ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

IDA CATTANEO GASPARINI

Sulle connessioni affini associate a una data connessione lineare

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 10, nº 1-2 (1956), p. 119-126

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1956_3_10_1-2_119_0>

SULLE CONNESSIONI AFFINI ASSOCIATE A UNA DATA CONNESSIONE LINEARE

di IDA CATTANEO GASPARINI (Pisa)

Nell'opera recentemente apparsa di A. LICHNEROWICZ « Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie » (Ed. Cremonese, Roma, 1956) si mostra come ad ogni connessione lineare definita sopra una varietà differenziabile V_n si associ una determinata connessione affine: la connessione affine canonicamente associata alla data connessione lineare. In questa Nota si considerano tutte le connessioni affini che, come quella canonica, subordinano su V_n la stessa connessione lineare e se ne stabiliscono alcune proprietà elementari.

Si trova che tutte le connessioni affini associate a una stessa connessione lineare sono determinate a meno di un tensore doppio misto sullo spazio fibrato $\mathcal{E}(V_n)$ dei riferimenti affini, e quindi a meno di una 1-forma T^{α} a valori vettoriali su $\mathcal{E}(V_n)$. È possibile in tal modo caratterizzare classi di tali connessioni affini mediante particolarizzazioni della forma T^{α}.

Il differenziale assoluto di un campo di punti rispetto a una connessione affine viene qui messo in relazione col differenziale assoluto del corrispondente campo di vettori rispetto alla connessione lineare a cui essa è associata. Anche la curvatura di una generica connessione affine, si esprime, in modo semplice, mediante la curvatura e la torsione della connessione lineare associata e il differenziale assoluto, secondo la stessa connessione lineare, della 1-forma T^{α} che caratterizza la connessione affine.

Vale la pena di osservare che le considerazioni svolte hanno carattere globale.

L'opera sopra citata del Prof. LICHNEROWICZ, alla quale si farà continuo riferimento, verrà nel seguito indicata brevemente con (L).

1. ALCUNI RICHIAMI. — Sia V_n una varietà differenziabile a n dimensioni, T_x lo spazio vettoriale tangente nel generico punto $x \equiv (x^1, x^2, \ldots, x^n)$, e S_x un riferimento affine relativo allo stesso punto, cioè l'insieme di un

vettore $\vec{\xi}$ di T_x, definente un punto dello spazio T_x come origine del riferimento, e di una base $R \equiv (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ di T_x. Scriveremo

$$S^x \equiv (\vec{\xi}, R)$$

o anche, posto $\vec{\xi} \equiv \vec{e}_0$,

$$S^x = \begin{pmatrix} \vec{e}_0 \\ \vec{e}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{e}_n \end{pmatrix}$$

ove gli elementi del riferimento appaiono rappresentati in una matrice ad una colonna.

Un cambiamento di riferimento affine $S' \equiv (\vec{\xi}', R') \to S \equiv (\vec{\xi}, R)$ è dato dalla

$$S' = S\,B$$

ove B è la matrice $(n+1) \times (n+1)$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & v^\alpha \\ 0 & A^\alpha_{\beta'} \end{pmatrix} \tag{1}$$

nella quale v^α è la riga delle componenti di $\vec{v} = \vec{\xi}' - \vec{\xi}$ nel riferimento R ed $A = (A^\alpha_{\beta'})$ la matrice $n \times n$ tale che

$$R' = RA\ (^1).$$

Consideriamo lo spazio $\mathcal{E}(V_n)$ formato dalla riunione di tutti i riferimenti affini relativi ai vari punti di V_n (2). Per il tramite delle coordinate locali $(x^1, x^2, x^3, \dots, x^n)$ di V_n anche su $\mathcal{E}(V_n)$ resta definita una struttura naturale di varietà differenziabile. Il generico punto z dello spazio $\mathcal{E}(V_n)$ ha come coordinate $z \equiv (x^\alpha, S^x) \equiv (x^\alpha, B)$ essendo x^α $(\alpha = 1, 2, \dots, n)$ le coordinate del punto x e B la matrice che definisce il riferimento affine S^x rispetto al riferimento naturale, considerato come riferimento affine di origine x.

(1) Il prodotto tra matrici si intende effettuato colonne per righe.

(2) Cfr. (L), § 45, pag. 88.

Per la sua stessa definizione, la varietà $\mathcal{E}(V_n)$ risulta divisa in classi di equivalenza ottenute considerando la proiezione p che ad ogni elemento S^x di $\mathcal{E}(V_n)$ associa il punto x. Le sottovarietà (fibre) di $\mathcal{E}(V_n)$, $p^{-1}(x)$ $(x \in V_n)$, sono tutte omeomorfe ad una fibra tipo F che si identifica con il gruppo affine di dimensione n; $\mathcal{E}(V_n)$ è pertanto uno spazio fibrato principale (3) di base V_n, avente come gruppo strutturale G il gruppo affine di dimensione n, e prende il nome di *spazio fibrato dei riferimenti affini.*

Una *connessione affine* su V_n è definita come una connessione infinitesimale (4) su $\mathcal{E}(V_n)$ e ciò equivale ad assegnare per ciascuno degli intorni U di ricoprimento di V_n (aperti, muniti di riferimento affine ξ^U, R_U) una matrice π_U di ordine $n+1$

$$\pi_U = \begin{pmatrix} 0 & \pi_0^\alpha \\ & \\ 0 & \pi_\beta^\alpha \end{pmatrix} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)\ (^5) \tag{2}$$

i cui elementi non nulli sono delle 1-forme differenziali su U, con la condizione che se

$$S_U \equiv (\xi^U, R_U), \qquad S_V \equiv (\xi^V, R_V)$$

sono i riferimenti di due intorni U e V e se, per $x \in U \cap V$, B_U^V è la matrice tale che

$$S_U = S_V B_U^V$$

allora

$$\pi_V = \overset{-1}{B}{}_V^U \pi_U B_V^U + \overset{-1}{B}{}_V^U \, d B_V^U . \tag{3}$$

Se invece di $\mathcal{E}(V_n)$ si considera lo spazio fibrato $E(V_n)$ dei riferimenti lineari, una connessione infinitesimale su $E(V_n)$, o connessione lineare di V_n, è assegnata mediante una matrice ω di ordine n i cui elementi sono delle forme differenziali lineari e tale che, se R_U e R_V sono i riferimenti di due intorni U e V ed A_V^U è la matrice che per $x \in U \cap V$ dà

$$R_U = R_V A_U^V,$$

---

(3) Cfr. (L) § 7 pag. 10.

(4) Cfr. (*L*) § 45 pag. 90. Si osservi che la terminologia adottata differisce da quella usuale. Quelle che abitualmente si chiamano connessioni affini, sono chiamate in (*L*) connessioni lineari perchè connessioni infinitesimali sullo spazio fibrato dei riferimenti lineari.

(5) Nel seguito sottintenderemo che gli indici latini assumano i valori $0, 1, 2, \ldots, n$ e gli indici greci soltanto i valori $1, 2, \ldots, n$.

sia [6]

$$\omega_V = \overset{-1}{A}{}^U_V \, \omega_U \, A^U_V + \overset{-1}{A}{}^U_V \, d \, A^U_V . \tag{4}$$

2. CONNESSIONE LINEARE SUBORDINATA AD UNA CONNESSIONE AFFINE. — Dalla legge di trasformazione (3) della matrice che definisce la generica connessione affine π segue immediatamente che la matrice $n \times n$ (π^α_β) si trasforma secondo la (4) e individua quindi una connessione lineare $\omega \, (\omega^\alpha_\beta \equiv \pi^\alpha_\beta)$ che si dirà subordinata o associata alla connessione affine π; naturalmente anche la π si dirà associata alla ω. Più in particolare in (L) si definisce connessione affine canonicamente associata ad una data connessione lineare ω quella individuata dall'insieme di matrici

$$\pi^*_U = \begin{pmatrix} 0 & \vartheta^U + \overset{\omega}{\nabla} \xi^U \\ 0 & \omega_U \end{pmatrix} \tag{5}$$

ove ϑ^U è il coriferimento [7], cioè l'insieme ordinato delle n forme lineari, linearmente indipendenti, tali che $\vartheta^\alpha (\vec{e}_\beta) = \delta^\alpha_\beta$ (le $\vec{e}_\beta$ sono i vettori di R_U) e $\overset{\omega}{\nabla} \xi^U$ è il differenziale assoluto del vettore $\vec{\xi}$ secondo la connessione lineare ω. Vediamo come la generica connessione affine π si differenzi da quella canonica π^*.

3. TENSORE CARATTERISTICO DELLE CONNESSIONI AFFINI ASSOCIATE AD UNA MEDESIMA CONNESSIONE LINEARE. — Come è noto [8], la differenza

$$\sigma_U = \pi_U - \bar{\pi}_U$$

tra le matrici di due qualunque connessioni affini su V_n definisce su $\mathcal{E}(V_n)$ una 1-forma tensoriale del tipo aggiunto, essendo

$$\sigma_V = \overset{-1}{B}{}^U_V \, \sigma_U \, B^U_V .$$

Consideriamo ora più in particolare le connessioni affini associate ad una medesima connessione lineare ω e paragoniamone due qualunque tra esse. Avendosi ora $\pi^\alpha_\beta = \omega^\alpha_\beta = \bar{\pi}^\alpha_\beta$, la differenza tra le due connessioni risulta una

(6) Cfr. (L) § 37, pag. 75.

(7) Cfr. (L) § 5 pag. 5.

(8) Cfr. (L) § 34 pag. 68.

1-forma differenziale tensoriale avente come elementi

$$\sigma_U = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0^\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ove

$$\sigma_0^\alpha = (\gamma_{0\beta}^\alpha - \overline{\gamma}_{0\beta}^\alpha)\,\vartheta^\beta .$$

Tenuta presente la (1) consegue

$$(\gamma_{0'\beta'}^{\alpha'} - \overline{\gamma}_{0'\beta'}^{\alpha'}) = B_\alpha^{\alpha'} B_{\beta'}^\beta (\gamma_{0\beta}^\alpha - \overline{\gamma}_{0\beta}^\alpha) = A_\alpha^{\alpha'} A_{\beta'}^\beta (\gamma_{0\beta}^\alpha - \overline{\gamma}_{0\beta}^\alpha) .$$

La σ individua pertanto un tensore d'ordine 2 una volta covariante e una volta controvariante

$$\gamma_{0\beta}^\alpha - \overline{\gamma}_{0\beta}^\alpha = T_\beta^{\ \alpha} .$$

A questo tensore si può associare la 1-forma vettoriale definita dalle

$$T^\alpha = T_\beta^\alpha\,\vartheta^\beta . \tag{7}$$

Se $\overline{\pi}_U$ è la connessione affine canonicamente associata alla ω per ogni altra connessione affine che subordini la stessa connessione lineare si ha pertanto

$$\pi_0^\alpha = \vartheta^\alpha + \overset{\omega}{\nabla} \xi^\alpha + T^\alpha . \tag{8}$$

Ad ogni connessione affine π risultano quindi biunivocamente associate:

1) una connessione lineare ω

2) una 1-forma differenziale vettoriale T^α.

4. Differenziale assoluto in una connessione affine. — Sopra la V_n, supposta ricoperta di intorni U muniti di riferimenti affini, consideriamo un campo di punti degli spazi affini tangenti, cioè ad ogni punto x associamo un punto dello spazio affine tangente. Sull' intorno U munito di riferimento $S_U \equiv (\xi^U, R_U)$ un tale punto può essere definito dalla matrice

$$w^U \equiv (1\,, w^1, w^2, \ldots, w^n)$$

Mediante lo stesso calcolo impiegato in (L) per le connessioni lineari [9] si trova che, se $x \in U \cap V$, le $n+1$ forme differenziali

$$\overset{\pi}{\nabla} w^U = d\, w^U + \pi_U w^U$$

soddisfano alla relazione

$$\overset{\pi}{\nabla} w^V = B^V_U \overset{\pi}{\nabla} w^U. \tag{9}$$

Le $\overset{\pi}{\nabla} w^U$ definiscono dunque su $\mathcal{E}(V_n)$ una 1-forma differenziale vettoriale controvariante che si dirà il differenziale assoluto del campo di punti w relativamente alla connessione affine π. Un tal campo di punti può essere identificato con un campo di vettori controvarianti e si può quindi anche parlare di differenziale assoluto di un campo di vettori controvarianti rispetto ad una connessione affine.

La matrice ad una linea $\overset{\pi}{\nabla} w^U$ ha per elementi

$$\overset{\pi}{\nabla} w^0 = 0 \tag{10}$$

$$\overset{\pi}{\nabla} w^\alpha = d\, w^\alpha + \pi^\alpha_m v^m \tag{11}$$

e, per le (9), risulta

$$\overset{\pi}{\nabla} w^{\alpha'} = A^{\alpha'}_\alpha \overset{\pi}{\nabla} w^\alpha.$$

Tenuto conto delle (8) e conglobando ϑ^α con la forma $T^\alpha_\beta\, \vartheta^\beta$, cioè ponendo

$$\Phi^\alpha = \vartheta^\alpha + T^\alpha_\beta\, \vartheta^\beta, \tag{12}$$

le (11) possono scriversi

$$\overset{\pi}{\nabla} w^\alpha = \overset{\omega}{\nabla} (w^\alpha + \xi^\alpha) + \Phi^\alpha \tag{13}$$

dove $w^\alpha + \xi^\alpha$ sono le componenti di un vettore dello spazio vettoriale tangente a V_n in x. Per $T^\alpha_\beta = -\delta^\alpha_\beta$ si ha $\Phi^\alpha = 0$ e $\overset{\pi}{\nabla} w^\alpha = \overset{\omega}{\nabla} (w^\alpha + \xi^\alpha)$.

---

(9) Cfr. (L), n. 39, p. 78.

Se poi la π è la connessione affine π^* canonicamente associata alla ω, si ha

$$\overset{\pi^*}{\nabla} w^\alpha = \overset{\omega}{\nabla} (w^\alpha + \xi^\alpha) + \vartheta^\alpha; \tag{14}$$

pertanto le $\overset{\pi}{\nabla} w^\alpha$ differiscono dalle $\overset{\pi^*}{\nabla} w^\alpha$ per le T^α.

5. Curvatura di una connessione affine. — Si sa che la curvatura di una connessione infinitesimale può esprimersi ([10]) a partire dalla matrice π mediante una matrice Ω $(n+1) \times (n+1)$ che ha per elementi Ω^i_k

$$\Omega^i_k = d\,\pi^i_k + \pi^i_l \wedge \pi^l_k$$

ove $d\,\pi^i_k$ indica il differenziale esterno della forma π^i_k.

Poichè $\pi^0_\alpha = 0$, le Ω^α_β si identificano qualunque sia la connessione π con gli elementi della matrice $n \times n$ che dà la curvatura della connessione lineare associata. Risulta poi ovviamente in ogni caso $\Omega^0_\alpha = 0$.

Quanto a Ω^α_0 si ha nel caso della connessione canonica:

$$\begin{aligned}
\Omega^\alpha_0 &= d\,\pi^\alpha_0 + \pi^\alpha_l \wedge \pi^l_0 \\
&= d\,(\vartheta^\alpha + \overset{\omega}{\nabla} \xi^\alpha) + \pi^\alpha_0 \wedge \pi^0_\beta + \omega^\alpha_\varrho \wedge \omega^\varrho_0 \\
&= d\,\vartheta^\alpha + d\,\omega^\alpha_\varrho\, \xi^\varrho + \omega^\alpha_\lambda \wedge (\vartheta^\lambda + \overset{\omega}{\nabla} \omega^\lambda_\mu\, \xi^\mu) \\
&= \Sigma^\alpha + \Omega^\alpha_\varrho\, \xi^\varrho
\end{aligned}$$

Σ^α essendo la torsione relativa alla connessione lineare.

Se ne deduce che la matrice di curvatura relativa alla connessione affine canonicamente associata alla connessione lineare ω^α_β è

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \Sigma^\alpha + \xi^\varrho\, \Omega^\alpha_\varrho \\ 0 & \Omega^\alpha_\beta \end{pmatrix} \tag{15}$$

essa si esprime cioè con gli elementi fondamentali, curvatura e torsione, della connessione lineare associata.

([10]) Cfr. (L), § 36, pag. 70.

Per una connessione affine qualunque associata alla connessione lineare ω, si ha invece

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \Sigma^\alpha + \xi^\varrho\, \Omega^\alpha_\varrho + \overset{\omega}{\nabla}\, T^\alpha \\ & \\ 0 & \Omega^\alpha_\beta \end{pmatrix}; \tag{16}$$

ove $\overset{\omega}{\nabla}\, T^\alpha$ è il differenziale assoluto rispetto alla connessione ω della 1-forma definita dalle T^α. Come è ben naturale vi interviene, oltre agli elementi fondamentali della connessione lineare associata, anche la forma T^α che caratterizza la connessione affine tra tutte quelle associate.

Le connessioni affini π che hanno la stessa curvatura di π^* sono quelle e sole quelle per le quali $\overset{\omega}{\nabla}\, T^\alpha = 0$.

La (16) può anche scriversi, tenuta presente la (12),

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \overset{\omega}{\nabla}\, \Phi^\alpha + \Omega^\alpha_\varrho\, \xi_\varrho \\ & \\ 0 & \Omega^\alpha_\beta \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Riservo ad una prossima nota alcune applicazioni delle considerazioni precedenti.

SANDRO FAEDO - *Direttore responsabile.* Finito di stampare il 15 Settembre 1956