; -a\lambda, \eta)\, d\eta +$$

$$+ \int_{-a\lambda}^{a\lambda} \beta_\lambda(\xi, \lambda)\, \varphi(\xi, \beta(\xi, \lambda), \lambda_0) F(x, y; \xi, \beta(\xi, \lambda))\, d\xi +$$

$$+ \int_{-a\lambda}^{a\lambda} \beta_\lambda(\xi, \lambda)\, \varphi(\xi, -\beta(\xi, \lambda), \lambda_0) F(x, y; \xi, -\beta(\xi, \lambda))\, d\xi$$

Essendo $\beta(\pm a\lambda, \lambda) = 0$, i primi due integrali sono nulli, mentre per la (51) si annullano gli altri due per $\lambda = \lambda_0$. Quindi è $\left(\frac{\partial \psi(x, y; \lambda)}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=\lambda_0} = 0$, cioè

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \int_{\sigma_*(\lambda) - \sigma_*(\lambda_0)} \varphi(\xi, \eta; \lambda_0) F(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = 0$$

Scelto quindi $\varepsilon > 0$ arbitrario si può corrispondentemente determinare un δ_1 tale che per $\lambda_0 - \lambda < \delta_1$ sia

$$\left| \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \int_{\sigma_*(\lambda) - \sigma_*(\lambda_0)} \varphi(\xi, \eta; \lambda_0) F(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Inoltre, per la uniforme continuità della $g(\xi, \eta; \lambda)$ in $\sigma_*(\lambda)$ e per la (56), posto $M = \int_\sigma |f|\, d\sigma$, e fissato $\varepsilon > 0$, si può ancora determinare corrispondentemente tre numeri $\delta_2, \delta_3, \delta_4$ tali che sia, per $\lambda_0 - \lambda < \delta_2$

$$\int_{\sigma_*(\lambda_0) - \sigma_*'} |\varphi(\xi, \quad ; \lambda_0) f(x, y; \xi, \eta)|\, d\xi\, d\eta < \frac{\varepsilon}{4}$$

per $\lambda_0 - \lambda < \delta_3$

$$|g(\xi, \eta; \lambda) - g(\xi, \eta; \lambda_0)| < \frac{\varepsilon}{4M}$$

e per $\lambda_0 - \lambda < \delta_4$

$$\left| \int_{l_*(\lambda)} g(\xi, \eta; \bar{\lambda})\, q(x, y; \xi, \eta)\, d\, l \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Indicato quindi con δ il minore dei quattro numeri $\delta_1, \delta_2, \delta_3\, \delta_4$, per $\lambda_0 - \lambda < \delta$ si ha:

$$\left| \frac{\mathcal{F}(x, y; \lambda) - \mathcal{F}(x, y; \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} - \int_{\sigma_*(\lambda_0)} g(\xi, \eta; \lambda_0) f(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \right| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4M} \int_{\sigma_*(\lambda)} |f|\, d\xi\, d\eta + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \leq \varepsilon .$$

Rimane con ciò dimostrato che la derivata sinistra di $\mathcal{F}(x, y; \lambda)$ coincide per,$\lambda = \lambda_0$ con $\int_{\sigma_*(\lambda_0)} g(\xi, \eta; \lambda_0) f(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$.

Consideriamo ora la derivata destra di $\mathcal{F}(x, y; \lambda)$ rispetto a λ, per $\lambda = \lambda_0$. Essendo ora $\lambda > \lambda_0$, $\varphi(\xi, \eta; \lambda)$ e $\varphi_\lambda(\xi, \eta; \lambda)$ risultano definite oltrechè in $\sigma_*(\lambda)$ anche in $\sigma_*(\lambda_0)$ e quindi possiamo scrivere:

$$\frac{(\mathcal{F} x, y; \lambda) - \mathcal{F}(x, y; \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \left\{ \int_{\sigma_*(\lambda)} \varphi(\xi, \eta; \lambda)\, F(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta - \right.$$

$$\left. - \int_{\sigma_*(\lambda_0)} \varphi(\xi, \eta; \lambda_0)\, F(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \right\} =$$

$$= \int_{\sigma_*(\lambda)} \frac{\varphi(\xi, \eta; \lambda) - \varphi(\xi, \eta; \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}\, F(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta +$$

$$+ \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \int_{\sigma_*(\lambda) - \sigma_*(\lambda_0)} \varphi(\xi, \eta; \lambda)\, F(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \int_{\sigma_*(\lambda_0)} \varphi_\lambda(\xi, \eta; \bar{\lambda})\, F(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \int_{\sigma_*(\lambda) - \sigma_*(\lambda_0)} \varphi(\xi, \eta; \lambda)\, F(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

con $\bar{\lambda}$ compreso tra λ e λ_0. Essendo inoltre (cfr. (53))

$$\int_{\sigma_*(\lambda_0)} \varphi_\lambda (\xi, \eta ; \bar{\lambda}) F(x, y ; \xi, \eta) \, d\xi \, d\eta = \int_{\sigma_*(\lambda_0)} g(\xi, \eta ; \bar{\lambda}) f(x, y ; \xi, \eta) \, d\xi \, d\eta -$$

$$- \int_{l_*(\lambda_0)} g(\xi, \eta ; \bar{\lambda}) q(x, y ; \xi, \eta) \, dl = \int_{\sigma_*(\lambda_0)} g(\xi, \eta ; \lambda_0) f(x, y ; \xi, \eta) \, d\xi \, d\eta +$$

$$+ \int_{\sigma_*(\lambda_0)} [g(\xi, \eta ; \bar{\lambda}) - g(\xi, \eta ; \lambda_0)] f(x, y ; \xi, \eta) \, d\xi \, d\eta - \int_{l_*(\lambda_0)} g(\xi, \eta ; \bar{\lambda}) q(x, y ; \xi, \eta) \, dl$$

risulta

$$\left| \frac{\mathcal{F}(x, y ; \lambda) - \mathcal{F}(x, y ; \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} - \int_{\sigma_*(\lambda_0)} g(\xi, \eta ; \lambda_0) f(x, y ; \xi, \eta) \, d\xi \, d\eta \right| \leq$$

$$\leq \int_{\sigma_*(\lambda_0)} |g(\xi, \eta ; \bar{\lambda}) - g(\xi, \eta ; \lambda_0)| \, |f(x, y ; \xi, \eta)| \, d\xi \, d\eta +$$

$$+ \left| \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \int_{\sigma_*(\lambda) - \sigma_*(\lambda_0)} \varphi(\xi, \eta ; \lambda) F(x, y ; \xi, \eta) \, d\xi \, d\eta \right| + \left| \int_{l_*(\lambda)} g(\xi, \eta ; \bar{\lambda}) q(x, y ; \xi, \eta) \, dl \right|$$

Facendo uso delle formule di riduzione per l'integrale

$$\int_{\sigma_*(\lambda) - \sigma_*(\lambda_0)} \varphi(\xi, \eta ; \lambda) F(x, y ; \xi, \eta) \, d\xi \, d\eta$$

ed applicando opportunamente il primo teorema della media, con procedimento comune a questo genere di questioni, tenuta presente la (52), si dimostra che è

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \int_{\sigma_*(\lambda) - \sigma_*(\lambda_0)} \varphi(\xi, \eta ; \lambda) F(x, y ; \xi, \eta) \, d\xi \, d\eta = 0$$

Fissato quindi un $\varepsilon > 0$ arbitrario si può corrispondentemente determinare un δ_1 tale che per $\lambda - \lambda_0 < \delta_1$ sia

$$\left| \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \int_{\sigma_*(\lambda) - \sigma_*(\lambda_0)} \varphi(\xi, \eta ; \lambda) F(x, y ; \xi, \eta) \, d\xi \, d\eta \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Inoltre per la uniforme continuità della funzione $g(\xi, \eta ; \lambda)$ rispetto λ per (ξ, η) in $\sigma_*(\lambda_0)$, essendo $f(x, y ; \xi, \eta)$ sommabile in $\sigma_*(\lambda_0)$ fissato $\varepsilon > 0$ si può determinare un δ_2 tale che per $\lambda - \lambda_0 < \delta_2$, sia

$$\int_{\sigma_*(\lambda_0)} |g(\xi, \eta ; \bar{\lambda}) - g(\xi, \eta ; \lambda_0)| \, |f(x, y ; \xi, \eta)| \, d\xi \, d\eta < \frac{\varepsilon}{3}$$

ed infine essendo per (ξ, η) su l_*, $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} g(\xi, \eta; \bar{\lambda}) = 0$ [(cfr. VI) di questo n.] si può ancora determinare un δ_3 tale che sia, per $\lambda - \lambda_0 < \delta_3$,

$$\left| \int\limits_{l_*(\lambda_0)} g(\xi, \eta; \bar{\lambda})\, q(x, y; \xi, \eta)\, d\, l \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Indicato con δ il minore dei numeri $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, per $\lambda - \lambda_0 < \delta$ risulta

$$\left| \frac{\mathcal{F}(x, y; \lambda) - \mathcal{F}(x, y; \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} - \int\limits_{\sigma(\lambda_0)} g(\xi, \eta; \lambda_0) f(x, y; \xi, \eta)\, d\, \xi\, d\, \eta \right| < \varepsilon$$

Rimane pertanto completamente dimostrato l'asserto enunciato (58).

7 — **Verifica della** $(50)_1$.

Siamo finalmente in grado di dimostrare rigorosamente che la funzione $\varphi(\xi, \eta; \lambda)$ (definita dalla (45)) rende identicamente soddisfatta la prima delle (50), che qui riscriviamo

$$(59) \qquad \begin{gathered} \int\limits_{\sigma_*(\lambda)} \varphi(\xi, \eta; \lambda)\, F(x; y; \xi, \eta)\, d\, \xi\, d\, \eta = \\ - \int\limits_{\sigma} F(x, y; \xi, \eta)\, d\, \xi\, d\, \eta - \omega\, y \qquad (x, y) \text{ in } \sigma_* \end{gathered}$$

purchè sia λ definito, in funzione di ω dalla relazione

$$(60) \qquad \omega = - \frac{3 f P}{\pi^2 b \beta} [K(k) - E(k)] \qquad (k = \sqrt{1 - \lambda^2})$$

e dalla condizione che per $\omega = 0$ sia $\lambda = 1$.

Derivando primo e secondo membro della (59) rispetto ad ω si ottiene l'equazione

$$(61) \qquad \frac{\partial}{\partial\, \omega} \int\limits_{\sigma_*(\lambda)} \varphi(\xi, \eta; \lambda)\, F(x, y; \xi, \eta)\, d\, \xi\, d\, \eta = - y \qquad (x, y) \text{ in } \sigma_*$$

ed è facile verificare che questa è equivalente alla (59). Infatti dalla (61) si trae l'equazione equivalente

$$(62) \qquad \int\limits_{\sigma_*(\lambda)} \varphi(\xi, \eta; \lambda)\, F(x, y; \xi, \eta)\, d\, \xi\, d\eta = - \omega\, y + u(x, y)$$

dove $u(x, y)$ è una arbitraria funzione di x e y, ma non di λ.

Passando al limite nel primo e secondo membro per $\omega \to 0$ ($\lambda \to 1$), ricordando la (37), si ottiene

$$-\int_{\sigma} F(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = u(x, y)$$

e, con tale espressione della $u(x, y)$, la (62) coincide con la (59). È sufficiente perciò verificare la (61). In virtù della (58) si ha

$$\frac{\partial}{\partial \omega}\int_{\sigma_*(\lambda)} \varphi(\xi, \eta; \lambda)\, F(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \frac{d\lambda}{d\omega}\frac{\partial}{\partial \lambda}\int_{\sigma_*(\lambda)} \varphi(\xi, \eta; \lambda)\, F(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \frac{d\lambda}{d\omega}\int_{\sigma_*(\lambda)} g(\xi, \eta; \lambda)\, f(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

ed essendo ancora, per la (60), $\dfrac{d\lambda}{d\omega} = \dfrac{\pi^2 \beta b \lambda}{3 f P E(k)}$ si può scrivere

$$\frac{\partial}{\partial \omega}\int_{\sigma_*(\lambda)} \varphi(\xi, \eta; \lambda)\, F(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta =$$

(63)

$$= \varkappa\, \alpha\, \lambda \frac{\partial}{\partial y}\int_{\sigma_*(\lambda)} \frac{\mu_*}{r}\, d\xi\, d\eta - \chi\, \alpha\, \lambda \frac{\partial^3}{\partial x^2\, \partial y}\int_{\sigma_*(\lambda)} \mu_*\, r\, d\xi\, d\eta - \chi\, \beta\, \lambda \frac{\partial^3}{\partial x^2\, \partial y}\int_{\sigma_*(\lambda)} \mu_*\, r\, d\xi\, d\eta$$

Gli integrali cui ci si è ridotti in tal modo sono ben noti (cfr. [12] pagg. 7 e 11); precisamente si ha

$$\int_{\sigma_*} \frac{\mu_*}{r}\, d\xi\, d\eta = (A_*\, a_*^2 + B_*\, b_*^2) - A_*\, x^2 - B_*\, y^2$$

con

$$A_* = \frac{\pi\, a_*\, b_*}{2}\int_0^\infty \frac{d\psi}{(a_*^2 + \psi)^{3/2}\, \{(b_*^2 + \psi)\, \psi\}^{1/2}} =$$

$$= \frac{1}{\lambda} A\, , \; B_* = \frac{\pi\, a_*\, b_*}{2}\int_0^\infty \frac{d\psi}{(b_*^2 + \psi)^{3/2}\, \{(a_*^2 + \psi)\, \psi\}^{1/2}} = \frac{1}{\lambda} B$$

mentre l'integrale $\int\limits_{\sigma_*} \mu_* \, r \, d\xi \, d\eta$ è un polinomio di secondo grado in x^2 e y^2 i cui coefficienti sono dati in forma esplicita nella Nota citata. Di tali coefficienti interessa solo qaello del termine in $x^2 y^2$, il quale è dato da $\frac{a_*^2 A_* - b_*^2 B_*}{a_*^2 - b_*^2} = \frac{1}{\lambda} \frac{a^2 A - b^2 B}{a^2 - b^2}$. Effettuando quindi le derivazioni indicate a secondo membro della (63), questa diviene

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \int\limits_{\sigma_*(\lambda)} \varphi(\xi, \eta; \lambda) F(x, y; \xi, \eta) \, d\xi \, d\eta = - \left\{ 2 \varkappa \alpha B - 2 \chi \frac{a^2 A - b^2 B}{a^2 - b^2} (\alpha + \beta) \right\} y =$$

$$= - \left\{ \varkappa (B \alpha - A \beta) + \varkappa (B \alpha + A \beta) - 2 \chi \frac{a^2 A - b^2 B}{a^2 - b^2} (\alpha + \beta) \right\} y$$

ed essendo (cfr. [13] pag. 31)

$$\varkappa (B \alpha + A \beta) - 2 \chi \frac{A a^2 - B b^2}{a^2 - b^2} (\alpha + \beta) = 0$$

$$\varkappa (B \alpha - A \beta) = 1$$

si ha

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \int\limits_{\sigma_*(\lambda)} \varphi(\xi, \eta; \lambda) F(x, y; \xi, \eta) \, d\xi \, d\eta = - y$$

La $(50)_1$ è pertanto completamente verificata e in modo analogo si può controllare la $(50)_2$. Resta così provato che, nelle ipotesi assunte (cfr. n. 3) il quadro (44) fornisce l'esatta soluzione matematica del problema considerato.

BIBLIOGRAFIA

[1] - E. CESARO : « *Introduzione alla teoria matematica della elasticità* » Torino, Bocca, (1894).

[2] - H. HERTZ : « *Ges. Werke* » Bd. I, Leipzig (1895).

[3] - J. H. MICHELL : « *The Trasmission of Stress across a plane of Discontinuity in an Isotropic Elastic Solid, and the Potential Solution for a Plane Boudary* » Proceedings of the London Mathematical Society, London, Series 1, Vol. 31, (1899).

[4] - A. E. H. LOVE : « *Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity* » Cambridge University Press, fourth edition (1934).

[5] - C. CATTANEO : « *Sul contatto di due corpi elastici : distribuzione locale degli sforzi* » Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, Cl. Sc. fis. mat. nat. vol. XXVII, serie 6ª, 1º sem., fasc. 7, (1938).

[6] - C. CATTANEO : « *Pressione eccentrica di un cilindro rigido a base ellittica sopra un suolo elastico* » Rend. di Matematica e delle sue applicazioni, Fasc. I, (1947).

[7] - C. CATTANEO : « *Sul calcolo di alcuni potenziali e sul loro intervento nella risoluzione di particolari problemi atmonici* » Atti del Seminario Matematico e Fisico dell'Università di Modena, vol. III, (1948-49).

[8] - R. D. MINDLIN : « *Compliance of Elastic Bodies in Contact* » Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, September (1949).

[9] - J. L. LUBKIN : « *The Torsion of elastic Spheres in Contact* » Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, June (1951).

[10] - C. CATTANEO : « *Sulla torsione di due sfere elastiche a contatto* » Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie III, Vol. VI, Fasc. 1-2, (1952).

[11] - P. F. BYRD and M. D. FRIEDMAN · « *Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists* » Springer, Berlin, (1954).

[12] - M. PACELLI : « *Esame di una successione di potenziali di strato ellittico con applicazione a problemi armonici nello spazio e nel semispazio* » Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie III, vol. IX, Fasc. 1-2, (1955).

[13] - C. CATTANEO : *Compressione e torsione net contatto tra corpi elastici di forma qualunque* » Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie III, vol. IX, Fasc. 1-2, (1955).