ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LANDOLINO GIULIANO

Una proprietà delle successioni di funzioni generalmente a variazione limitata

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 6, nº 1-2 (1952), p. 99-107

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1952_3_6_1-2_99_0>

UNA PROPRIETÀ DELLE SUCCESSIONI DI FUNZIONI GENERALMENTE A VARIAZIONE LIMITATA

di Landolino Giuliano (Pisa)

Scopo di questa Nota è di stabilire, sotto opportune ipotesi, una proprietà delle successioni di funzioni generalmente a variazione limitata secondo Tonelli [1]. Farò vedere che essa si dimostra con ragionamenti che ricordano quelli di cui mi servii, parecchi anni fa, per provare il seguente : [2]

Teorema: *Se $f(x, y)$ è una funzione quasi continua nel quadrato Q: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, ivi generalmente a variazione limitata, dato un numero positivo arbitrario σ, esistono un numero positivo N ed un insieme E^* di punti di Q, tali che si abbia* [3] $m(Q) - m(E^*) < \sigma$ *e*

$$|f(x', y') - f(x, y)| \leq N \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$$

per ogni coppia di punti (x, y), (x', y') di E^*.

---

[1] Una funzione $f(x, y)$ — definita nel quadrato fondamentale Q di vertici opposti $(0, 0)$, $(1, 1)$ — ivi quasi continua, dicesi generalmente a variazione limitata (secondo Tonelli), se esiste un insieme E di punti di Q di misura superficiale nulla, tale che, indicate con $V_x(x_0, y)$, $V_y(x, y_0)$ $(0 \leq x_0 \leq 1, 0 \leq y_0 \leq 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$ le variazioni totali della $f(x, y)$ considerata rispettivamente come funzione della sola x in $(0, x_0)$ e della sola y in $(0, y_0)$ — variazioni calcolate senza tenere alcun conto dei valori assunti dalla $f(x, y)$ nei punti di E — le $V_x(1, y)$ e $V_y(x, 1)$ risultino, come funzioni rispettivamente di y e di x nell'intervallo $(0, 1)$ quasi ovunque finite, quasi continue e integrabili (secondo Lebesgue).

[2] L. Giuliano: *Sulla differenziabilità asintotica delle funzioni di due variabili a variazione limitata.* Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, pp. 41-50, Vol VIII, 1939.

[3] Dato un insieme piano I misurabile (secondo Lebesgue) indicheremo sempre, nel seguito, con $m(I)$ la sua misura (superficiale).

Questo teorema e le considerazioni svolte mi furono allora molto utili per dimostrare che *ogni funzione quasi continua e generalmente a variazione limitata in Q, è ivi quasi dappertutto asintoticamente differenziabile* (4).

Alla proprietà che è, sopratutto, l'oggetto di questa Nota e che m'è parso opportuno di far conoscere sono stato condotto durante la lettura di due recenti interessanti Note lincee di F. CAFIERO (5). Questa mia nota termina poi con alcune utili osservazioni.

Solo per semplicità si considereranno, in quel che segue, funzioni definite nel quadrato Q. Quel che si dirà sussiste però anche se le funzioni assegnate sono definite in un qualunque dominio aperto e limitato del piano (x, y).

* * *

1\. — Prima di proseguire poniamo le seguenti definizioni:

Definizione I (6). Una successione di funzioni $\{f_n(x, y)\}$, quasi continue (cioè misurabili) in Q, si dirà formata di funzioni *ugualmente quasi limitate* se, per ogni numero $\varepsilon > 0$ si può determinare un numero $H > 0$ e un insieme h_n di punti di Q, eventualmente variabile con n, superficialmente misurabile, in modo che si abbia $m(Q) - m(h_n) < \varepsilon$ e $|f_n(x, y)| \leq H$ in tutti i punti che appartengono ad h_n.

Definizione II (6). Una successione di funzioni $\{f_n(x, y)\}$, quasi continue (cioè misurabili) in Q, si dirà formata di funzioni *ugualmente quasi continue* se, per ogni coppia di numeri $\varepsilon > 0$ e $\omega > 0$ si può decomporre Q in un numero finito s di insiemi parziali $Q_\nu (\nu = 1, 2, \ldots s)$ ed esiste un insieme λ_n di punti di Q, eventualmente variabile con n, superficialmente misurabile, tale che $m(Q) - m(\lambda_n) < \varepsilon$, in modo che l'oscillazione di ogni funzione della successione risulti minore di ω in ogni insieme parziale $Q_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, s)$ quando si tenga conto soltanto dei valori assunti dalle funzioni della successione nell'insieme λ_n.

---

(4) Questo risultato e così pure il teorema enunciato sussistono anche se la funzione $f(x, y)$ è definita in un qualunque dominio, aperto e limitato, del piano (x, y). Com'è noto, si tratta dell'ormai classico concetto di differenziabilità asintotica introdotto da STEPANOFF e anche, indipendentemente, da RADÒ, CACCIOPPOLI e SCORZA DRAGONI. A questi ultimi tre AA. si deve, in particolare, il concetto di differenziabilità asintotica regolare che si è dimostrato utilissimo in varie questioni (integrali doppi del Calcolo delle Variazioni, equazioni alle derivate parziali ecc. ecc.).

(5) F. CAFIERO: *Criteri di compattezza per le successioni di funzioni generalmente a variazione limitata.* Nota I, Rend. Lincei, pp. 305-311, Fasc. 4, 1950 e Nota II, idem, pp. 450-457, Fasc. 5, 1950.

(6) M. FRÉCHET: *Sur les ensembles compacts de fonctions mesurables.* Fund. Math. Tom. IX, pp. 25-32, p. 30, 1927.

Definizione III (7). Una successione di funzioni $\{f_n(x, y)\}$, quasi continue (cioè misurabili) in Q, si dirà formata di funzioni *ugualmente quasi lipschitziane* se, per ogni numero $\varepsilon > 0$, esistono un numero $M > 0$ e un insieme e_n di punti di Q, eventualmente variabile con n, superficialmente misurabile, tale che $m(Q) - m(e_n) < \varepsilon$ e, inoltre,

$$|f_n(x', y) - f_n(x'', y'')| \leq M \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2}$$

qualunque siano i punti (x', y') e (x'', y'') di e_n.

OSSERVAZIONE. È chiaro che ogni successione di funzioni quasi continue in Q, ivi ugualmente quasi lipschitziane, è anche di funzioni ugualmente quasi continue.

2. — La proprietà che vogliamo provare è espressa dal seguente:

TEOREMA. *Sia $\{f_n(x, y)\}$ una successione di funzioni quasi continue e generalmente a variazione limitata* (8) *in Q, ivi ugualmente quasi limitate* (9). *Si supponga che esista una costante positiva K, indipendente da n, tale che, indicate con $V_x^{(n)}(x, y)$, $V_y^{(n)}(x, y)$ le variazioni totali della $f_n(x, y)$ si abbia, qualunque sia n:*

$$\int_0^1 V_y^{(n)}(x, 1)\, dx + \int_0^1 V_x^{(n)}(1, y)\, dy < K$$

Allora la successione data è formata di funzioni ugualmente quasi lipschitziane.

---

(7) Questa definizione, se non erro, compare qui per la prima volta.

(8) o, più in particolare, a variazione limitata, secondo TONELLI.

(9) questa condizione è sicuramente soddisfatta, in una delle seguenti ipotesi:

α) esista, per ogni numero $\varepsilon > 0$ fissato, una funzione $\varphi(x, y) \geq 0$ definita e quasi continua in Q, e un insieme d_n di punti di Q, misurabile superficialmente, eventualmente variabile con n, in modo che si abbia $m(Q) - m(d_n) < \varepsilon$ e, qualunque sia il punto (x, y) di d_n:

$$|f_n(x, y)| \leq \varphi(x, y)$$

β) esista una costante $L > 0$, indipendente da n, tale che si abbia, qualunque sia n:

$$\iint_Q |f_n(x, y)|\, dx\, dy < L$$

Dimostrazione. *a*) È noto (10) che, per ogni funzione $f(x, y)$ quasi continua e generalmente a variazione limitata in Q, esiste un insieme E' di punti di Q, di misura superficiale nulla, contenente l'insieme E (11), in modo che, dette $V_x^*(x, y)$ e $V_y^*(x, y)$ le variazioni totali della $f(x, y)$, calcolate senza tenere alcun conto dei valori della $f(x, y)$ in E', le $V_x^*(x, y)$ e $V_y^*(x, y)$ sono funzioni di (x, y) quasi continue in Q e in modo anche che le $V_x^*(\bar{x}, y)$ e $V_y^*(x, \bar{y})$ risultano funzioni quasi continue rispettivamente di y e di x per tutti gli $\bar{x}$ e $\bar{y}$ di $(0, 1)$. Poichè $V_x^*(x, y) \leq V_x(1, y)$, $V_y^*(x, y) \leq V_y(x, 1)$, le $V_x^*(x, y)$ e $V_y^*(x, y)$ sono finite quasi dappertutto in Q e le $V_x^*(1, y)$ e $V_y^*(x, 1)$, come funzioni di y e di x, rispettivamente, sono integrabili, in $(0, 1)$.

b) Per ogni n si indichi, secondo quanto è detto in *a*), con E'_n l'insieme, di misura superficiale nulla, e con $V_x^{*(n)}(x, y)$, $V_y^{*(n)}(x, y)$ le relative variazioni totali della $f_n(x, y)$, calcolate cioè senza tenere alcun conto dei valori assunti dalla $f_n(x, y)$ in E'_n, variazioni che godono delle proprietà elencate in *a*). Sia $\bar{E} = \sum_n E'_n$. È $m(\bar{E}) = 0$.

Senza restrizione per la generalità della proposizione che si vuole dimostrare, si può sempre supporre che le $f_n(x, y)$ siano tutte quasi continue linearmente sui lati del quadrato Q. Si può anche supporre che su questi lati l'insieme $\bar{E}$ abbia soltanto punti costituenti insiemi lineari di misura nulla. Si dica J l'insieme delle rette parallele all'asse x su cui l'insieme $\bar{E}$ seghi insiemi di misura lineare non nulla od eventualmente non misurabili (linearmente), ed infine di quelle, sempre parallele all'asse x, che passano per i punti $(0, y)$ appartenenti ad $\bar{E}$. L'insieme dei valori y' corrispondenti a tutte queste parallele risulta di misura lineare nulla.

Sull'insieme E'' costituito dai punti del quadrato Q che non appartengono alle rette del sistema J, nè all'insieme $\bar{E}$, si definiscano, per ogni n, le due funzioni $P_n(x, y)$ e $Q_n(x, y)$ mediante le due uguaglianze:

$$(1) \qquad \begin{cases} V_x^{*(n)}(x, y) = P_n(x, y) + Q_n(x, y) \\ f_n(x, y) - f_n(0, y) = P_n(x, y) - Q_n(x, y) \end{cases}$$

Le funzioni $P_n(x, y)$ e $Q_n(x, y)$ si possono definire (12) in tutti i punti di Q, esclusi tutti e soli i punti (x, y') essendo $y = y'$ una retta del sistema J e risultano, in Q, funzioni quasi continue di (x, y). Indicati con

(10) cfr. loc. cit. in (2) p. 45, n. 6.

(11) cfr. nota (1) di questo lavoro.

(12) cfr. loc. cit. (2) p. 47,

$p_n(x, y)$ e $q_n(x, y)$, rispettivamente, l'estremo superiore dell'espressione

$$\left| \frac{P_n(x+h, y) - P_n(x, y)}{h} \right|$$

e l'estremo superiore dell'espressione

$$\left| \frac{Q_n(x+h, y) - Q_n(x, y)}{h} \right|$$

considerate, l'una e l'altra, per tutti i valori di $h \neq 0$, si prova ([13]) che $p_n(x, y)$ e $q_n(x, y)$ sono, entrambe, funzioni quasi continue di (x, y) in Q.

Sia ora $\sigma > 0$ un numero arbitrario fissato. Si determini un numero positivo L in modo che $32\, K \,.\, L^{-1} < \frac{\sigma}{12}$, dove K è la costante positiva (indipendente da n) di cui all'enunciato del teorema. Si dica e_p l'insieme (misurabile) dei punti di Q in cui è soddisfatta, per qualche valore di n, la disuguaglianza $p_n(x, y) > \frac{1}{8} L$. Su quasi tutte le rette parallele all'asse x che contengono punti di e_p, questo insieme sega insiemi misurabili (linearmente). Sia $y = y_0$ una di queste rette (su cui cioè e_p sega un insieme misurabile) e si dica $e_p(y_0)$ la sezione di e_p con la retta considerata. Si osservi che ad ogni punto di $e_p(y_0)$ è associato almeno un segmento di lunghezza $|\,\bar{h}\,|$ della retta $y = y_0$ che ha tale punto come estremo e per cui è, per qualche valore di n:

$$\left| \frac{P_n(x+\bar{h}, y_0) - P_n(x, y_0)}{\bar{h}} \right| > \frac{1}{8} L$$

Ricordando un lemma di Vitali ([14]), si può scegliere un numero finito di tali segmenti in modo che risultino non sovrapponentisi e che, dette $|\bar{h}_1|, |\bar{h}_2|, \ldots, |\bar{h}_s|$ le loro lunghezze, risulti, per certi interi $n_1, n_2, \ldots, n_s$,

([13]) cfr. loc. cit. ([2]) p. 47.

([14]) Il lemma è il seguente:

« Sia E un insieme lineare di misura esterna finita $m_e(E)$. Supponiamo che ad ogni punto di E siano associati uno o più intervalli chiusi contenenti P come punto interno o come estremo. Dato allora un numero $\varepsilon > 0$, si può scegliere un insieme $\mathcal{E}$ di un numero finito di intervalli associati non sovrapponentisi tali che $m(\mathcal{E}) > \frac{1}{3} m_e(E) - \varepsilon$ ».

In una forma leggermente diversa, ma del resto perfettamente equivalente, esso si trova in Vitali: *Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali*, Atti Accademia Scienze, Torino, vol. XLIII, 1908, p. 230.

non necessariamente fra loro distinti, indicando con $m[e_p(y_0)]$ la misura (lineare) di $e_p(y_0)$:

$$m[e_p(y_0)] \leq 4 \sum_1^s |\overline{h}| < 4 \,.\, 8\, L^{-1} \{ | P_{n_1}(x + \overline{h}_1, y_0) - P_{n_1}(x, y_0) | +$$

$$+ | P_{n_2}(x + \overline{h}_2, y_0) - P_{n_2}(x, y_0) | + \dots + | P_{n_s}(x + \overline{h}_s, y_0) - P_{n_s}(x, y_0) | \}.$$

Se è n_ν uno, fra gli indici $n_1, n_2, \dots, n_s$ per cui è $(i = 1, 2, \dots, s)$:

$$| P_{n_i}(x + \overline{h}_i, y_0) - P_{n_i}(x, y_0) | \leq | P_{n_\nu}(x + \overline{h}_i, y_0) - P_\nu(x, y_0) |$$

ne viene:

$$m[e_p(y_0)] < 32\, L^{-1} P_{n_\nu}(1, y_0) \leq 32\, L^{-1}\, V_x^{*(n_\nu)}(1, y_0).$$

Da qui, integrando, si ha:

$$m(e_p) = \int_0^1 m[e_p(y)]\, d\, y \leq 32\, L^{-1} \int_0^1 V_x^{*(n_\nu)}(1, y)\, d\, y < 32 \,.\, K \,.\, L^{-1} < \frac{\sigma}{12}\,.$$

In modo analogo si prova che l'insieme (misurabile) e_q dei punti di Q in cui è soddisfatta, per qualche valore di n, la disuguaglianza $q_n(x, y) > \frac{1}{8} L$, è tale che $m(e_q) < \frac{\sigma}{12}$.

Dunque si ha, ponendo $e = e_p + e_q$ e perciò $m(e) < \frac{\sigma}{6}$, per la seconda delle uguaglianze (1), qualunque sia n:

$$\left| \frac{f_n(x + h, y) - f_n(x, y)}{h} \right| \leq \frac{1}{8} L + \frac{1}{8} L = \frac{1}{4} L$$

essendo (x, y) e $(x + h, y)$ due punti qualunque di Q, non appartenenti all'insieme e.

In modo analogo si prova che esiste un insieme e' di punti di Q con $m(e') < \frac{\sigma}{6}$ in modo che, qualunque sia n, si abbia:

$$\left| \frac{f_n(x, y + k) - f_n(x, y)}{k} \right| \leq \frac{1}{4} L$$

essendo (x, y) e $(x, y + k)$ due punti qualunque di Q non appartenenti all'insieme e'.

Perciò, esiste un insieme H di punti di Q tale che $m(Q) - m(H) < \frac{\sigma}{3}$ in modo che, quando (x, y) appartiene ad H valga la (2) se anche $(x + h, y)$ appartiene ad H e valga pure la (3) se anche $(x, y + k)$ appartiene ad H.

Poichè la successione data è formata di funzioni ugualmente quasi limitate, esiste una costante positiva M e un insieme misurabile Δ_n (eventualmente variabile con n) di punti di Q in modo che $m(Q) - m(\Delta_n) < \frac{\sigma}{3}$ e $| f_n(x, y) | \leq M$ qualunque sia il punto (x, y) di Δ_n. Sia $\bar{E}_n$ l'insieme (misurabile) dei punti comuni ad H e a Δ_n. È $m(\bar{E}_n) > m(Q) - \frac{2\sigma}{3}$. Si ponga $\bar{\bar{E}} = \Sigma \bar{E}_n$. $\bar{\bar{E}}$ è misurabile. Si dica Γ il sistema delle rette parallele all'asse x ognuna delle quali contenga punti di $\bar{\bar{E}}$. Su quasi tutte le rette del sistema $\Gamma \bar{\bar{E}}$ sega insiemi misurabili (linearmente). Sia $y = \bar{y}$ una di queste rette (su cui cioè $\bar{\bar{E}}$ sega un insieme misurabile) e per ogni punto $(\bar{x}, \bar{y})$ di essa si indichi con $m(\bar{x}, \bar{y}, j)$ la misura dell'insieme dei punti di $\bar{\bar{E}}$ che cadono nell'intervallo di ampiezza $\frac{2}{j}$ della retta $y = \bar{y}$ e avente il centro in $(\bar{x}, \bar{y})$. Si ponga $\varphi_j(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{j}{2} m(\bar{x}, \bar{y}, j)$. Le funzioni $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y), \ldots, \varphi_j(x, y), \ldots$ sono definite quasi dappertutto in $\bar{\bar{E}}$ e sono ivi quasi continue (15). Tenendo presente il teorema del LEBESGUE secondo il quale quasi tutti i punti di un insieme lineare misurabile sono punti di densità (lineare) 1, ne viene che la successione $\{ \varphi_j(x, y) \}$ converge quasi dappertutto in $\bar{\bar{E}}$ verso il valore 1 e perciò, per il noto teorema di SEVERINI-EGOROFF, si può determinare un insieme E^* (chiuso) di punti di $\bar{\bar{E}}$ tale che, ponendo $E_n^* = E^* . \bar{E}_n$ (16) si abbia, qualunque sia n, $m(E_n^*) > m(\bar{E}) - \frac{\sigma}{3} > m(Q) - \sigma$, e in cui la convergenza di $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \ldots, \varphi_j(x, y), \ldots$ verso il valore 1 è uniforme.

È dunque possibile trovare un $\bar{j} > 8$ tale che, per ogni indice $j \geq \bar{j}$ e per ogni punto (x, y) di E^* e perciò di E_n^*, per ogni valore di n, si abbia

---

(15) Infatti, detta $\varphi(x, y)$ la funzione caratteristica dell'insieme $\bar{\bar{E}}$, è:

$$\varphi(x, y) = \frac{j}{2} \left\{ \int_0^{x + \frac{1}{j}} \varphi(x, y)\, dx - \int_0^{x - \frac{1}{j}} \varphi(x, y)\, dx \right\}.$$

(16) Si ricordi che è $E^* \subseteq \bar{\bar{E}}$ e $E = \Sigma E_n$

$\varphi_j(x, y) > \frac{8}{9}$; e allora, se è $0 < \delta \leq \frac{1}{\overline{j}}$; posto $\frac{1}{j_1 + 1} < \delta \leq \frac{1}{j_1}$, si avrà per un qualunque punto (x', y') di E_n^*, e indicando con $\overline{E}_n(2\delta)$ l'insieme dei punti di $\overline{E}_n$ che cadono nell'intervallo $(x' - \delta, x' + \delta)$ della retta $y = y'$:

$$m[\overline{E}_n(2\delta)] \geq m(x', y', j_1) - \left(\frac{2}{j_1} - \frac{2}{j_1 + 1}\right) = m(x', y'. j_1) - \frac{2}{j_1(j_1 + 1)} >$$

$$> \frac{8}{9} \frac{2}{j_1} - \frac{2}{9 j_1} = \frac{7}{9} \frac{2}{j_1} \geq \frac{7}{9} . 2\delta .$$

Se ora (x, y) e (x', y') sono due punti qualunque di E_n^* con $|x - x'| \leq \leq \frac{1}{\overline{j}}$, i punti di $\overline{E}_n$ che cadono nell'intervallo di estremi $(x', y'), (x, y')$, come pure quelli che cadono nell'intervallo (di uguale ampiezza $\overline{\delta} = |x - x'|$), di estremi $(x, y), (x', y)$, costituiscono due insiemi ciascuno di misura $> \frac{5}{9} . \overline{\delta}$.

Ne segue che esisterà necessariamente una retta $x = x^*$, con x^* compreso fra x e x', tale che i punti (x^*, y') e (x^*, y) appartengono entrambi a E_n^*. È allora, per le (2) e (3) (poichè E_n^* e E_n appartengono ad H):

$$\frac{|f_n(x, y) - f_n(x', y')|}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}} \leq \left| \frac{f_n(x', y') - f_n(x^*, y')}{x' - x^*} \right| +$$

$$+ \left| \frac{f_n(x^*, y') - f_n(x^*, y)}{y' - y} \right| + \left| \frac{f_n(x^*, y) - f_n(x, y)}{x^* - x} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{4} L + \frac{1}{4} L + \frac{1}{4} L = \frac{3}{4} L < L .$$

Se infine, (x, y) e (x', y') sono due punti di E_n^* per cui è $|x - x^*| > \frac{1}{\overline{j}}$ si ha (poichè E_n^* appartiene a $\varDelta_n$)

$$\left| \frac{f_n(x, y) - f_n(x', y')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} \right| \leq 2 M \overline{j} .$$

Se si dice ora $\varLambda$ il più grande dei due numeri L e $2 M \overline{j}$, si conclude che, fissato arbitrariamente un numero $\sigma > 0$, è stato possibile determinare un insieme E_n^* di punti di Q tale che $m(Q) - m(E_n^*) < \sigma$ e un numero positivo A, indipendente da n, per cui è:

$$| f_n(x, y) - f_n(x', y') | < A \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$$

qualunque siano i punti (x, y) e (x', y') di E_n^*.

Il teorema è così dimostrato.

3. — CAFIERO ha stabilito, fra l'altro, nella prima delle note lincee sopra citate, il seguente (17):

TEOREMA: *Sia* $\{f_n(x, y)\}$ *una successione di funzioni quasi continue, generalmente a variazione limitata in* Q, *ivi ugualmente quasi limitate, ed esista una costante positiva* K *tale che per ogni* n *si abbia:*

$$\int_0^1 V_y^{(n)}(x, 1)\, d x + \int_0^1 V_x^{(n)}(1, y)\, d y < K . \tag{1}$$

Allora dalla successione data, se ne può estrarre una convergente quasi dappertutto in Q, *verso una funzione generalmente a variazione limitata.*

Questo risultato di CAFIERO si deduce anche dal nostro teorema dimostrato nel n. precedente, tenendo presente l'osservazione del n. 1 e un teorema di FRÉCHET (18), secondo il quale da ogni successione di funzioni quasi continue in Q, ivi ugualmente quasi limitate e ugualmente quasi continue, si può estrarre una successione di funzioni convergente in misura e perciò, per un teorema di F. RIESZ, quasi dappertutto in Q. Lo stesso ragionamento di CAFIERO prova (19) poi che la funzione limite è generalmente a variazione limitata.

---

(17) Cfr. loc. cit. (5), Nota I, pp. 308-310, n. 2.

(18) Cfr. loc. cit. (6). p. 29; cfr. anche B. PETTINEO: *Sulla convergenza puntuale delle successioni di insiemi di funzioni quasi continue.* Rend. di Matematica e delle sue applicazioni, Roma, vol. VI, pp. 478-503, p. 491, 1947.

(19) Cfr. loc. cit. (5), Nota I, pp. 310-311, n. 3.