

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

WILHELM BLASCHKE

## **Luigi Bianchi e la geometria differenziale**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 8, n° 1-2 (1954), p. 43-52*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1954\\_3\\_8\\_1-2\\_43\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1954_3_8_1-2_43_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## LUIGI BIANCHI E LA GEOMETRIA DIFFERENZIALE

DISCORSO TENUTO A PISA IL 26 DI SETTEMBRE 1953

da WILHELM BLASCHKE

Ringrazio sentitamente i miei colleghi italiani per l'onore concessomi di rievocare LUIGI BIANCHI. Da un lato lo faccio ben volentieri sentendomi fin ad un certo punto allievo del geometra pisano nello studio della Geometria Differenziale. Dall'altra parte questo compito è per me piuttosto duro, perchè non mi sento padrone della loro lingua e perciò certamente non posso competere in eloquenza col magnifico discorso di GAETANO SCORZA « In memoria di LUIGI BIANCHI » pronunciato qui nella Scuola Normale Superiore nel 1930. Ma ricordandomi della persona modestissima del nostro maestro, che sempre cercava di evitare gli onori e di non mettersi in mostra, credo che non ci sia bisogno in questa commemorazione di tanta eloquenza e di parole particolarmente ricercate. Ma c'è un'altra mia difficoltà: anche in materia mi sento poco competente. Difatti il campo più favorito dal BIANCHI era quello delle cosiddette trasformazioni delle superficie, cioè metodi che permettono per esempio la derivazione d'una infinità di superficie applicabili sulle quadriche dalla conoscenza di una tale superficie. Ora in questo campo preferito dal geometra Pisano non ho mai lavorato, mentre per esempio all'eminente geometra russo FINIKOFF ed all'amico RENATO CALAPSO sono dovuti bellissimi risultati. Per queste mie ovvie mancanze chiedo scusa ai colleghi presenti.

Forse conviene per questa mia conferenza il programma seguente. Comincio col ricordare brevemente la persona ed i lavori del BIANCHI, per accennare poi al suo influsso sullo sviluppo della Geometria Differenziale negli ultimi decenni. Prego i miei ascoltatori di non considerare come una mancanza di modestia da parte mia, se nel seguito preferisco apertamente i miei personali punti di vista, anzi di considerare ciò soltanto come mia incapacità di elevarmi ad un livello più alto.

Dopo di essermi laureato a Vienna con WIRTINGER e dopo d'aver proseguito i miei studi geometrici a Bonn collo STUDY venni nell'autunno del 1909 a Pisa, ove in questi tempi fioriva la matematica con BERTINI, BIANCHI, DINI e NICOLETTI. La bella e tranquilla città di Galileo colle sue meraviglie d'arte medioevale m'impressionò profondamente e m'ispirò tale amore per l'Italia, che per gli anni seguenti della mia vita coglievo ogni occasione per ritornarvi in generale col pretesto e colla scusa di fare delle conferenze geometriche. Ma la più grande impressione in quegli anni della mia lontana gioventù mi fece la persona massiccia, profondamente erudita e laboriosa e (nonostante le difficoltà della sua vita) anche serena e gioviale del BIANCHI. « Ascoltarlo era un incanto ». Per soli tre mesi ebbi la fortuna di poter seguire i suoi corsi, quelli sulle equazioni a derivate parziali all'Università e quelli sulla teoria di GALOIS alla Scuola Normale. Altri giovani studiosi di matematica di quell'epoca fortunata di Pisa erano per esempio i miei amici PICONE, SANSONE e SIGNORINI.

BIANCHI nacque a Parma il 18-1-1856, entrò nel 1873 come allievo interno nella Scuola Normale Superiore fondata da Napoleone nel 1813. All'Università i suoi maestri principali furono BETTI e DINI. Dopo la laurea nel 1877 e l'abilitazione nel 1879 a Pisa proseguì per due anni gli studi in Germania a Monaco e Gottinga specialmente con FELIX KLEIN. Ivi fece la conoscenza di WEINGARTEN, col quale è legato per esempio dal comune studio delle superficie e delle congruenze  $W$ . Mentre gli scienziati qualche volta litigano sulla priorità, questi due amici competevano nell'attribuire le loro scoperte l'uno all'altro. Nel 1881 BIANCHI entrò come professore nella Scuola Normale, nel 1886 ottenne la cattedra all'Università di Pisa, alla quale rimase fedele per tutta la vita. Al DINI successe nel 1918 alla direzione della Scuola Normale. Morì il 6-6-1928 a Pisa colmo di onori, Senatore del Regno e membro dell'Accademia dei Lincei. Fu una vita tranquilla e serena e poco movimentata. « Fu », come disse lo SCORZA, « la vita dello studioso, schiva dei rumori mondani, tutta assorta nell'appassionato fervore dell'indagine scientifica e perciò spesso arrisa da un mite, diffuso lume di poesia ». « Pisa riconoscente » scrive FINIKOFF, « lo tumulò nel suo Campo Santo, famoso in tutto il mondo, vicino al Duomo ed alla torre pendente, sulla quale si dice che GALILEO studiò le leggi sulla caduta dei corpi ».

Da questa memoria di S. P. FINIKOFF del 1930 mi premettano di citare anche il confronto fra BIANCHI e DARBOUX. « Alla fine del XIX secolo », scrive l'eminente geometra RUSSO, « due figure di eccezionale importanza illuminano la geometria BIANCHI e DARBOUX. Ambedue hanno interamente consacrate alla geometria differenziale le loro massime forze creative. Tutti e due hanno creato le loro scuole, ciascuno di loro ha scritto un fondamentale compendio sulla geometria differenziale, DARBOUX la « *Theorie des Sur-*

faces » in quattro volumi dal 1887 in poi, e BIANCHI le « Lezioni di geometria differenziale » dal 1885 in poi con due o con tre volumi. Il confronto tra queste opere è particolarmente istruttivo. Leggendo DARBOUX ci troviamo ad una sorgente esuberante di idee. Egli principia con la costruzione del suo speciale metodo cinematico, ma già nel primo volume egli passa alla determinazione di una superficie con tre soluzioni di una equazione alle derivate parziali del second'ordine. Là si possono trovare anche metodi proiettivi, di lì prende origine la geometria conforme. Si può dire, in breve, che ogni problema viene risolto col metodo più addatto. Tutto ciò è elegante senza inutili riferimenti analitici, fatto in base a semplici e geniali considerazioni geometriche; in una parola, come disse E. CARTAN: leggendo DARBOUX ci sembra, che tutto sia fatto nella maniera più perfetta da non poterci togliere o aggiungere niente. Questo si spiega facilmente, essendo il metodo costruito proprio per la soluzione del problema considerato. Per un'estensione dei risultati bisogna rifare interamente il metodo della soluzione ».

« Nel BIANCHI troviamo altro. Incontriamo prima di tutto delle lunghe esposizioni, talvolta anche noiose. Prendo per esempio il terzo volume complementare della seconda edizione delle lezioni, volume dedicato alla magnifica e, si potrebbe dire, geniale creazione delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche, dove non si sa di che cosa meravigliarsi maggiormente, se dell'audacia dell'autore o dell'acutezza del suo genio. Aprendo dunque questo volume a caso noi troviamo prima di tutto delle esposizioni nelle quali il lettore affoga letteralmente sembrandogli incomprendibile come l'autore possa attraverso di esse giungere a lieto fine. E questa non è un'eccezione; in fondo la stessa cosa si trova anche se in proporzioni minori, negli altri due volumi della stessa e di qualsiasi altra edizione delle « Lezioni ». La stessa abbondanza di formule caratterizza qualsiasi memoria del geometra pisano. Eppure, nonostante questa pesante forma esteriore, il BIANCHI trova più scolari e lettori di DARBOUX, e ciò è provato dalle sei edizioni e dalle traduzioni delle lezioni sempre interamente rifatte e arricchite in confronto colle due edizioni quasi identiche delle leçons di DARBOUX. Il BIANCHI è straordinariamente modesto nei mezzi usati; essenzialmente non si tratta che d'un metodo solo. Per la determinazione d'una superficie egli ricorre quasi sempre alle forme quadratiche differenziali di GAUSS, facendo uso dei simboli di CHRISTOFFEL... Egli sceglie la via più dritta, senza artifici, direi quasi elementare... Egli prepara formule per così dire di riserva. Pare che esse invitino a continuare la ricerca. Ad ogni pagina delle lezioni ci pare che l'autore si sia appena alzato dal tavolo di lavoro cedendoci il suo posto... ». Così l'eminente geometra russo.

Nel 1908 al congresso internazionale dei matematici a Roma ebbi il piacere di poter confrontare questi due sommi rappresentanti della geometria differenziale, l'alta, elegante e snella figura del parigino, e la media figura, alquanto rustica, ma molto più simpatica, del pisano.

Ora entro nella parte più poderosa della mia allocuzione dovendo accennare al contenuto dei lavori di BIANCHI tenendo conto del detto maligno: Di lavori matematici o non si capisce nulla o si sa meglio. Questo mio cenno sarà necessariamente molto superficiale già in conseguenza della immensa mole della sua opera, avendo egli pubblicato più di duecento memorie nei giornali matematici. Inoltre, forse ancora di maggiore importanza sono i suoi trattati di algebra, aritmetica, teoria delle funzioni, funzioni ellittiche, geometria analitica, gruppi continui e specialmente quelli di geometria differenziale. Mi limiterò alla considerazione della sola geometria differenziale appoggiandomi su commemorazioni del BIANCHI da parte di G. FUBINI (1929), S. P. FINIKOFF (1930) e GAETANO SCORZA (1930).

Anche i matematici, ai quali sono concessi molti anni di vita e di lavoro, concepiscono in generale le loro idee principali nella gioventù. Così anche il BIANCHI. Già nella sua tesi di abilitazione (1879) iniziò la trasformazione delle superficie pseudosferiche, cioè a curvatura Gaussiana costante negativa, oggetto che colle sue generalizzazioni lo accompagnò per quasi mezzo secolo di vita laboriosa.

Partendo da una superficie  $S$  consideriamo le due falde « focali »  $S_1, S_2$ , cioè le due falde toccate dalle normali della  $S$ . Il BIANCHI studia specialmente il caso, che le due falde  $S_1, S_2$  siano « pseudosferiche » cioè a curvatura per esempio uguale a meno uno. Il passaggio dalla falda  $S_1$  alla  $S_2$  egli chiama « trasformazione complementare ». Se  $P_1$  è un punto della  $S_1$ , il punto  $P_2$  corrispondente della  $S_2$  giace su un cerchio di raggio uno col centro  $P_1$  e situato nel piano tangente della  $S_1$  in  $P_1$ . Tali  $S_2$  tagliano ortogonalmente la schiera a due parametri dei nostri cerchi, cioè sono traiettorie ortogonali di questa famiglia di cerchi considerata già da RIBAUCCOUR. Così conoscendo una pseudosfera se ne deduce una famiglia di tali superficie, che contiene un parametro e ripetendo questo passo s'introduce un numero arbitrario di parametri. Questa ripetizione è agevolata dal cosiddetto « teorema di permutabilità » del BIANCHI, teorema sul quale non voglio insistere. Questa idea di trasformazione ebbe grande successo. Per esempio il norvegese S. LIE, che era uno dei matematici più originali dell'epoca, trovò subito un altro tipo di trasformazione ma meno efficace di quella del BIANCHI, e un altro norvegese BÄCKLUND scoprì nel 1883 una generalizzazione della trasformazione complementare studiata poi pure dal BIANCHI.

L'estensione più ampia trovata dal BIANCHI delle sue trasformazioni riguarda le superficie applicabili sulle quadriche. Il punto cardinale di questa sua ricerca è il seguente: Ogni tale superficie è falda focale d'una doppia infinità di congruenze rettilinee  $W$ , che hanno come seconda falda focale un'altra tale superficie, applicabile sulla stessa quadrica. Egli ebbe la fortuna d'incontrarsi in queste ricerche con molti matematici valorosi, come per esempio DARBOUX, DEMOULIN, GUICHARD e RIBAUCCOUR in Francia, JONAS, LIE e WEINGARTEN in Germania, P. CALAPSO, FUBINI, PICONE, C. SEGRE e TORTORICI in Italia, FINIKOFF in Russia, EISENHART negli Stati Uniti. Del BIANCHI esistono circa 140 memorie sulle trasformazioni delle superficie anche in connessione coi sistemi tripli ortogonali introdotti da LAMÈ. Cito il FUBINI: « L'opera del BIANCHI lueggia un vastissimo territorio, di cui singoli lavori mettono in luce molti dei punti più notevoli; ma tra questi viene costruita una rete fittissima di strade che li collegano l'uno all'altro ».

Mentre il DARBOUX usò la cinematica come fondamento della sua teoria delle superficie, il BIANCHI studiò secondo questo ramo iniziale della meccanica specialmente il rotolamento delle superficie e le congruenze di sfere connesse con queste ricerche.

Negli ultimi anni FRANCESCO SEVERI, forse impressionato dall'opera pesante del misterioso matematico francese N. BOURBAKI, scrisse « la matematica odierna è ammalata di astrattismo ». Anche il BIANCHI come geometra costruttivo non era favorevole ai ragionamenti logistici. Egli colmò anche gli spazi noneuclidei e riemanniani d'un abbondanza di figure ed idee intuitive. Per menzionare un esempio semplice, Egli studiò le belle proprietà geometriche delle superficie a curvatura nulla nello spazio ellittico. Alla fine del secolo scorso uscirono i « Fondamenti di geometria » di HILBERT e sotto l'influsso di questo libro risorse la moda greca dell'assiomatistica. BIANCHI confrontò gli studi sui fondamenti con un lungo treno fermo in una stazione: tutti gridano « partenza! » ma il treno non si muove. Anche il metodo tensoriale pare che non sia stato favorito dal nostro maestro, benchè Egli abbia scoperta la connessione intima del « trasporto » o « parallelismo » di LEVI-CIVITA colle reti di CEBICEFF.

Una critica severa dei metodi di BIANCHI è dovuta allo STUDY, che lo accusò di mancanza di rigore. E difatti: mentre per esempio la teoria delle funzioni analitiche nel caso d'una sola variabile complessa nella scuola di WEIERSTRASS era già irrigidita in modo senile, la geometria di DARBOUX e BIANCHI godeva ancora d'una spensieratezza giovanile. Di questo fatto non è da meravigliarsi. La teoria delle funzioni coincide essenzialmente collo studio della rappresentazione conforme e collo studio d'una sola equazione

a derivate parziali, cioè di quella di LAPLACE :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

e le difficoltà sorgono colle complicazioni delle regioni considerate. In confronto con questa semplicità gli oggetti della teoria delle superficie sono d'una varietà straordinaria ed il campo delle equazioni differenziali corrispondenti non è limitato a quelle del second'ordine. Per esempio la determinazione d'una cosiddetta famiglia di LAMÉ, cioè d'una famiglia di superficie, immersa in un sistema triplo ortogonale, dipende da una equazione del terz'ordine. Così si capisce, che il mio caro maestro STUDY coi suoi sforzi d'introdurre il rigorismo nel vasto territorio della geometria differenziale sia riuscito a fare pochi passi non senza incespicare.

Non posso fermarmi sulla persona del BIANCHI, sulla sua « bontà mite, sulla sua candida e sincera modestia, sull'integrità semplice e serena », come disse GAETANO SCORZA, del quale valgono gli stessi elogi. Ma forse possiamo volgere uno sguardo fugace allo sviluppo della geometria differenziale dopo il maestro pisano. Cominciamo colle geometrie, che qualche volta si chiamano le geometrie di KLEIN, perchè considerate nel suo famoso « programma di Erlangen » (1872), e in primo luogo colla geometria proiettiva dal punto di vista differenziale.

Mentre il BIANCHI ed i suoi contemporanei PASQUALE CALAPSO, DARBOUX, DEMOULIN, GUICHARD, TZITZEICA, VOSS, WEINGARTEN studiavano per caso proprietà differenziali delle superficie e di altre figure geometriche invarianti per trasformazioni proiettive, come per esempio le linee asintotiche delle superficie e le congruenze  $W$  di rette, la sistemazione della geometria proiettivo-differenziale è dovuta essenzialmente al trattato di FUBINI-CECH del 1931. Questo genere di ricerche ebbe grandissimo successo nel piccolo mondo geometrico; basta citare in Italia per esempio lavori di BOMPIANI e TERRACINI. Nel 1950 uscì il primo volume d'un nuovo trattato su quest'argomento del mio amico G. BOL, e si trova in questo volume anche una lista lunga più di 60 pagine di lavori sull'argomento. Il secondo volume del trattato di BOL è in corso di stampa, il terzo esiste in manoscritto. Così avremo fra poco un trattato completo sul nostro argomento colla restrizione allo spazio proiettivo a tre dimensioni e con molti contributi originali di BOL e della sua scuola.

Meno considerata è la più ricca geometria differenziale del gruppo affine sulla quale scrissi un libro col mio amico REIDEMEISTER nel 1923, e quella dei gruppi di MOEBIUS, LAGUERRE e LIE, che mutano le sfere fra di loro

e sui quali esiste il mio libro del 1929, dovuto essenzialmente al mio defunto scolaro, collaboratore ed amico G. THOMSEN. Per tutte queste ricerche si trovano suggerimenti e risultati anche specialmente nei lavori del nostro maestro pisano

Un altro ramo della geometria differenziale, che fin'ad un certo punto si può associare alle geometrie di KLEIN, è la «teoria dei tessuti», ossia «topologia differenziale», teoria alla quale dedicai un libro scritto coll'amico BOL nel 1938. Si tratta di trovare proprietà differenziali di figure geometriche (chiamate «tessuti») invarianti per trasformazioni puntuali «arbitrarie», cioè trasformazioni sottoposte soltanto a certe restrizioni di regolarità<sup>(1)</sup>. Questi tessuti sono in connessione intima colla Nomografia degli ingegneri, ma anche in modo ancora non abbastanza chiaro colla geometria algebrica, quest'altro predominio della scuola matematica italiana.

Mentre lo sviluppo della geometria di RIEMANN nonostante i contributi di CHRISTOFFEL, BELTRAMI, F. SCHUR, RICCI, VOSS e BIANCHI, del quale si conoscono per esempio le cosiddette «formule del BIANCHI», trovate anche da RICCI e VOSS, era alquanto sonnolente, essa si risvegliò magnificamente colla scoperta della relatività generale di EINSTEIN e HILBERT dopo il 1913. Un contributo essenziale era quello di LEVI-CIVITA col suo «trasporto» o «parallelismo» o colle «connessioni», nel 1916, previsto da LORD KELVIN (1867) e studiato e generalizzato da E. CARTAN, G. HESSENBERG, J. A. SCHOUTEN, H. WEYL e tanti altri. Il contributo di BIANCHI a questa teoria abbiamo già menzionato. Le connessioni condussero ad una generalizzazione delle geometrie di KLEIN specialmente ad una geometria della connessione proiettiva considerata da E. CARTAN e da ENEA BORTOLOTTI. Attraente è anche la connessione studiata da W. WIRTINGER, che usa le trasformazioni di contatto di S. LIE. Non voglio fermarmi su questo ramo della geometria, forse più adatto per la commemorazione di RICCI. Ma potrei ancora aggiungere, che gli americani in quest'ultimi anni sono riusciti ad estendere la formula integrale di GAUSS-BONNET allo spazio Riemanniano, estensione che permette il calcolo della caratteristica di EULERO-POINCARÉ d'una varietà Riemanniana mediante un integrale, progresso essenziale dovuto ad ALLENDOERFER ed S. S. CHERN. Importanti sono pure le metriche del KÄHLER :

$$d s^2 = \sum g_{jk} d u_j d u_k,$$

ove i coefficienti  $g_{jk}$  ammettono una specie di potenziale  $V$ , in guisa che

---

<sup>(1)</sup> Introduzioni alla teoria dei tessuti si stanno pubblicando nei Rendiconti dei Seminari matematici di Messina e Barcelona, un'altra a Basilea, 1954.



sia

$$g_{jk} = \frac{\partial^2 V}{\partial u_j \partial u_k}.$$

Le connessioni s'estendono pure ai tessuti.

Un'altra meta della geometria differenziale odierna è lo studio delle « questioni globali » o « questioni in grande ». Finora in questo campo vincolato alla topologia mancano ancora metodi generali, ma esistono degli esempi molto istruttivi. Limitiamoci ad un solo esempio. Secondo ricerche, che risalgono a GAUSS e che sono trattate largamente dal BIANCHI, sappiamo che un pezzo sufficientemente piccolo d'una superficie (abbastanza regolare) è « piegabile », cioè deformabile in maniera, che le lunghezze delle curve sulla superficie restino inalterate. Ma due superficie convesse e chiuse in relazione « isometrica » fra di loro sono necessariamente congruenti. Questo teorema sulla « rigidità degli ovaloidi » fu studiato da molti matematici. Forse la più semplice dimostrazione è quella di G. HERGLOTZ (1924), l'eminente matematico di Gottinga morto nell'ultima primavera. Questo teorema di unicità è connesso con un teorema di esistenza, studiata la prima volta da H. WEYL, poi da HERGLOTZ e BLASCHKE, ma dimostrato effettivamente dal CACCIOPOLI. Si tratta di questo: Su una sfera si prescrive una metrica Gaussiana a curvatura positiva. Allora esiste nello spazio euclideo un'ovaloide, immagine della sfera, tale che la metrica trasferita sull'ovaloide coincida con quella dello spazio.

Mentre tutte queste dimostrazioni di rigidità, suppongono certe restrizioni di regolarità dell'ovaloide, geometri russi in quest'ultimi anni riuscirono a dare dimostrazioni dell'unicità e dell'esistenza valide senza nessuna tale restrizione, valide dunque anche nel caso dei poliedri, caso trattato già nel 1812 dal giovane CAUCHY in conseguenza d'un suggerimento del vecchio LAGRANGE in relazione con un'asserzione nel libro XI degli elementi d'EUCLIDE. Queste dimostrazioni esaurienti sono dovute a A. D. ALEXANDROFF ed a A. W. POGORELOFF. Ecco un esempio d'un nuovo indirizzo nella geometria differenziale, favorito anche dal calcolo delle variazioni per esempio della scuola di TONELLI, cioè l'indirizzo della riduzione delle condizioni di regolarità per gli enti geometrici ammessi.

Il nostro ramo di geometria si chiamò da EULERO in poi « Applicazione dell'Analisi alla Geometria », ma colle lezioni di BIANCHI la denominazione si ridusse a « Geometria Differenziale »; certamente più breve, ma anche meno significativa. Forse conviene dunque aggiungere alla « geometria differenziale » una « geometria integrale », nella quale gli integrali ottengono il posto preponderante. Per caratterizzare questo ramo, iniziato da ARCHIMEDE, basterà forse una sola formula delle « probabilità geometriche », che

generalizza una formula di STEINER (1840) per il volume  $V_h$  di corpi convessi paralleli  $C_h$  di distanza  $h$  da un corpo convesso  $C_0$ . La formula di STEINER è la seguente

$$V_h = V_0 + A_0 h + M_0 h^2 + \frac{1}{3} K_0 h^3.$$

$A_0, M_0$  significano l'area e l'integrale della curvatura media del contorno  $C'_0$  di  $C_0$ , e  $K_0$  significa l'integrale della curvatura di GAUSS o curvatura totale per  $C'_0$ , cioè nel caso dei corpi convessi  $4\pi$ . La nostra formula più generale tratta di due corpi  $C_0, C_1$  qualsiasi, l'uno  $C_0$  fisso e l'altro  $C_1$  mobile colla « densità cinematica »  $dC_1$  introdotta da POINCARÉ. Si trova difatti

$$\int K(C_0 C_1) dC_1 = 8\pi^2 \{K_0 V_1 + M_0 A_1 + A_0 M_1 + V_0 K_1\}.$$

L'integrale sestuplo è esteso a tutte le posizioni del corpo mobile  $C_1, C_0 C_1$  significa l'intersezione dei due corpi  $C_0$  e  $C_1$ , e  $K(C_0 C_1)$  la corrispondente curvatura totale. Se  $C_0$  è convesso e  $C_1$  è una sfera, la nuova formula si riduce a quella dello STEINER. Di questa geometria integrale tratta un mio piccolo libro del 1937, e quello di REY PASTOR e SANTALÒ SORS, Buenos Aires 1951, e finalmente la « Geometria integral en espacios de curvatura constante », Buenos Aires 1952, pure del mio scolaro ed amico argentino SANTALÒ<sup>(2)</sup>.

L'estensione più generale della geometria differenziale si riferisce agli « spazi fibrati » della scuola del sommo geometra francese E. CARTAN. Ma di questo nuovo ramo del vecchio albero della geometria, ramo connesso colla topologia, non oso parlarvi, dato che vi sono tanti presenti, che ne sanno molto più di me.

Nella nostra epoca stanca delle guerre si parla molto dell'unione europea e si fa poco per raggiungerla. Al tempo del BIANCHI questa unione europea era già perfetta, sebbene soltanto nel campo ristretto della geometria. PLATONE propose l'idea di consegnare il governo ai filosofi, ma ebbe successo negativo coi suoi esperimenti in Sicilia. Chi lo sa, se converrebbe la sostituzione dei filosofi nella proposta di PLATONE coi matematici per assicurare la collaborazione internazionale? Ma sfortunatamente abbiamo pochi matematici disponibili del rango scientifico ed umano di LUIGI BIANCHI.

---

(<sup>2</sup>) Nel 1953 è uscito un nuovo libro di SANTALÒ *sulla geometria integrale*, a Parigi.

## SUPPLEMENTO BIBLIOGRAFICO

Alla fine mi permetto di menzionare qualche articolo sullo sviluppo della geometria differenziale negli ultimi decenni.

S. S. CHERN, « *Some new viewpoints in Differential Geometry in the Large* », Bulletin American Math. Soc. 52 (1946), p. 1-30.

S. P. FINIKOFF, « *Geometria differenziale dello spazio a tre dimensioni* » Matematica v SSSR 1917-1947, p. 861-882 (1948) in russo.

P. K. RASCEFSKIJ, « *Geometria differenziale tensoriale* », Matematica v SSSR 1917-1947, p. 833-918 (1948) in russo.

A. D. ALEXANDROF, « *Geometria in grande* », Matematica v SSSR 1917-1947 (1948) in russo.

F. SIMONART, « *De Gauss a Cartan* », Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. 36, 1010-1025 (1950).

S. S. CHERN, « *Topics in Differential Geometry* », The institute for advanced Study 1951, litografato.

E. VIDAL ABASCAL, « *Concepto de geometria y espacio . . .* », Revista Matematica Hispano Americana (4) 12 (1952), p. 3-31.