Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
*Classe di Scienze*

M. L. Princivalli

# Su un teorema di unicità per un problema al contorno relativo all'equilibrio delle volte cilindriche

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série*, tome 9, nº 3-4 (1955), p. 235-245

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1955_3_9_3-4_235_0>

# SU UN TEOREMA DI UNICITÀ PER UN PROBLEMA AL CONTORNO RELATIVO ALL'EQUILIBRIO DELLE VOLTE CILINDRICHE (*)

di M. L. PRINCIVALLI (Trieste)

In una mia Memoria apparsa nell'ultimo numero di questa Rivista (1), mi occupo del seguente sistema di equazioni lineari alle derivate parziali, che interviene nello studio dell'equilibrio delle volte cilindriche:

$$
(1) \qquad \begin{cases} \Delta_2 u_1 + k \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \dfrac{\partial u_2}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial x}(b\, u_3) = F_1 \\[2ex] \Delta_2 u_2 + k \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \dfrac{\partial u_2}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}(c\, u_3) = F_2 \\[2ex] b \dfrac{\partial u_1}{\partial x} + c \dfrac{\partial u_2}{\partial y} + \Delta_4 u_3 + a\, u_3 = F_3 , \end{cases}
$$

dove $k$ è una costante reale, e $a , b , c , F_1 , F_2 , F_3$ sono funzioni reali delle due variabili reali $x$ e $y$, assegnate in un dato campo (insieme aperto) $A$ del piano $x , y$. Sul campo $A$, nel quale ricerco la soluzione $\vec{u} \equiv (u_1 , u_2 , u_3)$ del sistema (1), farò le ipotesi che sia connesso, limitato, regolare e di classe due (2), ipotesi queste che, per altro, lasciano al campo stesso una grande generalità. Quanto alle funzioni $a , b , c$, supporrò (3) che $b$ e $c$ siano di classe uno in $A + \mathcal{F}A$ (4) e che $a$ sia continua in $A + \mathcal{F}A$ ed hölderiana in $A$ (5).

---

(*) Lavoro eseguito per l'I.N.A.C. nell'Istituto Matematico dell'Università di Trieste.

(1) Cfr. M. L. PRINCIVALLI: *Sul sistema di equazioni lineari alle derivate parziali, relativo all'equilibrio delle volte cilindriche,* « Ann. Scuola Norm. », Pisa 1955, s. III, vol. VIII; fasc. III-IV (1954), pp. 157-291.

Nel corso di questa Nota, tale Memoria sarà brevemente indicata con [*M*].

(2) Cfr. la definizione a pag. 162 di [*M*].

(3) Cfr. [*M*], pag. 283.

(4) Cfr. definizione a pag. 161 di [*M*].

(5) Cfr. definizione a pag. 167, (5) di [*M*].

Al sistema (1) associo le seguenti condizioni sulla frontiera $\mathcal{F}A$ del campo $A$:

$$(2) \qquad u_1 = u_2 = u_3 = \frac{\partial u_3}{\partial \nu} = 0 ;$$

col simbolo $\frac{\partial}{\partial \nu}$ denoto la derivazione secondo la normale esterna alla frontiera di $A$.

La teoria svolta nella citata Memoria permette di conseguire un teorema di esistenza per il problema al contorno (1), (2) in un'opportuna classe (6) $\mathcal{C}$ di vettori, quando si stabilisca, nella detta classe $\mathcal{C}$, un teorema di unicità per il problema in istudio.

La dimostrazione di tale teorema di unicità è esposta nella mia Memoria in modo completo ed esauriente nel caso particolare $a \equiv b \equiv c \equiv 0$ (7).

Nel caso generale la dimostrazione è soltanto accennata (8). In effetti, essa contiene molti degli elementi concettuali che già intervengono nel caso particolare considerato e può essere dedotta da un'estensione dei ragionamenti seguiti nel caso particolare in questione.

Tuttavia, poichè teoremi di unicità di questo tipo, che corrispondono ad una nuova impostazione *generalizzata* dei problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali, si discostano dagli ordinari teoremi di unicità ottenuti con procedimenti classici in classi più particolari di funzioni abbastanza regolari, ho ritenuto che potesse essere non privo di interesse esporre tutti i dettagli della dimostrazione del teorema d'unicità per il problema (1), (2) nel caso generale.

Tale è lo scopo della presente Nota.

Avverto che, nel corso di tutta questa Nota, userò le definizioni e le notazioni introdotte in [M].

Il teorema che mi propongo di dimostrare è il seguente:

*La costante k verifichi la relazione:*

$$k > -\frac{1}{2}$$

---

(6) Con $\mathcal{C}$ denoto — cfr. [M], pag. 267 — la classe dei vettori $\vec{u}(x, y) \equiv \vec{u}(z) \equiv [u_1(z), u_2(z), u_3(z)]$ le cui componenti godono delle seguenti proprietà:

*a*) $u_1$ e $u_2$ sono funzioni di classe due in $A$ e tali che le loro derivate parziali del prim'ordine risultano di quadrato sommabile in $A$,

*b*) $u_3$ è una funzione di classe quattro in $A$ e dotata delle derivate parziali del primo e second'ordine di quadrato sommabile in $A$.

(7) Cfr. [M], pagg. 224-226 e pagg. 251-253.

(8) Cfr. [M], pagg. 284-287.

*ed in ogni punto del campo $A$ riesca:*

$$2\,k\,a - k\,(b-c)^2 - (b^2 + c^2 - a) > 0\,.$$

*Ogni vettore $\vec{u}\,(z) \equiv [u_1(z)\,,\,u_2(z)\,,\,u_3(z)]$ della classe $\mathcal{C}$ che verifichi in $A$ il sistema* (9):

$$(1_0)\qquad \begin{cases} \Delta_2 u_1 + k\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \dfrac{\partial u_2}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial x}(b\,u_3) = 0 \\[2ex] \Delta_2 u_2 + k\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \dfrac{\partial u_2}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}(c\,u_3) = 0 \\[2ex] b\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + c\dfrac{\partial u_2}{\partial y} + \Delta_4 u_3 + a\,u_3 = 0 \end{cases}$$

*e su $\mathcal{F}A$ le condizioni al contorno* (10):

$$(2)\qquad u_1 = u_2 = u_3 = \frac{\partial u_3}{\partial \nu} = 0$$

*è identicamente nullo in $A$* (11).

Infatti, sia $\vec{u}\,(z) \equiv [u_1(z)\,,\,u_2(z)\,,\,u_3(z)]$ una soluzione del problema al contorno $(1_0)$, (2) appartenente a $\mathcal{C}$.

Nel campo $A_\varrho$ (12) contenuto in $A$, sussiste la seguente relazione integrale, che si prova con una assai semplice applicazione della formula d'integrazione per parti:

$$\iint_{A_\varrho} \Big\{ u_1\left[\Delta_2 u_1 + k\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(b\,u_3)\right] +$$
$$u_2\left[\Delta_2 u_2 + k\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(c\,u_3)\right] -$$
$$u_3\left[b\frac{\partial u_1}{\partial x} + c\frac{\partial u_2}{\partial y} + \Delta_4 u_3 + a\,u_3\right]\Big\}\,d\tau =$$

---

(9) Nel corso di questa Nota denoteremo sempre con $x$ e $y$ le coordinate del punto $z$ di $A$.

(10) Le condizioni al contorno s'intendono verificate nel senso generalizzato specificato in $[M]$, pag. 164.

(11) Cfr. $[M]$, pagg. 284-287.

(12) Cfr. definizione a pag. 163 di $[M]$.

$$-\iint\limits_{A_\varrho}\left\{|\operatorname{grad} u_1|^2+|\operatorname{grad} u_2|^2+k\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)^2+2\,b\,u_3\frac{\partial u_1}{\partial x}+2\,c\,u_3\frac{\partial u_2}{\partial y}+\right.$$

$$\left.(\Delta_2 u_3)^2+a\,u_3^2\right\}d\tau+$$

$$\int\limits_{\mathcal{F}A_\varrho}\left\{u_1\frac{\partial u_1}{\partial \nu}+u_2\frac{\partial u_2}{\partial \nu}+k\,(u_1\,\alpha+u_2\,\beta)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)+\alpha\,b\,u_1\,u_3+\right.$$

$$\left.\beta\,c\,u_2\,u_3+\Delta_2 u_3\frac{\partial u_3}{\partial \nu}-u_3\frac{\partial}{\partial \nu}(\Delta_2 u_3)\right\}ds=0\ \text{(13)}.$$

Per la sommabilità in $A$ della funzione integranda (14), riesce:

$$\lim_{\varrho\to 0}\iint\limits_{A_\varrho}\left\{|\operatorname{grad} u_1|^2+|\operatorname{grad} u_2|^2+k\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)^2+2\,b\,u_3\frac{\partial u_1}{\partial x}+\right.$$

$$\left.2\,c\,u_3\frac{\partial u_2}{\partial y}+(\Delta_2 u_3)^2+a\,u_3^2\right\}d\tau=$$

$$\iint\limits_{A}\left\{|\operatorname{grad} u_1|^2+|\operatorname{grad} u_2|^2+k\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)^2+2\,b\,u_3\frac{\partial u_1}{\partial x}+2\,c\,u_3\frac{\partial u_2}{\partial y}+\right.$$

$$\left.(\Delta_2 u_3)^2+a\,u_3^2\right\}d\tau\,.$$

Ove noi dimostrassimo che

$$\lim_{\varrho\to 0}\int\limits_{\mathcal{F}A_\varrho}\left\{u_1\frac{\partial u_1}{\partial \nu}+u_2\frac{\partial u_2}{\partial \nu}+k\,(u_1\,\alpha+u_2\,\beta)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)+\alpha\,b\,u_1\,u_3+\right.$$

$$\left.\beta\,c\,u_2\,u_3+\Delta_2 u_3\frac{\partial u_3}{\partial \nu}-u_3\frac{\partial}{\partial \nu}(\Delta_2 u_3)\right\}ds=0\,,$$

---

(13) Con $\alpha$ e $\beta$ si sono designati i coseni direttori dell'asse normale a $\mathcal{F}A_\varrho$, orientato verso l'esterno del campo $A_\varrho$.

(14) Data l'appartenenza del vettore $\vec{u}\equiv(u_1, u_2, u_3)$ a $\mathcal{C}$, le funzioni $\frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}, \frac{\partial u_2}{\partial y}$, $\Delta_2 u_3$ e — cfr. [*M*], pag. 194, (2) — la funzione $u_3$ sono di quadrato sommabile nel campo $A$; dalle ipotesi fatte sulle funzioni $a, b$ e $c$, poi, segue l'asserto.

rimarrebbe senz'altro acquisito il teorema; infatti, dalla relazione

$$\iint_A \left\{ |\operatorname{grad} u_1|^2 + |\operatorname{grad} u_2|^2 + k\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\right)^2 + 2\,b\,u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x} + 2\,c\,u_3 \frac{\partial u_2}{\partial y} + \right.$$

$$\left. (\Delta_2 u_3)^2 + a\,u_3^2 \right\} d\tau = 0,$$

poichè la funzione integranda riesce somma della parte non negativa:

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}\right)^2$$

e della seguente forma quadratica nelle tre variabili

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \; \varepsilon_2 = \frac{\partial u_2}{\partial y}, \; \varepsilon_3 = u_3 :$$

$$(k+1)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + 2\,k \frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial y} + 2\,b \frac{\partial u_1}{\partial x} u_3 + (k+1)\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)^2 +$$

$$2\,c \frac{\partial u_2}{\partial y} u_3 + a\,u_3^2 ,$$

la quale, per le ipotesi fatte sui suoi coefficienti ([15]), risulta definita positiva in $A$, seguirebbe necessariamente che il vettore $\vec{u}(z) \equiv [u_1(z), u_2(z), u_3(z)]$ è identicamente nullo in $A$.

Applicando la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz e le relazioni (2) e (3) di $[M]$, pag. 163, si trova:

$$\lim_{\varrho \to 0} \left| \int_{\mathcal{F}A_\varrho} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu} d\,s \right| \leq \lim_{\varrho \to 0} \left( \int_{\mathcal{F}A_\varrho} |u_1|^2 d\,s \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathcal{F}A_\varrho} |\operatorname{grad} u_1|^2 d\,s \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$2\,Q^{\frac{1}{2}} \left( \iint_A |\operatorname{grad} u_1|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \lim_{\varrho \to 0} \left( \varrho \int_{\mathcal{F}A_\varrho} |\operatorname{grad} u_1|^2 d\,s \right)^{\frac{1}{2}} = 0 ;$$

---

([15]) Cfr. $[M]$, pag. 284.

in maniera perfettamente analoga si dimostra che:

$$\lim_{\varrho\to 0}\int_{\mathcal{F}A_\varrho}\left\{u_2\frac{\partial u_2}{\partial \nu}+k(u_1\alpha+u_2\beta)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)\right\}ds=0.$$

Siccome le funzioni $u_1^2$ e $u_3^2$ riescono uniformemente sommabili su $\mathcal{F}A_\varrho$ [16], applicando la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha:

$$\lim_{\varrho\to 0}\int_{\mathcal{F}A_\varrho}|u_1u_3|\,ds\leq\lim_{\varrho\to 0}\left(\int_{\mathcal{F}A_\varrho}|u_1|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathcal{F}A_\varrho}|u_3|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}=0,$$

e così pure:

$$\lim_{\varrho\to 0}\int_{\mathcal{F}A_\varrho}|u_2u_3|\,ds=0.$$

Vogliamo dimostrare ora per esteso che sussiste la seguente relazione:

$$\lim_{\varrho\to 0}\int_{\mathcal{F}A_\varrho}\left\{\Delta_2 u_3\frac{\partial u_3}{\partial \nu}-u_3\frac{\partial}{\partial \nu}(\Delta_2 u_3)\right\}ds=0.$$

Consideriamo dapprima l'integrale:

$$\int_{\mathcal{F}A_\varrho}\Delta_2 u_3\frac{\partial u_3}{\partial \nu}\,ds;$$

applicando la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz, le relazioni (2) e (3) di [*M*], pag. 163 ed il teorema II di [*M*], pagg. 164-165, si trova

$$\lim_{\varrho\to 0}\left|\int_{\mathcal{F}A_\varrho}\Delta_2 u_3\frac{\partial u_3}{\partial \nu}\,ds\right|\leq\lim_{\varrho\to 0}\left(\int_{\mathcal{F}A_\varrho}|\operatorname{grad} u_3|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathcal{F}A_\varrho}|\Delta_2 u_3|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\lim_{\varrho\to 0}\left(\int_{\mathcal{F}A_\varrho}\left[\left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial y}\right)^2\right]ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(2\int_{\mathcal{F}A_\varrho}\left[\left|\operatorname{grad}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)\right|^2+\left|\operatorname{grad}\left(\frac{\partial u_3}{\partial y}\right)\right|^2\right]ds\right)^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$2^{\frac{3}{2}}Q^{\frac{1}{2}}\left(\iint_A\left[\left|\operatorname{grad}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)\right|^2+\left|\operatorname{grad}\left(\frac{\partial u_3}{\partial y}\right)\right|^2\right]d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\lim_{\varrho\to 0}\left(\varrho\int_{\mathcal{F}A_\varrho}\left[\left|\operatorname{grad}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)\right|^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left|\operatorname{grad}\left(\frac{\partial u_3}{\partial y}\right)\right|^2\right]ds\right)^{\frac{1}{2}}=0.$$

[16] Cfr, [M], pag. 163.

Rimane da considerare l'integrale:

$$\int_{\mathcal{F}A_\varrho} u_3 \frac{\partial}{\partial \nu} (\Delta_2 u_3)\, d s .$$

Sia $\Phi(z)$ la funzione definita in $A$ al modo seguente:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_A \left[ a(\zeta)\, u_3(\zeta) + b(\zeta) \frac{\partial u_1(\zeta)}{\partial \xi} + c(\zeta) \frac{\partial u_2(\zeta)}{\partial \eta} \right] \log | z - \zeta |\, d_\zeta \tau ,$$

dove $\xi$ e $\eta$ rappresentano le coordinate del punto $\zeta$.

Per il teorema di Lichtenstein-Friedrichs (17) e per un classico teorema sul potenziale logaritmico, la $\Phi(z)$ riesce continua in $A$ assieme alle derivate parziali del primo e second'ordine le quali riescono inoltre di quadrato sommabile in $A$ e tali che:

$$\Delta_2 \Phi = a\, u_3 + b \frac{\partial u_1}{\partial x} + c \frac{\partial u_2}{\partial y} .$$

L'equazione

$$\Delta_4 u_3 + a\, u_3 + b \frac{\partial u_1}{\partial x} + c \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0$$

fornisce allora

$$\Delta_4 u_3 + \Delta_2 \Phi = 0$$

e questa, potendosi scrivere al modo seguente

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\Delta_2 u_3) + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial}{\partial y} (\Delta_2 u_3) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right],$$

può interpretarsi in $A$ come la condizione di integrabilità in piccolo della forma differenziale lineare

$$\left( - \frac{\partial}{\partial y} (\Delta_2 u_3) - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) d x + \left( \frac{\partial}{\partial x} (\Delta_2 u_3) + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) d y .$$

Il campo $A$ che consideriamo in questo lavoro, essendo limitato e di classe due (18), ha necessariamente ordine di connessione lineare finito: pertan-

(17) Cfr. [$M$], pag. 167.
(18) Cfr. definizione a pag. 162 di [M].

to esso sarà costituito da un continuo privato di $p$ continui $D_1, D_2, \ldots, D_p$ a due a due senza punti in comune. Indicheremo con $x_k$ e $y_k$ le coordinate di un punto interno a $D_k$ e con $\Gamma_k$ una curva regolare semplice e chiusa contenuta in $A$ e tale che il dominio $M_k$ di cui essa risulta completa frontiera contenga $D_k$ e non abbia punti in comune con i domini $M_h$, con $h \neq k$.

Poniamo:

$$v = \Delta_2 u_3 + \Phi - \sum_{k=1}^{p} a_k \log \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2},$$

con

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_k} \left(- \frac{\partial}{\partial y} (\Delta_2 u_3) - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) d x + \left(\frac{\partial}{\partial x} (\Delta_2 u_3) + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) d y ;$$

la funzione $v$, che ovviamente è di quadrato sommabile in $A$, risulta ivi armonica ed inoltre, indicata con $C$ una generica curva regolare semplice e chiusa contenuta in $A$, riesce:

$$\int_C \frac{\partial v}{\partial \nu} d s = 0 .$$

Ne segue l'esistenza in $A$ di una funzione $w$ verificante le relazioni seguenti:

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x} = - \dfrac{\partial v}{\partial y} = - \dfrac{\partial}{\partial y} (\Delta_2 u_3) - \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} + \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_k \dfrac{\partial}{\partial y} \log \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2} \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x} (\Delta_2 u_3) + \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} - \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_k \dfrac{\partial}{\partial x} \log \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2} . \end{cases}$$

Supponiamo che la funzione $w$ verifichi la relazione

$$\iint_A w \, d \tau = 0 ,$$

ipotesi questa certamente lecita, dato che la coniugata di una funzione armonica è determinata a meno di una costante additiva.

Per un noto teorema di K. O. Friedrichs [19] allora, la funzione $w$ risulta pur essa di quadrato sommabile in $A$.

---

[19] Il teorema al quale alludo afferma che — cfr. [*M*], pag. 252 —, se $A$ è un campo limitato e di classe uno e $f(z) = w(z) + i v(z)$ è una funzione ivi olomorfa, tale che

Avendosi per le (3) ([20])

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(\Delta_2 u_3) = \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} + \sum_{k=1}^{p} a_k \frac{\partial}{\partial \nu} \log \sqrt{(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2}\,,$$

si trae:

$$\int_{\mathcal{F}A_\varrho} u_3 \frac{\partial}{\partial \nu}(\Delta_2 u_3)\, d\,s = \int_{\mathcal{F}A_\varrho} u_3 \left( \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} + \sum_{k=1}^{p} a_k \frac{\partial}{\partial \nu} \log \sqrt{(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2} \right) d\,s\,.$$

Applicando la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz ed osservando che le funzioni $|\,u_3\,|^2$ e $|\,\mathrm{grad}\,\Phi\,|^2$ sono uniformemente sommabili su $\mathcal{F}A_\varrho$ ([21]), si deduce che:

$$\lim_{\varrho \to 0} \left| \int_{\mathcal{F}A_\varrho} u_3 \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}\, d\,s \right| \leq \lim_{\varrho \to 0} \left( \int_{\mathcal{F}A_\varrho} |\,u_3\,|^2\, d\,s \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathcal{F}A_\varrho} |\,\mathrm{grad}\,\Phi\,|^2\, d\,s \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\left( \int_{\mathcal{F}A} |\,u_3\,|^2\, d\,s \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathcal{F}A} |\,\mathrm{grad}\,\Phi\,|^2\, d\,s \right)^{\frac{1}{2}} = 0\,.$$

---

$v(z)$ sia di quadrato sommabile in $A$ e $w(z)$ verifichi la relazione:

$$\iint_A w(z)\, d_z \tau = 0\,,$$

allora esiste una costante $K(A)$, dipendente unicamente da $A$, tale che

$$\iint_A [w(z)]^2\, d_z \tau \leq K(A) \iint_A [v(z)]^2\, d_z \tau\,.$$

([20]) Si osservi che, indicata col simbolo $\frac{\partial}{\partial s}$ la derivazione rispetto all'arco $s$, si ha:

$$\frac{\partial w}{\partial s} = -\frac{\partial w}{\partial x}\beta + \frac{\partial w}{\partial y}\alpha\,.$$

([21]) Cfr. [*M*], pag. 163.

In modo analogo [22] si prova che:

$$\lim_{\varrho\to 0}\int_{\mathcal{F}A_\varrho} u_3 \frac{\partial}{\partial \nu} \log \sqrt{(x-x_k)^2+(y-y_k)^2}\, d\,s = 0\,.$$

Rimane da considerare l'integrale:

$$\int_{\mathcal{F}A_\varrho} u_3 \frac{\partial\, w}{\partial\, s}\, d\,s\,.$$

Con un'integrazione per parti, ed applicando poi la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz, la (2) di [*M*], pag. 163, ed il teorema II di [*M*], pag. 164, riesce:

$$\lim_{\varrho\to 0}\left|\int_{\mathcal{F}A_\varrho} u_3 \frac{\partial w}{\partial s}\, d\,s\right| = \lim_{\varrho\to 0}\left|\int_{\mathcal{F}A_\varrho} w \frac{\partial u_3}{\partial s}\, d\,s\right| \leq \lim_{\varrho\to 0}\left(\int_{\mathcal{F}A_\varrho} w^2 d\,s\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathcal{F}A_\varrho}\left[\left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial y}\right)^2\right] d\,s\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$2\,Q^{\frac{1}{2}}\left(\iint_A\left[\left|\operatorname{grad}\left(\frac{\partial\, u_3}{\partial\, x}\right)\right|^2+\left|\operatorname{grad}\left(\frac{\partial\, u_3}{\partial\, y}\right)\right|^2\right] d\,\tau\right)^{\frac{1}{2}} \lim_{\varrho\to 0}\left(\varrho\int_{\mathcal{F}A_\varrho} w^2\, d\,s\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dimostreremo ora [23] che:

$$\lim_{\varrho\to 0}\varrho\left(\int_{\mathcal{F}A_\varrho} w^2\, ds\right) = 0\,. \tag{4}$$

Indicati con $\mu_1(\zeta)$ e $\mu_2(\zeta)$ i coseni direttori del versore $\mu(\zeta)$ [24] definito al variare del punto $\zeta \equiv (\xi\,,\,\eta)$ su $\mathcal{F}A$, con $C_1\,,\,C_2\,,\ldots,\,C_q$ le porzioni di curve di classe due che compongono $\mathcal{F}A$, e con $(t'_h\,,\,t''_h)$ i rispettivi inter-

---

[22] La funzione $\log\sqrt{(x-x_k)^2+(y-y_k)^2}$, infatti, è addirittura analitica in $A+\mathcal{F}A$.

[23] Cfr. GAETANO FICHERA: *Alcuni recenti sviluppi della teoria dei problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali lineari,* « Atti del Convegno sulle Equazioni lineari alle derivate parziali » (Trieste, agosto 1954), Editore Cremonese, Roma.

[24] Cfr. [*M*], pag. 162.

valli base (chiusi), denotiamo con $C_{h_\varrho}$ il luogo descritto dal punto $z$ di coordinate:

$$(5) \qquad \begin{cases} x = \xi(t) + \varrho\,\mu_1[\zeta(t)] \\ y = \eta(t) + \varrho\,\mu_2[\zeta(t)] \end{cases}$$

al variare di $t$ in $(t'_h, t''_h)$ $(h = 1, 2, \ldots, q)$.

Denotiamo con $J(t, \varrho)$ lo jacobiano relativo alla trasformazione di coordinate (5), e con $\omega(\varrho)$ l'angolo (compreso fra $0$ e $\pi$) che il versore $\nu_\varrho$ (25) a $C_{h_\varrho}$ nel punto di $C_{h_\varrho}$ corrispondente a $\zeta$, diretto verso l'interno di $A_\varrho$, forma con $\mu(\zeta)$.

La funzione $\cos\omega(\varrho)$ riesce continua in $(t'_h, t''_h)$ e $0 \leq \varrho \leq \varrho_0$, dimodochè, essendo $\cos\omega(0) \geq \cos\omega_0 > 0$, è lecito supporre $\varrho_0$ tale che:

$$\cos\omega(\varrho) \geq H_0 > 0$$

in $A - A_{\varrho_0}$.

Si prova con semplici calcoli che:

$$J(t, \varrho)\,dt = \cos\omega(\varrho)\,ds_\varrho .$$

La dimostrazione della (4) si consegue osservando che, ove fosse, detta $c$ una costante positiva, e $\{\varrho_n\}$ una successione infinitesima di numeri positivi:

$$\varrho_n \int_{\mathcal{F}A_{\varrho_n}} w^2 ds_{\varrho_n} > c,$$

ne verrebbe per $\varrho_n < \varrho_0$:

$$\iint_A w^2\,d\tau \geq \sum_{h=1}^{q} \int_{\varrho_n}^{\varrho_0} dr \int_{t'_h}^{t''_h} w^2 J(t, r)\,dt = \int_{\varrho_n}^{\varrho_0} dr \int_{\mathcal{F}A_r} w^2 \cos\omega(r)\,ds_r \geq$$

$$H_0 \int_{\varrho_n}^{\varrho_0} dr \int_{\mathcal{F}A_r} w^2\,ds_r > c\,H_0 \int_{\varrho_n}^{\varrho_0} \frac{1}{r}\,dr = c\,H_0 \log\frac{\varrho_0}{\varrho_n},$$

il che è assurdo dato che $w$ è funzione di quadrato sommabile in $A$.

Il teorema è così completamente dimostrato.

---

(25) Cfr. [*M*], pag. 162.