

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

ALDO M. PRATELLI

Principi variazionali del campo elettromagnetico

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 7, n° 3-4 (1953), p. 161-203

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1953_3_7_3-4_161_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PRINCIPI VARIAZIONALI DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO

di ALDO M. PRATELLI (Milano)

In una recente Nota Lincea ⁽¹⁾ B. FINZI deduce entrambe le equazioni tensoriali indefinite del campo elettromagnetico nello spazio-tempo pseudo-euclideo da un unico principio variazionale, affermando che è stazionaria (anzi minima) l'azione del campo suddetto, in corrispondenza ad una generica variazione arbitraria del tensore doppio emisimmetrico che rappresenta il campo.

Il lemma che viene sfruttato per dimostrare come dal principio variazionale si deducono le classiche equazioni di MAXWELL in forma tensoriale (o le equazioni di campi più generali, se si modifica l'espressione che dà l'azione) costituisce un'estensione ai tensori emisimmetrici delle varietà pseudo-euclidee quadridimensionali del teorema di decomposizione dei campi vettoriali tridimensionali, da molti attribuito a CLEBSCH ⁽²⁾. Nella sua formulazione classica, questo teorema dimostra come un unico campo vettoriale dello spazio euclideo tridimensionale si decompone nella somma di un campo « lamellare » o « conservativo » (cioè gradiente di un potenziale scalare, e quindi irrotazionale) e di un campo « solenoidale » (cioè rotore di un potenziale vettore). L'analogia formale che intercorre tra le equazioni tensoriali del campo elettromagnetico nello spazio-tempo e le equazioni vettoriali del campo elettrostatico nello spazio geometrico, mi ha suggerito di ricavare da

⁽¹⁾ Cfr. B. FINZI, *Sul principio della minima azione e sulle equazioni elettromagnetiche che se ne deducono*, « Rend. Acc. Lincei » ser. 8, **12** (1952) pp. 378-382, 477-480; B. FINZI, *Sopra una estensione dei campi elettromagnetici*, *ivi*, **13** (1952) pp. 211-215.

⁽²⁾ Cfr. ad es. B. FINZI e M. PASTORI, *Calcolo tensoriale e applicazioni* (Bologna, 1949) p. 48; a questo volume farò nel seguito riferimento per le convenzioni e le definizioni che non d'è esplicitamente. Per i contributi di G. B. STOKES e O. BLUMENTAL al teorema di decomposizione, cfr. A. SOMMERFELD, *Mechanics of Deformable Bodies* (trans. G. KUERTI), (New York, 1950) pp. 146-150.

un unico principio variazionale entrambe le equazioni vettoriali del campo elettrostatico, e di sviluppare successivamente una trattazione che mostra come si possan coordinare i principî variazionali relativi al campo magnetostatico e al campo elettromagnetico stazionario nello spazio geometrico tridimensionale, nonchè i principî relativi al campo elettromagnetico generale nello spazio-tempo.

Per stabilire tali principî variazionali presuppongo il campo regolare nel dominio in cui viene considerato e sul suo contorno, così da poter applicare le classiche trasformazioni di integrali che fanno capo ai teoremi di GAUSS, GREEN, ecc. In taluni casi i potenziali vengono variati solo all'interno della regione, e si ottengono solo le equazioni indefinite che valgono entro la regione stessa; in altri casi i potenziali vengono variati anche al contorno, ottenendo, accanto alle equazioni indefinite, le condizioni al contorno. Ho così occasione di estendere taluni principî noti, e di stabilire principî duali di altri già conosciuti.

Quando si suppone assegnata l'equazione che dà il rotore del campo vettoriale in esame, le variazioni che si possono dare al vettore o al tensore sono necessariamente variazioni irrotazionali, in quanto il solo potenziale che può venir variato è quello dell'addendo irrotazionale: mediante un principio di stazionarietà si ottiene allora l'equazione che dà la divergenza. Viceversa, supposta assegnata a priori l'equazione che dà la divergenza, le variazioni che si possono dare al vettore o al tensore che rappresenta il campo son necessariamente solenoidali, in quanto il solo potenziale che può venir variato è il potenziale dell'addendo solenoidale: e allora dal principio di stazionarietà si deduce l'equazione che dà il rotore. Il classico principio di W. THOMSON (Lord KELVIN), è un caso particolare di quest'ultimo tipo, il classico principio di DIRICHLET è un caso particolare del tipo precedente.

Il campo mesonico (ben diverso dal campo elettromagnetico dal punto di vista fisico) è retto da equazioni che hanno una notevole analogia formale con quelle del campo elettromagnetico. Le equazioni del campo mesonico « vettoriale » neutrale nello spazio-tempo pseudoeuclideo son già state dedotte nella citata Nota Lincea; faccio vedere che anche quelle del campo mesonico « scalare » neutrale si possan dedurre da un unico principio variazionale.

Infine, dopo aver esteso ai vettori e ai tensori emisimmetrici delle varietà pseudoeuclidee pentadimensionali il teorema di decomposizione, mostro che da un unico principio di stazionarietà si ottengono entrambe le equazioni tensoriali che caratterizzano i campi armonici nelle varietà pentadimensionali. Tali campi armonici, fatta una opportuna scelta delle coordinate, possan rappresentare il campo mesonico scalare e il campo mesonico vettoriale, in assenza di « cariche » mesoniche.

È superfluo rilevare l'importanza dei principi variazionali, sia per il sapere che essi hanno quando si studiano i fenomeni naturali con occhio finalistico, sia perchè essi sono strumenti efficaci per dimostrare l'esistenza e per l'effettiva soluzione di problemi concreti, problemi di equilibrio, problemi di propagazione e genericamente problemi dinamici.

La letteratura dei principi variazionali del campo elettromagnetico (come, del resto, dei principi variazionali di tutta la fisica matematica) è perciò assai vasta, e non tutti trovano posto nell'ordinamento unitario dato in questa ricerca.

§ 1. — LA MINIMA ENERGIA DEL CAMPO ELETTROSTATICO.

Preliminari analitici.

Se $U = U(x y z)$ e $V = V(x y z)$ sono due campi scalari, C una regione connessa dello spazio euclideo tridimensionale, S la superficie che ne costituisce il contorno, \mathbf{n} il versore normale volto verso l'interno della regione C , il primo lemma di GREEN asserisce, in condizioni di regolarità⁽³⁾:

$$(1.1) \quad \int_C \text{grad } U \times \text{grad } V \, dC = - \int_S U \frac{\partial V}{\partial n} \, dS - \int_C U \Delta V \, dC,$$

in cui si è posto, come di consueto, $\text{grad } V \times \mathbf{n} = \frac{\partial V}{\partial n}$.

Se U è una funzione armonica, soluzione cioè dell'equazione di LAPLACE $\Delta U = 0$, risulta

$$(1.2) \quad \int_C (\text{grad } U)^2 \, dC = - \int_S U \frac{\partial U}{\partial n} \, dS.$$

È ben nota la proprietà di minimo dell'integrale triplo al primo membro della (1.2), (integrale di DIRICHLET).

Del primo lemma di GREEN è facile ottenere il duale, in forma vettoriale: siano $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x y z)$ e $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x y z)$ due campi vettoriali posizionali: discende dal teorema della divergenza, con semplici calcoli⁽⁴⁾, l'identità:

⁽³⁾ Cfr. ad es. B. FINZI, *Principi variazionali*, Lezioni raccolte da G. GOTUSSO (Milano, 1949), p. 175.

⁽⁴⁾ Cfr. ad es. G. TORALDO DI FRANCA, *Onde elettromagnetiche* (Bologna, 1953), p. 15.

$$(1.3) \quad \int_C \text{rot } \mathbf{u} \times \text{rot } \mathbf{v} \, dC = \int_C \mathbf{u} \times \text{rot } \text{rot } \mathbf{v} \, dC - \int_S \text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} \times \mathbf{n} \, dS.$$

D'altra parte, assegnato il campo $\mathbf{w} = \text{rot } \mathbf{v}$, il potenziale vettore \mathbf{v} si può supporre solenoidale senza pregiudizio della generalità (in quanto esso è definito a meno d'un gradiente addittivo), cioè tale da soddisfare l'equazione $\text{div } \mathbf{v} = 0$. Allora $\Delta \mathbf{v} = -\text{rot } \text{rot } \mathbf{v}$, e si trova, analogamente alla (1.1):

$$(1.3') \quad \int_C \text{rot } \mathbf{u} \times \text{rot } \mathbf{v} \, dC = -\int_C \mathbf{u} \times \Delta \mathbf{v} \, dC - \int_S \text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} \times \mathbf{n} \, dS.$$

Se infine $\Delta \mathbf{u} = 0$, cioè se le tre componenti scalari del vettore \mathbf{u} soddisfano all'equazione di LAPLACE, si verifica, analogamente alla (1.2):

$$(1.4) \quad \int_C (\text{rot } \mathbf{u})^2 \, dC = -\int_S \text{rot } \mathbf{u} \wedge \mathbf{u} \times \mathbf{n} \, dS.$$

È evidente allora la proprietà di minimo dell'integrale al primo membro della (1.4), integrale triplo che denomino « integrale di THOMSON ».

a) Variazione libera del campo.

Supponiamo che la sede del campo elettrostatico sia il vuoto, cosicchè esso sia individuato da un unico vettore posizionale \mathbf{E} , esprime il campo elettrico.

Si chiama *energia di puro campo* l'integrale triplo⁽⁵⁾

$$(1.5) \quad \mathcal{A} = \int_C \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{E} \, dC.$$

Il teorema di decomposizione (di CLEBSCH) applicato al campo vettoriale \mathbf{E} , assicura

$$(1.6) \quad \mathbf{E} = -\text{grad } \alpha + \text{rot } \mathbf{a}.$$

Diamo ad \mathbf{E} una variazione infinitesimale $\delta \mathbf{E}$ libera. Dalla (1.6) segue

$$(1.7) \quad \delta \mathbf{E} = -\text{grad } \delta \alpha + \text{rot } \delta \mathbf{a}$$

⁽⁵⁾ Lo scalare \mathcal{A} è *invariante*, nel significato che a questa parola si dà nel calcolo vettoriale e tensoriale.

ove $\delta\alpha$ è uno scalare infinitesimo arbitrario, e $\delta\mathbf{a}$ un vettore infinitesimo arbitrario, che può supporre solenoidale senza pregiudizio della generalità. La (1.7) mostra che la variazione libera $\delta\mathbf{E}$ può sempre riguardarsi come somma di una variazione irrotazionale

$$(1.8) \quad \delta_{(i)}\mathbf{E} = -\text{grad } \delta\alpha$$

e di una solenoidale

$$(1.9) \quad \delta_{(s)}\mathbf{E} = \text{rot } \delta\mathbf{a}.$$

In altre parole

$$(1.7') \quad \delta\mathbf{E} = \delta_{(i)}\mathbf{E} + \delta_{(s)}\mathbf{E}.$$

Calcoliamo la variazione che subisce l'energia \mathcal{A} in conseguenza di una generica variazione libera del campo, data dalla (1.7)

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{A} &= \frac{1}{2} \delta \int_C \mathbf{E} \times \mathbf{E} \, dC = \int_C \mathbf{E} \times \delta\mathbf{E} \, dC = \\ &= - \int_C \mathbf{E} \times \text{grad } \delta\alpha \, dC + \int_C \mathbf{E} \times \text{rot } \delta\mathbf{a} \, dC. \end{aligned}$$

Con semplici trasformazioni si trova

$$\delta\mathcal{A} = \int_C \delta\alpha \, \text{div } \mathbf{E} \, dC - \int_C \text{div } (\delta\alpha \mathbf{E}) \, dC + \int_C \text{div } (\mathbf{E} \wedge \delta\mathbf{a}) \, dC + \int_C \delta\mathbf{a} \times \text{rot } \mathbf{E} \, dC$$

e infine

$$(1.10) \quad \begin{aligned} \delta\mathcal{A} &= \int_C \delta\alpha \, \text{div } \mathbf{E} \, dC + \int_C \delta\mathbf{a} \times \text{rot } \mathbf{E} \, dC + \\ &+ \int_S \delta\alpha \mathbf{E} \times \mathbf{n} \, dS - \int_S \mathbf{E} \wedge \delta\mathbf{a} \times \mathbf{n} \, dS. \end{aligned}$$

Diamo ai potenziali α ed \mathbf{a} una variazione arbitraria nella regione C e nulla al contorno S ; allora la variazione dell'energia si riduce ai due integrali tripli

$$(1.10') \quad \delta\mathcal{A} = \int_C \delta\alpha \, \text{div } \mathbf{E} \, dC + \int_C \delta\mathbf{a} \times \text{rot } \mathbf{E} \, dC.$$

Si osserva che se il campo vettoriale \mathbf{E} è armonico ⁽⁶⁾, cioè se soddisfa alle equazioni indefinite dell'elettrostatica (in assenza di cariche)

$$(1.11) \quad \text{rot } \mathbf{E} = 0 \qquad (1.12) \quad \text{div } \mathbf{E} = 0$$

allora, qualunque siano i valori $\delta\alpha$ e di $\delta\mathbf{a}$,

$$(1.13) \quad \delta \mathcal{A} = 0.$$

Viceversa, se è stazionaria l'energia \mathcal{A} , cioè se vale la (1.13) qualunque sia la variazione dei potenziali α ed \mathbf{a} nell'interno della regione C (ma a parità di potenziali al contorno), allora si deduce che debbono esser soddisfatte la (1.11) e la (1.12), cioè che il campo deve essere armonico.

Gli integrali generali della (1.11) e della (1.12) sono rispettivamente

$$(1.14) \quad \mathbf{E} = -\text{grad } V \qquad (1.15) \quad \mathbf{E} = \text{rot } \mathbf{A}'$$

dove V è il *potenziale scalare* mentre \mathbf{A}' è l'*antipotenziale vettore* ⁽⁷⁾.

Per riconoscere che si tratta proprio di un minimo, si constata che la variazione seconda ha segno positivo, e ciò assicura che siamo in presenza di un minimo ⁽⁸⁾

$$\delta^2 \mathcal{A} = \delta \delta \mathcal{A} = \delta \int_C \mathbf{E} \times \delta \mathbf{E} \, dC = \int_C \delta \mathbf{E} \times \delta \mathbf{E} \, dC > 0.$$

Risulta così dimostrato il teorema: *tra tutti i campi vettoriali in una regione C dello spazio euclideo tridimensionale, che ammettono al contorno il medesimo potenziale scalare α e il medesimo potenziale vettore \mathbf{a} , il campo elettrostatico rende minimo l'invariante \mathcal{A} , esprime l'energia del campo stesso* ⁽⁹⁾.

⁽⁶⁾ Per campo vettoriale *armonico* intendo un campo irrotazionale e solenoidale. Si riconosce che condizione caratteristica affinché un campo vettoriale sia armonico è che esso sia gradiente di un potenziale scalare V , soluzione dell'equazione di LAPLACE $\Delta V = 0$ (e quindi funzione armonica delle tre variabili x, y, z); altra condizione caratteristica è che tale campo sia rotore di un vettore posizionale \mathbf{A}' , solenoidale, le cui componenti siano soluzioni dell'equazione di LAPLACE.

⁽⁷⁾ Cfr. J. A. STRATTON, *Electromagnetic Theory* (New York, 1941) pp. 23-25.

⁽⁸⁾ Cfr. B. FINZI, l. c. ⁽³⁾ p. 179.

⁽⁹⁾ Se sede del campo elettrostatico è un dielettrico invece del vuoto, quando il dielettrico è isotropo la permittività elettrica è rappresentata dal coefficiente ϵ , e quindi la

OSSERVAZIONE I: L'energia \mathcal{A} si può decomporre nella somma di tre integrali tripli

$$(1.16) \quad \begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2} \int_C (-\text{grad } \alpha + \text{rot } \mathbf{a}) \times (-\text{grad } \alpha + \text{rot } \mathbf{a}) dC = \\ &= \frac{1}{2} \int_C \text{grad } \alpha \times \text{grad } \alpha dC + \frac{1}{2} \int_C \text{rot } \mathbf{a} \times \text{rot } \mathbf{a} dC - \int_C \text{grad } \alpha \times \text{rot } \mathbf{a} dC. \end{aligned}$$

Il primo addendo è l'integrale di DIRICHLET, il secondo è l'integrale di W. THOMSON, mentre il terzo dipende solo dai valori che i due potenziali assumono al contorno:

$$\int_C \text{grad } \alpha \times \text{rot } \mathbf{a} dC = \int_C \text{div } (\alpha \text{rot } \mathbf{a}) dC = \int_S \alpha \text{rot } \mathbf{a} \times \mathbf{n} dS.$$

Valendosi della (1.16) per calcolare la variazione di \mathcal{A} , si trova che tale variazione, a parità di potenziali al contorno, è somma della variazione di un integrale di DIRICHLET e della variazione di un integrale di W. THOMSON: dalla (1.2) e dalla (1.4) segue immediatamente la stazionarietà (anzi il minimo) dell'energia \mathcal{A} , quando il campo \mathbf{E} è il campo elettrostatico.

OSSERVAZIONE II: I due integrali superficiali che appaiono nella (1.10) possono riunirsi in uno solo

$$(1.17) \quad \int_S \mathbf{E} \times (\mathbf{n} \delta\alpha - \mathbf{n} \wedge \delta\mathbf{a}) dS = \int_S \mathbf{n} \times (\mathbf{E} \delta\alpha - \mathbf{E} \wedge \delta\mathbf{a}) dS$$

cioè la condizione che le variazioni dei due potenziali siano nulle al contorno può venir sostituita dalla condizione che il vettore $\mathbf{E} \delta\alpha - \mathbf{E} \wedge \delta\mathbf{a}$ risulti tangente alla superficie S .

densità d'energia del campo elettrostatico è data (se \mathbf{D} indica l'induzione elettrica) dal prodotto scalare

$$\frac{1}{2} \mathbf{D} \times \mathbf{E} = \frac{1}{2} \varepsilon \mathbf{E} \times \mathbf{E} = \varepsilon \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{E} \right)$$

Se invece il dielettrico non è isotropo, la permittività è rappresentata da un tensore doppio simmetrico, funzione del posto. In tal caso occorre applicare il teorema di decomposizione separatamente ai vettori \mathbf{E} e \mathbf{D} .

b) Variazione irrotazionale del campo.

Supponiamo sia assegnato a priori, in ogni punto della regione C , il rotore del campo vettoriale \mathbf{E} . Il vettore \mathbf{E} , per la (1.6), continua ad essere la somma di un gradiente e di un rotore, però la variazione che subisce il campo \mathbf{E} , in modo che resti invariato il rotore di \mathbf{E} , è irrotazionale.

Quindi, a parità di rotore del campo vettoriale \mathbf{E} in tutta la regione C , la variazione dell'energia consta di due soli addendi

$$(1.18) \quad \delta_{(i)} \mathcal{A} = \int_C \delta \alpha \operatorname{div} \mathbf{E} \, dC + \int_S \delta \alpha \mathbf{E} \times \mathbf{n} \, dS.$$

Se sul contorno S è $\delta \alpha = 0$, la condizione per la stazionarietà della \mathcal{A} è data dall'equazione (1.12) nell'interno di tutta la regione. Si conclude che, *tra i campi vettoriali regolari, che hanno ovunque il medesimo rotore e sul contorno il medesimo potenziale scalare, il campo per cui l'energia \mathcal{A} è stazionaria (minima) è il campo solenoidale.*

Questo principio contiene come caso particolare il classico principio di DIRICHLET ⁽⁴⁰⁾: supponiamo infatti che il rotore del campo \mathbf{E} sia ovunque nullo, e V ne sia il potenziale scalare. Allora l'energia è data da

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_C \operatorname{grad} V \times \operatorname{grad} V \, dC$$

e la stazionarietà di \mathcal{A} comporta la stazionarietà (anzi il minimo) dell'integrale di DIRICHLET. Cioè *tra tutti i campi vettoriali irrotazionali, aventi lo stesso potenziale (scalare) sul contorno, il campo per cui l'energia \mathcal{A} è stazionaria (minima) è il campo solenoidale, cioè il campo elettrostatico in assenza di cariche spaziali.*

c) Variazione solenoidale del campo.

Sia assegnata a priori la divergenza del campo vettoriale \mathbf{E} in tutta la regione C , cioè sia noto il legame tra il vettore \mathbf{E} e la distribuzione spaziale delle cariche, che indichiamo con ϱ

$$(1.19) \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \varrho$$

⁽⁴⁰⁾ Cfr. B. FINZI, l. c. ⁽³⁾ p. 176; cfr. anche G. PÓLIA - G. SZEGO, *Isoperimetric inequalities in Mathematical Physics* (Princeton, 1951), pp. 42-57

Il vettore \mathbf{E} , per la (1.6), è somma di un gradiente e di un rotore, mentre supporremo sia solenoidale la variazione del vettore \mathbf{E} (cosicchè il vettore $\mathbf{E} + \delta_{(s)} \mathbf{E}$ continua a soddisfare la (1.19)).

La corrispondente variazione dell'energia \mathcal{E} si riduce a due soli addendi

$$\delta_{(s)} \mathcal{E} = \int_C \delta \mathbf{a} \times \text{rot } \mathbf{E} \, dC + \int_S \delta \mathbf{a} \wedge \mathbf{E} \times \mathbf{n} \, dS.$$

Se sul contorno S il vettore $\delta \mathbf{a}$ è nullo, la condizione per la stazionarietà dell'energia \mathcal{E} è data dall'equazione (1.11) nell'interno di tutto il campo C . Possiamo concludere che *tra tutti i campi vettoriali che hanno la stessa divergenza ϱ , e sul contorno il medesimo potenziale vettore, il campo per cui l'energia è stazionaria (minima) è il campo irrotazionale.*

In particolare, supponiamo che la divergenza sia ovunque nulla, e indichiamo con \mathbf{A}' il corrispondente potenziale vettore. Allora l'energia è data da

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_C \text{rot } \mathbf{A}' \times \text{rot } \mathbf{A}' \, dC$$

e le stazionarietà di \mathcal{E} equivale alla stazionarietà (anzi al minimo) dell'integrale di W. THOMSON. Cioè *tra tutti i campi vettoriali solenoidali, a parità di potenziale vettore sul contorno, il campo per cui l'energia \mathcal{E} è stazionaria (minima) è il campo irrotazionale.*

§ 2. — IL MINIMO DIVARIO TRA LE DIVERSE FORME D'ENERGIA DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO.

Indichiamo, come precedentemente, con \mathbf{E} il campo elettrico nel vuoto, con ϱ la densità di carica spaziale; sia inoltre σ la densità di carica elettrica distribuita sulla superficie S .

Al campo \mathbf{E} applichiamo la decomposizione (1.6), e denominiamo \mathcal{B} l'invariante scalare

$$(2.1) \quad \mathcal{B} = \frac{1}{2} \int_C \mathbf{E} \times \mathbf{E} \, dC - \int_C \alpha \varrho \, dC - \int_S \alpha \sigma \, dS$$

rappresentante il divario fra l'energia di puro campo \mathcal{E} e l'energia

$$\int_C \alpha \varrho \, dC + \int_S \alpha \sigma \, dS$$

che risulta essere (come si constata facilmente una volta dedotte le equazioni del campo) quella dovuta alla distribuzione elettrica.

Ci occuperemo nel seguito della variazione di \mathcal{B} quando si varino arbitrariamente il potenziale scalare α e il potenziale vettore \mathbf{a} sia nell'interno della regione C che sul contorno S . Nel calcolare la variazione del campo \mathbf{E} distinguiamo anche qui i casi della variazione libera, della variazione irrotazionale e della variazione solenoidale del campo.

a) Variazione libera del campo.

In condizioni di regolarità, con calcoli analoghi a quelli svolti nel § precedente, e supposti invariabili gli scalari ϱ e σ ,

$$\begin{aligned}
 \delta \mathcal{B} &= \int_C \{ \mathbf{E} \times (-\text{grad } \delta\alpha + \text{rot } \delta\mathbf{a}) - \varrho \delta\alpha \} dC - \int_S \sigma \delta\alpha dS = \\
 (2.2) \quad &= \int_C (\text{div } \mathbf{E} - \varrho) \delta\alpha dC + \int_C \text{rot } \mathbf{E} \times \delta\mathbf{a} dC + \\
 &+ \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{n} - \sigma) \delta\alpha dS - \int_S \mathbf{E} \wedge \mathbf{n} \times \delta\mathbf{a} dS.
 \end{aligned}$$

Se $\delta\alpha$ e $\delta\mathbf{a}$ assumono valori arbitrari sia nell'interno della regione C che sul contorno S , la variazione $\delta\mathcal{B}$ si annulla tutte le volte che sono soddisfatte le equazioni indefinite

$$(2.3) \quad \text{rot } \mathbf{E} = 0 \qquad (2.4) \quad \text{div } \mathbf{E} = \varrho$$

e le condizioni al contorno

$$(2.5) \quad \mathbf{E} \wedge \mathbf{n} = 0 \qquad (2.6) \quad \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \sigma$$

le quali esprimono appunto le equazioni indefinite del campo elettrostatico nel vuoto e le relative condizioni al contorno, quando esternamente alla superficie S si suppone che il campo elettrico sia nullo⁽¹⁾.

⁽¹⁾ L'ipotesi che esternamente al contorno S il campo elettrico sia nullo, e che il contorno S sia costituito da conduttori perfetti, vien formulata solo per comodità di scrittura; risultati del tutto analoghi si ottengono allorquando si supponga che al di fuori della superficie S il campo elettrico sia diverso da zero: i componenti normale e tangenziale del vettore \mathbf{E} in corrispondenza della superficie dovranno essere sostituiti dai componenti normale e tangenziale del vettore che rappresenta la discontinuità del campo attraverso la superficie.

Il primo membro della (2.5) indica *il componente tangenziale* del campo \mathbf{E} , ed è anche noto col nome di *rotore superficiale*; il primo membro della (2.6) indica *la componente normale* del campo \mathbf{E} , esprime la densità di flusso del campo vettoriale \mathbf{E} attraverso un elemento di superficie S , ed è anche noto col nome di *divergenza superficiale* ⁽¹²⁾.

Concludiamo affermando che, *a parità di distribuzione spaziale e superficiale di cariche elettriche, il campo elettrostatico è quello che, tra tutti i campi vettoriali regolari, rende minimo il divario energetico.*

Viceversa affinché il divario energetico \mathcal{B} sia stazionario, e quindi sia $\delta \mathcal{B} = 0$, qualunque siano le variazioni $\delta \alpha$ e $\delta \mathbf{a}$ dei potenziali in C e su S , debbono essere soddisfatte le equazioni indefinite (2.3) (2.4) e le condizioni al contorno (2.5) e (2.6).

b) Variazione irrotazionale del campo.

Supponiamo sia assegnato a priori il rotore in tutta la regione C e sulla superficie S ; la variazione che possiamo dare al campo \mathbf{E} è una variazione irrotazionale (1.8). La corrispondente variazione dell'invariante \mathcal{B} è allora

$$(2.7) \quad \delta_{(i)} \mathcal{B} = \int_C (\operatorname{div} \mathbf{E} - \varrho) \delta \alpha \, dC + \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{n} - \sigma) \delta \alpha \, dS.$$

Quindi, a parità di rotore nella regione C e sul contorno S , la condizione caratteristica per la stazionarietà del divario energetico è data dalle equazioni

$$(2.4) \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \varrho \qquad (2.6) \quad \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \sigma.$$

Se, in particolare, il valore assegnato del rotore è zero, possiamo concludere *che tra tutti i campi irrotazionali, il campo che rende minimo il divario energetico \mathcal{B} è quello per cui la sua divergenza spaziale eguaglia la densità elettrica spaziale ϱ , mentre la divergenza superficiale eguaglia la densità di carica superficiale σ .*

In sostanza, ci troviamo di fronte all'estensione ⁽¹³⁾ alle soluzioni dell'equazione di POISSON del principio che DIRICHLET ha formulato per le

⁽¹²⁾ Cfr. G. A. MAGGI, *Teoria fenomenologica del Campo Elettromagnetico* (Milano, 1931) pp. 14-22; Cfr. anche J. A. STRATTON, l. c. ⁽⁷⁾, pp. 34-38.

⁽¹³⁾ Cfr., per la applicazione di tale principio alle equazioni di movimento dei fluidi, H. BATEMAN, *Partial differential equations of Mathematical Physics* (Cambridge, 1932), e G. GOTUSSO, *Un principio variazionale in idrodinamica piana*, « Rend. Acc. Lincei » ser. 8, 10 (1951) pp. 130-132.

soluzioni dell'equazione di LAPLACE; infatti, supposto che il rotore del campo sia nullo, si ha, nella regione C ,

$$(2.8) \quad \mathbf{E} = -\text{grad } V$$

e sulla superficie di contorno S ,

$$(2.8') \quad V = \text{cost.} \quad (14)$$

Allora l'invariante \mathcal{B} diventa

$$\mathcal{B} = \int_C \frac{1}{2} \text{grad } V \times \text{grad } V dC - \int_C V \varrho dC - \int_S V \sigma dS$$

e quindi, per la (1.1)

$$(2.7') \quad \begin{aligned} \delta_{(i)} \mathcal{B} &= \int_C \text{grad } V \times \text{grad } \delta V dC - \int_C \varrho \delta V dC - \int_S \sigma \delta V dS = \\ &= - \int_C \delta V (\Delta V + \varrho) dC - \int_S \delta V \left(\frac{\partial V}{\partial n} + \sigma \right) dS \end{aligned}$$

cosicchè la condizione caratteristica affinchè $\delta_{(i)} \mathcal{B} = 0$, se δV rimane arbitraria in tutta la regione C e sul contorno S è

$$(2.9) \quad \Delta V = -\varrho \quad (2.10) \quad -\frac{\partial V}{\partial n} \equiv -\text{grad } V \times \mathbf{n} = \sigma.$$

c) Variazione solenoidale del campo.

Diamo al campo \mathbf{E} una variazione solenoidale, tale cioè che nella regione C valga la (1.9), mentre sul contorno S sia verificata la

$$(2.6') \quad \delta \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}.$$

La variazione che in conseguenza subisce lo scalare \mathcal{B} è

$$(2.11) \quad \delta_{(s)} \mathcal{B} = \int_C \text{rot } \mathbf{E} \times \delta \mathbf{a} dC - \int_S \mathbf{E} \wedge \mathbf{n} \times \delta \mathbf{a} dS.$$

(14) Con l'espressione $V = \text{cost.}$ intendo riferirmi anche al caso in cui il contorno S è formato da più conduttori distinti S_i , sui quali V assume valori V_i costanti, non necessariamente eguali tra di loro.

Condizione caratteristica affinché risulti $\delta_{(s)}\mathcal{B} = 0$, qualunque sia $\delta\mathbf{a}$ in C e su S , è che siano soddisfatte le

$$(2.3) \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0 \quad \text{in } C,$$

$$(2.5) \quad \mathbf{E} \wedge \mathbf{n} = 0 \quad \text{sulla } S.$$

Osserviamo ora che quando, come appunto succede per la variazione solenoidale del campo vettoriale, $\delta\alpha \equiv 0$, la variazione $\delta_{(s)}\mathcal{A}$ coincide con la variazione $\delta_{(s)}\mathcal{B}$; potremo perciò dire che tra tutti i campi che hanno la stessa divergenza spaziale e superficiale, il campo per cui sono minimi gli invarianti scalari \mathcal{A} e \mathcal{B} è quello irrotazionale nell'interno e sul contorno.

Supponiamo ora addirittura che, nella regione C e sul contorno S siano verificate, rispettivamente, le equazioni

$$(2.4) \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = \rho \qquad (2.6) \quad \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \sigma$$

dove le densità elettriche spaziale e superficiale son assegnate a priori. In tal caso dalla stazionarietà di \mathcal{A} si deducono ancora la (2.3) e la (2.5), affermando l'irrotazionalità spaziale e superficiale del campo elettrico, e potremo così concludere enunciando il ben noto ⁽¹⁵⁾ teorema di W. THOMSON: *tra tutti i campi vettoriali che ammettono la stessa distribuzione spaziale e superficiale di elettricità, eguali rispettivamente alla divergenza spaziale e alla divergenza superficiale dei campi vettoriali, il campo irrotazionale all'interno della regione e sul contorno rende minima l'energia elettrostatica \mathcal{A} .*

Per riconoscere ancor meglio il significato dell'integrale superficiale che appare nella (2.11), basta ricordare che, in corrispondenza alla stazionarietà dell'energia, vale $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V$; allora

$$\begin{aligned} -\int_S \mathbf{E} \wedge \mathbf{n} \times \delta\mathbf{a} \, dS &= \int_S \operatorname{grad} V \times \mathbf{n} \wedge \delta\mathbf{a} \, dS = \int_S \operatorname{rot}(V \delta\mathbf{a}) \times \mathbf{n} \, dS - \\ &= -\int_S V \operatorname{rot} \delta\mathbf{a} \times \mathbf{n} \, dS = -\int_S V \delta\mathbf{E} \times \mathbf{n} \, dS = -\int_S V \delta\sigma \, dS. \end{aligned}$$

⁽¹⁵⁾ Cfr. W. THOMSON, *Theorems with reference to the solution of certain partial differential equations*, «Cambr. Dubl. Math. Journ.» (Feb. 1848), id. id. «Journ. Mat. Liouville» (1847); cfr. anche W. THOMSON, *Collected Papers on Electricity and Magnetism*, Art. XIII (London, 1872) pp. 139-143; il teorema è stato esteso poi da MAXWELL: cfr. ad es. J. C. MAXWELL, *A treatise on Electricity and Magnetism* (Oxford, 1873) 1, pp. 103-108; cfr. anche B. FINZI, l. c. (3), pp. 216-217, e D. GRAFFI, *Teoria matematica dell'Elettromagnetismo* (Bologna, 1949) 1, pp. 212-213.

OSSERVAZIONE: Si confronti l'enunciato del teorema di W. THOMSON con l'enunciato *a*). La diversità tra i due enunciati consiste nei due fatti: l'enunciato *a*) si riferisce alla stazionarietà del divario energetico \mathcal{B} , mentre il teorema di W. THOMSON si riferisce alla stazionarietà dell'energia elettrostatica \mathcal{A} ; nell'enunciato *a*) vien meno l'ipotesi, (essenziale nel teorema di W. THOMSON) in virtù della quale la divergenza spaziale del campo elettrico è eguale alla densità spaziale elettrica, e la divergenza superficiale è eguale alla densità superficiale: in altre parole nel classico principio di W. THOMSON sono ammesse a priori le equazioni elettrostatiche (2.4) e (2.6) e si ottengono le (2.3) e le (2.5), invece nell'enunciato che dà in *a*) le relazioni precedenti (2.4) e (2.6) sono anch'esse dedotte, unitamente alle (2.3) e alle (2.5), dalla stazionarietà dell'invariante \mathcal{B} .

§ 3. — PRINCIPI DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO STAZIONARIO.

Introduciamo, oltre agli enti fisici \mathbf{E}, ρ, σ , già considerati, i seguenti vettori posizionali: \mathbf{H} , rappresentante il campo magnetico nel vuoto, \mathbf{I} , rappresentante la densità spaziale di corrente elettrica, \mathbf{K} , rappresentante la densità superficiale di corrente elettrica sul contorno S della regione C ⁽¹⁶⁾. Supponiamo che il campo elettromagnetico sia stazionario, cioè che tutti questi enti non dipendano dal tempo.

Al vettore \mathbf{H} possiamo applicare il teorema di decomposizione, cosicchè, se β e \mathbf{b} sono, rispettivamente, il potenziale scalare e il potenziale vettore (quest'ultimo supposto solenoidale)

$$(3.1) \quad \mathbf{H} = -\text{grad } \beta + \text{rot } \mathbf{b}.$$

Una variazione irrotazionale sarà del tipo

$$(3.2) \quad \delta_{(i)} \mathbf{H} = -\text{grad } \delta\beta$$

mentre una variazione solenoidale sarà del tipo

$$(3.3) \quad \delta_{(s)} \mathbf{H} = \text{rot } \delta\mathbf{b}$$

⁽¹⁶⁾ Poichè si è supposto che la sede del campo sia il vuoto, ovviamente la sola densità spaziale di corrente è quella di convezione, cioè $\mathbf{I} = \rho \mathbf{v}$, ove \mathbf{v} indica la velocità con cui si muovono le cariche. Per la definizione di \mathbf{K} , cfr. J. A. STRATTON, l. c. (7), p. 37 e p. 243, e G. TORALDO DI FRANCA, l. c. (4), p. 71.

cosicchè una variazione libera del campo \mathbf{H} sarà sempre la somma di una variazione irrotazionale e di una solenoidale

$$(3.1') \quad \delta\mathbf{H} = \delta_{(i)}\mathbf{H} + \delta_{(s)}\mathbf{H}.$$

Analogamente all'energia elettrica \mathcal{A} , data dalla (1.5), ed al divario energetico \mathcal{B} , dato dalla (2.1), consideriamo l'energia magnetica

$$(3.4) \quad \mathcal{C} = \int_C \frac{1}{2} \mathbf{H} \times \mathbf{H} dC$$

e il divario energetico

$$(3.5) \quad \mathcal{D} = \int_C \left(\frac{1}{2} \mathbf{H} \times \mathbf{H} - \mathbf{I} \times \mathbf{b} \right) dC - \int_S \mathbf{K} \times \mathbf{b} dS.$$

Il primo addendo del divario \mathcal{D} è l'energia magnetica \mathcal{C} (energia di puro campo) il secondo addendo risulta essere (come si riconosce una volta dedotte le equazioni del campo) l'energia magnetica dovuta alla distribuzione spaziale di correnti, il terzo addendo l'energia magnetica dovuta alla distribuzione superficiale di correnti.

Supponiamo che il primo gruppo di enti, costituito da \mathbf{E}, ρ, σ , sia indipendente dal secondo gruppo di enti, costituito da $\mathbf{H}, \mathbf{I}, \mathbf{K}$: ipotesi che va d'accordo con quella, già formulata sopra, che tutti gli enti fisici siano indipendenti dal tempo. Le equazioni del campo elettromagnetico stazionario, nel vuoto⁽¹⁷⁾, possono ottenersi da due principi variazionali: il primo, affermando la stazionarietà di \mathcal{A} o di \mathcal{B} , da cui si traggono le equazioni riguardanti l'insieme \mathbf{E}, ρ, σ ; il secondo, affermando la stazionarietà di \mathcal{C} o di \mathcal{D} , da cui si traggono le equazioni che legano insieme $\mathbf{H}, \mathbf{I}, \mathbf{K}$. Data l'indipendenza dei due gruppi precedentemente considerati, tutte le equazioni del campo elettromagnetico stazionario possono manifestamente ottenersi da un unico principio variazionale, affermando la stazionarietà di una qualsiasi combinazione lineare di \mathcal{A} e \mathcal{C} , oppure di \mathcal{B} e \mathcal{D} . Per evitare formule ingombranti, mi limiterò a ricavare le equazioni attinenti al secondo gruppo di enti dalla stazionarietà di \mathcal{C} o \mathcal{D} .

⁽¹⁷⁾ Ritengo che i differenti significati con cui è usata la parola *stazionario* non diano luogo a equivoci: per campo elettromagnetico *stazionario* si intende qui il campo che non varia col tempo; quando si parla di *stazionarietà* degli invarianti $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, ecc., si occupa delle condizioni necessarie per l'estremo (tipicamente, minimo) di tali invarianti.

La minima energia magnetica in un campo magnetostatico.

Supponiamo $\mathbf{I} = 0$, $\mathbf{K} = 0$, cosicchè il campo magnetico stazionario si riduca al campo magnetostatico. Se si impone all'energia magnetica \mathcal{C} la condizione di essere stazionaria, comunque si varino i potenziali β e \mathbf{b} nell'interno della regione \mathcal{C} , rispettando però i valori dei potenziali stessi al contorno della regione stessa, si trovano, analogamente a quanto ho già mostrato per il campo elettrostatico, le seguenti equazioni indefinite, relative al campo magnetostatico

$$(3.6) \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0 \qquad (3.7) \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0.$$

Viceversa se sono verificate le precedenti equazioni indefinite, le quali ci assicurano che il campo vettoriale è armonico, l'energia magnetica \mathcal{C} è stazionaria (anzi minima).

a) Variazione del divario energetico \mathcal{D} in corrispondenza a una variazione libera del campo.

Supponiamo ora che i vettori \mathbf{I} e \mathbf{K} siano prefissati e non nulli; studiamo il comportamento del campo magnetico nel vuoto, tenendo conto della distribuzione stazionaria delle correnti.

Si dia al vettore posizionale \mathbf{H} una variazione libera (3.1'): la corrispondente variazione del divario energetico \mathcal{D} , essendo $\delta \mathbf{I} = 0$, $\delta \mathbf{K} = 0$, risulta

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{D} &= \int_{\mathcal{C}} \{ \mathbf{H} \times (-\operatorname{grad} \delta \beta + \operatorname{rot} \delta \mathbf{b}) - \mathbf{I} \times \delta \mathbf{b} \} d\mathcal{C} - \int_{\mathcal{S}} \mathbf{K} \times \delta \mathbf{b} d\mathcal{S} \\ \delta \mathcal{D} &= \int_{\mathcal{C}} \{ \delta \beta \operatorname{div} \mathbf{H} + \delta \mathbf{b} \times (\operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{I}) \} d\mathcal{C} + \\ (3.8) \quad &+ \int_{\mathcal{S}} \{ \delta \beta \mathbf{H} \times \mathbf{n} + \delta \mathbf{b} \times (\mathbf{H} \wedge \mathbf{n} - \mathbf{K}) \} d\mathcal{S}. \end{aligned}$$

Se $\delta \beta$ e $\delta \mathbf{b}$ assumono valori arbitrari sia nell'interno della regione \mathcal{C} che sul contorno \mathcal{S} , la condizione caratteristica per l'annullarsi di $\delta \mathcal{D}$, vale a dire per la stazionarietà del divario energetico \mathcal{D} , è data dalle equazioni indefinite

$$(3.9) \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{I} \qquad (3.10) \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$$

e dalle condizioni al contorno

$$(3.11) \quad \mathbf{H} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{K} \qquad (3.12) \quad \mathbf{H} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}.$$

Esse esprimono appunto le equazioni indefinite del campo magnetico stazionario nel vuoto, e le condizioni al contorno ⁽⁴⁸⁾, in corrispondenza a una distribuzione stazionaria di correnti, quando al di fuori della S il campo \mathbf{H} è nullo.

Concludiamo affermando che, a parità di distribuzione spaziale e superficiale di correnti, il campo magnetico stazionario nel vuoto è quello che, tra tutti i campi vettoriali regolari, rende stazionario il divario energetico.

b) Variazione irrotazionale del campo.

Diamo al campo \mathbf{H} una variazione irrotazionale $\delta_{(i)} \mathbf{H}$: anzi, per riferirci al caso di maggior interesse fisico, postuliamo la validità delle equazioni

$$(3.9) \quad \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{I} \qquad (3.11) \quad \mathbf{H} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{K}$$

e diamo al campo \mathbf{H} una variazione che, in conformità delle due precedenti equazioni, lasci invariate le correnti.

In conseguenza

$$\delta_{(i)} \mathcal{D} = \int_C \delta\beta \text{div } \mathbf{H} \, dC + \int_S \delta\beta (\mathbf{H} \times \mathbf{n}) \, dS.$$

La condizione caratteristica per la stazionarietà del divario \mathcal{D} , se $\delta\beta$ rimane arbitraria nell'interno della regione C e sul contorno S , è data dalle equazioni

$$(3.10) \quad \text{div } \mathbf{H} = 0 \qquad (3.12) \quad \mathbf{H} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

le quali assicurano che il campo vettoriale è solenoidale e, unitamente alle (3.9) e (3.11), assegnate a priori, sono le equazioni del campo magnetico stazionario.

Si osservi che $\delta_{(i)} \mathcal{D} = \delta_{(i)} \mathcal{E}$, cioè la variazione irrotazionale del divario \mathcal{D} coincide con la variazione irrotazionale dell'energia \mathcal{E} . Potremo perciò

⁽⁴⁸⁾ Si suppone che esternamente ad S il campo sia nullo solo per comodità di scrittura: se il campo è diverso da zero fuori di S , occorre sostituire ai componenti tangenziale e normale di \mathbf{H} i corrispondenti componenti della discontinuità del campo attraverso la superficie.

affermare che *tra tutti i campi vettoriali che soddisfano alla (3.9) e alla (3.10), cioè che ammettono le medesime correnti (eguali rispettivamente al rotore spaziale e al rotore superficiale dei campi vettoriali) il campo magnetico stazionario è quello che rende minima l'energia magnetica.*

OSSERVAZIONE: Si noti che nell'enunciato *a)* si son dedotte le equazioni (3.9), (3.10), (3.11), (3.12) dalla stazionarietà della variazione libera del divario energetico \mathcal{D} ; nell'enunciato *b)*, dato qui sopra, si suppongono assegnate a priori le equazioni (3.9) e (3.11) e si deducono le (3.10) e (3.12) dall'annullarsi della variazione di \mathcal{C} (variazione che è allora irrotazionale, cosicchè coincide con la variazione irrotazionale del divario \mathcal{D}).

c) Variazione solenoidale del campo magnetico.

Diamo infine una variazione solenoidale al campo vettoriale \mathbf{H} : anzi, riferendoci al caso di maggior interesse fisico, postuliamo la validità delle equazioni

$$(3.10) \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \qquad (3.11) \quad \mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0$$

e diamo al campo \mathbf{H} una variazione compatibile con tali equazioni.

L'integrale generale della (3.10) è

$$(3.13) \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A},$$

in cui \mathbf{A} è il potenziale magnetico (vettore solenoidale); quindi

$$\delta_{(s)} \mathbf{H} = \operatorname{rot} \delta \mathbf{A}$$

mentre sul contorno S

$$\delta \mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0.$$

La variazione che subisce il divario energetico \mathcal{D} è allora

$$\delta_{(s)} \mathcal{D} = \int_C \delta \mathbf{A} \times (\operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{I}) dC + \int_S (\mathbf{H} \wedge \mathbf{n} - \mathbf{K}) \times \delta \mathbf{A} dS.$$

La condizione caratteristica per l'annullarsi di $\delta_{(s)} \mathcal{D}$ in corrispondenza a una variazione arbitraria solenoidale del campo \mathbf{H} , è data dalle equazioni

$$(3.9) \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{I} \qquad (3.11) \quad \mathbf{H} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{K}.$$

In conclusione, *tra tutti i campi vettoriali regolari solenoidali, il campo magnetico stazionario è quello che rende minimo il divario energetico.* Osser-

vando che \mathbf{A} si è supposto solenoidale, e che quindi $\text{rot rot } \mathbf{A} = -\Delta \mathbf{A}$, le (3.9) e le (3.11) si scrivono anche

$$(3.9') \quad \Delta \mathbf{A} = -\mathbf{I} \qquad (3.11') \quad \text{rot } \mathbf{A} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{K}.$$

§ 4. — IL PRINCIPIO DELLA MINIMA AZIONE ELETTROMAGNETICA.

Consideriamo le equazioni indefinite e le condizioni al contorno del campo elettromagnetico genericamente variabile; supponiamo che la sede del campo sia il vuoto, e indichiamo con c la velocità della luce rispetto a un osservatore inerziale.

Per brevità, porremo $\dot{\mathbf{A}} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, $\dot{\mathbf{B}} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, ecc.

Nell'intervallo di tempo (t_0, t_1) si dice *azione elettromagnetica* ⁽¹⁹⁾ di puro campo l'invariante scalare

$$(4.1) \quad \mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} dt \int_C (\mathbf{H} \times \mathbf{H} - \mathbf{E} \times \mathbf{E}) dC$$

in cui l'integrale triplo esteso alla regione C esprime la differenza tra l'energia magnetica e l'energia elettrica; chiamo invece *azione elettromagnetica totale* l'invariante \mathcal{F} , differenza tra l'invariante \mathcal{E} ora introdotto e gli integrali che esprimono il contributo dovuto alla distribuzione spaziale di cariche e di correnti ⁽²⁰⁾ e il contributo dovuto alla distribuzione di cariche e di correnti sul contorno:

$$(4.2) \quad \mathcal{F} = \mathcal{E} - \int_{t_0}^{t_1} dt \int_C \left(\mathbf{A} \times \frac{1}{c} \mathbf{I} - e V \right) dC - \int_{t_0}^{t_1} dt \int_S \left(\mathbf{A} \times \frac{1}{c} \mathbf{K} - \sigma V \right) dS.$$

Le equazioni di MAXWELL, alle quali obbedisce il campo, sono separabili in due gruppi indipendenti. In un primo tempo, supponiamo valide le equazioni costituenti il primo gruppo di MAXWELL, e cerchiamo le condizioni affinché \mathcal{E} e \mathcal{F} siano stazionarie; in un secondo tempo, supporremo assegnate le equazioni costituenti il secondo gruppo di MAXWELL, e cercheremo le condizioni affinché \mathcal{E} e \mathcal{F} siano stazionarie; considereremo infine il caso generale.

⁽¹⁹⁾ Cfr. H. BATEMAN, l. c. ⁽⁴³⁾ p. 178.

⁽²⁰⁾ Cfr. B. FINZI, l. c. ⁽³⁾, p. 225.

Variazione del campo elettromagnetico compatibile col primo gruppo di equazioni di MAXWELL.

Supponiamo siano soddisfatte le equazioni (primo gruppo di MAXWELL nel vuoto)

$$(4.3) \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{H}} \quad (4.4) \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$$

e le relative condizioni al contorno

$$(4.5) \quad \mathbf{E} \wedge \mathbf{n} = 0 \quad (4.6) \quad \mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0.$$

Diamo ai vettori \mathbf{E} ed \mathbf{H} variazioni tali da rispettare le equazioni e le condizioni al contorno che abbiamo supposto assegnate: variazioni che indicheremo con $\delta_{(1)} \mathbf{E}$ e $\delta_{(1)} \mathbf{H}$.

Supposta invariata la distribuzione di cariche e di correnti, dovrà essere, per la (4.4)

$$(4.4') \quad \delta_{(1)} \mathbf{H} = \operatorname{rot} \delta \mathbf{A},$$

per la (4.3)

$$\delta_{(1)} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \operatorname{rot} \delta \dot{\mathbf{A}}$$

da cui

$$(4.3') \quad \delta_{(1)} \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \delta V - \frac{1}{c} \delta \dot{\mathbf{A}}.$$

Inoltre, per le (4.5) e le (4.6), dovrà essere

$$\delta_{(1)} \mathbf{E} \wedge \mathbf{n} = 0 \quad \delta_{(1)} \mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0.$$

In conseguenza, risulta

$$\begin{aligned} \delta_{(1)} \mathcal{F} = & \int_{t_0}^{t_1} dt \int_C (\mathbf{H} \times \delta_{(1)} \mathbf{H} - \mathbf{E} \times \delta_{(1)} \mathbf{E}) dC - \int_{t_0}^{t_1} dt \int_C \left(\delta \mathbf{A} \times \frac{1}{c} \mathbf{I} - \rho \delta V \right) dC - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} dt \int_S \left(\delta \mathbf{A} \times \frac{1}{c} \mathbf{K} - \sigma \delta V \right) dS \\ \delta_{(1)} \mathcal{F} = & \int_{t_0}^{t_1} dt \int_C \left\{ \left(\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \mathbf{I} \right) \times \delta \mathbf{A} + (\rho - \operatorname{div} \mathbf{E}) \delta V + \mathbf{E} \times \frac{1}{c} \delta \dot{\mathbf{A}} \right\} dC + \\ (4.7) \quad & + \int_{t_0}^{t_1} dt \int_S \left\{ \left(\mathbf{H} \wedge \mathbf{n} - \frac{1}{c} \mathbf{K} \right) \times \delta \mathbf{A} + (\sigma - \mathbf{E} \times \mathbf{n}) \delta V \right\} dS. \end{aligned}$$

L'ultimo addendo dell'integrale triplo si trasforma, mediante integrazione per parti rispetto al tempo, nel seguente modo

$$\int_C dC \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{E} \times \frac{1}{c} \delta \dot{\mathbf{A}} dt = \int_C \left[\mathbf{E} \times \frac{1}{c} \delta \mathbf{A} \right]_{t_0}^{t_1} dC - \int_{t_0}^{t_1} dt \int_C \delta \mathbf{A} \times \frac{1}{c} \dot{\mathbf{E}} dC.$$

La condizione caratteristica affinchè \mathcal{F} sia stazionaria, a parità di valori in qualunque istante per la distribuzione spaziale e superficiale di cariche e di correnti, e a parità di valori del potenziale magnetico \mathbf{A} nell'istante iniziale e nell'istante finale, è che siano soddisfatte, in tutta la regione C , le equazioni

$$(4.8) \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho \qquad (4.9) \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} (\mathbf{I} + \dot{\mathbf{E}})$$

e inoltre, per $t_0 < t < t_1$, le condizioni al contorno

$$(4.10) \quad \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \sigma \qquad (4.11) \quad \mathbf{H} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{K}^{(21)}.$$

Esse costituiscono il secondo gruppo di equazioni di MAXWELL.

Nel caso particolare che il campo sia neutro, cioè che sia ovunque nulla la distribuzione di cariche e di correnti, si ritrova immediatamente il principio già noto: *supposto assegnato il primo gruppo di equazioni di MAXWELL per il campo neutro nel vuoto* (cioè ancora le (4.3) e (4.4)) *a parità di valori sul contorno S per i potenziali V ed \mathbf{A} , la condizione caratteristica per la stazionarietà dell'azione elettromagnetica \mathcal{E} è data dal secondo gruppo di equazioni di MAXWELL per il campo neutro* (che si ottengono dalle (4.8) e (4.9) ponendo eguali a zero cariche e correnti).

Variazione del campo elettromagnetico compatibile col secondo gruppo di equazioni di MAXWELL.

Supponiamo valide a priori le equazioni

$$(4.8) \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho \qquad (4.9) \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} (\mathbf{I} + \dot{\mathbf{E}})$$

e le condizioni al contorno

$$(4.10) \quad \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \sigma \qquad (4.11) \quad \mathbf{H} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{K}.$$

⁽²¹⁾ Ritengo superfluo ripetere qui le osservazioni fatte con le note ⁽¹⁴⁾ e ⁽⁴⁸⁾.

Le variazioni che si debbono dare ai campi vettoriali \mathbf{E} ed \mathbf{H} per rispettare le equazioni e le condizioni qui riportate, sono dovute allora alla variazione dell'antipotenziale scalare magnetico V' e alla variazione dell'antipotenziale vettore elettrico \mathbf{A}' . Indicate con $\delta_{(2)}\mathbf{E}$ e $\delta_{(2)}\mathbf{H}$ le corrispondenti variazioni dei campi vettoriali, troviamo (operando analogamente al caso precedente)

$$(4.8') \quad \delta_{(2)}\mathbf{E} = \text{rot } \delta\mathbf{A}' \qquad (4.9') \quad \delta_{(2)}\mathbf{H} = -\text{grad } \delta V' + \frac{1}{c} \delta\dot{\mathbf{A}}'$$

$$\delta_{(2)}\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0 \qquad \delta_{(2)}\mathbf{H} \wedge \mathbf{n} = 0.$$

Si osservi che le corrispondenti variazioni $\delta_{(2)}\mathcal{E}$ e $\delta_{(2)}\mathcal{F}$ sono allora eguali tra di loro

$$\delta_{(2)}\mathcal{E} \equiv \delta_{(2)}\mathcal{F} = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_C (\mathbf{H} \times \delta_{(2)}\mathbf{H} - \mathbf{E} \times \delta_{(2)}\mathbf{E}) dC$$

In conseguenza delle (4.8') e (4.9')

$$\delta_{(2)}\mathcal{E} \equiv \delta_{(2)}\mathcal{F} = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_C (-\mathbf{H} \times \text{grad } \delta V' + \mathbf{H} \times \frac{1}{c} \delta\dot{\mathbf{A}}' - \mathbf{E} \times \text{rot } \delta\mathbf{A}') dC.$$

Con trasformazioni analoghe a quelle precedentemente eseguite, e supposto (nell'integrazione per parti rispetto al tempo) $\delta\mathbf{A}' = 0$ per $t = t_0$ e per $t = t_1$, si trova

$$(4.7') \quad \delta_{(2)}\mathcal{E} \equiv \delta_{(2)}\mathcal{F} = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_C \left\{ \delta V' \text{div } \mathbf{H} - \delta\mathbf{A}' \times \text{rot } \mathbf{E} - \delta\mathbf{A}' \times \frac{1}{c} \dot{\mathbf{H}} \right\} dC + \\ + \int_{t_0}^{t_1} dt \int_S \{ \delta V' \mathbf{H} \times \mathbf{n} + \delta\mathbf{A}' \wedge \mathbf{E} \times \mathbf{n} \} dS.$$

Sia ora $\delta V'$ arbitraria nell'interno della regione C , sul contorno S , e in qualunque istante; parimenti sia arbitraria nell'interno della regione C e sul contorno S la variazione del vettore \mathbf{A}' , con la sola limitazione d'essere nulla nell'istante iniziale e nell'istante finale (e di rimanere solenoidale, il che non pregiudica la generalità): allora supposto assegnato a priori il

secondo gruppo di equazioni di MAXWELL, la condizione caratteristica per la stazionarietà di \mathcal{E} che di \mathcal{F} è data dalle equazioni

$$(4.3) \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{H}} \qquad (4.4) \quad \text{div } \mathbf{H} = 0$$

$$(4.5) \quad \mathbf{E} \wedge \mathbf{n} = 0 \qquad (4.6) \quad \mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0.$$

Risulta quindi dimostrato che *tra tutti i campi vettoriali che soddisfano alle equazioni di MAXWELL del secondo gruppo, (nel vuoto, in presenza di cariche e di correnti) il campo elettromagnetico effettivo è quello che rende stazionaria l'azione elettromagnetica \mathcal{E} .*

Sorvolo sull'analogo principio che si riferisce al campo elettromagnetico neutro nel vuoto: anche qui, supposto assegnato a priori il secondo gruppo di equazioni di MAXWELL per il campo neutro, la stazionarietà dell'azione \mathcal{E} permette di ricavare le equazioni del primo gruppo.

Libera variazione dei potenziali elettromagnetici.

Diamo all'azione elettromagnetica \mathcal{F} una variazione più generale delle precedenti. Tale variazione $\delta \mathcal{F}$ sia eguale alla somma di una variazione $\delta_{(1)} \mathcal{F}$ compatibile col primo gruppo di equazioni di MAXWELL, e di una variazione $\delta_{(2)} \mathcal{F}$ compatibile col secondo gruppo di equazioni di MAXWELL, che è indipendente dal primo. Ricordando ora le (4.7) e le (4.7') si avrà

$$(4.12) \quad \delta \mathcal{F} = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_C \left\{ \left(\text{rot } \mathbf{H} - \frac{1}{c} \mathbf{I} - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{E}} \right) \times \delta \mathbf{A} + (\varrho - \text{div } \mathbf{E}) \delta V \right\} dC$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} dt \int_C \left\{ - \left(\text{rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{H}} \right) \times \delta \mathbf{A}' + \text{div } \mathbf{H} \delta V' \right\} dC +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} dt \int_S \left\{ \left(\mathbf{H} \wedge \mathbf{n} - \frac{1}{c} \mathbf{K} \right) \times \delta \mathbf{A} + (\sigma - \mathbf{E} \times \mathbf{n}) \delta V + \mathbf{E} \wedge \mathbf{n} \times \delta \mathbf{A}' + \mathbf{H} \times \mathbf{n} \delta V' \right\} dS.$$

Se allora sono soddisfatte tutte le equazioni di MAXWELL (4.3), (4.4), (4.8), (4.9) e le relative condizioni al contorno (4.5), (4.6), (4.10), (4.11), risulta $\delta \mathcal{F} = 0$ e quindi l'azione risulta stazionaria (minima).

Diamo ora ad \mathbf{E} ed \mathbf{H} una variazione $\delta\mathbf{E}$, $\delta\mathbf{H}$, somma delle due variazioni indipendenti $\delta_{(1)}\mathbf{E}$, $\delta_{(2)}\mathbf{E}$ e $\delta_{(1)}\mathbf{H}$, $\delta_{(2)}\mathbf{H}$ calcolate precedentemente. In C sarà:

$$\delta\mathbf{E} = -\text{grad } \delta V - \frac{1}{c} \delta\dot{\mathbf{A}} + \text{rot } \delta\mathbf{A}'; \quad \delta\mathbf{H} = \text{rot } \delta\mathbf{A} - \text{grad } \delta V' + \frac{1}{c} \delta\dot{\mathbf{A}}'$$

con δV , $\delta V'$ scalari arbitrari, e $\delta\mathbf{A}$, $\delta\mathbf{A}'$ vettori arbitrari solenoidali.

La variazione considerata è dunque ottenuta dando una variazione arbitraria ai potenziali e agli antipotenziati in C . La variazione subita dall'azione elettromagnetica, quando si varino in modo arbitrario in C i potenziali e gli antipotenziati, ma si rispettino in C e su S le distribuzioni di cariche elettriche e di correnti, è data dalla (4.12).

Affinchè sia $\delta\mathcal{F} = 0$, comunque si varino in C e sul contorno S gli scalari V e V' e i vettori \mathbf{A} e \mathbf{A}' , debbono essere verificate tutte le equazioni di MAXWELL (4.3), (4.4), (4.8), (4.9), nonchè le relative condizioni al contorno (4.5), (4.6), (4.10), (4.11). Concluderemo perciò affermando che, *tra tutti i campi che ammettono la medesima distribuzione spaziale e superficiale di cariche e di correnti, e i medesimi valori iniziali e finali dei potenziali vettori e degli antipotenziati vettori, il campo elettromagnetico rende stazionaria (minima) l'azione elettromagnetica totale \mathcal{F}* . E tale condizione di stazionarietà è caratteristica, potendo da sola sostituire tutte le equazioni di MAXWELL e le relative condizioni al contorno.

§ 5. — LA MINIMA AZIONE DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO NELLO SPAZIO TEMPO.

Preliminari analitici: il primo lemma di GREEN per i tensori emisimmetrici delle varietà quadrimensionali.

Supponiamo che lo spazio-tempo sia pseudoeuclideo, e la metrica sia pseudopitagorica:

$$(5.1) \quad ds^2 = a_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2).$$

Nella (5.1), $x_0 = ct$ indica la coordinata temporale in unità römeriane, c la velocità della luce rispetto a un riferimento inerziale, x_k ($k = 1, 2, 3$) le coordinate spaziali.

Introduciamo l'operatore

$$\square = a_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$$

il quale, avendo i coefficienti $\alpha_{\alpha\beta}$ i valori indicati da (5.1), è l'operatore di d'ALEMBERT:

$$\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right).$$

Se U e V sono funzioni scalari dei punti dello spazio-tempo pseudo-euclideo, è noto che⁽²²⁾, indicata con τ una regione connessa dello spazio-tempo quadrimensionale e con γ il suo contorno (ipersuperficie chiusa, bilatera) vale il primo lemma di GREEN (estensione di quello richiamato con la (1.1))

$$(5.2) \quad \int_{\tau} U_{|\alpha} V^{|\alpha} d\tau + \int_{\tau} U \square V d\tau = \int_{\gamma} U \frac{\partial V}{\partial n} d\gamma$$

ove n^α è il versore normale all'ipersuperficie γ volto verso la regione τ ⁽²³⁾.

In particolare, se $U \equiv V$, soluzione dell'equazione di d'ALEMBERT $\square U = 0$,

$$(5.3) \quad \int_{\tau} (\text{grad } U)^2 d\tau = \int_{\gamma} U \frac{\partial U}{\partial n} d\gamma$$

Introduciamo ora due vettori solenoidali dello spazio-tempo, U^α e V^α e indichiamo con C^α il prodotto interno del vettore U con il gradiente di V ⁽²⁴⁾

$$- C_\alpha = U^\beta (V_{\beta|\alpha} - V_{\alpha|\beta}).$$

Segue

$$- C_\alpha^{|\alpha} = \frac{1}{2} (U^{\beta|\alpha} - U^{\alpha|\beta}) (V_{\beta|\alpha} - V_{\alpha|\beta}) + U^\beta \square V_\beta$$

Applichiamo il teorema della divergenza al vettore C^α ; si ottiene

$$(5.4) \quad \frac{1}{2} \int_{\tau} (U^{\beta|\alpha} - U^{\alpha|\beta}) (V_{\beta|\alpha} - V_{\alpha|\beta}) d\tau + \int_{\tau} U^\beta \square V_\beta d\tau = \\ = - \int_{\gamma} U^\beta (V_{\beta|\alpha} - V_{\alpha|\beta}) n^\alpha d\gamma.$$

⁽²²⁾ Nei §§ 5 e 6 gli indici in basso sono di covarianza e quelli in alto di controvarianza; quelli indicati con lettere latine assumono i valori, puramente spaziali, 1, 2, 3; indicati con lettere greche, assumono i valori da 0 a 3; preceduti da una lineetta inclinata, sono indici di derivazione tensoriale.

⁽²³⁾ Per la dimostrazione della (5.2) cfr. J. A. STRATTON, l. c.⁽⁷⁾, p. 471.

⁽²⁴⁾ Per *gradiente* di un vettore si intende qui il doppio della parte emisimmetrica del tensore derivato, e per *gradiente* di un tensore doppio emisimmetrico si intende il doppio della parte emisimmetrica del tensore triplo derivato.

Confrontando la (5.4) con la (1.1) e con la (5.2), si può osservare che la densità di flusso attraverso γ del gradiente del vettore V_α , cioè il prodotto interno $f^\alpha = (V_{\alpha|\beta} - V_{\beta|\alpha}) n^\beta$, compie l'ufficio di derivata normale del vettore V_α ⁽²⁵⁾, e così può venir definita, in analogia della derivata normale d'uno scalare.

Nel caso particolare $U_\alpha = V_\alpha = \Phi_\alpha$, e supposto che tale vettore soddisfi all'equazione di d'ALEMBERT $\square \Phi_\alpha = 0$ ⁽²⁶⁾, allora si trova, in analogia alla (1.2) e alla (5.3)

$$(5.5) \quad \int_{\tau} (\text{grad } \Phi_\alpha)^2 d\tau = - \int_{\gamma} \Phi^\alpha (\Phi_{\beta|\alpha} - \Phi_{\alpha|\beta}) n^\beta d\gamma.$$

Se invece $U^e = V^e = \Psi^e$, e supposto che anche questo vettore soddisfi all'equazione di d'ALEMBERT, possiamo anche scrivere (dato che il prodotto interno di due tensori emisimmetrici coincide, in questo caso esattamente, col prodotto interno dei rispettivi tensori coniugati) ⁽²⁷⁾

$$(5.6) \quad \int_{\tau} (\text{rot } \Psi^e)^2 d\tau = - \int_{\gamma} \varepsilon^{\sigma\alpha\beta} (\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \Psi^{\nu|\mu}) \Psi_e n_\sigma d\gamma.$$

L'integrale quadruplo al primo membro della (5.5) è l'integrale di DIRICHLET; la (5.6) svolge nello spazio-tempo l'ufficio che la (1.4) svolge nello

⁽²⁵⁾ Per la definizione di *derivata normale* cfr. anche A. M. PRATELLI, *Sopra i tensori spazio-temporali di Hertz e di Riesz*, « Rend. Ist. Lomb. » **85** (1952) pp. 449-464.

⁽²⁶⁾ Per tensore emisimmetrico armonico in una varietà $V_{(n)}$, di metrica $ds^2 = a_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$, si intende qui un tensore d'ordine $r \leq n-1$, che sia irrotazionale e solenoidale.

Questa è la definizione che (se la metrica è definita positiva) viene ordinariamente assunta nella teoria delle forme armoniche: cfr. W. V. D. HODGE, *The Theory and Applications of Harmonic Integrals* (Cambridge, 1952) p. 107.

Condizione caratteristica perchè un tensore sia armonico è allora che esso sia gradiente d'un tensore d'ordine $r-1$, solenoidale, la cui generica componente $\varphi_{[r-1]}$ soddisfi a un'equazione del tipo $\varphi_{[r-1]}^\alpha = 0$.

Altra condizione caratteristica affinché un tensore d'ordine r sia armonico, è che esso sia il rotore d'un tensore d'ordine $n-r+1$, solenoidale, la cui generica componente $\psi^{[n-r+1]}$ soddisfi a un'equazione del tipo $\psi^{[n-r+1]}_\alpha = 0$.

Quanto sopra vale per n qualunque, e qui avremo occasione di applicarlo per $n \leq 5$.

⁽²⁷⁾ Il prodotto interno di due tensori doppi emisimmetrici si ottiene saturando i due indici di covarianza dell'uno con quelli di controvarianza dell'altro e moltiplicando per $\frac{1}{2}$; cfr. A. M. PRATELLI, *Sui tensori emisimmetrici coniugati*, « Rend. Ist. Lomb. », **82** (1949) pp. 473-487.

spazio tridimensionale, onde denomino « integrale di W. THOMSON » il primo membro della (5.6).

a) Il principio dell'azione stazionaria del campo elettromagnetico nello spazio-tempo, in corrispondenza a una variazione libera del campo.

Sia $F_{\alpha\beta}$ l'unico tensore che nel vuoto, rappresenta il campo elettromagnetico nella varietà di metrica (5.1); se i è l'unità immaginaria, esso è definito ponendo

$$F_{k0} = E_k = F^{0k} \quad *F^{k0} = i H^k = *F_{0k} \quad (28).$$

Sia J_α il vettore che individua la distribuzione delle cariche e delle correnti nella regione τ , e K_α il vettore che rappresenta la distribuzione delle cariche e delle correnti sull'ipersuperficie γ di contorno⁽²⁹⁾.

Il teorema di decomposizione⁽³⁰⁾, applicato al tensore emisimmetrico $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$, assicura

$$(5.7) \quad F_{\alpha\beta} = -\text{grad } \Phi_\alpha + \text{rot } \Psi^e$$

ove i vettori Φ_α e Ψ^e , primo e secondo potenziale, sono solenoidali.

Se diamo al tensore $F_{\alpha\beta}$ una variazione libera, essa si decompone nella somma

$$(5.8) \quad \delta F_{\alpha\beta} = -\text{grad } \delta \Phi_\alpha + \text{rot } \delta \Psi^e.$$

Una generica variazione libera del campo $F_{\alpha\beta}$ è quindi somma di una variazione solenoide e di una irrotazionale; cioè

$$(5.8') \quad \delta F_{\alpha\beta} = \delta_{(i)} F_{\alpha\beta} + \delta_{(s)} F_{\alpha\beta}$$

(28) L'asterisco a sinistra indica il tensore coniugato: $*F^{\alpha\sigma} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\varrho\sigma} F_{\alpha\beta}$; $\varepsilon^{\alpha\beta\varrho\sigma}$ è il tensore quadruplo emisimmetrico di RICCI.

(29) Non mi risulta che sia stata finora presa in esame la distribuzione di cariche e di correnti elettriche sull'ipersuperficie γ di contorno. Nei principi variazionali, si suppone che sul contorno della regione τ il campo $F_{\alpha\beta}$ si riduca a zero, oppure si suppone nulla la variazione dei potenziali sul contorno. Cfr. più avanti, la nota⁽³⁵⁾.

Il simbolo qui usato per indicare tale distribuzione, K_α , è stato scelto per analogia al vettore spaziale che individua la distribuzione di correnti su una superficie bidimensionale. Molto spesso si indica con k_α o K_α il vettore avente la componente temporale proporzionale alla potenza specifica delle corrente di convezione, e le componenti spaziali eguali alle componenti della forza di LORENTZ. Tuttavia nel corso della presente ricerca non ho mai occasione di occuparmi di tale vettore (che è il prodotto interno $F_{\alpha\beta} J^\beta$) e quindi non c'è possibilità di equivoci.

(30) Cfr. B. FINZI, l. c.⁽¹⁾, p. 380.

ove

$$(5.9) \quad \delta_{(i)} F_{\alpha\beta} = - \operatorname{grad} \delta \Phi_{\alpha} \equiv (\delta \Phi_{\beta|\alpha} - \delta \Phi_{\alpha|\beta})$$

$$(5.9') \quad \delta_{(s)} F_{\alpha\beta} = \operatorname{rot} \delta \Psi^{\sigma} \equiv \varepsilon_{\alpha\beta\sigma\varrho} \delta \Psi^{\varrho|\sigma}.$$

Si chiama *azione di puro campo elettromagnetico* l'invariante ⁽³¹⁾

$$(5.10) \quad \mathcal{G} = \frac{1}{2} \int_{\tau} \left(\frac{1}{2} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) d\tau$$

mentre chiamo *azione elettromagnetica totale* l'invariante

$$(5.11) \quad \mathcal{S} = \mathcal{G} - \int_{\tau} J^{\alpha} \Phi_{\alpha} d\tau - \int_{\gamma} K^{\alpha} \Phi_{\alpha} d\gamma.$$

Diamo ora al campo $F_{\alpha\beta}$ una variazione libera arbitraria (5.8), lasciando invariati i vettori J_{α} e K_{α} :

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} &= \int_{\tau} F^{\beta\alpha} \delta \Phi_{\alpha|\beta} d\tau + \int_{\tau} \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\sigma\varrho} F^{\alpha\beta} \delta \Psi^{\varrho|\sigma} d\tau - \int_{\tau} J^{\alpha} \delta \Phi_{\alpha} d\tau - \int_{\gamma} K^{\alpha} \delta \Phi_{\alpha} d\tau \\ (5.11') \quad \delta\mathcal{S} &= - \int_{\tau} \left\{ (F^{\beta\alpha}{}_{|\beta} + J^{\alpha}) \delta \Phi_{\alpha} + \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\varrho\sigma} F^{\alpha\beta|\varrho} \delta \Psi^{\sigma} \right\} d\tau - \\ &\quad - \int_{\gamma} \left\{ (F^{\alpha\beta} n_{\beta} - K^{\alpha}) \delta \Phi_{\alpha} + \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\varrho\sigma} F^{\alpha\beta} n^{\varrho} \delta \Psi^{\sigma} \right\} d\gamma \end{aligned}$$

La condizione caratteristica affinché $\delta\mathcal{S}$ sia nulla, in corrispondenza a variazioni arbitrarie dei potenziali all'interno di τ e sul contorno γ , è data dal verificarsi delle equazioni indefinite

$$(5.12) \quad \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\varrho\sigma} F^{\alpha\beta|\sigma} = 0 \qquad (5.13) \quad F_{\alpha\beta}{}^{|\beta} = J_{\alpha}$$

e dalle condizioni sulla ipersuperficie di contorno

$$(5.14) \quad \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\varrho\sigma} F^{\alpha\beta} n^{\sigma} = 0 \qquad (5.15) \quad F_{\alpha\beta} n^{\beta} = K_{\alpha}.$$

⁽³¹⁾ Cfr. B. FINZI, l. c. ⁽⁴⁾, p. 381.

Esse sono appunto le equazioni indefinite del campo elettromagnetico nel vuoto, e le condizioni al contorno, quando si suppone nullo il campo al di fuori dell'ipersuperficie γ ⁽³²⁾.

Concludiamo affermando che, a parità di distribuzione spazio-temporale di cariche e di correnti elettriche nella regione τ e sulla ipersuperficie γ di contorno, il campo elettromagnetico è quello che, tra tutti i campi costituiti da tensori doppi emisimmetrici dello spazio tempo, rende stazionaria ⁽³³⁾ l'azione \mathcal{S} .

Il primo addendo della (5.14) esprime la densità di flusso del tensore magnetoelettrico ⁽³⁴⁾ attraverso l'ipersuperficie γ , e lo denomiho (per analogia alla (2.5)) rotore ipersuperficiale di $F_{\alpha\beta}$; il primo membro della (5.15) esprime la densità di flusso del tensore elettromagnetico attraverso l'ipersuperficie γ e la denomiho (per analogia alla (2.6)) divergenza ipersuperficiale di $F_{\alpha\beta}$.

OSSERVAZIONE I: l'azione \mathcal{G} può decomorsi nella somma di tre integrali

$$(5.16) \quad \mathcal{G} = \frac{1}{2} \int_{\tau} (\text{grad } \Phi_a)^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_{\tau} (\text{rot } \Psi_e)^2 d\tau - \int_{\tau} (\text{grad } \Phi_a) \times (\text{rot } \Psi_e) d\tau$$

dei quali il primo è l'integrale di DIRICHLET, il secondo l'integrale di W. THOMSON, mentre il terzo dipende solo dai valori che i due potenziali hanno sul contorno γ (come si rileva mediante semplici calcoli che tralascio).

⁽³²⁾ Le (5.12) e (5.13) sono le (B) e le (A) di H. MINKOWSKI, *Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern*, «Nach. Gesell. Göttingen», 1908, pp. 53-111; cfr. ad es. B. FINZI e M. PASTORI, l. c. ⁽²⁾ pp. 352-353.

Per confrontare le condizioni al contorno (5.14) e (5.15) con le condizioni (4.5), (4.6) (4.10), (4.11) conviene, ad es., supporre la ipersuperficie γ formata nel seguente modo. Per $x_0 = ct_0$ e per $x_0 = ct_1$ essa sia costituita dalla regione C , mentre sia limitata, per gli altri valori di x_0 , lateralmente dall'ipersuperficie (tridimensionale) cilindrica, avente le generatrici parallele all'asse x_0 e avente per direttrice la superficie S . Nei punti dell'ipersuperficie cilindrica è $n^0 = n_0 = 0$, mentre le componenti $n_k = -n^k$ coincidono con le componenti cartesiane del vettore n normale ad S ; sulla base $x_0 = ct_0$ è $n^0 = n_0 = 1$, $n^k = 0$; sulla base $x_0 = ct_1$ è $n^0 = n_0 = -1$, $n^k = 0$.

Moltiplicando entrambi i membri della (5.15) per n^α , si trova $K_\alpha n^\alpha = 0$. Il vettore K_α è quindi tangente a γ (ossia la sua divergenza superficiale è nulla). Esso, per la (5.15), si trasforma come un vettore dello spazio-tempo.

⁽³³⁾ Nel seguito, mi limito a stabilire le condizioni caratteristiche per la stazionarietà. Si riconosce che si tratta effettivamente di un minimo, mediante una dimostrazione analoga a quella che si riferisce alla minima azione hamiltoniana. Cfr. H. POINCARÉ, *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, 3 (Paris, 1899), pp. 249-293.

⁽³⁴⁾ Cfr. A. M. PRATELLI, *I tensori coniugati del campo elettromagnetico*, «Rend. Ist. Lomb.» 83 (1950) pp. 197-213.

OSSERVAZIONE II: Se i potenziali Φ_α e Ψ^e sono variati solo nell'inter-no della regione τ , cioè se si suppone che sull'ipersuperficie γ sia $\delta\Phi_\alpha = 0 = \delta\Psi^e$, allora si ottengono solo le equazioni indefinite (5.12) e (5.13).

Più in particolare ancora, dalla stazionarietà di \mathcal{G} , a parità di valori dei potenziali Φ_α e Ψ^e sul contorno, si deducono le equazioni

$$(5.12) \quad \text{rot } F_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\varrho\sigma} F_{\alpha\beta|\sigma} = 0 \quad (5.13') \quad \text{div } F_{\alpha\beta} \equiv F_{\alpha\beta}{}^{|\beta} = 0$$

le quali assicurano che il campo tensoriale è armonico.

OSSERVAZIONE III: Se lasciamo arbitrarie le variazioni $\delta\Phi_\alpha$ e $\delta\Psi^e$ sul contorno, e supponiamo che sulla ipersuperficie γ sia $K_\alpha = 0$, allora sulla γ debbono valere le condizioni

$$(5.14) \quad \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\varrho\sigma} F_{\alpha\beta} n_\sigma = 0 \quad (5.15') \quad F_{\alpha\beta} n^\beta = 0.$$

cioè debbono esser nulli il rotore e la divergenza superficiale del tensore $F_{\alpha\beta}$. Ma quando γ è un'ipersuperficie di separazione tra il campo elettromagnetico e il campo nullo, senza che su di essa vi siano cariche e correnti elettriche, $F_{\alpha\beta}$ sull'ipersuperficie stessa eguaglia il tensore di discontinuità $\Delta_{\alpha\beta}$ tra i valori che il campo assume internamente ed esternamente a γ . L'ipersuperficie γ è un'ipersuperficie geometrica che separa il campo perturbato dal campo in quiete, cioè è una varietà caratteristica (nello spazio-tempo pseudoeuclideo, invece che nello spazio rappresentativo cinematico quadrimensionale euclideo) del sistema differenziale (5.12) e (5.13'), o del sistema (5.12) e (5.13)⁽³⁵⁾.

D'altra parte $\Delta_{\alpha\beta}$ è un tensore « semplice », quindi sulla varietà caratteristica γ , $F_{\alpha\beta}$ è « semplice », cosicchè il campo elettrico e il campo magnetico, cioè i vettori spaziali \mathbf{E} ed \mathbf{H} , son tra di loro ortogonali⁽³⁶⁾.

b) Il principio dell'azione stazionaria nello spazio-tempo, in corrispondenza ad una variazione irrotazionale del campo.

Supponiamo sia assegnato a priori il rotore del campo tensoriale $F_{\alpha\beta}$; anzi, per occuparci del caso fisicamente più interessante, supponiamolo nullo, siano assegnate cioè le equazioni

$$(5.12) \quad \text{rot } F_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\varrho\sigma} F_{\alpha\beta|\sigma} = 0 \quad (5.14) \quad \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\varrho\sigma} F_{\alpha\beta} n_\varrho = 0.$$

⁽³⁵⁾ Cfr. R. FINZI, *Discontinuità dei campi elettromagnetici nello spazio-tempo*, « Bollettino U. M. I. » ser. 3, 7, (1952) pp. 252-259.

⁽³⁶⁾ Cfr. A. M. PRATELLI, *Sul campo elettromagnetico « ortogonale » nello spazio-tempo*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. 8, 9 (1950), pp. 251-256, 331-336.

In conseguenza, si deve dare al campo tensoriale $F_{\alpha\beta}$ una variazione irrotazionale (5.9) e la corrispondente variazione dell'azione \mathcal{S} è

$$(5.17) \quad \delta_{(i)}\mathcal{S} = \int_{\tau} (-F_{\alpha\beta} \delta\Phi^{\beta/\alpha} - J_{\alpha} \delta\Phi^{\alpha}) d\tau - \int_{\gamma} K_{\alpha} \delta\Phi^{\alpha} d\gamma.$$

La condizione caratteristica per l'annullarsi di $\delta_{(i)}\mathcal{S}$, quando la variazione del primo potenziale, $\delta\Phi_{\alpha}$, è arbitraria sul campo e sul contorno, è che siano soddisfatte le equazioni

$$(5.13) \quad \text{div } F_{\alpha\beta} \equiv F_{\alpha\beta|\beta} = J_{\alpha} \qquad (5.15) \quad F_{\alpha\beta} n^{\beta} = K_{\alpha}.$$

Concludiamo affermando che tra tutti i campi tensoriali aventi lo stesso rotore, e in particolare *tra tutti i campi tensoriali irrotazionali nella regione τ e sull'ipersuperficie γ di contorno, il campo elettromagnetico rende stazionaria l'azione \mathcal{S} .*

La variazione irrotazionale esaminata qui sopra è proprio quella (ove si supponga $\delta\Phi_{\alpha} = 0$ su γ , oppure che la regione τ sia *tutto* lo spazio-tempo) che ordinariamente viene adottata⁽³⁷⁾ per ricavare la seconda equazione tensoriale (5.13) del campo elettromagnetico nel vuoto, quando sia nota la prima equazione (5.12).

L'analogia col campo elettrostatico dà lo spunto per ricercare i legami tra il primo potenziale Φ_{α} e i vettori che rappresentano le correnti: in conseguenza della (5.12) l'azione totale \mathcal{S} può scriversi

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} \int_{\tau} (\text{grad } \Phi_{\alpha}) \times (\text{grad } \Phi_{\alpha}) d\tau - \int_{\tau} \Phi^{\alpha} J_{\alpha} d\tau - \int_{\gamma} \Phi^{\alpha} K_{\alpha} d\gamma$$

e, per la (5.4) e la (5.5), la variazione corrispondente dello stesso invariante \mathcal{S} diviene

$$(5.17') \quad \delta_{(i)}\mathcal{S} = \int_{\tau} (\text{grad } \Phi_{\alpha}) \times (\text{grad } \delta\Phi_{\alpha}) d\tau - \int_{\tau} J_{\alpha} \delta\Phi^{\alpha} d\tau - \int_{\gamma} K_{\alpha} \delta\Phi^{\alpha} d\gamma = \\ = - \int_{\tau} \{ \square\Phi_{\alpha} + J_{\alpha} \} \delta\Phi^{\alpha} d\tau - \int_{\gamma} \{ K_{\alpha} + (\Phi_{\alpha|\beta} - \Phi_{\beta|\alpha}) n^{\beta} \} \delta\Phi^{\alpha} d\gamma,$$

⁽³⁷⁾ Cfr. H. WEYL, *Space-time-matter* (trans. L. BROSE, New York, 1950), p. 210; cfr. anche C. MÖLLER, *The Theory of Relativity* (Oxford, 1952), p. 157.

cosicchè condizione caratteristica affinchè $\delta_{(s)}\mathcal{S} = 0$, in corrispondenza a valori arbitrari di $\delta\Phi_\alpha$ nella regione τ e sul contorno γ è

$$(5.13') \quad \square \Phi_\alpha = -J_\alpha \qquad (5.15') \quad (\Phi_{\beta|\alpha} - \Phi_{\alpha|\beta})n^\beta = K_\alpha$$

e) Il principio dell'azione stazionaria nello spazio-tempo, in corrispondenza ad una variazione solenoidale del campo.

Supponiamo sia assegnata a priori la divergenza del campo tensoriale $F_{\alpha\beta}$ nell'intera regione τ e sul contorno γ ; anzi, per maggior aderenza al significato fisico, supponiamo che la divergenza sia eguale alla distribuzione di corrente J_α entro la regione τ , e la divergenza ipersuperficiale sia eguale al vettore K_α sull'ipersuperficie di contorno γ : cioè siano assegnate la (5.13) e la (5.15).

La sola variazione che si può dare in tal caso al tensore $F_{\alpha\beta}$ è una variazione solenoidale (5.9), e in conseguenza le variazioni solenoidali degli invarianti \mathcal{G} e \mathcal{S} coincidono tra di loro

$$(5.18) \quad \delta_{(s)}\mathcal{G} \equiv \delta_{(s)}\mathcal{S} = \frac{1}{2} \int_{\tau} F^{\alpha\beta} \delta_{(s)}F_{\alpha\beta} d\tau = \frac{1}{2} \int_{\tau} \varepsilon_{\alpha\beta\varrho\sigma} F^{\alpha\beta|\varrho} \delta\Psi^\sigma d\tau - \\ - \frac{1}{2} \int_{\gamma} \varepsilon_{\alpha\beta\varrho\sigma} F^{\alpha\beta} n^\varrho \delta\Psi^\sigma d\gamma.$$

La condizione caratteristica affinchè (5.18) sia nulla in corrispondenza a variazioni arbitrarie $\delta\Psi^\sigma$ del secondo potenziale nella regione τ e sul contorno γ , è data dalle equazioni

$$(5.12) \quad \text{rot } F_{\alpha\beta} = 0 \qquad (5.14) \quad \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\varrho\sigma} F_{\alpha\beta} n_\varrho = 0.$$

Quindi tra tutti i campi tensoriali la cui divergenza è eguale alla distribuzione spazio-temporale J_α di cariche e correnti nell'interno della regione τ , e la cui divergenza ipersuperficiale eguaglia la distribuzione di cariche e correnti K_α sull'ipersuperficie γ , quello che rende stazionaria l'azione \mathcal{G} è il campo elettromagnetico.

Questo principio costituisce l'estensione allo spazio-tempo del classico principio di W. THOMSON per il campo elettrostatico.

È superfluo insistere sulla diversità tra l'enunciato a) e l'enunciato c): in a) si suppongono assegnati i vettori J_α e K_α , e dalla stazionarietà di \mathcal{S} in corrispondenza a una variazione arbitraria del campo $F_{\alpha\beta}$ si ottiene il gruppo delle equazioni (5.12), (5.13), (5.14), (5.15). Nell'enunciato c) si sup-

pone noto il legame tra il campo $F_{\alpha\beta}$ e i vettori J_α e K_α , e dalla stazionarietà dell'azione di puro campo \mathcal{G} si deducono le equazioni (5.12) e (5.14).

§ 6. — L'AZIONE STAZIONARIA DEL CAMPO MESONICO NEUTRALE (SCALARE E VETTORIALE) NELLO SPAZIO-TEMPO QUADRIMENSIONALE.

Il campo mesonico scalare neutrale.

Il più semplice tipo di campo mesonico ⁽³⁸⁾ nello spazio-tempo di metrica (5.1) è individuato da un unico vettore posizionale F_α ⁽³⁹⁾ (funzione dei punti dello spazio-tempo).

In conseguenza del teorema di decomposizione ⁽⁴⁰⁾ un generico vettore posizionale della varietà (5.1) può, a priori, sempre considerarsi somma del gradiente di uno scalare e del rotore di un tensore doppio emisimmetrico solenoidale

$$(6.1) \quad F_\alpha = -\varphi_{|\alpha} + \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \psi^{\beta\gamma\delta}$$

Se τ e γ hanno il significato del § precedente, introduciamo l'invariante \mathcal{J} (azione del campo mesonico neutrale F_α)

$$(6.2) \quad \mathcal{J} = \int_{\tau} \frac{1}{2} (F_\alpha F^\alpha - \kappa^2 \varphi^2) d\tau$$

ove la costante κ ha la dimensione del reciproco d'una lunghezza (reciproco del « raggio » dell'elettrone, ossia del raggio d'azione delle forze nucleari).

Calcoliamo la variazione di \mathcal{J} in corrispondenza a una variazione libera del campo F_α . Tale variazione è la somma d'una variazione irrotazionale e di una solenoidale

$$(1.1) \quad \delta F_\alpha = \delta_{(i)} F_\alpha + \delta_{(s)} F_\alpha$$

⁽³⁸⁾ H. YUKAWA, *On the interaction of elementary particles*, « Proc. Phys. Math. Soc. Japan », **17** (1935) pp. 48-57; cfr. anche C. MÖLLER, l. c. ⁽³⁷⁾ p. 184.

⁽³⁹⁾ Per il significato fisico delle quattro componenti del vettore F_α , cfr. F. HUND, *Über eine Symmetrieeigenschaft der Wellentheorie der Materie*, « Zeit. für Phys. », **118**, (1941-42) pp. 426-442.

⁽⁴⁰⁾ Il teorema di decomposizione per un vettore dello spazio-tempo è già noto: cfr. ad es. N. KEMMER, *Quantum Theory ecc.*, « Proc. R. Soc. » A. **166**, (1938) pp. 127-153 e O. COSTA DE BEAUREGARD, *La Théorie de la relativité restreinte* (Paris, 1949), p. 150.

ove

$$\delta_{(i)} F_\alpha = - \delta \varphi_{|\alpha}$$

$$\delta_{(s)} F_\alpha = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\varrho\sigma} \delta \psi^{\varrho\sigma/\beta}$$

La variazione di \mathcal{J} è data da

$$\delta \mathcal{J} = \int_{\tau} \left(- F_\alpha \delta \varphi^{|\alpha} + \frac{1}{2} F_\alpha \varepsilon^{\alpha\beta\varrho\sigma} \delta \psi_{\varrho\sigma/\beta} - \kappa^2 \varphi \delta \varphi \right) d\tau$$

$$\delta \mathcal{J} = \int_{\tau} \left\{ \delta \varphi (F_\alpha{}^{|\alpha} - \kappa^2 \varphi) + \frac{1}{2} \varepsilon^{\varrho\sigma\beta\alpha} F_{\beta|\alpha} \delta \psi^{\varrho\sigma} \right\} d\tau +$$

$$(6.2') \quad + \int_{\gamma} \left\{ \delta \varphi F_\alpha n^\alpha + n_\beta F_\alpha \varepsilon^{\alpha\beta\varrho\sigma} \delta \psi_{\varrho\sigma} \right\} d\gamma.$$

Se supponiamo nulla la variazione di entrambi i potenziali sul contorno γ , la condizione caratteristica affinché sia $\delta \mathcal{J} = 0$ in corrispondenza a valori arbitrari di $\delta \varphi$ e di $\delta \psi^{\varrho\sigma}$ nell'interno di τ è che siano soddisfatte le equazioni indefinite

$$(6.3) \quad \varepsilon^{\varrho\sigma\alpha\beta} F_{\beta|\alpha} = 0 \qquad (6.4) \quad F_\alpha{}^{|\alpha} = \kappa^2 \varphi$$

• L'integrale generale della (6.3) è allora

$$(6.3') \quad F_\alpha = - \varphi_{|\alpha};$$

questo integrale generale, sostituito nella (6.4), reca di conseguenza

$$(6.4') \quad (\square + \kappa^2) \varphi = 0 \quad (41).$$

Le equazioni (6.3') e (6.4') sono le equazioni indefinite del campo mesonico scalare neutrale (« scalare » perchè il campo è descritto dal solo scala-

(41) Per riconoscere il significato della (6.4') e, successivamente, della (6.6'), basta scriverla per esteso; essendo la metrica data dalla (5.1) è $(\square + \kappa^2) \varphi = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \kappa^2 \varphi \right) - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} \right)$.

re φ , funzione delle coordinate del generico punto della regione τ) ⁽⁴²⁾. In conclusione, a parità di potenziali sul contorno γ , tra tutti i campi vettoriali regolari il campo mesonico scalare neutrale rende stazionaria l'azione \mathcal{J} .

Possiamo invece supporre ⁽⁴³⁾ assegnata a priori la (6.3') e dare al campo F_α una variazione arbitraria compatibile con essa, cioè irrotazionale.

Allora la variazione che subisce l'azione è

$$\delta_{(i)}\mathcal{J} = \int_{\tau} (\varphi_{|\alpha} \delta\varphi^{|\alpha} - \kappa^2 \varphi \delta\varphi) d\tau$$

e la condizione caratteristica affinché sia $\delta_{(i)}\mathcal{J} = 0$, quando $\delta\varphi$ è arbitraria in τ ma nulla sul contorno γ , è che sia soddisfatta la (6.4').

Viceversa, supposta assegnata a priori la (6.4), la sola variazione che possiamo dare al campo F_α è una variazione solenoidale. In conseguenza, l'azione subisce la variazione

$$\delta_{(s)}\mathcal{J} = \int_{\tau} \frac{1}{2} F_{\beta|\alpha} \varepsilon^{\sigma\beta\alpha} \delta\psi_{\sigma} d\tau.$$

Segue che la condizione caratteristica affinché sia $\delta_{(s)}\mathcal{J} = 0$, quando il tensore $\delta\psi_{\sigma}$ è arbitrario in τ ma nullo sul contorno, è che sia soddisfatta la (6.3): cioè tra tutti i campi vettoriali regolari che soddisfano la (6.4), il campo irrotazionale (cioè il campo che ammette un potenziale scalare) è quello che rende stazionaria l'azione.

Il campo mesonico vettoriale neutrale.

Il campo mesonico neutrale, nella varietà di metrica (5.1), sia ora individuato, analogamente al campo elettromagnetico, da un unico tensore doppio esimmetrico, che si vuol indicare ancora con $F_{\alpha\beta}$, benchè il significato fisico delle sue sei componenti sia diverso dal significato fisico delle analoghe componenti del tensore che rappresenta il campo elettromagnetico ⁽⁴⁴⁾.

⁽⁴²⁾ Non mi occupo esplicitamente del campo mesonico « pseudoscalare » o di quello « pseudovettoriale » perchè essi si riconducono rispettivamente al campo scalare e al campo vettoriale. Cfr. P. CALDIROLA, *Sui vari tipi di campi mesonici nella teoria delle forze nucleari*, « Rend. Sem. Fis. Pavia », 1 (1946).

⁽⁴³⁾ Cfr. C. MÖLLER, l. c. ⁽³⁷⁾, p. 184.

⁽⁴⁴⁾ Cfr. A. PROCA, *Sur la théorie ondulatoire des électrons*, « Journ. Phys. Rad. », 7 (1936), pp. 347-353; H. YUKAWA (e collaboratori) *On the interaction of elementary particles*, « Proc. Phys. Math. Soc. Japan » 20 (1938) pp. 319-340, 720-745; cfr. anche A. PIGNEDOLI, *Sull'aspetto analitico di due importanti problemi della Fisica Nucleare*, « Rend. Sem. Mat. Fis. Milano » 22 (1951) pp. 74-89, ove trovasi ampia bibliografia.

Decomposto $F_{\alpha\beta}$ in conformità della (5.7), chiamiamo *azione del campo mesonico* $F_{\alpha\beta}$ l'invariante

$$\mathcal{L} = \int_{\tau} \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \kappa^2 \Phi_{\alpha} \Phi^{\alpha} \right\} d\tau.$$

Mediante calcoli analoghi a quelli sviluppati nel § 5, si riconosce che la condizione caratteristica affinché $\delta\mathcal{L}$ sia nulla in corrispondenza a variazioni arbitrarie dei potenziali nell'interno di τ , e a parità di valori dei potenziali stessi sul contorno γ , è data dalle equazioni indefinite

$$(6.5) \quad \frac{1}{2} \varepsilon^{\sigma\alpha\beta} F_{\alpha\beta|\sigma} = 0 \quad (6.6) \quad F_{\alpha\beta}{}^{|\beta} = \kappa^2 \Phi_{\alpha} \quad (45).$$

L'integrale generale della (6.5) è

$$(6.5') \quad F_{\alpha\beta} = -\text{grad } \Phi_{\alpha};$$

il primo potenziale Φ_{α} , sostituito nella (6.6), soddisfa all'equazione:

$$(6.6') \quad (\square + \kappa^2) \Phi_{\alpha} = 0.$$

Le equazioni (6.5') e (6.6') sono le equazioni del campo mesonico neutrale « vettoriale » (perchè il campo è descritto dal potenziale Φ_{α} , vettore solenoidale dello spazio-tempo)⁽⁴⁵⁾. Concludiamo affermando che, *tra tutti i campi tensoriali dello spazio-tempo (costituiti da tensori doppi emisimmetrici) il campo mesonico vettoriale neutrale è quello che rende stazionaria l'azione \mathcal{L} .*

Ritengo superfluo dilungarmi per mostrare come, supposta assegnata a priori l'equazione (6.5), dando al campo $F_{\alpha\beta}$ una variazione irrotazionale $\delta_{(i)} F_{\alpha\beta} = -\text{grad } \delta\Phi_{\alpha}$, l'azione subisce una variazione

$$\delta_{(i)} \mathcal{L} = \int_{\tau} (-F_{\alpha\beta} \delta\Phi^{\beta|\alpha} - \kappa^2 \Phi_{\alpha} \delta\Phi^{\alpha}) d\tau$$

⁽⁴⁵⁾ Le equazioni (6.5) e (6.6) si riferiscono al campo « vuoto », cioè in assenza di neutroni; la deduzione di tali equazioni trovata già, sostanzialmente, in B. FINZI, l. c. (4), p. 480. Le suddette due equazioni (6.5) e (6.6) sintetizzano le quattro equazioni vettoriali (1₂) di A. PIGNEDOLI, l. c. (44), p. 78.

⁽⁴⁶⁾ Il campo sopra considerato è « neutrale », nel senso che le particelle nucleari interagiscono solo con mesoni elettricamente neutri: cfr. H. BETHE, *The meson theory of nuclear forces*, « Phys. Rev. », **57** (1940) pp. 260-272, 390-412. Per studiare le equazioni del campo mesonico in presenza di « cariche », occorre far uso di tensori complessi: non è difficile estendere il teorema di decomposizione al campo complesso, mentre l'azione deve essere modificata aggiungendo termini opportuni.

cosicchè condizione caratteristica affinchè sia $\delta_{(i)}\mathcal{L} = 0$, a parità di valori del potenziale Φ_α al contorno e in corrispondenza a variazioni arbitrarie del potenziale stesso nella regione τ , è che sia soddisfatta l'equazione indefinita (6.6).

Viceversa, supposta assegnata la (6.6), imprimendo al campo la variazione solenoidale $\delta_{(s)}F_{\alpha\beta} = \text{rot } \delta\Psi^e$, l'azione subisce la variazione (47)

$$\delta_{(s)}\mathcal{L} = \frac{1}{2} \int_{\tau} F_{\alpha\beta} \epsilon^{\alpha\beta e\sigma} \delta\Psi_{\sigma/e} d\tau$$

cosicchè condizione caratteristica affinchè sia $\delta_{(s)}\mathcal{L} = 0$, a parità di valori del secondo potenziale Ψ^e al contorno e in corrispondenza a variazioni arbitrarie del secondo potenziale stesso nell'interno della regione τ , è che sia valida l'equazione (6.5).

§ 7. — UN PRINCIPIO DI AZIONE STAZIONARIA NELLE VARIETÀ PENTADIMENSIONALI.

Preliminari analitici: estensione del teorema di decomposizione.

Sia $V_{(5)}$ una varietà pentadimensionale, di metrica

$$(7.1) \quad d s^2 = a_{\alpha\beta} d x^\alpha d x^\beta = d r^2 - d l^2$$

ove

$$(7.2) \quad d r^2 = d x_0^2 + d x_5^2 \qquad (7.3) \quad d l^2 = d x_1^2 + d x_2^2 + d x_3^2$$

Le coordinate x_0, x_1, x_2, x_3 hanno il significato dei §§ 5 e 6, mentre il significato della quinta coordinata x_5 rimane, almeno per ora, imprecisato (48).

Se H_α è un vettore assegnato, posizionale, cioè funzione dei punti della varietà $V_{(5)}$ di metrica (7.1), si posson sempre trovare un primo potenziale

(47) È superfluo rilevare che nelle variazioni $\delta_{(s)}\mathcal{J}$ e $\delta_{(s)}\mathcal{L}$ vien variato solo il primo addendo, che esprime l'integrale quadruplo della norma del vettore F_α o del tensore $F_{\alpha\beta}$.

(48) La quinta coordinata è stata introdotta nello studio di teorie relativistiche da KALUZA, e usata poi da altri autori: cfr. TH. KALUZA, *Zum Unitätsproblem der Physik*: « Sitz. Ber. Preuss. Ak. Wiss. » (1921) pp. 966-972.

Adopero gli indici 0, 1, 2, 3, 5 e salto l'indice 4, perchè è ormai consacrato dall'uso il significato $x_4 = ict$. Quanto dico in merito al teorema di decomposizione vale, sostanzialmente, anche per le varietà euclidee. Valgono anche qui le convenzioni circa gli indici di covarianza e controvarianza.

φ (scalare), e un secondo potenziale $\psi^{\gamma\delta\epsilon}$ (tensore triplo emisimmetrico, che possiam supporre solenoïdale senza pregiudizio della generalità) tali che

$$(7.4) \quad H_\alpha = -\text{grad } \varphi + \text{rot } \psi^{\gamma\delta\epsilon} = -\varphi_{|\alpha} + \frac{1}{3!} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon} \psi^{\gamma\delta\epsilon|\beta}.$$

Infatti, calcolando la divergenza d'entrambi i membri della (7.4) si trova l'equazione tensoriale (corrispondente ad un'unica equazione scalare)

$$(7.5) \quad H_\alpha{}^{|\alpha} = -\varphi_\alpha{}^{(49)}.$$

Se si calcola invece il rotore di entrambi i membri della (7.4) si ottiene l'equazione tensoriale

$$\begin{aligned} \text{rot } H_\alpha &\equiv \varepsilon^{\lambda\mu\nu\sigma} H_{\alpha|\sigma} = \frac{1}{3!} a_{\beta\gamma\delta\epsilon}^{\lambda\mu\nu\sigma} \psi^{\gamma\delta\epsilon|\beta}{}_\sigma = \\ &= \psi^{\mu\nu\sigma|\lambda}{}_\sigma + \psi^{\nu\sigma\lambda|\mu}{}_\sigma + \psi^{\sigma\lambda\mu|\nu}{}_\sigma + \psi^{\lambda\mu\nu|\sigma}{}_\sigma. \end{aligned}$$

I primi tre addendi dell'ultimo membro sono nulli in conseguenza dell'ipotesi che il tensore $\psi^{\gamma\delta\epsilon}$ sia solenoïdale; ci riduciamo quindi all'equazione tensoriale (corrispondente a quattro⁽⁵⁰⁾ equazioni scalari indipendenti)

$$(7.6) \quad \text{rot } H_\alpha = \psi^{\lambda\mu\nu|\sigma}{}_\sigma \quad (51).$$

⁽⁴⁹⁾ La (7.5) è talvolta denominata equazione di POISSON pentadimensionale nell'incognita φ ; l'operatore « div grad » si suol anche indicare con un pentagono $\hat{\square}$, perchè costituisce l'estensione alla varietà pentadimensionali dell'operatore di LAPLACE.

⁽⁵⁰⁾ Le equazioni scalari sintetizzate nell'equazione tensoriale (7.6) sono formalmente tante quante le componenti non nulle del rotore $R^{\lambda\mu\nu} \equiv \text{rot } H_\alpha$, cioè $\binom{5}{3} = 10$.

La divergenza del rotore è identicamente nulla, cioè $\text{div rot } H_\alpha \equiv 0$; essa corrisponde alle 10 identità scalari $D^{\lambda\mu} = R^{\lambda\mu\nu}{}_{|\nu} \equiv 0$.

Senonchè è anche identicamente nulla la divergenza seconda di qualsiasi tensore emisimmetrico, cioè $D^{\lambda\mu}{}_{|\mu} \equiv 0$; essa equivale a 5 identità scalari, da cui si deve detrarre l'identità $D^{\lambda\mu}{}_{|\mu\lambda} \equiv 0$.

In definitiva, le componenti essenzialmente distinte del rotore, e quindi le equazioni scalari indipendenti, sono

$$10 - [10 - (5 - 1)] = 4.$$

⁽⁵¹⁾ Le componenti distinte e non nulle di un generico tensore triplo emisimmetrico in una varietà pentadimensionale sono $\binom{5}{3} = 10$. L'ipotesi che tale tensore sia solenoïdale implica le 10 condizioni $\psi^{\gamma\delta\epsilon}{}_{|\epsilon} = 0$; ma la divergenza seconda è identicamente nulla, e poichè la divergenza seconda di un tensore triplo è un vettore, dobbiamo tener conto delle 5 identità $\psi^{\gamma\delta\epsilon}{}_{|\epsilon\delta} \equiv 0$; da queste, infine, si deve detrarre l'identità $\psi^{\gamma\delta\epsilon}{}_{|\epsilon\delta\gamma} \equiv 0$.

In definitiva, le componenti essenzialmente distinte del secondo potenziale $\psi^{\gamma\delta\epsilon}$, cioè le incognite del sistema di equazioni (7.6) si riducono a

$$10 - [10 - (5 - 1)] = 4.$$

Risolve la (7.5) e la (7.6), si ottengono i due potenziali, è il vettore H_α è decomposto nella somma di un vettore irrotazionale e di uno solenoidale.

Sia ora $H_{\alpha\beta}$ un tensore doppio emisimmetrico, posizionale, assegnato nella $V_{(5)}$ di metrica (7.1): le sue componenti essenzialmente distinte e non nulle sono dieci. Per decomporlo nella somma di un tensore doppio irrotazionale e di un tensore doppio solenoidale, occorre determinare un vettore Φ_α (primo potenziale, che possiamo supporre solenoidale), e un tensore doppio emisimmetrico $\Psi^{\delta\epsilon}$ (secondo potenziale, che possiamo supporre solenoidale), tali che:

$$(7.7) \quad H_{\alpha\beta} = -\text{grad } \Phi_\alpha + \text{rot } \Psi^{\delta\epsilon} = (\Phi_{\beta|\alpha} - \Phi_{\alpha|\beta}) + \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon} \Psi^{\delta\epsilon/\gamma}.$$

Infatti, calcolando la divergenza d'entrambi i membri della (7.7), si trova l'equazione tensoriale (corrispondente a quattro⁽⁵²⁾ equazioni scalari indipendenti)

$$(7.8) \quad H_{\alpha\beta}/^\beta = -\Phi_\alpha/^\beta.$$

Calcolando invece il rotore di entrambi i membri della (7.7) si ottiene l'equazione tensoriale

$$\text{rot } H_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\lambda\mu\nu\alpha\beta} H_{\alpha\beta/\nu} = \alpha_{\gamma\delta\epsilon}^{\lambda\mu\nu} \Psi^{\delta\epsilon/\gamma} = \Psi^{\mu\nu/\lambda} + \Psi^{\nu\lambda/\mu} + \Psi^{\lambda\mu/\nu}.$$

I primi due addendi dell'ultimo membro sono nulli in conformità all'ipotesi che il tensore $\Psi^{\delta\epsilon}$ sia solenoidale; ci riduciamo quindi all'equazione tensoriale (corrispondente a sei⁽⁵³⁾ equazioni scalari indipendenti)

$$(7.9) \quad \text{rot } H_{\alpha\beta} = \Psi^{\lambda\mu/\nu}.$$

Risolve la (7.4) e la (7.6) si ottengono i due potenziali, e il tensore doppio emisimmetrico assegnato $H_{\alpha\beta}$ risulta decomposto nella somma di un tensore irrotazionale e di uno solenoide.

⁽⁵²⁾ Calcolando la divergenza d'entrambi i membri della (7.8) si ottiene un'identità; d'altra parte, avendo supposto il vettore Φ_α solenoidale, le sue componenti essenzialmente distinte si riducono a quattro.

⁽⁵³⁾ Le componenti essenzialmente distinte di $\Psi^{\delta\epsilon}$ sono 10; il supporre tale tensore solenoidale implica $5 - 1 = 4$ condizioni indipendenti: le componenti essenzialmente distinte di $\Psi^{\delta\epsilon}$ si riducono quindi a sei, e le equazioni scalari (7.9) sono appunto sei, a motivo delle identità che si ottengono calcolando la divergenza d'entrambi i membri della stessa.

OSSERVAZIONE: il tensore coniugato di un vettore H_α è, in $V_{(5)}$, un tensore emisimmetrico quadruplo, avente, a meno del segno, per rotore la divergenza di H_α e per divergenza il rotore di H_α ; il tensore coniugato di un tensore doppio $H_{\alpha\beta}$ è un tensore triplo, avente, a meno del segno, per rotore la divergenza di $H_{\alpha\beta}$ e per divergenza il rotore di $H_{\alpha\beta}$. Il teorema di decomposizione (nella forma (7.4) o nella forma (7.7)) vale quindi anche per i tensori emisimmetrici tripli e quadrupli, perchè l'addendo solenoidale si scambia con l'addendo irrotazionale.

Il campo armonico gradiente d'un potenziale scalare (campo mesonico scalare pentadimensionale).

Sia Γ una regione della varietà $V_{(5)}$ di metrica (7.1), Σ il suo contorno, n^α il versore normale a Σ volto verso Γ . Se H_α è un vettore posizionale di Γ , chiamo *azione* l'integrale quintuplo della metà della *norma* di H_α ,

$$(7.10) \quad \mathcal{N} = \int_{\Gamma} \frac{1}{2} H_\alpha H^\alpha d\Gamma.$$

Decomposto il campo vettoriale H_α secondo la (7.4), la variazione libera del campo si può analogamente decomporre nella somma di una variazione irrotazionale e di una variazione solenoidale

$$(7.4') \quad \delta H_\alpha = \delta_{(i)} H_\alpha + \delta_{(s)} H_\alpha.$$

La variazione che in corrispondenza subisce \mathcal{N} è

$$(7.10') \quad \begin{aligned} \delta \mathcal{N} &= \int_{\Gamma} H_\alpha \{ \delta_{(i)} H^\alpha + \delta_{(s)} H^\alpha \} d\Gamma = \\ &= \int_{\Gamma} \left\{ \delta \varphi H_\alpha /^\alpha + \frac{1}{3!} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta e} H_{\beta|\alpha} \delta \psi_{\gamma\delta e} \right\} d\Gamma + \\ &+ \int_{\Sigma} \left\{ \delta \varphi H_\alpha n^\alpha + \frac{1}{3!} n_\alpha H_\beta \delta \psi_{\gamma\delta e} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta e} \right\} d\Sigma. \end{aligned}$$

Si diano al primo e al secondo potenziale variazioni arbitrarie nella regione Γ ma nulle sul contorno Σ ; la condizione caratteristica perchè risulti in corrispondenza $\delta \mathcal{N} = 0$ è che siano soddisfatte le equazioni

$$(7.11) \quad \text{rot } H_\alpha \equiv \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta e} H_{\beta|\alpha} = 0 \quad (7.12) \quad \text{div } H_\alpha \equiv H_\alpha /^\alpha = 0$$

cioè tra tutti i campi vettoriali regolari entro Γ quello che, a parità di potenziali φ e $\psi^{r\delta e}$ sul contorno Σ , rende stazionaria \mathcal{N} , è il campo armonico.

Dalle (7.11) e (7.12) segue

$$(7.11') \quad \varphi/\alpha = 0; \quad \psi^{r\delta e}/\alpha = 0.$$

Si dia ora al campo vettoriale H_α una variazione irrotazionale; anzi si supponga assegnata a priori la (7.11); allora l'azione è data da

$$\mathcal{N} = \int_{\Gamma} \frac{1}{2} \text{grad } \varphi \times \text{grad } \varphi d\Gamma$$

e la stazionarietà di \mathcal{N} comporta la stazionarietà dell'integrale di DIRICHLET. Ritroviamo il principio di DIRICHLET: *tra tutti i campi vettoriali irrotazionali aventi lo stesso potenziale (scalare) sul contorno, il campo per cui l'azione \mathcal{N} è stazionaria è il campo solenoidale.*

Viceversa, si dia al campo H_α una variazione solenoidale; anzi, si supponga assegnata a priori la (7.12); allora l'azione è data dall'integrale (che possiamo ancora chiamare integrale di W. THOMSON)

$$\mathcal{N} = \int_{\Gamma} \frac{1}{2} \text{rot } \psi^{r\delta e} \times \text{rot } \psi^{r\delta e} d\Gamma.$$

È manifesto che la condizione per la stazionarietà dell'azione è duale di quella precedente: *tra tutti i campi vettoriali solenoidali, a parità di potenziale $\psi^{r\delta e}$ al contorno, il campo per cui l'azione è stazionaria è il campo irrotazionale.*

Se, in particolare, si sceglie la coordinata x_5 in modo tale che sia $\frac{\partial}{\partial x_5} = \kappa$ (ove κ ha il significato precisato nel § precedente), l'equazione (7.11') diventa l'equazione caratteristica dei campi mesonici neutri.

Se il vettore F_α ha il significato del § precedente, e indichiamo con $\bar{\varphi}$ il suo potenziale scalare, posto:

$$H_\alpha = F_\alpha \quad \text{per} \quad \alpha = 0, 1, 2, 3,$$

$$H_5 = -\kappa \bar{\varphi},$$

allora le equazioni (7.11) e (7.12) comprendono le equazioni del campo mesonico scalare, cioè le (6.3) e (6.4) ⁽⁵⁴⁾.

⁽⁵⁴⁾ Cfr. F. HUND, l. c. ⁽³⁹⁾.

Il campo armonico gradiente d'un potenziale vettore (campo mesonico vettoriale pentadimensionale).

Nella regione Γ , se $H_{\alpha\beta}$ è un tensore doppio emisimmetrico posizionale, chiamo *azione* l'integrale quintuplo della metà della norma di $H_{\alpha\beta}$

$$(7.13) \quad \mathcal{O} = \int_{\Gamma} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} H_{\alpha\beta} H^{\alpha\beta} \right) d\Gamma.$$

Decomposto il campo $H_{\alpha\beta}$ secondo la (7.7), la variazione libera del campo tensoriale si decompone nella somma

$$(7.7') \quad \delta H_{\alpha\beta} = \delta_{(i)} H_{\alpha\beta} + \delta_{(s)} H_{\alpha\beta}.$$

La variazione che in conseguenza subisce \mathcal{O} è

$$(7.13') \quad \delta \mathcal{O} = \int_{\Gamma} \frac{1}{2} H_{\alpha\beta} (\delta_{(i)} H^{\alpha\beta} + \delta_{(s)} H^{\alpha\beta}) d\Gamma.$$

Se diamo al primo e al secondo potenziale variazioni arbitrarie nella regione Γ e nulle al contorno: la condizione caratteristica affinché risulti in corrispondenza $\delta \mathcal{O} = 0$ è che siano soddisfatte le equazioni

$$(7.14) \quad \text{rot } H_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta e} H_{\alpha\beta|\gamma} = 0 \quad (7.15) \quad \text{div } H_{\alpha\beta} \equiv H_{\alpha\beta}{}^{|\beta} = 0$$

cioè tra tutti i campi regolari costituiti da tensori doppi emisimmetrici di $V_{(5)}$ il campo che, a parità di potenziali Φ_{α} e $\Psi^{\delta e}$ sul contorno Σ , rende stazionaria l'azione \mathcal{O} è il campo armonico.

Dalle (7.14) e (7.15) segue

$$(7.14) \quad \Phi_{\alpha}{}^{|\beta} = 0, \quad \Psi^{\delta e}{}_{|\beta} = 0.$$

È chiaro che anche per il campo tensoriale $H_{\alpha\beta}$ si posson ripetere le considerazioni svolte qui sopra sulla proprietà dell'integrale di DIRICHLET e dell'integrale di W. THOMSON.

In particolare, come si è fatto per il campo vettoriale H_{α} , si scelga la coordinata x_5 in modo tale che $\frac{\partial}{\partial x_5} = \kappa$.

Se il tensore $F_{\alpha\beta}$ ha il significato del § precedente, e indichiamo con $\bar{\Phi}_\alpha$ il suo primo potenziale, posto

$$H_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta} \quad \text{per } \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3,$$

$$H_{\alpha 5} = -\kappa \bar{\Phi}_\alpha \quad \text{per } \alpha = 0, 1, 2, 3,$$

allora le equazioni (7.14) e (7.15) comprendono le (6.5) e le (6.6), cioè diventano le equazioni del campo mesonico vettoriale neutrale⁽⁵⁵⁾.

⁽⁵⁵⁾ Le (7.14) e le (7.15) corrispondono alle (I) e (II) di P. CALDIROLA, *Le equazioni del campo mesonico nel continuo pentadimensionale*, « Nuovo Cimento », n. s., **19**, (1942) pp. 25-35; cfr. anche C. SALVETTI, *Numeri di Clifford ed equazioni del mesone*, « Nuovo Cimento », ser. 9, **3**, (1946), pp. 257-282.

Per altre rappresentazioni pentadimensionali del campo mesonico, cfr. H. T. FLINT, *On the Theory of the Electron Charge and the Quantum Theory* « Phil. Mag. », ser. 7, **29** (1940) pp. 330-343, 417 segg.; F. HUND, l. c. ⁽³⁹⁾; C. MÖLLER, *On the Theory of Mesons*, « Dan. Vid. Sel. Math. Pys. Med. », **18**, n. 6 (1941).