Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
*Classe di Scienze*

Carlo Cattaneo

# Compressione e torsione nel contatto tra corpi elastici di forma qualunque

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série*, tome 9, nº 1-2 (1955), p. 23-42
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1955_3_9_1-2_23_0>

# COMPRESSIONE E TORSIONE NEL CONTATTO TRA CORPI ELASTICI DI FORMA QUALUNQUE

di Carlo Cattaneo (Pisa)

Due corpi elastici qualunque $C_1$ e $C_2$, di rispettivi contorni regolari $S_1$ ed $S_2$, costituiti di uno stesso materiale omogeneo e isotropo, e inizialmente a contatto in un punto $O$, vengono assogettati a uno sforzo $P$ di mutua compressione normale. Secondo la teoria di Hertz [**1**, pag. 155] [**2**, pag. 193], assimilando $S_1$ ed $S_2$ a superficie del secondo ordine, si genera una areola ellittica di contatto $\sigma$, di semiassi $a$, $b$, nella quale lo sforzo $P$ si ripartisce con la legge

$$p(x, y) = \frac{3P}{2\pi a b}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1}$$

essendo stati scelti come assi cartesiani i diametri principali di $\sigma$. I semiassi $a$ e $b$ sono proporzionali alla radice cubica di $P$

$$a = k_1 P^{\frac{1}{3}}, \qquad b = k_2 P^{\frac{1}{3}} \tag{2}$$

con coefficienti $k_1$ e $k_2$ — che qui non è il caso di precisare — dipendenti dalla forma e dal mutuo orientamento dei due corpi, nonchè dai loro coefficienti elastici.

Pensiamo ora che, presente un sensibile attrito tra $C_1$ e $C_2$, questi vengano ulteriormente assogettati a una mutua azione torcente, di momento $M$, attorno alla comune normale in $O$. Questa azione, senza alterare la distribuzione (1) degli sforzi normali, stante la uguale natura elastica dei due corpi, genera ivi anche una distribuzione di sforzi tangenziali di componenti $(l, m)$.

Oggetto di questa Nota è la determinazione di tali sforzi nel caso più generale ($a \neq b$). Il caso di una $\sigma$ circolare ($a = b$) è già stato studiato da J. L. Lubkin [**3**] e dall'autore del presente lavoro [**4**].

1. *Traduzione analitica della condizione di assenza di slittamento.* Come sempre in tal genere di questioni, assimileremo i due corpi $C_1$ e $C_2$, nell'intorno della regione di contatto, a due *semispazi elastici*; ci varremo in particolare delle classiche formule di BOUSSINESQ-CERRUTI [5, cap. IV, pag. 126] che danno gli spostamenti $s \equiv (u, v, w)$ generati in un semispazio elastico $z \geq 0$ da una generica distribuzione di sforzi, normali $p(x, y)$, e tangenziali $l(x, y)$, $m(x, y)$, applicati sul piano limite $z = 0$. Limitatamente agli spostamenti subiti dai punti del medesimo piano limite $z = 0$, le predette formule danno [5, *loc. cit.*]

$$(3)\quad \begin{cases} u(x,y) = \displaystyle\iint \left[\frac{\varkappa}{2}\frac{l(\xi,\eta)}{r} - \frac{\chi}{2} l(\xi,\eta)\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - \frac{\chi}{2} m(\xi,\eta)\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y} - \varphi p(\xi,\eta)\frac{\partial \log r}{\partial x}\right] d\xi\, d\eta \\[2ex] v(x,y) = \displaystyle\iint \left[\frac{\varkappa}{2}\frac{m(\xi,\eta)}{r} - \frac{\chi}{2} m(\xi,\eta)\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} - \frac{\chi}{2} l(\xi,\eta)\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y} - \varphi p(\xi,\eta)\frac{\partial \log r}{\partial y}\right] d\xi\, d\eta \\[2ex] w(x,y) = \displaystyle\iint \left[\frac{\vartheta}{2}\frac{p(\xi,\eta)}{r} + \varphi\, l(\xi,\eta)\frac{\partial \log r}{\partial x} + \varphi\, m(\xi,\eta)\frac{\partial \log r}{\partial y}\right] d\xi\, d\eta \end{cases}$$

ove è posto $r = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{\frac{1}{2}}$ e

$$(4)\quad \varkappa = 1/\pi\mu, \quad \chi = \lambda/2\pi\mu(\lambda + \mu), \quad \varphi = 1/4\pi(\lambda + \mu), \quad \vartheta = (\lambda + 2\mu)/2\pi\mu(\lambda + \mu)$$

$\lambda$ e $\mu$ essendo le costanti di LAMÉ del materiale elastico.

Ciò premesso, indichiamo con $s_i \equiv (u_i, v_i, w_i)$ $(i = 1, 2)$ lo spostamento elastico subito nella fase di torsione dal generico punto di $S_i$ rispetto a una regione $\mathfrak{T}_i$ di $C_i$ sufficientemente lontana dalla zona di contatto e quindi praticamente indeformata, e con $\omega$ l'*angolo di torsione*, cioè l'angolo, contato positivamente nello stesso verso scelto per i momenti $M$, di cui $\mathfrak{T}_1$ ruota rispetto a $\mathfrak{T}_2$. Supposto che la coppia torcente non sia tale da provocare lo slittamento globale di $C_1$ su $C_2$, si deve ritenere che sia anche assente ogni slittamento locale se non in tutta la $\sigma$, almeno in una sua parte $\sigma^*$, per ora imprecisata. Ciò si traduce, entro la stessa regione $\sigma^*$, nelle relazioni

$$(5)\quad u_2 - u_1 = -\omega y, \qquad v_2 - v_1 = \omega x \qquad \ldots \sigma^*,$$

le quali, tenuto conto delle formule di BOUSSINESQ-CERRUTI e dell'identica costituzione elastica dei due corpi, si traducono [4, n. 1] nel seguente sistema di equazioni integrali in $l$ ed $m$:

$$(6)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_\sigma \left[\varkappa \frac{l(\xi,\eta)}{r} - \chi l(\xi,\eta)\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - \chi m(\xi,\eta)\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}\right] d\xi\, d\eta = -\,\omega y \\ \displaystyle\int_\sigma \left[\varkappa \frac{m(\xi,\eta)}{r} - \chi m(\xi,\eta)\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} - \chi l(\xi,\eta)\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}\right] d\xi\, d\eta = \omega x. \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \xi,\eta \text{ in } \sigma \\ x, y \text{ in } \sigma^* \end{pmatrix}$$

Notiamo esplicitamente che mentre il punto $(\xi, \eta)$ varia in tutta la $\sigma$, il punto $(x, y)$ varia soltanto in $\sigma^*$. Pertanto il sistema ora scritto diverrà presumibilmente capace di individuare lo sforzo tangenziale $(l, m)$ in $\sigma^*$ soltanto quando esso sarà completato da sufficienti indicazioni sull'andamento degli sforzi nella residua porzione di $\sigma$ (che indicheremo in seguito con $\tau$).

2. *Digressione su alcuni potenziali di strato, diretti e inversi, relativi a un disco ellittico.* Sia $\sigma$ una ellisse, di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ (a > b)$ nel piano $z = 0$; posto

$$(7)\qquad \mu(x, y) = \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

e indicato con $s$ un qualunque numero dispari $(\geq -1)$, consideriamo i seguenti potenziali, inversi e diretti

$$(8)\qquad V_s(x, y, z) = \int_\sigma \frac{\mu^s}{r}\, d\sigma, \qquad D_s(x, y, z) = \int_\sigma \mu^s \cdot r \cdot d\sigma$$

$(r = [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{\frac{1}{2}})$. Come è stato recentemente mostrato in tutta generalità [7], i valori che le $V_s$ e le $D_s$ assumono nei punti di $\sigma$ e che indicheremo con la notazione $\overline{V}_s(x, y)$ e $\overline{D}_s(x, y)$, si riducono a quelli di due polinomi in $x$, $y$, rispettivamente di grado $s+1$ ed $s+3$. Rinviando per i dettagli al citato lavoro [7], mi limito qui a riportare la forma generale dei $\overline{V}_s$ e dei $\overline{D}_s$ e a dare le espressioni esplicite di quelli tra essi che direttamente considereremo nel presente lavoro.

Esplicitiamo anzitutto la $\overline{V}_1$: per essa si ha l'espressione notissima

$$(9)\qquad \overline{V}_1(x, y) = \gamma - A\,x^2 - B\,y^2$$

con

$$
(10)\quad
\begin{cases}
A = \dfrac{\pi ab}{2} \displaystyle\int_0^\infty \dfrac{d\,\psi}{(a^2+\psi)^{\frac{3}{2}} \{(b^2+\psi)\,\psi\}^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{\pi\, b}{a^2 - b^2}\,[K(e) - E(e)] \\[2ex]
B = \dfrac{\pi ab}{2} \displaystyle\int_0^\infty \dfrac{d\,\psi}{(b^2+\psi)^{\frac{3}{2}} \{(a^2+\psi)\,\psi\}^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{\pi}{b\,(a^2 - b^2)}\,[a^2\,E(e) - b^2\,K(e)] \\[2ex]
\gamma = b\,K(e) = A\,a^2 + B\,b^2
\end{cases}
$$

essendo $K(e)$ e $E(e)$ i due integrali ellittici completi di prima e di seconda specie di modulo $e = (1 - b^2/a^2)^{\frac{1}{2}}$, eccentricità dell'ellisse. Vale la pena, per il seguito, di osservare esplicitamente come il rapporto $A/B$ non dipenda dai valori separati di $a$ e di $b$ ma soltanto dal loro rapporto e come nell'ipotesi $a > b$, che sempre nel seguito sottintenderemo, sussistano le disuguaglianze $A < B$, $A\,a < B\,b$:

$$
(11)\qquad a > b\,,\quad A < B\,,\quad A\,a < B\,b\,.
$$

Quanto alle altre $\overline{V}_s$ e alle $\overline{D}_s$, si ha

$$
(12)\quad
\begin{cases}
\overline{V}_s = \displaystyle\sum_{h+k=0}^{\frac{s+1}{2}} v_{hk}^{(s)}\, x^{2h}\, y^{2k}\,, \\[2ex]
v_{hk}^{(s)} = (-1)^{h+k} \dfrac{\left(\frac{s+1}{2}\right)!}{\left(\frac{s+1}{2} - h - k\right)!\,h!\,k!}\, \dfrac{s\,!!}{(s+1)!!}\,\pi\, a\, b \displaystyle\int_0^\infty \dfrac{d\,t}{(a^2+t)^{\frac{2h+1}{2}}\,(b^2+t)^{\frac{2k+1}{2}} \cdot t^{\frac{1}{2}}}
\end{cases}
$$

$$
(13)\quad
\begin{cases}
\overline{D}_s = \displaystyle\sum_{h+k=0}^{\frac{s+3}{2}} d_{hk}^{(s)}\, x^{2h}\, y^{2k}\,, \quad d_{00}^{(s)} = 2\,a^2 b\, \dfrac{s\,!!}{(s+3)!!}\,E(e) \qquad d_{hk}^{(s)} = (-1)^{h+k+1}\,\cdot \\[2ex]
\cdot\, \pi\, a\, b\, \dfrac{s\,!!}{2^{\frac{s+3}{2}}\left(\frac{s+3}{2} - h - k\right)!\;h!\,k!} \displaystyle\int_0^\infty \dfrac{d\,t}{(a^2+t)^{\frac{2h+1}{2}}\,(b^2+t)^{\frac{2k+1}{2}}\,t^{\frac{1}{2}}}\,.
\end{cases}
$$

Tutti i coefficienti $v_{hk}^{(s)}$ e $d_{hk}^{(s)}$, come quelli di $\overline{V}_1$, si possono esprimere in funzione razionale di $a$, $b$, $E(e)$, $K(e)$ o anche, più semplicemente, di $a$, $b$, $A$, $B$. Scegliendo questo secondo modo, riportiamo qui appresso, raggruppate in due tabelle, le espressioni esplicite di $\overline{V}_1$, $\overline{V}_3$, $\overline{V}_5$, $\overline{D}_1$, $\overline{D}_3$, $\overline{D}_5$, le $\overline{D}$ limitatamente ai termini in $x^2 y^2$, $x^2 y^4$, $x^4 y^2$, $x^6 y^2$, $x^2 y^6$, $x^4 y^4$, i soli che interesseranno nel seguito.

TABELLA I

$\overline{V}_1$, $\overline{V}_3$, $\overline{V}_5$

$$\overline{V}_1 = Aa^2 + Bb^2 - Ax^2 - By^2.$$

$$\overline{V}_3 = \frac{3}{4}(A a^2 + B b^2) - \frac{3}{2} Ax^2 - \frac{3}{2} By^2 + \frac{3\,Aa^2 - (2A + B)\,b^2}{4\,a^2\,(a^2 - b^2)}\,x^4 +$$
$$+ \frac{(2B + A)\,a^2 - 3\,Bb^2}{4\,b^2\,(a^2 - b^2)}\,y^4 + \frac{3}{2}\,\frac{B - A}{a^2 - b^2}\,x^2\,y^2.$$

$$\overline{V}_5 = \frac{5}{8}(Aa^2 + Bb^2) - \frac{15}{8} Ax^2 - \frac{15}{8} By^2 + 5\,\frac{3\,A\,a^2 - (2\,A + B)\,b^2}{8\,a^2\,(a^2 - b^2)}\,x^4 +$$
$$+ 5\,\frac{(2\,B + A)\,a^2 - 3\,B\,b^2}{8\,b^2\,(a^2 - b^2)}\,y^4 + \frac{15\,(B - A)}{4\,(a^2 - b^2)}\,x^2\,y^2 +$$
$$+ \frac{(8\,B + 19A)\,a^2\,b^2 - 15\,A\,a^4 - 4\,(B + 2\,A)\,b^4}{24\,a^4\,(a^2 - b^2)^2}\,x^6 +$$
$$+ \frac{(8A + 19B)a^2b^2 - 15Bb^4 - 4(A + 2B)a^4}{24\,b^4\,(a^2 - b^2)^2}\,y^6 + 5\,\frac{3(2B - A)b^2 - (A + 2B)a^2}{8\,b^2\,(a^2 - b^2)^2}\,x^2 y^4 +$$
$$+ 5\,\frac{3\,(2\,A - B)\,a^2 - (B + 2\,A)\,b^2}{8\,a^2\,(a^2 - b^2)^2}\,x^4\,y^2.$$

TABELLA II

$\overline{D}_1$, $\overline{D}_3$, $\overline{D}_5$

(limitatamente al soli termini in $x^2 y^2$, $x^4 y^2$, $x^2 y^4$, $x^6 y^2$, $x^2 y^6$, $x^4 y^4$)

$$\overline{D}_1 = \frac{1}{2} \frac{B b^2 - A a^2}{a^2 - b^2} x^2 y^2 + (\text{termini in } x^2, y^2, x^4, y^4) + \text{cost.}$$

$$\overline{D}_3 = \frac{3}{4} \frac{B b^2 - A a^2}{a^2 - b^2} x^2 y^2 + \frac{3 B b^2 + (B - 4A) a^2}{8 (a^2 - b^2)^2} x^2 y^4 +$$

$$+ \frac{3 A a^2 + (A - 4B) b^2}{8 (a^2 - b^2)^2} x^4 y^2 + (\text{termini in } x^2, y^2, x^4, y^4, x^6, y^6) + \text{cost.}$$

$$\overline{D}_5 = \frac{15}{16} \frac{B b^2 - A a^2}{a^2 - b^2} x^2 y^2 + 5 \frac{3 B b^2 + (B - 4A) a^2}{8 (a^2 - b^2)} x^2 y^4 +$$

$$+ 5 \frac{3 A a^2 + (A - 4B) b^2}{16 (a^2 - b^2)^2} x^4 y^2 +$$

$$+ \frac{(23 B - 11 A) a^2 b^2 - 15 A a^4 + (B + 2A) b^4}{48 a^2 (a^2 - b^2)^3} x^6 y^2 +$$

$$+ \frac{(11 B - 23 A) a^2 b^2 + 15 B b^4 - (A + 2B) a^4}{48 b^2 (a^2 - b^2)^3} x^2 y^6 +$$

$$+ 5 \frac{(7A - B) a^2 - (7B - A) b^2}{32 (a^2 - b^2)^3} x^4 y^4 + (\text{termini in } x^2, y^2,$$

$$x^4, y^4, x^6, y^6, x^8, y^8) + \text{cost.}$$

Chiudiamo la digressione con una osservazione generale sul modo di variare dei coefficienti $v_{hk}^{(s)}$ e $d_{hk}^{(s)}$ al variare delle dimensioni dell'ellisse, fermo restando il rapporto dei due semiassi. Consideriamo due ellissi $\sigma$ e $\sigma^*$, la prima di semiassi $a$, $b$ e la seconda, simile, di semiassi $a^* = \lambda a$, $b^* = \lambda b$. In esse pensiamo due distribuzioni potenzianti con densità rispettive

$$\mu^s = \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{s}{2}}, \quad \mu^s_* = \left(1 - \frac{x^2}{a^2_*} - \frac{y^2}{b^2_*}\right)^{\frac{s}{2}} \tag{14}$$

e chiamiamone $V_s$, $D_s$ e $V_s^*$, $D_s^*$ i rispettivi potenziali, inversi e diretti. Tenuto conto che il rapporto tra lunghezze e tra aree corrispondenti in $\sigma^*$ e in $\sigma$ valgono rispettivamente $\lambda$ e $\lambda^2$, e che in punti $P_*$ e $P$ corrispondenti nella similitudine la densità ha lo stesso valore, si riconosce immediatamente che tra i potenziali delle due distribuzioni, valutati in punti corrispondenti, passano le relazioni

$$V_s^*(P_*) = \int_{\sigma^*} \frac{\mu_*^s}{r_*}\, d\,\sigma^* = \lambda \int_{\sigma} \frac{\mu^s}{r}\, d\,\sigma = \lambda\, V_s(P) \tag{15}$$

$$D_s^*(P_*) = \int_{\sigma^*} \mu_*^s \cdot r_* \cdot d\,\sigma^* = \lambda^3 \int_{\sigma} \mu^s \cdot r \cdot d\,\sigma = \lambda^3\, D_s(P). \tag{16}$$

Ciò significa in particolare, limitandosi a considerare i valori sulle ellissi potenzianti, che moltiplicando le dimensioni della ellisse per $\lambda$ i coefficienti delle potenze di grado $2\,m$ restano moltiplicati per $\lambda^{1-2m}$ in $\overline{V}_s$ e per $\lambda^{3-2m}$ in $\overline{D}_s$. In altri termini, qualunque sia $s\,(=1\,,\,3\,,\,5\,,\ldots)$ risulta, con ovvia notazione,

$$\left\{\begin{aligned} v_{hk}^{(s)*} &= v_{hk}^{(s)} \cdot \lambda^{1-2h-2k} \\ d_{hk}^{(s)*} &= d_{hk}^{(s)} \cdot \lambda^{3-2h-2k} \end{aligned}\right. \tag{17}$$

ciò che può anche controllarsi direttamente nelle tabelle precedenti e sulle formule generali (12) e (13).

3. *Distribuzione degli sforzi tangenziali nell'ipotesi di aderenza completa.* Per motivi di completezza e in vista di utilizzazione successiva, cominceremo col ricavare la soluzione del nostro problema nell'ipotesi che sia $\sigma^* \equiv \sigma$ (cfr. n. 1), che vi sia cioè tra $C_1$ e $C_2$ un'aderenza completa, tale da impedire ogni slittamento locale in tutta la $\sigma$. Ritroveremo così un risultato già noto stabilito nel 1949 da R. D. MINDLIN [**6**, pag. 268].

Nell'ipotesi ammessa le equazioni integrali (6) sono atte da sole alla determinazione di $l\,(x\,,\,y)$ e $m\,(x\,,\,y)$. Come subito verificheremo, la soluzione è del tipo

$$l\,(x\,,\,y) = \alpha\,\omega\,\frac{\partial\,\mu}{\partial\,y}\,,\qquad m\,(x\,,\,y) = \beta\,\omega\,\frac{\partial\,\mu}{\partial\,x} \tag{18}$$

essendo $\mu$ la funzione (7) ed $\alpha$, $\beta$ due costanti opportune. A sostituzioni eseguite le equazioni (6) si riducono, mediante i potenziali introdotti nel n. 2, alla forma

$$
(19) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\alpha\, \varkappa \frac{\partial\, \overline{V}_1}{\partial\, y} - (\alpha + \beta)\, \chi \frac{\partial^3\, \overline{D}_1}{\partial\, x^2\, \partial\, y} = -\, y \\
&\beta\, \varkappa \frac{\partial\, \overline{V}_1}{\partial\, x} - (\alpha + \beta)\, \chi \frac{\partial^3\, \overline{D}_1}{\partial\, x\, \partial\, y^2} = x\,.
\end{aligned}
\right. \qquad \ldots . \sigma
$$

Avuto riguardo alle espressioni esplicite di $\overline{V}_1$ e di $\overline{D}_1$, si riconosce che le equazioni medesime si riducono a identità pur di assumere per $\alpha$, $\beta$ i valori, indipendenti da $\omega$,

$$
(20) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\varkappa\, A\, (a^2 - b^2) + 2\, \chi\, (B\, b^2 - A\, a^2)}{2\, \varkappa\, [\varkappa\, A\, B\, (a^2 - b^2) + \chi\, (A + B)\, (B\, b^2 - A\, a^2)]} \\
\beta &= -\, \frac{\varkappa\, B\, (a^2 - b^2) + 2\, \chi\, (B\, b^2 - A\, a^2)}{2\, \varkappa\, [\varkappa\, A\, B\, (a^2 - b^2) + \chi\, (A + B)\, (B\, b^2 - A\, a^2)]}\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Resta così confermato che, nella ipotesi di una perfetta e completa aderenza tra i due corpi, le tensioni tangenziali in $\sigma$ sono date dalle (18) con coefficienti $\alpha$, $\beta$ forniti dalle (20). Tale è appunto il risultato di MINDLIN.

La soluzione ora ricordata, a causa della singolarità che essa presenta sul bordo di $\sigma$, *singolarità incompatibile con un attrito finito e con la distribuzione* (1) *degli sforzi normali*, non è fisicamente ammissibile, se non nel caso molto artificioso che i due corpi, dopo la fase di compressione, restino *incollati* l'uno all'altro lungo la $\sigma$. È tuttavia opportuno, al fine di trarne successivi orientamenti, discutere brevemente il risultato.

Interessa anzitutto osservare come dalle disuguaglianze

$$
(21) \qquad a > b\,, \quad A < B\,, \quad \varkappa > 2\,\chi
$$

discenda essere certamente diverso da zero, anzi positivo, il cómune denominatore delle (20), ciò che rende sempre determinati i valori di $\alpha$ e di $\beta$.

Dalle (21) conseguono inoltre le disuguaglianze

$$
(22) \qquad \alpha > 0\,, \quad \beta < 0\,, \quad |\alpha| < |\beta|\,,
$$

mentre dalle stesse (21), unite alla $(11)_3$ $(A\, a < B\, b)$, si trae la disuguaglianza

$$
(23) \qquad |a\, \alpha| < |b\, \beta|\,.
$$

Di pronta verifica, per $\alpha$ e $\beta$, sono poi le uguaglianze

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} & \varkappa (a^2 - b^2)(B\alpha + A\beta) + 2\chi (B b^2 - A a^2)(\alpha + \beta) = 0 \\ & \varkappa (B\alpha - A\beta) = 1 \end{aligned} \right. ,$$

che, insieme con le (22) e (23), utilizzeremo più avanti.

Sempre a proposito dei coefficienti $\alpha$ e $\beta$, notiamo ancora che il loro rapporto non dipende dallo sforzo $P$ di compressione [1].

Passando ora all'esame specifico della distribuzione di tensioni (18), dall'ultima osservazione segue che anche il rapporto $\dfrac{l}{m} = \dfrac{\alpha\, a^2\, y}{\beta\, b^2\, x}$, e con esso la direzione dello sforzo tangenziale, costante lungo ogni retta diametrale di $\sigma$, è indipendente non soltanto da $\omega$ ma anche da $P$.

In valore assoluto poi gli sforzi tangenziali valgono

$$(25) \qquad (l^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{\alpha\,|\omega|}{b^2} \left[ \frac{y^2 + \dfrac{\beta^2 b^4}{\alpha^2 a^4}\, x^2}{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}} \right]^{-\frac{1}{2}} ;$$

essi crescono ovunque in proporzione al crescere di $\omega$.

Linee di uguale sforzo sono le $\infty^1$ ellissi, concentriche e coassiali, della famiglia

$$(26) \qquad \varrho^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) = y^2 + \frac{\beta^2 b^4}{\alpha^2 a^4}\, x^2$$

al variare da $0$ a $\infty$ del parametro $\varrho$ che dà, moltiplicato per $\dfrac{\alpha\,|\omega|}{b^2}$, il valore assoluto dello sforzo. Al tendere di $\varrho$ ad $\infty$, l'ellisse (26) tende all'ellisse contorno di $\sigma$, che può perciò considerarsi anch'essa come linea di uguale sforzo, benchè questo divenga ivi infinito. La famiglia delle ellissi di sforzo tangenziale costante non varia al variare di $\omega$, pur variando naturalmente il valore che lo sforzo assume su ciascuna di esse.

La disuguaglianza (23), che dovremo utilizzare anche in seguito, mostra poi che lungo ciascuna ellisse $\mu = \text{cost}$ il valor massimo del modulo dello sforzo è assunto sull'asse maggiore di $\sigma$ ($y = 0$).

---

[1] Si rammenti infatti che il rapporto $A/B$ dipende soltanto dalla eccentricità di $\sigma$.

Calcolando infine il momento $M$ dell'intera distribuzione si trova

$$M = \int_\sigma (x\, m - y\, l) \cdot d\,\sigma = \frac{2}{3} \pi\, a\, b\, (\alpha - \beta)\, \omega$$

e, più esplicitamente,

$$M = \frac{\pi\, a\, b\, [\varkappa\, (A + B)\, (a^2 - b^2) + 4\, \chi\, (B\, b^2 - A\, a^2)]}{3\, \varkappa\, [\varkappa\, A\, B\, (a^2 - b^2) + \chi\, (A + B)\, (B\, b^2 - A\, a^2)]}\, \omega \,. \tag{27}$$

Dalla (27) risulta, come è ben naturale, un legame di semplice e concorde proporzionalità tra il momento torcente $M$ e l'angolo $\omega$ di torsione. Il coefficiente di proporzionalità, oltre a dipendere dalla natura elastica e dalla forma dei corpi a contatto, risulta proporzionale [(cfr. le (2) e le (10)] alla radice cubica di $P$.

4. *Ipotesi fondamentali nel caso di aderenza incompleta.* La soluzione precedente non è, si è detto, fisicamente accettabile. Occorre pertanto rinunziare all'ipotesi accettata al n. 3 ed ammettere che in una parte marginale $\tau$ di $\sigma$ si verifichino slittamenti, l'aderenza perfetta restando limitata ad una regione centrale $\sigma^*$. Onde rendere determinato il problema, noi ammetteremo le seguenti ipotesi che potranno peraltro ritenersi confermate soltanto a posteriori dalla intrinseca coerenza dei risultati che ne trarremo oltrechè, naturalmente, dall'eventuale loro concordanza con l'esperienza:

I. CONTINUITÀ: *Lo sforzo tangenziale* $(l\,,\, m)$ *è finito e continuo in tutta l'area* $\sigma$.

II. VALIDITÀ LOCALE DELLE LEGGI DI ATTRITO: *In tutta la* $\sigma$ *esso soddisfa alla disuguaglianza*

$$l^2 + m^2 \leq f^2\, p^2 \tag{28}$$

*essendo* $f$ *il coefficiente di attrito tra i due corpi e* $p$ *lo sforzo normale* (1).

III. ZONE DI ADERENZA E DI SLITTAMENTO: *Vi è assenza di slittamento locale in un'area ellittica* $\sigma^*$ *di semiassi* $a^*$, $b^*$, *concentrica, coassiale, omotetica a* $\sigma$, *e interna ad essa. Si producono invece slittamenti nella residua corona ellittica marginale, che chiameremo* $\tau$. *Indicheremo con* $\lambda$ (2) *il rapporto*

---

(2) Da non confondersi con l'omonima costante di LAMÈ, che non è mai intervenuta esplicitamente.

*di omotetia tra $\sigma^*$ e $\sigma$*

$$\frac{a^*}{a} = \frac{b^*}{b} = \lambda \tag{29}$$

*per ora indeterminato.*

IV. STRUTTURA ANALITICA DEGLI SFORZI E LORO DIREZIONE: *Nell'anello $\tau$ gli sforzi tangenziali sono del tipo*

$$l_\tau = \alpha \cdot \frac{\partial F(\mu)}{\partial y}, \quad m_\tau = \beta \frac{\partial F(\mu)}{\partial x} \tag{30}$$

*essendo $F$ una opportuna funzione di $\mu$* [cfr. la (7) del n. 2] *e $\alpha$, $\beta$ i due medesimi coefficienti* (20). (*Si presume con ciò che lo sforzo tangenziale in $\tau$ abbia una ben determinata struttura analitica e abbia inoltre ovunque, in $\tau$, la stessa direzione che esso avrebbe in assenza completa di slittamento*).

V. CONDIZIONE DI MASSIMO SFORZO TANGENZIALE COMPATIBILE CON L'ATTRITO. *Subordinatamente alla condizione IV.* (30), *la distribuzione degli sforzi tangenziali in $\tau$ è tale che in almeno un punto di $\tau$ la II.* (28) *sia soddisfatta per uguaglianza* (*potendo nei rimanenti punti di $\tau$ essere verificata per disuguaglianza*).

Converrà ripetere che tali ipotesi, in ispecie la III e la IV, non hanno carattere di evidenza ma sono *congetture* giustificabili soltanto a posteriori.

Le condizioni II, IV, V determinano completamente gli sforzi in $\tau$. Indicata infatti con $F'(\mu)$ la derivata di $F(\mu)$, la condizione II, in virtù della IV, si esprime

$$\frac{F'^2(\mu)}{\mu^2}\left(\frac{\alpha^2 y^2}{b^4} + \frac{\beta^2 x^2}{a^4}\right) \leq \frac{9 P^2 f^2}{4 \pi^2 a^2 b^2} \mu^2 . \tag{31}$$

Stante la disuguaglianza (23) stabilita al n. precedente, il primo membro della (31) diviene massimo, *a parità di $\mu$*, lungo l'asse $x$: imponendo allora che per $y = 0$, ove è $\mu = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, la (31) valga col segno di uguaglianza, in conformità con la condizione $V$, si avrà [3]

$$F'(\mu) = \frac{\mp 3 f P}{2 \pi b \beta} \frac{\mu^2}{\sqrt{1 - \mu^2}} \tag{32}$$

col segno superiore o inferiore a seconda che è $\omega > 0$ o $\omega < 0$.

---

[3] Si rammenti che $\beta$ ha segno negativo.

Di qui, imponendo per comodità che sia $F(0)=0$, si ricava

$$F(\mu)=\frac{\pm 3fP}{4\pi b\beta}(\mu\sqrt{1-\mu^2}-\operatorname{arcsin}\mu) \tag{33}$$

o anche, sviluppando in serie di potenze,

$$F(\mu)=\sum_1^\infty{}_r\, a_r\,\mu^{2r+1}=\frac{\mp fP}{2\pi b\beta}\left(\mu^3+\frac{3}{10}\mu^5+\frac{9}{56}\mu^7+\dots\right). \tag{34}$$

Le (30) si esplicitano allora così

$$\left\{\begin{aligned} l_\tau &=\frac{\pm 3fP}{2\pi b^3}\frac{\alpha}{\beta}\frac{\mu y}{\sqrt{1-\mu^2}}=\frac{\mp fP}{2\pi b}\frac{\alpha}{\beta}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu^3+\frac{3}{10}\mu^5+\frac{9}{56}\mu^7+\dots\right)\\ m_\tau &=\frac{\pm 3fP}{2\pi a^2 b}\frac{\mu x}{\sqrt{1-\mu^2}}=\frac{\mp fP}{2\pi b}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu^3+\frac{3}{10}\mu^5+\frac{9}{56}\mu^7+\dots\right). \end{aligned}\right. \tag{35}$$

Con tali presupposti, le equazioni integrali (6) divengono atte, come ora vedremo, a determinare sia i semiassi, tuttora indeterminati, di $\sigma^*$ sia la distribuzione degli sforzi tangenziali in $\sigma^*$.

A tale scopo riscriviamo in forma adatta il sistema (6). Spezziamo anzitutto ciascuno degli integrali che vi figurano in due integrali, estesi rispettivamente a $\tau$ e a $\sigma^*$. Nel primo di essi la funzione integranda è nota, figurando in essa a fattore lo sforzo $(l_\tau, m_\tau)$. Aggiungiamo ora al primo integrale, e togliamo dal secondo, l'integrale esteso a $\sigma^*$ della funzione che compare sotto il primo integrale. Ciascuno degli integrali primitivi resta sostituito allora da due integrali, l'uno esteso a tutta la $\sigma$ con funzione integranda contenente a fattore lo sforzo $(l_\tau, m_\tau)$, pensato naturalmente esteso a tutta la $\sigma$, l'altro, esteso a $\sigma^*$, relativo invece alla differenza $(l_* - l_\tau,\ m_* - m_\tau)$ tra lo sforzo tangenziale effettivo in $\sigma^*$ e lo sforzo $(l_\tau, m_\tau)$. Ciò fatto, il sistema (6) assume l'aspetto

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{\sigma^*}\left[\varkappa\frac{l_*-l_\tau}{r}-\chi(l_*-l_\tau)\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}-\chi(m_*-m_\tau)\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}\right]d\xi\,d\eta=\\ &\qquad=-\int_\sigma\left[\varkappa\frac{l_\tau}{r}-\chi l_\tau\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}-\chi m_\tau\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}\right]d\xi\,d\eta-\omega y\\ &\int_{\sigma_*}\left[\varkappa\frac{m_*-m_\tau}{r}-\chi(m_*-m_\tau)\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}-\chi(l_*-l_\tau)\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}\right]d\xi\,d\eta=\\ &\qquad=-\int_\sigma\left[\varkappa\frac{m_\tau}{r}-\chi m_\tau\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}-\chi l_\tau\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}\right]d\xi\,d\eta+\omega x. \end{aligned}\right. \tag{36}$$

In esso possono assumersi come incognite le funzioni $l_* - l_\tau$, $m_* - m_\tau$ figuranti a primo membro, mentre i secondi membri debbono intendersi noti, perchè calcolabili a mezzo delle (35).

Mostreremo ora come il sistema (36) si possa risolvere, con approssimazione comunque spinta.

5. *Risoluzione del sistema integrale* (36). Il metodo di approssimazione consisterà nel calcolare i secondi membri delle (36), i quali dipendono da $(l_\tau, m_\tau)$ e quindi dalla funzione $F(\mu)$, approssimando quest'ultima mediante un numero finito $n$ di termini del suo sviluppo (34)

$$F(\mu) \cong \sum_1^n {}_r\, a_r\, \mu^{2r+1}\,. \tag{37}$$

In conseguenza di tale approssimazione si vedrà come al sistema integrale si possa soddisfare ponendo in $\sigma^*$

$$\left\{\begin{aligned} l_* - l_\tau &= \frac{\alpha}{\beta}\,\frac{\partial}{\partial y} \sum_1^n {}_r\, \gamma_r^{(n)} \cdot \mu_*^{2r+1}(x, y) \\ m_* - m_\tau &= \frac{\partial}{\partial x} \sum_1^n {}_r\, \gamma_r^{(n)} \cdot \mu_*^{2r+1}(x, y) \end{aligned}\right. \tag{38}$$

ove $\alpha$, $\beta$ sono ancora i coefficienti (20), $\mu_*$ ha il significato indicato in (14) e $\gamma_1^{(n)}, \gamma_2^{(n)}, \ldots \gamma_n^{(n)}$ sono $n$ costanti, *in numero uguale al numero dei termini approssimanti la* $F(\mu)$, da determinarsi opportunamente ([4]). La sostituzione delle (38) nel sistema integrale vale in effetto a individuare le costanti $\gamma$ e il rapporto di similitudine $\lambda$ tra l'ellisse $\sigma^*$ e l'ellisse $\sigma$.

Naturalmente poichè lo spessore dell'anello $\tau$, e quindi il valore massimo ivi raggiunto da $\mu$, cresce al crescere di $\omega$, il numero $n$ di termini necessari in (37) [e in (38)] per ottenere un dato grado di approssimazione crescerà con $\omega$ e quindi con $M$.

Svilupperemo completamente soltanto il calcolo di prima e di seconda approssimazione, restando da essi tracciata anche la via di un'approssimazione di ordine $n$ comunque elevato.

a) *Prima approssimazione.* Pensiamo $\tau$ tanto sottile che la $F(\mu)$ risulti ivi sufficientemente rappresentata dal solo primo termine del suo sviluppo.

---

([4]) L'indice $(n)$ apposto superiormente alle $\gamma$ sta a indicare l'ordine dell'approssimazione, pari al numero dei termini approssimanti la $F(\mu)$.

Porremo allora

$$F(\mu) \cong \frac{\mp f P}{2 \pi b \beta} \mu^3 \tag{39}$$

e, in concomitanza,

$$\begin{cases} l_\tau \cong \dfrac{\mp f P}{2 \pi b} \dfrac{\alpha}{\beta} \dfrac{\partial \mu^3}{\partial y} \\ m_\tau \cong \dfrac{\mp f P}{2 \pi b} \dfrac{\partial \mu^3}{\partial x}. \end{cases} \tag{40}$$

Calcolati i secondi membri delle (36) mediante le espressioni approssimate (40), le equazioni medesime si scrivono

$$\begin{cases} \displaystyle\iint_{\sigma_*} \left[ \varkappa \frac{l_* - l_\tau}{r} - \chi (l_* - l_\tau) \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - \chi (m_* - m_\tau) \frac{\partial^2 r}{\partial x \, \partial y} \right] d\xi \, d\eta = \\ \qquad = \pm \dfrac{f P}{2 \pi b \beta} \left[ \varkappa \alpha \dfrac{\partial \overline{V}_3}{\partial y} - \chi (\alpha + \beta) \dfrac{\partial^3 \overline{D}_3}{\partial x^2 \, \partial y} \right] - \omega y \\ \displaystyle\iint_{\sigma_*} \left[ \varkappa \frac{m_* - m_\tau}{r} - \chi (m_* - m_\tau) \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} - \chi (l_* - l_\tau) \frac{\partial^2 r}{\partial x \, \partial y} \right] d\xi \, d\eta = \\ \qquad = \pm \dfrac{f P}{2 \pi b \beta} \left[ \varkappa \beta \dfrac{\partial \overline{V}_3}{\partial x} - \chi (\alpha + \beta) \dfrac{\partial^3 \overline{D}_3}{\partial y^2 \, \partial x} \right] + \omega x. \end{cases} \tag{41}$$

Al sistema ora scritto si può soddisfare (in conformità a quanto si è detto poco sopra in generale) ponendo semplicemente

$$\begin{cases} l_* - l_\tau = \dfrac{\alpha}{\beta} \gamma_1^{(1)} \dfrac{\partial \mu_*^3}{\partial y} \\ m_* - m_\tau = \gamma_1^{(1)} \dfrac{\partial \mu_*^3}{\partial x} \end{cases} \tag{42}$$

con $\gamma_1^{(1)}$ costante da determinare (5). Difatti, a sostituzioni effettuate, con

(5) Circa l'indice (1) cfr. la nota a piè della pagina 35.

riguardo alle posizioni del n. 2, risulta

$$
(43)\quad \begin{cases} \dfrac{\gamma_1^{(1)}}{\beta}\left[\varkappa\alpha\dfrac{\partial\,\overline{V}_3^*}{\partial\,y}-\chi(\alpha+\beta)\dfrac{\partial^3\,\overline{D}_3^*}{\partial x^2\,\partial y}\right]=\pm\dfrac{f\,P}{2\pi b\beta}\left[\varkappa\alpha\dfrac{\partial\,\overline{V}_3}{\partial\,y}-\chi(\alpha+\beta)\dfrac{\partial^3\,\overline{D}_3}{\partial x^2\,\partial y}\right]-\omega\,y \\[2ex] \dfrac{\gamma_1^{(1)}}{\beta}\left[\varkappa\beta\dfrac{\partial\,\overline{V}_3^*}{\partial\,x}-\chi(\alpha+\beta)\dfrac{\partial^3\,\overline{D}_3^*}{\partial y^2\,\partial x}\right]=\pm\dfrac{f\,P}{2\pi b\beta}\left[\varkappa\beta\dfrac{\partial\,\overline{V}_3}{\partial\,x}-\chi(\alpha+\beta)\dfrac{\partial^3\,\overline{D}_3}{\partial y^2\,\partial x}\right]+\omega\,x \end{cases}
$$

ovvero, esplicitando $\overline{V}_3$, $\overline{V}_3^*$, $\overline{D}_3$, $\overline{D}_3^*$ e tenendo conto delle relazioni (17),

$$
(44)\quad \begin{cases} \begin{aligned} &-3\,\dfrac{\varkappa\alpha}{\beta}\left(\dfrac{\gamma_1^{(1)}}{\lambda}\mp\dfrac{f\,P}{2\pi b}\right)B y+\dfrac{\varkappa\alpha}{\beta}\left(\dfrac{\gamma_1^{(1)}}{\lambda^3}\mp\dfrac{f\,P}{2\pi b}\right)\dfrac{(A+2B)a^2-3Bb^2}{b^2\,(a^2-b^2)}\,y^3+ \\ &+3\dfrac{\varkappa\alpha}{\beta}\left(\dfrac{\gamma_1^{(1)}}{\lambda^3}\mp\dfrac{f\,P}{2\pi\,b}\right)\dfrac{B-A}{a^2-b^2}\,\varkappa^2 y-3\chi\dfrac{\alpha+\beta}{\beta}\left(\dfrac{\gamma_1^{(1)}}{\lambda}\mp\dfrac{f\,P}{2\pi\,b}\right)\dfrac{Bb^2-Aa^2}{a^2-b^2}\,y- \\ &\qquad -\chi\,\dfrac{\alpha+\beta}{\beta}\left(\dfrac{\gamma_1^{(1)}}{\lambda^3}\mp\dfrac{f\,P}{2\,\pi\,b}\right)\dfrac{3\,B\,b^2+(B-4\,A)\,a^2}{(a^2-b^2)^2}\,y^3- \\ &\qquad -3\,\chi\,\dfrac{\alpha+\beta}{\beta}\left(\dfrac{\gamma_1^{(1)}}{\lambda^3}\mp\dfrac{f\,P}{2\,\pi\,b}\right)\dfrac{3\,A\,a^2+(A-4\,B)\,b^2}{(a^2-b^2)^2}\,x^2\,y+\omega\,y=0 \\[2ex] &-3\varkappa\left(\dfrac{\gamma_1^{(1)}}{\lambda}\mp\dfrac{f\,P}{2\,\pi\,b}\right)A\,x+\varkappa\left(\dfrac{\gamma_1^{(1)}}{\lambda^3}\mp\dfrac{f\,P}{2\pi\,b}\right)\dfrac{3\,A\,a^2-(B+2\,A)\,b^2}{a^2\,(a^2-b^2)}\,x^3+ \\ &+3\varkappa\left(\dfrac{\gamma_1^{(1)}}{\lambda^3}\mp\dfrac{f\,P}{2\,\pi\,b}\right)\dfrac{B-A}{a^2-b^2}\,x y^2-3\chi\dfrac{\alpha+\beta}{\beta}\left(\dfrac{\gamma_1^{(1)}}{\lambda}\mp\dfrac{f\,P}{2\,\pi\,b}\right)\dfrac{B\,b^2-A\,a^2}{a^2-b^2}\,x- \\ &\qquad -\chi\,\dfrac{\alpha+\beta}{\beta}\left(\dfrac{\gamma_1^{(1)}}{\lambda^3}\mp\dfrac{f\,P}{2\,\pi\,b}\right)\dfrac{3\,A\,a^2+(A-4\,B)\,b^2}{(a^2-b^2)^2}\,x^3- \\ &\qquad -3\,\chi\,\dfrac{\alpha+\beta}{\beta}\left(\dfrac{\gamma_1^{(1)}}{\lambda^3}\mp\dfrac{f\,P}{2\,\pi\,b}\right)\dfrac{3\,B\,b^2+(B-4\,A)\,a^2}{(a^2-b^2)^2}\,x\,y^2-\omega\,x=0\,. \end{aligned} \end{cases}
$$

Annullando nelle due uguaglianze i coefficienti dei termini di terzo grado, si ricava

$$
(45)\qquad \gamma_1^{(1)}=\pm\frac{f\,P}{2\,\pi\,b}\,\lambda^3\,.
$$

Identificando poi nell'una e nell'altra i termini di primo grado, si ottiene rispettivamente

$$
(46) \quad \begin{cases} \pm(1-\lambda^2) = \dfrac{-2\pi b\beta(a^2-b^2)\omega}{3fP[\varkappa\alpha B(a^2-b^2)+\chi(\alpha+\beta)(Bb^2-Aa^2)]} \\[2ex] \pm(1-\lambda^2) = \dfrac{+2\pi b\beta(a^2-b^2)\omega}{3fP[\varkappa\beta A(a^2-b^2)+\chi(\alpha+\beta)(Bb^2-Aa^2)]} \end{cases}
$$

relazioni tra loro equivalenti che, mediante le uguaglianze (24), possono ridursi alla comune forma, senza ambiguità di segno

$$
(47) \qquad 1-\lambda^2 = \mp\frac{4\pi b\cdot\beta\omega}{3fP} = \frac{4\pi b\cdot|\beta\omega|}{3fP}
$$

che vale a determinare $\lambda$ in funzione di $\omega$. Conosciuto il valore di $\lambda$, vale a dire le dimensioni di $\sigma_*$, le (42), precisate dalle (45), individuano lo sforzo tangenziale $(l_*, m_*)$ in $\sigma^*$.

Risulta da quanto precede che lo sforzo tangenziale lungo ogni retta diametrale ha in $\sigma_*$ la stessa direzione che in $\tau$, direzione che è poi la medesima, come è implicito nella ipotesi IV del n. 4, che si avrebbe in assenza completa di slittamento. Si noti inoltre come l'andamento degli sforzi risulti continuo, dato l'annullarsi di $\mu_*$ sul bordo di $\sigma_*$, nel passaggio da $\tau$ a $\sigma_*$.

Il momento torcente è dato dalla formula

$$
(48) \quad M = \int_\sigma [m_\tau x - l_\tau y]\cdot d\sigma + \int_{\sigma_*}[(m_* - m_\tau)x - (l_* - l_\tau)y]\cdot d\sigma_*
$$

cioè, stanti le formule (40), (42), (45),

$$
\begin{aligned}
M &= \mp\frac{fP}{2\pi b\beta}\int_\sigma\left[\beta\frac{\partial\mu^3}{\partial x}x - \alpha\frac{\partial\mu^3}{\partial y}y\right]d\sigma \pm \frac{fP\lambda^3}{2\pi b\beta}\int_{\sigma^*}\left[\beta\frac{\partial\mu_*^3}{\partial x}x - \alpha\frac{\partial\mu_*^3}{\partial y}y\right]d\sigma_* \\
&= \pm\frac{3fP}{2\pi b\beta}\int_\sigma\left[\beta\mu\frac{x^2}{a^2} - \alpha\mu\frac{y^2}{b^2}\right]d\sigma \mp \frac{3fP\lambda^3}{2\pi b\beta}\int_{\sigma_*}\left[\beta\mu^*\frac{x^2}{a_*^2} - \alpha\mu^*\frac{y^2}{b_*^2}\right]d\sigma_*
\end{aligned}
$$

e quindi, a calcoli fatti,

$$
(49) \qquad M = \pm\frac{faP}{5}\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)(1-\lambda^5)
$$

valendo il segno concorde con quello di $\omega$.

Eliminando $\lambda$ tra la (49) e la (47) si otterrebbe il legame tra $M$ ed $\omega$. A noi basterà calcolare il legame tra le concomitanti variazioni iniziali di $M$ e di $\omega$, vale a dire la $\left(\frac{d M}{d \omega}\right)_{\text{iniz.}}$. Si trova

$$(50) \qquad \left(\frac{d M}{d \omega}\right)_{\text{iniz}} = \left(\frac{d M}{d \lambda}\right)_{\text{iniz}} \cdot \left(\frac{d \lambda}{d \omega}\right)_{\text{iniz}} = \frac{2}{3} \pi a b (\alpha - \beta) > 0$$

che è lo stesso valore trovato in assenza di slittamento.

b) *Seconda approssimazione.* Approssimiamo ora la $F(\mu)$ mediante due termini del suo sviluppo (34)

$$(51) \qquad F(\mu) \cong \mp \frac{f P}{2 \pi b \beta}\left(\mu^3 + \frac{3}{10} \mu^5\right) \qquad (\omega \gtrless 0).$$

Ne segue per gli sforzi tangenziali in $\tau$ il valore approssimato

$$(52) \qquad \begin{cases} l_\tau \cong \mp \dfrac{f P}{2 \pi b} \dfrac{\alpha}{\beta} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\mu^3 + \dfrac{3}{10} \mu^5\right) \\[2ex] m_\tau \cong \mp \dfrac{f P}{2 \pi b} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\mu^3 + \dfrac{3}{10} \mu^5\right) \end{cases}$$

e le equazioni (36), tenuti presenti i potenziali introdotti al n. 2, assumono la forma

$$(53) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\sigma^*}\left[\varkappa \frac{l_* - l_\tau}{r} - \chi (l_* - l_\tau) \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - \chi (m_* - m_\tau) \frac{\partial^2 r}{\partial x \cdot \partial y}\right] d\xi \, d\eta = \\[2ex] \displaystyle\qquad = \pm \frac{f P}{2 \pi b \beta}\left[\varkappa \alpha \frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{V}_3 + \frac{3}{10} \overline{V}_5\right) - \right. \\[2ex] \displaystyle\qquad\qquad \left. - \chi (\alpha + \beta) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} \cdot \left(\overline{D}_3 + \frac{3}{10} \overline{D}_5\right)\right] - \omega y \\[2ex] \displaystyle\int_{\sigma^*}\left[\varkappa \frac{m_* - m_\tau}{r} - \chi (m_* - m_\tau) \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} - \chi (l_* - l_\tau) \frac{\partial^2 r}{\partial x \, \partial y}\right] d\xi \, d\eta = \\[2ex] \displaystyle\qquad = \pm \frac{f P}{2 \pi b \beta}\left[\varkappa \beta \frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{V}_3 + \frac{3}{10} \overline{V}_5\right) - \right. \\[2ex] \displaystyle\qquad\qquad \left. - \chi (\alpha + \beta) \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} \cdot \left(\overline{D}_3 + \frac{3}{10} \overline{D}_5\right)\right] + \omega x. \end{cases}$$

In conformità al procedimento generale accennato al principio di questo numero, cercheremo una soluzione del tipo

$$(54)\qquad \left\{\begin{aligned} l_* - l_\tau &= \frac{\alpha}{\beta}\frac{\partial}{\partial y}[\gamma_1^{(2)}\mu_*^3 + \gamma_2^{(2)}\mu_*^5] \\ m_* - m_\tau &= \frac{\partial}{\partial x}[\gamma_1^{(2)}\mu_*^3 + \gamma_2^{(2)}\mu_*^5] \end{aligned}\right.$$

essendo $\gamma_1^{(2)}$ e $\gamma_2^{(2)}$ due convenienti costanti. A sostituzioni eseguite le (53) divengono

$$(55)\qquad \left\{\begin{aligned} &\varkappa\frac{\alpha}{\beta}\left\{\gamma_1^{(2)}\frac{\partial\,\overline{V}_3^*}{\partial y} + \gamma_2^{(2)}\frac{\partial\,\overline{V}_5^*}{\partial y}\right\} - \chi\frac{\alpha+\beta}{\beta}\left\{\gamma_1^{(2)}\frac{\partial^3\,\overline{D}_3^*}{\partial x^2\,\partial y} + \gamma_2^{(2)}\frac{\partial^3\,\overline{D}_5^*}{\partial x^2\,\partial y}\right\} \mp \\ &\mp\frac{fP}{2\pi b\beta}\left[\varkappa\alpha\left\{\frac{\partial\,\overline{V}_3}{\partial y} + \frac{3}{10}\frac{\partial\,\overline{V}_5}{\partial y}\right\} - \chi(\alpha+\beta)\left\{\frac{\partial^3\,\overline{D}_3}{\partial x^2\,\partial y} + \frac{3}{10}\frac{\partial^3\,\overline{D}_5}{\partial x^2\,\partial y}\right\}\right] + \omega y = 0 \\ &\varkappa\left\{\gamma_1^{(2)}\frac{\partial\,\overline{V}_3^*}{\partial x} + \gamma_2^{(2)}\frac{\partial\,\overline{V}_5^*}{\partial x}\right\} - \chi\frac{\alpha+\beta}{\beta}\left\{\gamma_1^{(2)}\frac{\partial^3\,\overline{D}_3^*}{\partial x\,\partial y^2} + \gamma_2^{(2)}\frac{\partial^3\,\overline{D}_5^*}{\partial x\,\partial y^2}\right\} \mp \\ &\mp\frac{fP}{2\pi b\beta}\left[\varkappa\beta\left\{\frac{\partial\,\overline{V}_3}{\partial x} + \frac{3}{10}\frac{\partial\,\overline{V}_5}{\partial x}\right\} - \chi(\alpha+\beta)\left\{\frac{\partial^3\,\overline{D}_3}{\partial x\,\partial y^2} + \frac{3}{10}\frac{\partial^3\,\overline{D}_5}{\partial x\,\partial y^2}\right\}\right] - \omega x = 0 \end{aligned}\right.$$

(segno superiore o inferiore secondo che è $\omega > 0$ o $\omega < 0$).

Se si tien conto delle tabelle I e II del n. 2 si riconosce che nelle (55) compaiono ora polinomi di quinto grado, che per brevità non esplicitiamo, nelle potenze dispari di $x$ e di $y$.

Identificando a zero i singoli termini di quinto grado si ottiene

$$(56)\qquad \gamma_2^{(2)} = \pm\frac{3fP}{20\cdot\pi\cdot b}\lambda^5 \qquad (\omega \gtrless 0).$$

Annullando i termini di terzo grado si ha poi

$$(57)\qquad \gamma_1^{(2)} = \pm\frac{fP}{2\pi b}\left[1 + \frac{3}{4}(1-\lambda^2)\right]\lambda^3 \qquad (\omega \gtrless 0).$$

Infine annullando i termini di primo grado si ricava

$$(58)\qquad \frac{3fP}{32\cdot\pi b\beta}(3\lambda^4 - 14\lambda^2 + 11) + |\omega| = 0.$$

La più piccola radice positiva dell'equazione (58), uguale ad 1 per $\omega = 0$, dà il valore di $\lambda$ in funzione di $|\omega|$. Determinato $\lambda$ restano determinati $\gamma_1^{(2)}$ e $\gamma_2^{(2)}$ e quindi, in virtù delle (54), la distribuzione degli sforzi tangenziali in $\sigma_*$.

Utilizzando ancora la (48), calcoliamo il momento torcente:

$$M = \frac{f\,a\,P}{140}\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)(34 - 49\,\lambda^5 + 15\,\lambda^7). \tag{59}$$

Terminiamo col calcolo del valore iniziale (cioè per $\lambda = 1$) di $\frac{d\,M}{d\,\omega}$:

$$\left(\frac{d\,M}{d\,\omega}\right)_{\text{in}} = \left(\frac{d\,M}{d\,\lambda}\right)_{\text{in}} \cdot \left(\frac{d\,\lambda}{d\,\omega}\right)_{\text{in}} = \frac{2}{3}\,\pi\,a\,b\,(\alpha - \beta) \tag{60}$$

che risulta lo stesso trovato in prima approssimazione e che già abbiamo visto coincidere col valore trovato in assenza completa di slittamento.

*6. Calcolo del massimo momento torcente.* Sempre subordinatamente alle ipotesi del n. 3, calcoliamo ora il valore (assoluto) del momento torcente in condizioni di equilibrio limite, cioè allorchè è $\lambda = 0$ e $\tau \equiv \sigma$. In tali condizioni in tutta la $\sigma$ deve ritenersi valida la distribuzione (35) e il corrispondente momento totale, che è il massimo momento torcente compatibile con l'equilibrio globale dei due corpi, può calcolarsi esattamente:

$$|M| = \frac{3\,f\,P}{2\,\pi\,b}\int_\sigma \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{\alpha}{\beta}\,\frac{y^2}{b^2}\right)d\,x\,d\,y = \frac{3\,f\,P\,\pi\,a}{32}\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right). \tag{61}$$

Vale la pena di confrontare il valore ora trovato col valore del massimo momento torcente calcolato parecchi decenni orsono da LÉAUTÉ e LECORNU [8, pag. 485] sulla base della duplice ammissione che lo sforzo tangenziale nell'area ellittica $\sigma$ di contatto sia in ogni punto $P$ pari a $f\,p$, cioè il massimo compatibile con le leggi di attrito, e che la sua direzione sia perpendicolare al diametro di $\sigma$ per $P$, cioè quella di massimo momento. Il valore trovato dal LECORNU è dato dalla formula

$$|M'| = \frac{3}{8}\,f\,P\,a\,K(e) = \frac{3}{32}\,f\,P\,L \tag{62}$$

essendo $L$ $[L = 4\,a\,K(e)]$ la lunghezza del contorno dell'ellisse $\sigma$ di contatto.

È chiaro che per $a > b$ e $b \neq 0$ i valori (61) e (62) sono diversi e che il primo è minore del secondo, posto che la distribuzione di sforzi tangenziali ammessa dal LECORNU è proprio quella che, a parità di sforzi normali, dà luogo al massimo possibile momento torcente. Le due formule invece coincidono come è ben naturale, coincidendo allora le corrispondenti ipotesi, nei due casi limite $a = b > 0$ e $a > 0$, $b = 0$. Una accurata determinazione sperimentale del coefficiente di attrito statico di giro tra corpi elastici non dotati di simmetria assiale rispetto alla comune normale potrebbe forse dare, indirettamente, qualche indicazione sulla maggiore o minore attendibilità delle ipotesi ammesse nel presente lavoro.

## BIBLIOGRAFIA


1. H. HERTZ, *Ges. Werke*, Bd I, Leipzig 1895.
2. A. E. H. LOVE, *Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge University Press, fourth edition, 1934.
3. J. L. LUBKIN, *The Torsion of elastic Spheres in Contact*, Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, June 1951.
4. C. CATTANEO, *Sulla torsione di due sfere elastiche a contatto*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie III, Vol. VI, Fasc. 1-2, 1952.
5. E. CESARO, *Introduzione alla Teoria matematica della Elasticità*, Torino, Bocca, 1894.
6. R. D. MINDLIN, *Compliance of Elastic Bodies in Contact*, Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, September 1949.
7. M. PACELLI, *Esame di una successione di potenziali di strato ellittico con applicazione a problemi armonici nello spazio e nel semispazio.* Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, serie III, vol. IX, Fasc. 1-2, 1955.
8. L. LECORNU, *Cours de Mécanique*, Paris, Gauthier-Villars, 1914, Tome I, Livre IV, Chap. VI.