Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Emilio Baiada

Un criterio di convergenza in lunghezza e la derivazione per serie

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 6, nº 1-2 (1952), p. 59-68

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1952_3_6_1-2_59_0>

UN CRITERIO DI CONVERGENZA IN LUNGHEZZA E LA DERIVAZIONE PER SERIE

di EMILIO BAIADA (Pisa)

TEOREMA: *Siá $f_n(x)$, $(n = 1, 2, \ldots)$ una successione di funzioni, reali, di variabile di reale, definite tutte sull'intervallo (a, b), che siano con derivata del primo ordine continua,* (oppure solo assolutamente continue) *e soddisfacenti alla condizione:*

$$\int_a^{b-h} |f'_n(x+h) - f'_n(x)|\, dx \leq e_n(h), \tag{1}$$

dove $e_n(h)$ siano infinitesimi con h, soddisfacenti alla condizione:

$$\sum_{r=1}^{\infty} e_n\left(\frac{h}{2^r}\right) \leq \sigma(h), \tag{1''}$$

qualunque sia n, e con $\sigma(h)$ infinitesimo con h.

Se la successione $f_n(x)$ converge uniformemente in (a, b) a una funzione $f(x)$ (che è quindi continua) *a variazione limitata, allora la successione delle derivate $f'_n(x)$ converge in misura in (a, b) alla derivata $f'(x)$, e la successione delle lunghezze delle curve $y = f_n(x)$ tende alla lunghezza della curva $y = f(x)$.*

Dall'ipotesi della continuità della derivata $f'_n(x)$ discende che la curva piana $y = f_n(x)$, $a \leq x \leq b$, è rettificabile e la sua lunghezza l_n è data dall'integrale classico:

$$l_n = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2_n}\, dx. \tag{2}$$

Inoltre, chiamando con $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_m = b$ un numero finito di punti dell'intervallo (a, b) e così ordinati, definenti una suddivisione in parti di (a, b), e considerando quella poligonale $P_m^{(n)}$, inscritta sulla curva $y = f_n(x)$, i cui vertici si proiettano sull'asse delle x nei punti $a_0, a_1, \ldots, a_m$, sappiamo che la lunghezza di $P_m^{(n)}$ tende a l_n, quando la massima delle parti (a_r, a_{r+1}) tende a zero. In particolare la lunghezza di $P_m^{(n)}$ tende a l_n se si suppone di suddividere (a_r, a_{r+1}) in due parti uguali e si prosegua indefinitamente a suddividere sempre in parti uguali. Questo fatto discende immediatamente dalla dimostrazione classica dell'esistenza della lunghezza d'una curva continua con tangente variabile con continuità e dall'esistenza dell'integrale (2) nel senso di RIEMANN-CAUCHY.

Consideriamo ora una parte qualunque (a_r, a_{r+1}), $(r = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$ e poniamo $a_{r+1} - a_r = h_r$. Confrontiamo la lunghezza $d_n^{(r)}$ del segmento che fa parte della poligonale $P_n^{(m)}$ e che si proietta su questa parte con la lunghezza $e_n^{(r)}$ della spezzata con due lati, avente stessi estremi del segmento e il cui vertice intermedio sia sulla curva $y = f_n(x)$ e abbia ascissa $a_r + \dfrac{h_r}{2}$, avremo:

$$e_n^{(r)} - d_n^{(r)} = \sqrt{\left(\frac{h_r}{2}\right)^2 + \left[f_n\left(a_r + \frac{h_r}{2}\right) - f_n(a_r)\right]^2} +$$

$$+ \sqrt{\left(\frac{h_r}{2}\right)^2 + \left[f_n(a_r + h_r) - f_n\left(a_r + \frac{h_r}{2}\right)\right]^2} -$$

$$- \sqrt{h_r^2 + [f_n(a_r + h_r) - f_n(a_r)]^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{h_r}{2}\right)^2 + \left[f_n\left(a_r + \frac{h_r}{2}\right) - f_n(a_r)\right]^2} - \sqrt{\left(\frac{h_r}{2}\right)^2 + \left[\frac{f_n(a_r + h_r) - f_n(a_r)}{2}\right]^2} +$$

$$+ \sqrt{\left(\frac{h_r}{2}\right)^2 + \left[f_n(a_r + h_r) - f_n\left(a_r + \frac{h_r}{2}\right)\right]^2} -$$

$$- \sqrt{\frac{h_r^2}{2} + \left[\frac{f_n(a_r - h_r) - f_n(a_r)}{2}\right]^2},$$

e quindi, applicando due volte la disuguaglianza triangolare:

$$e_n^{(r)} - d_n^{(r)} \leq \left| \frac{f_n(a_r + h_r) - f_n(a_r)}{2} - \left[f_n\left(a_r + \frac{h_r}{2}\right) - f_n(a_r)\right] \right| +$$

$$+ \left| \frac{f_n(a_r + h_r) - f_n(a_r)}{2} - \left[f_n(a_r + h_r) - f_n\left(a_r + \frac{h_r}{2}\right)\right] \right|,$$

ma, poichè:

$$\frac{f_n(a_r+h_r)-f_n(a_r)}{2}-\left[f_n(a_r+h_r)-f_n\left(a_r+\frac{h_r}{2}\right)\right]=$$

$$\frac{f_n(a_r+h_r)-f_n(a_r)}{2}-[f_n(a_r+h_r)-f_n(a_r)]+f_n\left(a_r+\frac{h_r}{2}\right)-f_n(a_r),$$

viene uguale ancora a,

$$f_n\left(a_r+\frac{h_r}{2}\right)-f_n(a_r)-\frac{f_n(a_r+h_r)-f_n(a_r)}{2},$$

e quindi:

$$e_n^{(r)}-d_n^{(r)}\leq 2\left|\frac{f_n(a_r+h_r)-f_n(a_r)}{2}-\left[f_n\left(a_r+\frac{h_r}{2}\right)-f_n(a_r)\right]\right|,$$

oppure ancora, valendo la formola fondamentale del calcolo integrale:

$$e_n^{(r)}-d_n^{(r)}\leq 2\left|\frac{1}{2}\int_{a_r}^{a_r+h_r}f'_n(x)\,dx-\int_{a_r}^{a_r+\frac{h_r}{2}}f'_n(x)\,dx\right|.$$

Spezzando l'intervallo (a_r, a_r+h_r) nelle parti $\left(a_r, a_r+\frac{h_r}{2}\right)$, $\left(a_r+\frac{h_r}{2}, a_r+h_r\right)$ otteniamo:

$$e_n^{(r)}-d_n^{(r)}\leq 2\left|\frac{1}{2}\int_{a_r+\frac{h_r}{2}}^{a_r+h_r}f'(x)\,dx-\frac{1}{2}\int_{a_r}^{a_r+\frac{h_r}{2}}f'(x)\,dx\right|.$$

Operiamo nel primo integrale al secondo membro, la sostituzione:

$$x=X+\frac{h_r}{2},$$

avremo:

$$e_n^{(r)}-d_n^{(r)}\leq\left|\int_{a_r}^{a_r+\frac{1}{2}h_r}f'_n\left(X+\frac{1}{2}h_r\right)dx-\int_{a_r}^{a_r+\frac{1}{2}h_r}f'_n(x)\,dx\right|,$$

e, scrivendo di nuovo x al posto di X, avremo:

$$e_n^{(r)} - d_n^{(r)} \leq \left| \int_{a_r}^{a_r+\frac{1}{2}h_r} \left[f'_n\left(x + \frac{1}{2}\,h_r\right) - f'_n(x) \right] d\,x \right| \leq \int_{a_r}^{a_r+\frac{1}{2}h_r} \left| f'_n\left(x + \frac{1}{2}\,h_r\right) - f'_n(x) \right| d\,x.$$

Scriviamo la relazione precedente per tutti gli $r = 0, 1, 2 \ldots m-1$ e sommiamo rispetto all'indice r, si ottiene al primo membro la differenza tra le lunghezze d_n della poligonale $P_m^{(n)}$ e la lunghezza e_n della poligonale ottenuta suddividendo ancora ulteriormente in due parti, uguali, ogni parte (a_r, a_{r+1}), ossia:

$$e_n - d_n \leq \sum_{r=0}^{m-1} \int_{a_r}^{a_r+\frac{1}{2}h_r} \left| f'_n\left(x + \frac{1}{2}\,h_r\right) - f'_n(x) \right| d\,x\,.$$

Supponiamo ora le parti di suddivisione tutte uguali, cioè $h_r = \dfrac{b-a}{m}$, avremo:

$$e_n - d_n \leq \sum_{r=0}^{m-1} \int_{a_r}^{a_r+\frac{1}{2}\frac{b-a}{m}} \left| f'_n\left(x + \frac{b-a}{2\,m}\right) - f'_n(x) \right| d\,x \leq$$

$$\leq \int_{a}^{b-\frac{b-a}{2m}} \left| f'_n\left(x + \frac{b-a}{2\,m}\right) - f'_n(x) \right| d\,x\,.$$

Indichiamo con e'_n la lunghezza della poligonale inscritta ottenuta dalla poligonale di lunghezza e_n suddividendo ulteriormente in due parti uguali ogni parte $\left(a_r, a_r + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{b-a}{m}\right)$, $\left(a_r + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{b-a}{m}, a_r + \dfrac{b-a}{m}\right)$, avremo, per lo stesso ragionamento già fatto:

$$e'_n - e_n \leq \sum_{r=0}^{m-1} \int_{a_r}^{a_r+\frac{1}{4}\frac{b-a}{m}} \left| f'_n\left(x + \frac{1}{4}\,\frac{b-a}{m}\right) - f'_n(x) \right| d\,x +$$

$$+\sum_{r=0}^{m-1}\int\limits_{a_r+\frac{1}{2}\frac{b-a}{m}}^{a_r+\frac{3}{4}\frac{b-a}{m}}\left|f'_n\left(x+\frac{1}{4}\frac{b-a}{m}\right)-f'_n(x)\right|dx\leq$$

$$\leq\int\limits_a^{b-\frac{1}{4}\frac{b-a}{m}}\left|f'_n\left(x+\frac{1}{4}\frac{b-a}{m}\right)-f'_n(x)\right|dx\,.$$

Operando indefinitamente nella maniera sopra indicata ed osservando che $e_n, e'_n, e'', \ldots$ tende alla lunghezza l_n della curva $y=f(x)$, avremo, sommando le relazioni così ottenute:

$$l_n-d_n\leq\sum_{s=1}^{\infty}\int\limits_a^{b-\frac{b-a}{m2^s}}\left|f'_n\left(x+\frac{b-a}{m\,2^s}\right)-f'_n(x)\right|dx\,,$$

e, per le (1), (1'):

$$l_n-d_n\leq\sum_{s=1}^{\infty}e_n\left(\frac{b-a}{m}\frac{1}{2^s}\right)\leq\sigma\left(\frac{b-a}{m}\right). \tag{3}$$

Adesso, per il fatto che la funzione limite $f(x)$ è continua e a variazione limitata, e per un noto teorema di LEBESGUE, in tutti i punti di (a, b) ad esclusione al più di una successione S di intervalli di ampiezza complessiva minore di $2\varepsilon(1+l)$, dove ε è un numero positivo arbitrario ed l è la lunghezza della curva $y=f(x)$, la derivata $f'(x)$ esiste, finita, e in modulo minore di $\operatorname{cotg}\varepsilon$.

Scelto poi ad arbitrio un altro numero positivo σ, derminiamo un numero positivo $\varepsilon_1<\varepsilon$, tale che:

$$|\operatorname{tg}\omega-\operatorname{tg}\omega'|<\sigma,$$

ogni qualvolta sia:

$$|\omega|<\frac{\pi}{2}-\varepsilon_1, \qquad |\omega-\omega'|<\varepsilon_1.$$

Inoltre, per la forma data da TONELLI [1] alla proposizione del LEBESGUE, abbiamo che l'angolo:

$$\mathcal{C}\,(P_{r-1}\,P_r\,,\,P'\,P)$$

formato dal segmento $P_{r-1}\,P_r$ col segmento $P'\,P$, dove P_r $(r=0,1,2\ldots m-1)$ sono i vertici d'una poligonale π iscritta nella curva $y=f(x)$, poligonale che soddisfa alla disuguaglianza $l-\pi<\frac{1}{9}\left(\frac{\varepsilon_1}{3}\right)^3$, (con π abbiamo indicato sia la poligonale che la lunghezza di essa) è minore di $\varepsilon_1/3$, quando P e P' siano punti della curva le cui ascisse fanno parte della proiezione della corda $(P_{r-1}\,P_r)$ sull'asse delle x, ma la proiezione di P non appartiene ad una successione determinata di intervalli che indichiamo con S_1, di lunghezza complessiva minore di $\varepsilon_1/3$.

Indicata con t la tangente, ove esiste, alla curva $y=f(x)$, in corrispondenza all'ascissa x, abbiamo che, per tutti gli x di $(a\,,b)$, ad eccezione al più di quelli appartenenti agli intervalli delle due successioni S e S_1, la derivata $f'(x)$ esiste, ed è:

$$|\,f'(x)\,|<\operatorname{cotg}\varepsilon_1\,,\ \mathcal{C}\,(P_{r-1}\,P_r\,,\,t)<\varepsilon_1/3\,,$$

(nella seconda disuguaglianza, x che corrisponde alla t appartiene alla proiezione sull'asse x di $P_{r-1}\,P_r$).

Supporremo, adesso e in tutto il seguito che le proiezioni di $P_{r-1}\,P_r$ sull'asse delle x siano tutte uguali e di ampiezza $\frac{b-a}{2^s}$, con s un intero opportuno; in altre parole, si passa da una suddivisione di $(a\,,b)$ a un altra, suddividendo ogni parte in due altre uguali. L'esistenza d'una poligonale π, corrispondente ad una tale suddivisione e soddisfacente alla disuguaglianza:

$$l-\pi<\frac{1}{9}\left(\frac{\varepsilon_1}{3}\right)^3$$

deriva dalle seguenti considerazioni.

Costruiamo una poligonale π' iscritta sulla curva $y=f(x)$ e soddisfacente alla disuguaglianza:

$$l-\pi'<\frac{1}{18}\left(\frac{\varepsilon_1}{3}\right)^3.$$

---

[1] L. TONELLI: *Successioni di curve e derivazione per serie.* Rendiconti Accad. Lincei. 1916, 1º semestre.

Supponiamo pure che i suoi lati non abbiano tutti uguale proiezione sull'asse delle x e di ampiezza $\frac{b-a}{2^s}$. Consideriamo una suddivisione in parti uguali di ampiezza $\frac{b-a}{2^s}$, con s sufficientemente grande, e indichiamo con π'' la poligonale inscritta sulla curva $y=f(x)$ e i cui vertici si proiettono sull'asse delle x sui punti di questa suddivisione nonchè sui punti sui quali si proiettavano sull'asse delle x i vertici della poligonale π', nel caso che siano distinti dai precedenti. Questa poligonale soddisfa a fortiori alla disuguaglianza:

$$l-\pi''<\frac{1}{18}\left(\frac{\varepsilon_1}{3}\right)^3.$$

Possiamo supporre le parti uguali nelle quali abbiamo suddiviso (a, b) così piccole che, in virtù della uniforme continuità della $f(x)$, la lunghezza totale di quei segmenti della poligonale π'' in cui uno degli estremi sia un estremo di qualche segmento della poligonale π', sia minore di $\frac{1}{18}\left(\frac{\varepsilon_1}{3}\right)^3$, si ricordi che il numero di tali segmenti è fisso.

Se consideriamo allora la poligonale π''' i cui vertici stanno sulla curva $y=f(x)$ e si proiettano sull'asse delle x nei soli punti di suddivisione di (a, b) che lo suddividono in parti di ampiezza $\frac{b-a}{2^s}$, avremo che π''' e π'' differiscono al più per quei segmenti, che indichiamo con $\{u\}$, che considerati chiusi, contengono un punto che si proietta sull'asse delle x nel punto di proiezione d'un vertice della poligonale π', e quindi:

$$\pi''-\pi'''<\frac{1}{18}\left(\frac{\varepsilon_1}{3}\right)^3,$$

infatti π''' a cui si sono tolti i segmenti $\{u\}$ differisce in lunghezza da π'' per meno di $\frac{1}{18}\left(\frac{\varepsilon_1}{3}\right)^3$, e per tanto π''', che è minore in lunghezza di π'' differisce da π'', in lunghezza, per meno della stessa quantità. In conclusione, dal confronto delle poligonali π', π'', π''', viene:

$$l-\pi'''<\frac{1}{9}\left(\frac{\varepsilon_1}{3}\right)^3,$$

come volevasi.

In virtù della relazione (3), e siccome si può supporre che le parti uguali siano in numero convenientemente grande, avremo:

$$l_n - \pi_n' < \sigma\left(\frac{b-a}{m}\right) < \frac{1}{9}\left(\frac{\varepsilon_1}{3}\right)^3,$$

per tutti gli n, e dove π_n è la lunghezza della poligonale π_n inscritta nella curva $y = f(x)$, i cui vertici $P_{r,n}$ hanno le stesse ascisse dei vertici P_r della poligonale π, e quindi i lati di π_n si proiettano tutti su segmenti uguali.

A causa della convergenza uniforme di $f_n(x)$ a $f(x)$ si potrà trovare un $\bar{n}$, intero, tale che se $n > \bar{n}$, si abbia:

$$\mathcal{C}(P_{r-1}\,P_r\,;\,P_{r-1,n}\,P_{r,n}) < \frac{\varepsilon_1}{3}, \qquad (r = 1, 2, \ldots, m),$$

(ricordiamo che $\mathcal{C}(P\,Q\,;\,R\,S)$ indica l'angolo formato dagli assi $P\,Q$ e $R\,S$).

Considerata una qualsiasi funzione $f_n(x)$, $(n > \bar{n})$, si può, per essa determinare una successione di intervalli che indicheremo con $S_{1,n}$, di lunghezza totale minore di $\frac{\varepsilon_1}{3}$, tale che, per ogni punto P_n di $y = f(x)$, avente ascissa x esterna ai suoi intervalli, ma appartenente alla proiezione di $P_{r-1,n}\,P_{r,n}$ sull'asse delle x, si abbia:

$$\mathcal{C}(P_{r-1,n}\,P_{r,n}\,,\,P_n\,P_n') < \frac{\varepsilon_1}{3},$$

dove P_n' è un punto qualsiasi della medesima curva, di ascissa appartenente alla proiezione di $P_{r-1,n}\,P_{r,n}$ sull'asse delle x.

Si può inoltre determinare un altra successione $S_{2,n}$ di intervalli, di lunghezza complessiva minore di $\frac{\varepsilon_1}{3}$, con la proprietà che, per ogni x esterno a questi intervalli, esista finita la derivata $f'(x)$. (Nell'ipotesi della continuità delle derivate, questa considerazione è superflua).

Perciò, se indichiamo con t_n la tangente alla curva $y = f_n(x)$, corrispondente all'ascissa generica x, abbiamo che, per tutti gli x di (a, b), ad eccezione al più di quelli appartenenti agli intervalli delle due successioni $S_{1,n}$, $S_{2,n}$ la derivata f_n' esiste finita e vale, supponendo che x appartenga alla proiezione di $P_{r-1,n}\,P_{r,n}$ sull'asse delle x, la disuguaglianza:

$$\mathcal{C}(P_{r-1,n}\,P_{r,n}\,,\,t_n) < \frac{\varepsilon_1}{3}.$$

Si ha perciò, che per ogni x di (a, b), ad eccezione al più di quelli appartenenti alle quattro soccessioni di intervalli $S, S_1, S_{1,n}, S_{2,n}$, le due derivate f' e f'_n $(n > \bar{n})$ esistono finite e soddisfano alle disuguaglianze:

$$|f'| < \operatorname{cotg} \varepsilon, \qquad \mathcal{C}(t, t_n) < \varepsilon_1,$$

e quindi, per il modo come ε_1 è stato determinato:

$$|f' - f'_n| < \sigma.$$

Siccome poi la somma complessiva delle lunghezze di tutti gli intervalli delle quattro successioni $S, S_1, S_{1,n}, S_{2,n}$ è minore di:

$$2\varepsilon(1 + l) + \frac{\varepsilon_1}{3} + \frac{\varepsilon_1}{3} + \frac{\varepsilon_1}{3} < 2\varepsilon(2 + l),$$

e poichè ε_1 è arbitrario la derivata f'_n converge in misura alla derivata f'.

Osservazioni. I. — La ipotesi della continuità delle derivate $f'_n(x)$ può essere sostituita con quella, meno restrittiva della assoluta continuità delle $f_n(x)$. Basterà a tal fine osservare che la lunghezza delle curve $y = f_n(x)$, si può, anche in questo caso, ottenere come limite di lunghezze di poligonali ottenute suddividendo in parti uguali l'intervallo (a, b) dell'asse delle x, valendo un ugual ragionamento di quello fatto, nella dimostrazione precedente a proposito della curva $y = f(x)$, il rimanente della dimostrazione rimanendo invariato.

Nelle applicazioni, però, che faremo, del criterio ottenuto, tale generalizzazione è superflua.

II. — È semplice costruire un esempio di successione $f_n(x)$, convergente uniformemente a una funzione a variazione limitata $f(x)$, soddisfacente alle condizioni (1), (1′) e tale che le derivate $f'_n(x)$ *non* convergono quasi dappertutto alla $f'(x)$. Questo fatto è dovuto al carattere globale delle (1), (1′). La convergenza in misura dell'enunciato non può quindi essere sostituita con la convergenza quasi-dappertutto.

Corollario. — Le condizioni richieste dal teorema sono verificate se le funzioni $f_n(x)$, oltre a possedere quelle proprietà di regolarità che sono ivi menzionate, soddisfano alla:

$$(1''') \qquad |f'_n(x + h) - f'_n(x)| \leq h\, M_n(x), \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

dove $M_n(x)$ sono delle funzioni sommabili in (a, b), con la proprietà:

$$\int_a^b M_n(x)\,dx < N.$$

Infatti abbiamo:

$$\int_a^{b-h} | f'_n(x+h) - f'_n(x) | \,dx < h \int_a^{b-h} M_n(x)\,dx \leq h \int_a^b M_n(x)\,dx\,,$$

e quindi:

$$\int_a^{b-h} | f'_n(x+h) - f'_n(x) | \,dx < h\,N\,,$$

cosicchè:

$$N \sum_{r=1}^{\infty} \frac{h}{2^r} = N h\,.$$

La condizione (1‴) è del tipo di LIPSCHITZ CARATHÉODORY ed ha un notevole interesse in varie questioni connesse con i sistemi differenziali.