ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

MARIA CINQUINI-CIBRARIO

Alcuni nuovi teoremi di esistenza per equazioni non lineari di ordine *n* di tipo iperbolico

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 5, no 3-4 (1951), p. 329-353

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1951_3_5_3-4_329_0>

ALCUNI NUOVI TEOREMI DI ESISTENZA PER EQUAZIONI NON LINEARI DI ORDINE n DI TIPO IPERBOLICO

di MARIA CINQUINI-CIBRARIO (a Pavia)

In una nostra memoria di alcuni anni or sono [1] avevamo sviluppata, nel campo delle funzioni di variabile reale e sotto ampie ipotesi, la teoria delle caratteristiche per l'equazione non lineare di ordine n di tipo iperbolico

$$F\left(x, y; z; \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ldots; \frac{\partial^n z}{\partial x^n}, \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y}, \ldots, \frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right) = 0, \tag{I}$$

o anche, più brevemente

$$F(x, y; z; p_{rs}) = 0 \qquad (r + s = 1, 2, \ldots, n), \tag{I$_a$}$$

avendo posto

$$p_{rs} = \frac{\partial^{r+s} z}{\partial x^r \partial y^s}.$$

Tale teoria era stata già sviluppata dal GOURSAT [2] nel solo campo delle funzioni analitiche; egli aveva dimostrato, tra l'altro [3], che esiste una e una sola superficie integrale della (I), che contiene una striscia caratteristica data e passa per una curva data; è questo un caso particolare del problema, detto appunto di GOURSAT, problema che non è ancora mai stato

---

(1) M. CINQUINI CIBRARIO, *Teoria delle caratteristiche per equazioni non lineari di ordine n di tipo iperbolico*, Ann. di Mat., S. IV, T. XXVI, 1947, p. 95-117. Nel seguito tale memoria sarà indicata con (M_1).

(2) E. GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre* (Paris, Hermann, 1896), T. II, Chap. X, p. 296 e seg.

(3) E. GOURSAT, l. c., n. 210 e 211.

preso in considerazione nel campo delle funzioni di variabile reale per l'equazione (I) *non lineare di ordine n* (con $n > 2$) (4).

Nel presente lavoro si dimostra un risultato di carattere generale: *esiste uno e un solo integrale della* (I), *che contiene una striscia caratteristica data, e inoltre è tale che nei punti di una curva assegnata l'integrale e alcune delle sue derivate dei successivi ordini soddisfano una relazione lineare data*; il risultato vale sotto ipotesi molto larghe.

Questo teorema (TEOR. I), enunciato nel § 1 del presente lavoro, nel caso, in cui la relazione lineare contenga almeno alcune tra le derivate n^{esime} dell'integrale richiesto $z(x, y)$ della (I), viene dimostrato nel § 2 riconducendosi ai risultati ottenuti in un nostro lavoro recente, relativo ai sistemi quasi-lineari del primo ordine (5).

Il § 3 è dedicato al caso (TEOR. II), in cui la relazione lineare a cui si è accennato, non contenga alcuna tra le derivate di ordine n; da tale teorema segue, come caso particolare, il teorema di esistenza e di unicità del GOURSAT (TEOR. III), di cui si è parlato in principio.

Nel § 4 è considerato il caso (TEOR. IV) in cui *la relazione lineare* in questione, invece che nei punti di una curva data, *deve essere soddisfatta nei punti di una curva caratteristica* della superficie integrale richiesta; *di tale caratteristica non è data l'equazione, ma solo il sistema, a cui essa appartiene.* Come conseguenza dei risultati del presente lavoro, nel § 4 sono inoltre esposti alcuni complementi alla teoria delle caratteristiche per l'equazione (I), sempre nel campo delle funzioni di variabile reale.

Il § 5 è dedicato al caso, in cui l'equazione (I) sia quasi-lineare, cioè lineare soltanto nelle derivate di ordine massimo, e quindi abbia la forma

$$(\mathrm{I}') \quad \sum_{i=0}^{n} A_{n-i,i}\left(x, y; z; \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dots; \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}, \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-2}\partial y}, \dots, \frac{\partial^{n-1} z}{\partial y^{n-1}}\right) \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-i}\partial y^i} = B(\dots).$$

---

(4) Invece per $n = 2$ il problema di GOURSAT per l'equazione di tipo iperbolico non lineare nel campo delle funzioni di variabile reale è stato oggetto di ricerche sia di: E. E. LEVI, *Sopra un teorema di esistenza per le equazioni alle derivate parziali del secondo ordine,* Ann di Mat., S. III, T. XVIII, p. 287-333.
che nostre:

M CINQUINI-CIBRARIO, *Sul problema di* GOURSAT *per le equazioni del tipo iperbolico non lineari,* Ann. di Mat, S. IV, T. XXI, 1942, p 189-229.

M. CINQUINI-CIBRARIO, *Sopra alcune questioni relative alle equazioni del tipo iperbolico non lineari,* Ann. di Mat, S. IV, T. XXIII, 1944, p. 1 23.

(5) M. CINQUINI-CIBRARIO, *Sopra la teoria delle caratteristiche per i sistemi di equazioni quasi-lineari alle derivate parziali del primo ordine,* Ann. della Scuola Normale Superiore di Pisa, S. III, Vol. III (1949), p. 161-197. Nel seguito tale memoria sarà indicata con (M_2).

Col presente lavoro la teoria delle caratteristiche per l'equazione (I) di ordine n del tipo iperbolico non lineare risulta pienamente compiuta anche nel campo delle funzioni di variabile reale.

§ 1.

1. La funzione $F(x, y; z; p_{rs})$ $(r + s = 1, 2, \ldots, n)$ sia definita per $x, y; z; p_{rs}$ $(r + s = 1, 2, \ldots, n)$ variabili in un campo D e sia ivi D^{II} (6); inoltre l'equazione (I) sia *del tipo iperbolico* in tutto il campo D, cioè l'equazione

$$\text{(II)} \qquad P_{n0}\, dy^n - P_{n-1,1}\, dy^{n-1}\, dx + \ldots + (-1)^n P_{0n}\, dx^n = 0 ,$$

dove si è posto

$$\text{(1)} \qquad P_{rs} = \frac{\partial F(x, y; z; p_{rs})}{\partial p_{rs}}$$

abbia sempre n radici reali e distinte, comunque varino $x, y; z; p_{rs}$ nel campo D; posto $\dfrac{dy}{dx} = \varrho$, la (II) diviene:

$$\text{(IIa)} \qquad P_{n0}\, \varrho^n - P_{n-1,1}\, \varrho^{n-1} + \ldots + (-1)^n P_{0n} = 0 .$$

Supponiamo che in tutto D sia

$$\text{(2)} \qquad P_{n0} \neq 0 ; \quad P_{0n} \neq 0 ,$$

cioè che le n radici *distinte* della (II_a)

$$\text{(3)} \qquad \frac{dy}{dx} = \varrho_i(x, y; z; p_{rs}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

non siano mai nulle nè infinite nel campo D (7).

---

(6) Diciamo funzione D^n una funzione finita e continua con tutte le sue derivate, fino a quelle dell'ordine n incluse, e funzione $D^n - L$ una funzione D^n, le cui derivate n^{esime} sono, inoltre, lipschitzione.

(7) Si vede facilmente che le ipotesi (2) non sono restrittive per quanto concerne i teoremi, che enunceremo nel presente lavoro; infatti tali teoremi valgono nell'intorno di un elemento fissato $x_0, y_0, z_0, (p_{rs})_0$ $(r + s = 1, 2, \ldots, n)$, e le ipotesi (2) possono sempre essere soddisfatte nell'intorno di un tale elemento; basta infatti che nel piano x, y si scelgano gli assi coordinati x e y distinti da tutte le n rette per l'origine, aventi come coefficienti angolari rispettivi $\varrho_i(x_0, y_0; z_0; (p_{rs})_0)$ con $i = 1, 2, \ldots, n$.

Le equazioni differenziali dei corrispondenti *n sistemi di strisce caratteristiche di ordine n* sono date dalle (8)

$$
\text{(III)} \quad \begin{cases}
dy = \varrho_i(x, y; z; p_{rs})\, dx \\[1ex]
dz = p_{10}\, dx + p_{01}\, dy \;;\; dp_{rs} = p_{r+1,s}\, dx + p_{r,s+1}\, dy \; (r+s=1,2,\dots,n-1) \\[1ex]
P_{n0}\, dp_{n0} + (-P_{n0}\,\varrho_i + P_{n-1,1})\, dp_{n-1,1} + (P_{n0}\,\varrho_i^2 - P_{n-1,1}\,\varrho_i + \\
\quad + P_{n-2,2})\, dp_{n-2,2} + \dots + ((-1)^{n-1} P_{n0}\,\varrho_i^{n-1} + (-1)^{n-2} P_{n-1,1}\,\varrho_i^{n-2} + \\
\qquad \dots + P_{1,n-1})\, dp_{1,n-1} + \left(\dfrac{dF}{dx}\right) dx = 0 . \\[1ex]
P_{n0}\, dp_{n-1,1} + (-P_{n0}\,\varrho_i + P_{n-1,1})\, dp_{n-2,2} + (P_{n0}\,\varrho_i^2 - P_{n-1,1}\,\varrho_i + \\
\quad + P_{n-2,2})\, dp_{n-3,3} + \dots + ((-1)^{n-1} P_{n0}\,\varrho_i^{n-1} + \\
\quad + (-1)^{n-2} P_{n-1,1}\,\varrho_i^{n-2} + \dots + P_{1\,n-1})\, dp_{0n} + \left(\dfrac{dF}{dy}\right) dx = 0 \\[1ex]
\quad (i = 1, 2 \dots, n)
\end{cases}
$$

dove

$$
(4) \quad \begin{cases}
\left(\dfrac{dF}{dx}\right) = \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\, p_{10} + \displaystyle\sum_{r+s=1}^{n-1} P_{rs}\, p_{r+1,s} \\[2ex]
\left(\dfrac{dF}{dy}\right) = \dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\, p_{01} + \displaystyle\sum_{r+s=1}^{n-1} P_{rs}\, p_{r,s+1}
\end{cases}
$$

2. Sia assegnata una *striscia caratteristica* (9) della (I) del sistema corrispondente alla radice ϱ_1 della (II_a) mediante le

$$
\text{(IV)} \qquad y = Y(x)\,; \quad z = \Phi(x)\,; \quad p_{rs} = \Phi_{rs}(x)
$$
$$
(r + s = 1, 2, \dots, n\,; \quad x_1 \leq x \leq x_2)\,.
$$

(8) Per quanto riguarda la definizione di striscia caratteristica cfr. (M_1), § 1, n. 1 e n. 2, p. 97-98.

Le funzioni (IV), che supponiamo D^{I} nell'intervallo (x_1, x_2), costituiscono un sistema di integrali del sistema (III) (con $i=1$) e inoltre soddisfano la

$$F(x, Y(x); \Phi(x); \Phi_{rs}(x)) = 0 \tag{5}$$

identicamente in (x_1, x_2) (⁹).

Si dice (¹⁰) che *un integrale $z = z(x, y)$ della* (I) *contiene la striscia caratteristica* (IV), *se la curva $y = Y(x)$, o almeno un suo arco, appartiene al campo δ di definizione della funzione $z(x, y)$, e se nei punti della curva $y = Y(x)$, appartenenti a δ, valgono le*

$$\text{(V)}\quad z(z, Y(x)) = \Phi(x); \quad \left(\frac{\partial^{r+s} z(x, y)}{\partial x^r \, \partial y^s}\right)_{y=Y(x)} = \Phi_{rs}(x) \quad (r+s = 1, 2, \ldots, n)$$

Allora la curva $y = Y(x), z = \Phi(x)$, che appartiene alla superficie integrale della (I) $z = z(x, y)$, è per tale superficie integrale una *curva caratteristica* del sistema corrispondente alla radice ϱ_1 della (II_a).

3. Supponiamo, *ora e in tutto il seguito del lavoro,* che valgano tutte le ipotesi dei precedenti n. 1 e 2, e che inoltre $F(x, y; z; p_{rs})$ sia funzione $D^{\mathrm{III}} - L$ dei suoi argomenti nel campo D, e le funzioni (IV) siano $D^{\mathrm{II}} - L$ in (x_1, x_2).

Sia x_0 un punto interno a (x_1, x_2); posto $y_0 = Y(x_0)$, sia (y_1, y_2) un intervallo, a cui sia interno il punto y_0.

Sia $x = g(y)$ una funzione $D^{\mathrm{II}} - L$, definita in (y_1, y_2) e tale che

$$x_0 = g(y_0); \tag{6}$$

inoltre tutti i punti della curva $x = g(y)$ per y in (y_1, y_2) siano proiezione nel piano x, y di punti del campo D; le due curve $y = Y(x), x = g(y)$ non siano tangenti nel punto comune (x_0, y_0), e dunque valga la

$$1 - Y'(x_0) g'(y_0) \neq 0. \tag{7}$$

(⁹) Come si è già osservato in (M_1) (§ 1, n. 2, pag. 98) è sufficiente che le funzioni (IV) soddisfino le (III) (con $i=1$) *in tutto* (x_1, x_2) e soddisfino la (5) in un punto qualsiasi di (x_1, x_2), perchè la (5) sia soddisfatta identicamente in (x_1, x_2).

(¹⁰) (M_1), § 1, n. 2, p. 98.

Siano date $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}+1$ funzioni $\varphi_0(y), \varphi_{rs}(y) (r+s=1,2,\ldots,n), G(y)$, definite in (y_1, y_2), ivi $D^{\text{II}} - L$, e soddisfacenti le condizioni

$$\text{(VI)} \qquad \varphi_0(y_0)\,\Phi(x_0) + \sum_{r+s=1}^{n} \varphi_{rs}(y_0)\,\Phi_{rs}(x_0) = G(y_0)$$

$$\text{(VII)} \quad (\varrho_1)_0^n\,\varphi_{n0}(y) - (\varrho_1)_0^{n-1}\,\varphi_{n-1,1}(y) + \ldots + (-1)^{n-1}(\varrho_1)_0\,\varphi_{1,n-1}(y) + \\ + (-1)^n\,\varphi_{0n}(y) \neq 0 \qquad (y_1 \leq y \leq y_2).$$

dove con $(\varrho_1)_0$ indichiamo il valore della funzione $\varrho_1(x, y; z; p_{rs})$ per

$$x = x_0, y = y_0; z = \Phi(x_0); p_{rs} = \Phi_{rs}(x_0)$$

(e la stessa convenzione faremo in tutto il seguito del lavoro in casi analoghi).

In queste ipotesi vale il seguente

TEOREMA I. « *Esiste uno e un solo integrale* $z = z(x, y)$ *della* (I), *che è definito in un campo* δ *opportuno, a cui è interno il punto* (x_0, y_0), *è ivi* $D^{n+2} - L$, *contiene la striscia caratteristica, definita dalle* (IV), *e nei punti della curva* $x = g(y)$, *appartenenti a* δ, *soddisfa la*

$$\text{(VIII)} \qquad \varphi_0(y)\,z(g(y), y) + \sum_{r+s=1}^{n} \varphi_{rs}(y)\,p_{rs}(g(y), y) = G(y) \text{ ».}$$

4. Il TEOR. VI di (M_1) [11] segue come caso particolare del presente TEOR. I, quando sia identicamente

$$\text{(8)} \qquad \varphi_0(y) = \varphi_{rs}(y) = 0 \quad (y_1 \leq y \leq y_2; r+s = 1, 2, \ldots, n-1),$$

e le $\varphi_{n-i,i}(y) (i = 0, 1, \ldots, n)$ siano costanti in (y_1, y_2) e precisamente abbiano i valori [12]

$$\text{(9)} \quad \begin{cases} \varphi_{n0}(y) = 0; \varphi_{n-1,1}(y) = (P_{n,0})_0; \varphi_{n-2,2}(y) = (-P_{n0}\,\varrho_1 + P_{n-1,1})_0; \ldots \\ \ldots; \varphi_{0,n}(y) = ((-1)^{n-1} P_{n0}\,\varrho_1^{n-1} + (-1)^{n-2} P_{n-1,1}\,\varrho_1^{n-2} + \ldots + P_{1,n-1})_0. \end{cases}$$

---

(11) (M_1), § 6, p. 112-113.

(12) Si osservi che, nelle ipotesi particolari (8) e (9), la condizione (VI) coincide colla (1') del l. c. in (11), e la condizione (VII) diviene

$$(n\,P_{n0}\,\varrho_1^{n-1} - (n-1)\,P_{n-1,1}\,\varrho_1^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1}\,P_{1,n-1})_0 \neq 0,$$

che è certo soddisfatta, perchè ϱ_1 è radice semplice della (IIa).

5. La condizione (VI) assicura che l'*elemento di ordine n*

$$x_0\,,\,y_0\,;\ \Phi(x_0)\,;\ \Phi_{rs}(x_0) \qquad (r+s=1\,,2\,,\ldots,n)$$

(che appartiene alla superficie integrale della (I) cercata) soddisfa la condizione (VIII). Tenendo conto che dalle (V) segue

$$(10) \qquad \Phi'_{n-i\,i}(x)=p_{n-i+1,i}(x\,,\,Y(x))+p_{n-i,i+1}(x\,,\,Y(x)) \qquad (i=0\,,1\,,\ldots,n)\,,$$

derivando la (VIII) e ponendo sia nella relazione ottenuta che nella (10) $x=x_0\,,\,y=y_0$, si ottiene un sistema di equazioni lineari nelle

$$p_{n+1-i,i}(x_0\,,\,y_0) \qquad (i=0\,,1\,,\ldots,n+1)\,;$$

la condizione (VII) (che nel successivo § 2 utilizzeremo per altro scopo) e la (7) assicurano che il determinante di tale sistema è diverso da zero.

In modo analogo si potrebbero calcolare le

$$p_{n+2-i,i}(x_0\,,\,y_0) \qquad (i=0\,,1\,,\ldots,n+2)\,,$$

e, con opportune ipotesi di derivabilità, le derivate dei successivi ordini dell'integrale $z=z(x\,,y)$ cercato nel punto $(x_0\,,y_0)$.

§ 2.

1. Per dimostrare il Teor. I ci ricondurremo ad un teorema dimostrato in (M_2) per i sistemi di equazioni quasi-lineari del primo ordine [13]; precisamente dall'equazione (I), derivando rispetto a x, si ottiene il sistema di equazioni quasi-lineari a derivate parziali

$$(\mathrm{IX})\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial z}{\partial x}=p_{10}\,;\ \frac{\partial p_{10}}{\partial x}=p_{20}\,,\ \frac{\partial p_{01}}{\partial x}=p_{11}\,;\ \frac{\partial p_{20}}{\partial x}=p_{30}\,,\ldots;\\
&\frac{\partial p_{n-1\,0}}{\partial x}=p_{n0}\,,\ \frac{\partial p_{n-2,1}}{\partial x}=p_{n-1,1}\,,\ldots,\ \frac{\partial p_{0,n-1}}{\partial x}=p_{1,n-1}\,;\\
&\frac{\partial p_{n0}}{\partial y}=\frac{\partial p_{n-1,1}}{\partial x}\,,\ \frac{\partial p_{n-1,1}}{\partial y}=\frac{\partial p_{n-2,2}}{\partial x}\,,\ldots,\ \frac{\partial p_{1,n-1}}{\partial y}=\frac{\partial p_{0n}}{\partial x}\\
&P_{n0}\frac{\partial p_{n0}}{\partial x}+P_{n-1\,1}\frac{\partial p_{n-1,1}}{\partial x}+\ldots+P_{0n}\frac{\partial p_{0n}}{\partial x}+\left(\frac{d\,F}{d\,x}\right)=0
\end{aligned}\right.$$

---

(13) (M_2), § 1, n. 4, p. 166.

Tale sistema contiene $N = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ equazioni nelle N funzioni incognite $z\,;\, p_{10}\,, p_{01}\,;\, p_{20}\,, \ldots\,;\, p_{n0}\,, p_{n-1,1}\,, \ldots\,, p_{0n}$, considerate come funzioni di $x\,, y$, indipendenti tra loro. Tenuto conto dell'equazione, che dà le direzioni caratteristiche di un sistema di equazioni quasi-lineari ([14]), si verifica facilmente che esse soddisfano l'equazione

$$(1) \qquad C = 0\,,$$

dove, posto $\nu = \dfrac{n(n+1)}{2}$, è

$$
(2)\quad C = \begin{array}{r|cccccccccc|}
 & & & & \nu & & & & & & N \\
 & dy & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 & 0 & dy & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
\nu) & 0 & 0 & \cdots & dy & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & \cdots & 0 & dx & dy & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & dx & dy & \cdots & 0 & 0 \\
 & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & dx & dy \\
 & 0 & 0 & \cdots & 0 & P_{n0}\,dy & P_{n-1,1}\,dy & P_{n-2,2}\,dy & \cdots & P_{1,n-1}\,dy & P_{0n}\,dy
\end{array}
$$

Si verifica, con trasformazioni opportune sul determinante C, che è

$$
(3) \qquad \begin{aligned} C = dy^{\nu+1} \Big(& (-1)^n P_{n0}\, dy^n + (-1)^{n-1} P_{n-1,1}\, dy^{n-1}\, dx + \\ & + \ldots - P_{1,n-1}\, dy\, dx^{n-1} + P_{0n}\, dx^n \Big)\,, \end{aligned}
$$

cioè che le direzioni caratteristiche del sistema (IX) sono, in ogni punto del campo D, la direzione $dy = 0$, contata $\nu + 1$ volte, e le n direzioni caratteristiche distinte dell'equazione (I), definite dalla (II).

Il sistema (IX) ammette dunque un sistema di caratteristiche multiple; di molteplicità $\nu + 1$; per tale sistema è soddisfatta l'IPOTESI A) di (M_2)([15]);

([14]) (M_2), § 1, n. 1, p. 163, form. (II).
([15]) (M_2), § 6, n. 1, p. 186.

infatti per $d\,y = 0$ la caratteristica del determinante C è $n = N - \nu - 1$, come si verifica subito.

2. Scriviamo ora le equazioni differenziali delle curve caratteristiche del sistema quasi-lineare (IX), considerate nello spazio a $N+2$ dimensioni delle variabili $x, y; z; p_{rs}$ $(r+s = 1, 2, \ldots, n)$ (al quale appartiene il campo D).

Vi è un sistema di curve caratteristiche multiple, di molteplicità $\nu+1$, relativo alla radice $d\,y = 0$ della (1); tenendo conto di quanto è detto in (M_2) circa i sistemi quasi-lineari aventi caratteristiche multiple ([16]), e facendo qualche calcolo, si trova che nei punti delle curve di tale sistema (nello spazio a $N+2$ dimensioni, di cui sopra) valgono le

$$(4)\quad \begin{cases} d\,y = 0\,;\; d\,z = p_{10}\,d\,x\,;\; d\,p_{rs} = p_{r+1,s}\,d\,x \qquad (r+s = 1, 2, \ldots, n-1) \\[2mm] P_{n0}\,d\,p_{n0} + P_{n-1,1}\,d\,p_{n-1,1} + \ldots + P_{0n}\,d\,p_{0n} + \left(\dfrac{d\,F}{d\,x}\right) d\,x = 0 \end{cases}$$

Il sistema di equazioni quasi-lineari (IX) ammette poi (sempre nello spazio accennato a $N+2$ dimensioni) n sistemi di curve caratteristiche semplici, corrispondenti alle n radici semplici $\dfrac{d\,y}{d\,x} = \varrho_i(x, y; z; p_{rs})$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ della (1) (che sono le n radici, tutte semplici per ipotesi, della (II_a)); ricordando, anche qui, i risultati di (M_2) ([17]) si trova con qualche calcolo che nei punti delle curve di uno di tali sistemi valgono le

$$(5)\quad \begin{cases} d\,y = \varrho_i\,d\,x \\ P_{n0}\,d\,p_{n0} + (-P_{n0}\,\varrho_i + P_{n-1,1})\,d\,p_{n-1,1} + (P_{n0}\,\varrho_i^2 - P_{n-1,1}\,\varrho_i + \\ \qquad + P_{n-2,2})\,d\,p_{n-2,2} + \ldots + ((-1)^{n-1}\,P_{n0}\,\varrho_i^{n-1} + \\ + (-1)^{n-2}\,P_{n-1,1}\,\varrho_i^{n-2} + \ldots + P_{1,n-1})\,d\,p_{1,n-1} + \left(\dfrac{d\,F}{d\,x}\right) d\,x = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

([16]) (M_2), § 6, n 1, p 186-187; il sistema (4) del testo è il sistema (III′) di p. 187 di (M_2), nel quale si faccia $\varrho_r = 0$ identicamente, si calcolino le $h_i^{(r,s)}$ mediante le (1) pure di p. 187 di (M_2) e si tenga conto dei valori particolari delle A_{ij}, B_{ij} nel caso del sistema (IX).

([17]) (M_2), § 1, n. 1, p. 163-164; il sistema (5) del testo è il sistema (III) di p. 164 di (M_2) nel quale si ponga ϱ_i al posto di ϱ, si calcolino le h_i mediante le (4) pure di p 164 di (M_2) e si tenga conto dei valori, che hanno A_{ij}, B_{ij} nel caso del sistema (IX).

le quali sono contenute nel sistema di equazioni differenziali (III). Dunque ad ogni striscia caratteristica dell'equazione (I) corrisponde una ben determinata curva caratteristica (dello spazio a $N+2$ dimensioni, in cui variano $x, y; z; p_{rs}$ $(r+s=1, 2, \dots n)$ del sistema di equazioni quasi-lineari (IX).

In (M_2) viene introdotto anche il determinante ([18])

$$(6)\quad \Delta = \begin{array}{cl} \begin{array}{ccccccccc} & & & \nu & & & & & N \end{array} & \\ \left|\begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & P_{n0} & P_{n-1,1} & \dots & P_{1,n-1} & P_{0n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & P_{n0} & -P_{n0}\,\varrho_1 + P_{n-1\,1} & \dots & (-1)^{n-1} P_{n0}\,\varrho_1^{n-1} + \dots + P_{1,n-1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & P_{n0} & -P_{n0}\,\varrho_n + P_{n-1,1} & \dots & (-1)^{n-1} P_{n0}\,\varrho_n^{n-1} + \dots + P_{1,n-1} & 0 \end{array}\right| & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \nu \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

del quale ci serviremo tra poco. Indichiamo con γ_{ij} il compemento algebrico dell'elemento appartenente alla linea i^{esima} e alla colonna j^{esima} del determinante Δ.

3. Se esiste un integrale $z = z(x, y)$ della (I), che soddisfa il TEOR. I, esiste in corrispondenza un sistema di soluzioni del sistema (IX), definito dalle

$$(7)\qquad z = z(x, y)\,;\; p_{rs} = p_{rs}(x, y) \quad \left(\text{dove } p_{rs}(x, y) = \frac{\partial^{r+s} z(x, y)}{\partial x^r\, \partial y^s}\right. \qquad \left. r+s = 1, 2, \dots, n\right).$$

Tale sistema di soluzioni del sistema (IX) soddisfa per ipotesi le condizioni

$$(\mathrm{V})\qquad z(x, Y(x)) = \Phi(x)\,;\; p_{rs}(x, Y(x)) = \Phi_{rs}(x) \quad (r+s = 1, 2, \dots, n),$$

cioè nello spazio a $N+2$ dimensioni delle variabili

$$x, y\,;\, z\,;\, p_{rs} \qquad (r+s = 1, 2, \dots, n)$$

([18]) (M_2), § 6, n. 2, p. 188.

la superficie definita dalle equazioni (7) (che è una superficie integrale del sistema (X)) passa per la curva di equazioni (IV) (che è una curva caratteristica del sistema (IX), relativa alla radice $\frac{dy}{dx} = \varrho_1$ dell'equazione (1)).

Inoltre il sistema (7) di soluzioni delle (IX) soddisfa la condizione (VIII).

4. Inversamente si voglia costruire un sistema di integrali

$$z = z(x, y); \qquad p_{rs} = p_{rs}(x\, y) \quad (r + s = 1, 2, \ldots, n) \tag{8}$$

del sistema (IX), che siano definiti in un campo δ abbastanza piccolo, a cui sia interno il punto (x_0, y_0), siano ivi $D^{\mathrm{II}} - L$ e soddisfino le (V) e (VIII). Il TEOR I di (M_2) [19] assicura l'esistenza di uno e un solo sistema di integrali del sistema (IX), che soddisfa le condizioni citate.

Sono infatti soddisfatte tutte le ipotesi di tale teorema; in particolare la condizione (11) del § 1, n. 4, p. 166 di (M_2) coincide colla (VI) del presente lavoro; in quanto alla condizione (12) del § 1, n. 4, p. 166 di (M_2), essa diviene nel caso presente

$$\sum_{j=0}^{n} \varphi_{n-j,j}(y)\,(\gamma_{\nu+2,\nu+1+j})_0 \neq 0\,, \tag{9}$$

perchè (cfr. l'espressione (6) del determinante Δ) è

$$(\gamma_{\nu+2,\lambda})_0 = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, \nu). \tag{10}$$

Si vede subito che la (9) si può anche scrivere

$$\begin{vmatrix} \varphi_{n0}(y) & \varphi_{n-1,1}(y) & \ldots\, \varphi_{1,n-1}(y) & \varphi_{0n}(y) \\ (P_{n0})_0 & (P_{n-1,1})_0 & \ldots (P_{1,n-1})_0 & (P_{0n})_0 \\ (P_{n0})_0 & (-P_{n0}\,\varrho_2 + P_{n-1,1})_0 & \ldots ((-1)^{n-1} P_{n0}\,\varrho_2^{n-1} + \ldots + P_{1,n-1})_0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (P_{n0})_0 & (-P_{n0}\,\varrho_n + P_{n-1,1})_0 & \ldots ((-1)^{n-1} P_{n0}\,\varrho_n^{n-1} + \ldots + P_{1,n-1})_0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{11}$$

e si verifica, tenendo conto che $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ sono le n radici dell'equa-

---

[19] (M_2), § 1, n. 4, p. 166; cfr. anche § 6, n. 3, p. 188.

zione (II_a) e facendo qualche trasformazione sul determinante, che sta a primo membro della (11), che la (11) equivale alla condizione (VII).

5. Dall'esistenza e dall'unicità del sistema (8) di integrali del sistema di equazioni quasi-lineari (IX), soddisfacente le (V) e (VIII) segue l'esistenza e l'unicità dell'integrale della (1), che soddisfa il TEOR. I. Dalle (IX) segue infatti

$$\frac{\partial^2 p_{n-1-j,j}(x\,,y)}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial\, p_{n-1-j,j+1}(x\,,y)}{\partial x}\qquad (j=0\,,1\,,\ldots,n-1) \tag{12}$$

in tutto δ, e che quindi in tutto δ

$$\frac{\partial\, p_{n-1-j,j}(x\,,y)}{\partial y}=p_{n-1-j,j+1}(x\,,y)+H_{n-1-j,j}(y)\qquad (j=0\,,1\,,\ldots,n-1), \tag{13}$$

dove le $H_{n-1-j,j}(y)$ sono funzioni opportune della sola y; ora dalle (IX) segue, in particolare, che

$$\frac{\partial\, p_{n-1-j,j}(x\,,y)}{\partial x}=p_{n-j,j}(x\,,y) \tag{14}$$

e dalle condizioni (V) segue che

$$\left\{\begin{aligned} &p_{n-1-j,j}(x\,,Y(x))=\Phi_{n-1-j,j}(x)\,;\; p_{n-j,j}(x\,,Y(x))=\Phi_{n-j\,j}(x)\,;\\ &p_{n-1-j,j+1}(x\,,Y(x))=\Phi_{n-1-j,j+1}(x)\,. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Sulla curva $y=Y(x)$ è dunque

$$\Phi'_{n-1-j,j}(x)=\Phi_{n-j,j}(x)+\left[\frac{\partial\, p_{n-1-j,j}(x\,,y)}{\partial y}\right]_{y=Y(x)}Y'(x)\,. \tag{16}$$

Ma le funzioni (IV) soddisfano il sistema di equazioni differenziali (III) (con $i=1$) in tutto $(x_1\,,x_2)$, e quindi, in particolare, la

$$\Phi'_{n-1-j,j}(x)=\Phi_{n-j,j}(x)+\Phi_{n-1-j,j+1}(x)\,Y'(x)\,. \tag{17}$$

Poichè $Y'(x)\neq 0$ in tutto $(x_1\,,x_2)$, dal confronto delle (16) e (17) e dell'ultima delle (15) segue

$$\left[\frac{\partial\, p_{n-1-j,j}(x\,,y)}{\partial y}\right]_{y=Y(x)}=p_{n-1-j,j+1}(x\,,Y(x)). \tag{18}$$

Dalla condizione $Y'(x) \neq 0$ in tutto (x_1, x_2) segue che l'equazione della curva $y = Y(x)$ si può porre anche nella forma $x = \xi(y)$; facendo $x = \xi(y)$ nelle (13) e (18), e confrontando le due relazioni così ottenute segue che in tutto δ è [20]

$$(19) \qquad \frac{\partial p_{n-1-j,j}(x, y)}{\partial y} = p_{n-1-j,j+1}(x, y) \qquad (j = 0, 1, \dots, n-1).$$

Dal confronto delle (14) e (19) segue

$$(20) \qquad \frac{\partial p_{n-1-j,j}(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial p_{n-2-j,j+1}(x, y)}{\partial x} \qquad (j = 0, 1 \dots, n-2)$$

A partire dalle (IX) e dalle (20) si ragioni sulle $p_{n-2-j,j}(x, y)$ $(j = 0, 1, \dots, n-2)$ come si è ragionato or ora sulle $p_{n-1-j,j}(x, y)$ $(j = 0, 1, \dots n-1)$; e così di seguito successivamente sulle $p_{n-3-j,j}(x, y)$ $(j = 0, 1, \dots, n-3)$, sulle $p_{n-4-j,j}(x, y)$ $(j = 0, 1, \dots, n-4), \dots,$ e infine sulle $p_{10}(x, y)$, $p_{01}(x, y)$, $z(x, y)$. Ne resta provato che in tutto δ

$$(21) \qquad p_{rs}(x, y) = \frac{\partial^{r+s} z(x, y)}{\partial x^r \, \partial y^s} \qquad (r + s = 1, 2, \dots, n).$$

La superficie $z = z(x, y)$ soddisfa le condizioni (V) e (VIII); per l'ultima delle (IX) nei punti di tale superficie è

$$(22) \qquad \frac{d\, F(x, y; z(x, y); p_{rs}(x, y))}{d\, x} = 0$$

Poichè per le ipotesi fatte nel § 1, n. 2 sulle funzioni (IV) l'equazione

$$(\mathrm{I}) \qquad F(x, y; z(x, y); p_{rs}(x, y)) = 0$$

è soddisfatta nei punti della curva $y = Y(x)$ appartenenti a δ, e l'equazione di tale curva si può scrivere $x = \xi(y)$, dalla (22) segue che l'equazione (I) è soddisfatta in ogni punto della superficie $z = z(x, y)$ costruita [21].

Essa è dunque una superficie integrale della (I) e il TEOR. I è completamente dimostrato.

---

[20] Si suppone che il campo δ sia scelto (opportunamente piccolo) in modo da essere tutto ricoperto dalle parallele all'asse x per i punti della curva $x = \xi(y)$.

[21] Cfr. la precedente nota [20].

§ 3.

1. Nel presente paragrafo supponiamo che nella relazione (VIII) *non* compaiano le derivate n^{esime}; precisamente sia h $(h < n)$ l'ordine massimo delle derivate, che compaiono nella (VIII), così che tale relazione abbia la forma

$$\varphi_0(y)\, z(g(y), y) + \sum_{r+s=1}^{h} \varphi_{rs}(y)\, p_{rs}(g(y), y) = G(y) \tag{X}$$

od anche

$$\varphi_0(y)\, z(g(y), y) + \sum_{r+s=1}^{h-1} \varphi_{rs}(y)\, p_{rs}(g(y), y) + \sum_{j=0}^{h} \varphi_{h-j,j}(y)\, p_{h-j,j}(g(y), y) = G(y). \tag{X$_a$}$$

Supposto che le funzioni $g(y), \varphi_0(y), \varphi_{rs}(y)$ $(r+s=1, 2, \ldots, h)$, $G(y)$ siano $D^{n-h+2} - L$ in (y_1, y_2), derivando $n-h$ volte la (X_a) si ottiene una relazione della forma

$$\psi_0(y)\, z(g(y), y) + \sum_{r+s=1}^{n-1} \psi_{rs}(y)\, p_{rs}(g(y), y) + \sum_{j=0}^{n} \psi_{n-j,j}(y)\, p_{n-j,j}(g(y), y) = G^{(n-h)}(y), \tag{1}$$

dove le funzioni $\psi_{rs}(y)$ $(r+s=0, 1, \ldots, n)$ si calcolano facilmente mediante le $\varphi_0(y), \varphi_{rs}(y)$ $(r+s=1, 2, \ldots, h)$, $g'(y)$ e le loro successive derivate; in particolare è

$$\psi_{n-j,j}(y) = \sum_{\lambda=0}^{n-h} \binom{n-h}{\lambda} g'^{\,n-h-\lambda}(y)\, \varphi_{h-j+\lambda,\, j-\lambda}(y) \tag{2}$$

avendo posto $\varphi_{rs}(y) = 0$ identicamente per $r < 0$, oppure $s < 0$. L'ipotesi (VI) del § 1 è qui sostituita dalle condizioni

$$\text{(XI)} \quad \begin{cases} \varphi_0(y_0)\, \Phi(x_0) + \sum_{r+s=1}^{h} \varphi_{rs}(y_0)\, \Phi_{rs}(x_0) = G(y_0) \\[2ex] \dfrac{d^i}{d y^i}\left[\varphi_0(y)\, z(g(y), y) + \sum_{r+s=1}^{h} \varphi_{rs}(y) p_{rs}(g(y), y)\right]_{\substack{y = y_0 \\ z = \Phi(x_0) \\ p_{rs} = \Phi_{rs}(x_0)}} = \\[2ex] = G^{(i)}(y_0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-h) \end{cases}$$

La (VII) del § 1 diviene nel caso presente

$$\text{(XII)} \qquad (\varrho_1)_0^n \, \psi_{n0}(y) - (\varrho_1)_0^{n-1} \psi_{n-1,1}(y) + \dots + (-1)^{n-1} (\varrho_1)_0 \, \psi_{1,n-1}(y) + + (-1)^n \psi_{0n}(y) \neq 0 \,,$$

dove le $\psi_{n-j,j}(y)$ $(j = 0, 1, \dots, n)$ sono date dalle (2).

Ci si è così ricondotti alle ipotesi del Teor. I, e questo assicura l'esi. stenza e l'unicità di un integrale $z = z(x, y)$ della (I), che contiene la striscia caratteristica (IV) e nei punti della curva $x = g(y)$ soddisfa la condizione (1).

Integrando la (1) rispetto a y successivamente $n - h$ volte e tenendo conto delle (XI), si verifica che valgono le

$$\text{(3)} \qquad \frac{d^i}{d\,y^i}\left[\varphi(y)\, z(g(y), y) + \sum_{r+s=1}^{h} \varphi_{rs}(y)\, p_{rs}(g(y), y)\right] = G^{(i)}(y)$$

$$(i = n - h - 1, n - h - 2, \dots, 2, 1),$$

e infine che vale la (X).

Si ha così il

Teorema II. « *Nelle stesse ipotesi del* Teor. I *circa la funzione* $F(x, y; z; p_{rs})$ *e le funzioni* (IV), *se* $g(y), \varphi_0(y), \varphi_{rs}(y)$ $(r + s = 1, 2, \dots, h)$, $G(y)$ *sono funzioni* $D^{n-h+2} - L$ *in* (y_1, y_2), *se il punto* $y_0 = Y(x_0)$ *è interno a* (y_1, y_2) *ed è*

$$\text{(4)} \qquad x_0 = g(y_0), \qquad 1 - Y'(x_0)\, g'(y_0) \neq 0 \,,$$

e se inoltre valgono le (XI) *e* (XII), *allora esiste uno e un solo integrale* $z = z(x, y)$ *della* (I), *che è definito in un campo* δ *sufficientemente piccolo, contenente all'interno il punto* (x_0, y_0), *è ivi* $D^{n+2} - L$, *contiene la striscia caratteristica* (IV), *e nei punti della curva* $x = g(y)$, *appartenenti a* δ, *soddisfa la condizione* (X) ».

2. Si supponga, in particolare, che sia $h = 0$, e che $\varphi_0(y)$ non si annulli mai in (y_1, y_2); allora posto

$$\text{(5)} \qquad Z(y) = \frac{G(y)}{\varphi_0(y)}$$

la condizione (X) diviene

$$\text{(XIII)} \qquad z(g(y), y) = Z(y) \,,$$

cioè è dato il valore dell'integrale richiesto $z(x, y)$ nei punti della curva $x = g(y)$.

Le condizioni (XI) divengono

$$\text{(XIV)} \begin{cases} \Phi(x_0) = Z(y_0) \\ \left[\dfrac{d^i z(g(y), y)}{d y^i}\right]_{\substack{y = y_0 \\ p_{rs} = \Phi_{rs}(x_0)}} = Z^{(i)}(y_0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

mentre la (XII) diviene, come si vede subito,

$$1 - (\varrho_1)_0\, g'(y) \neq 0, \tag{6}$$

certo soddisfatta, almeno per $|y - y_0|$ abbastanza piccolo, perchè $(\varrho_1)_0 = Y(x_0)$ e vale la seconda delle (4).

Si ha così il:

TEOREMA III « *Nelle stesse ipotesi del* TEOR. I *per la funzione*

$$F(x, y; z; p_{rs})$$

e per le funzioni (IV), *se* $g(y)$, $Z(y)$ *sono funzioni* $D^{n+2} - L$ *nell'intervallo* (y_1, y_2), *a cui è interno il punto* $y_0 = Y(x_0)$, *e se valgono le* (4) *e* (XIV), *esiste uno e un solo integrale della* (I) $z = z(x, y)$ *definito in un campo* δ *sufficientemente piccolo, al quale è interno il punto* (x_0, y_0), *e ivi* $D^{n+2} - L$, *che contiene la striscia caratteristica* (IV), *e nei punti della curva* $x = g(y)$, *appartenenti a* δ, *si riduce ad una funzione assegnata* $Z(y)$ ».

Geometricamente: « *Esiste una e una sola superficie integrale* Σ *della* (I), *che contiene una striscia caratteristica data* (IV) *e passa per una curva* (in generale) *sghemba* Λ *data, di equazioni*

$$x = g(y), \quad z = Z(y). \tag{7}$$

La curva Λ taglia la curva Γ di equazioni

$$y = Y(x), \quad z = \Phi(x), \tag{8}$$

sostegno della striscia caratteristica (IV), ma non le è tangente; Γ è curva caratteristica della superficie integrale Σ costruita (cfr. il § 1, n. 2 in fine).

Il TEOR. III è il risultato, al quale si era accennato nell'introduzione, già ottenuto dal GOURSAT nel solo campo delle funzioni analitiche [22]; tale

---

[22] E. GOURSAT, l. c. nella nota [3].

risultato è fondamentale per la teoria delle caratteristiche delle equazioni di ordine n.

Nel caso particolare $n=2$ il TEOR. III è già stato dimostrato nelle nostre due Memorie citate nella nota ([4]); esso segue, come caso particolare, dalla risoluzione, fatta in tali lavori, del problema di GOURSAT per l'equazione

$$(a) \qquad F\left(x\,,y\,;z\,;\frac{\partial z}{\partial x}\,,\frac{\partial z}{\partial y}\,;\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=0\,.$$

Nel caso $n=2$ vi è qualche riduzione nelle ipotesi, rispetto al caso $n>2$ ([23]).

Invece il TEOR. I e il TEOR. II (nel quale per $n=2$ è necessariamente $h=1$) hanno carattere di novità anche per il caso $n=2$.

§ 4.

1. Nel presente paragrafo supponiamo soddisfatte tutte le ipotesi fatte nel § 1, e in particolare le (VI) e (VII), tranne quelle relative alla curva $x=g(y)$; in tali ipotesi vale il:

TEOREMA IV « *Esiste uno e un solo integrale $z=z(x,y)$ della* (I), *definito in un campo δ opportuno, a cui è interno il punto (x_0,y_0), ivi $D^{n+2}-L$, che contiene la striscia caratteristica* (IV), *e nei punti di una sua curva caratteristica C, passante per il punto $(x_0,y_0,\Phi(x_0))$ e appartenente a un ben determinato sistema, diverso da quello a cui appartiene la striscia caratteristica assegnata* (IV), *soddisfa la condizione*

$$(XV) \qquad \varphi_0(y)\,z\,(x\,,y)+\sum_{r+s=1}^{n}\varphi_{rs}(y)\,p_{rs}(x\,,y)=G\,(y)\text{ ».}$$

La curva caratteristica C non è data, ma *è dato* soltanto *il sistema, a cui essa appartiene.*

Per dimostrare il TEOR. IV si ragiona in modo simile a quello tenuto nel § 2, riconducendo il teorema stesso ad un teorema analogo di esistenza e di unicità, relativo al sistema di equazioni quasi-lineari del primo ordine (IX) contenuto in (M_2) ([24]).

([23]) Cfr. la prima delle memorie citate in ([4]), § 6, p. 220-224, e la seconda, § 3 p. 11-19.

([24]) (M_2), § 3, n. 1 e n. 2, p. 174-175, TEOR. II.

Il TEOR. III di (M_1) (25) è un caso particolare dell'attuale TEOR. IV, quando sia identicamente in (y_1, y_2)

$$\varphi_0(y) = \varphi_{rs}(y) = 0 \qquad (r + s = 1, 2, \ldots, n-1)$$

e le $\varphi_{n-i,i}(y)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ siano costanti in (y_1, y_2) e precisamente abbiano i valori dati dalle (9) del § 1, n. 4.

2. Come conseguenza di uno qualsiasi dei TEOREMI I, II, III, IV del presente lavoro si possono dimostrare di nuovo i TEOR. I e II di (M_1) (26), relativi all'*esistenza di infinite superfici integrali della* (I), *che contengono una data striscia caratteristica, e all'esistenza di infinite superfici integrali della* (I), *che hanno con una data superficie integrale un contatto di ordine n nei punti di una sua curva caratteristica;* come è ben noto, questi ultimi due *teoremi* sono *fondamentali nella teoria delle caratteristiche per equazioni non lineari di ordine n di tipo iperbolico.*

3. Il TEOR. IV costituisce una nuova conferma di quanto è detto in (M_1) (27), che cioè: «*date due strisce caratteristiche* (*di ordine n*) *della* (I), *appartenenti a due diversi sistemi, e aventi in comune un elemento* (*di ordine n*) *non esiste, in generale, alcuna superficie integrale della* (I), *che le contenga entrambe; se tale superficie integrale esiste, essa è unica*».

Siano infatti assegnate la striscia caratteristica (IV) relativa alla radice ϱ_1 della (II_a), e un'altra striscia caratteristica, relativa p. es. alla radice ϱ_2 della (II_a), di equazioni (28)

$$(1) \qquad x = X(y); \quad z = \Psi(y); \quad p_{rs} = \Psi_{rs}(y) \qquad (r + s = 1, 2, \ldots, n),$$

dove le funzioni $X(y)$, $\Psi(y)$, $\Psi_{rs}(y)$ sono supposte $D^{\mathrm{II}} - L$ nell'intervallo (y_1, y_2), al quale è interno il punto $y_0 = Y(x_0)$, e soddisfano inoltre la

$$(2) \quad x_0 = X(y_0); \quad \Psi(y_0) = \Phi(x_0); \quad \Psi_{rs}(y_0) = \Phi_{rs}(x_0) \qquad (r + s = 1, 2, \ldots, n).$$

La (XV) può, nel caso presente, essere sostituita dalla condizione

$$(3) \qquad p_{0n}(x, y) = \Psi_{0n}(y)$$

---

(25) (M_1), § 4, n. 1, p. 108, TEOR. III.

(26) (M_1), § 1, n. 2, p. 99, TEOR. I e TEOR. II.

(27) (M_1), § 4, n. 2, p. 109-110; il risultato è ivi ottenuto come conseguenza del TEOR. III (§ 4, n. 1, p. 108) dello stesso lavoro.

(28) Poichè si suppone $\varrho_2 \neq 0$ si può prendere y come variabile indipendente, invece di x.

nei punti della curva caratteristica del sistema relativo alla radice ϱ_2 della (II_a) e passante per il punto $(x_0, y_0, \Phi(x_0))$ della superficie integrale cercata. Il TEOR. IV assicura l'esistenza e l'unicità della superficie integrale $z = z(x, y)$ che contiene la striscia caratteristica (IV) e soddisfa la condizione or ora accennata; però non è detto che la superficie integrale così costruita contenga la striscia caratteristica (1).

Fa eccezione, come già si è osservato in (M_1) (29), il caso $n = 2$; per $n = 2$ il TEOR. IV equivale a un teorema dimostrato nei nostri lavori citati nella nota (4), che assicura *l'esistenza e l'unicità dell'integrale dell'equazione* (*a*), *che contiene due strisce caratteristiche* (*del secondo ordine*) *assegnate, aventi in comune un elemento* (*del secondo ordine*) (30); per $n = 2$ vi è qualche riduzione nelle ipotesi.

§ 5.

1. Sia data una equazione quasi-lineare

$$(\mathrm{I}')\qquad \sum_{i=0}^{n} A_{n-i,i}\left(x, y; z; \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ldots; \ldots; \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}, \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-2}\partial y}, \ldots, \frac{\partial^{n-1} z}{\partial y^{n-1}}\right) \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-i}\partial y^i} = B(\ldots).$$

Le $A_{n-i,i}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, B siano definite in un campo D dello spazio a $\dfrac{n(n+1)}{2} + 2$ dimensioni, nel quale variano le $x, y; z; p_{rs}$ $(r + s = 1, 2, \ldots, n-1)$, e ivi D^{I}. Inoltre *la* (I') *sia di tipo iperbolico* in tutto D, cioè l'equazione

$$(\mathrm{II}')\qquad A_{n0}\, dy^n - A_{n-1,1}\, dy^{n-1} dx + \ldots + (-1)^n A_{0n}\, dx^n = 0$$

abbia sempre *n radici reali e distinte,* comunque varino $x, y; z; p_{rs}$ $(r + s = 1, 2, \ldots, n-1)$ nel campo D.

Supponiamo che in tutto D sia (31)

$$(1)\qquad A_{n0} \neq 0; \qquad A_{0n} \neq 0.$$

---

(29) (M_1), § 4, n. 2, p 109-110.

(30) Cfr. il primo dei lavori citati in (4), § 6, in particolare p. 223-224, e il secondo di tali lavori, § 3, n. 4, p. 17, TEOR. III (cfr. pure § 3, n. 2 e n. 3, p. 14-16).

(31) Le condizioni (1) non sono restrittive per quanto riguarda i teoremi del presente paragrafo; cfr. la nota (7).

Posto $\dfrac{dy}{dx} = \varrho$, la (II') si può scrivere

$$(\mathrm{II}'_a) \qquad A_{n0}\,\varrho^n - A_{n-1,1}\,\varrho^{n-1} + \ldots + (-1)^n A_{0n} = 0\,;$$

e questa equazione ha per ipotesi in ogni punto del campo D n radici $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ tutte distinte, e mai nulle nè infinite.

Ad ognuna delle n radici della (II'_a) corrisponde un *sistema di striscie caratteristiche di ordine* $n-1$ ([32]), definito dalle equazioni differenziali

$$(\mathrm{III}') \qquad \begin{cases} dy = \varrho_i\,dx\,;\; dz = p_{10}\,dx + p_{01}\,dy\,;\; dp_{rs} = p_{r+1,s}\,dx + p_{r,s+1}\,dy \\ \qquad\qquad (r+s = 1, 2, \ldots, n-2)\,. \\ A_{n0}\,dp_{n-1,0} + (-A_{n0}\,\varrho_i + A_{n-1,1})\,dp_{n-2,1} + (A_{n0}\,\varrho_i^2 - A_{n-1,1}\,\varrho_i + \\ \quad + A_{n-2,2})\,dp_{n-3,2} + \ldots + ((-1)^{n-1} A_{n0}\,\varrho_i^{n-1} + \\ \quad + (-1)^{n-2} A_{n-1,1}\varrho_i^{n-2} + \ldots + A_{n-1,1})\,dp_{0,n-1} = \\ \quad = B\,dx\,, \end{cases}$$

nelle quali non compaiono le derivate n^e di $z(x, y)$.

2. Sia assegnata una *striscia caratteristica* (*di ordine* $n-1$) della (I) del sistema corrispondente alla radice ϱ_1 della (II_a) mediante le

$$(\mathrm{IV}') \qquad y = Y(x)\,; \qquad z = \Phi(x)\,; \qquad p_{rs} = \Phi_{rs}(x)$$
$$(r + s = 1, 2, \ldots, n-1\,;\; x_1 \leq x \leq x_1)\,.$$

Le funzioni (IV'), che supponiamo D^1 in (x_1, x_2), costituiscono in (x_1, x_2) un sistema di integrali delle (III'), nelle quali si ponga $i = 1$.

Si dice che *un integrale* $z = z(x, y)$ *delle* (I') *contiene la striscia caratteristica* (IV'), *di ordine* $n-1$, *se la curva* $y = Y(x)$, *o almeno un suo arco parziale, appartiene al campo* δ *di definizione di* $z(x, y)$, *e se inoltre nei punti della curva* $y = Y(x)$, *appartenenti a* δ, *valgono le*

$$(\mathrm{V}') \qquad z(x, Y(x)) = \Phi(x)\,; \qquad \left[\frac{\partial^{r+s} z(x, y)}{\partial x^r\,\partial y^s}\right]_{y=Y(x)} = \Phi_{rs}(x)$$
$$(r + s = 1, 2, \ldots, n-1)\,.$$

([32]) Per quanto è detto nel presente numero e nel successivo n. 2 cfr. (M_1), § 7, n. 1 e n. 2, p. 113-114.

La curva $y = Y(x)$, $z = \Phi(x)$ appartiene allora alla superficie integrale della (I′) $z = z)$, (x, y) ed è una *sua curva caratteristica* (del sistema corrispondente alla radice ϱ_1 della (II′ₐ)).

3. Per la (I′) valgono, naturalmente, tutti i risultati ottenuti nei precedenti §§ 1 - 4 per l'equazione generale (I), ma il fatto che la (I′) ammetta striscie caratteristiche di ordine $n-1$ permette di dimostrare per la (I′) qualche risultato ulteriore.

Si supponga, qui e in tutto il seguito del presente paragrafo, che le $A_{n-i,i}\,(i = 0, 1, \ldots, n)$, B siano funzioni $D^{\text{II}} - L$ dei loro argomenti in tutto D, e che le funzioni (IV′) siano $D^{\text{II}} - L$ in (x_1, x_2). Sia x_0 un punto interno a (x_1, x_2), e sia (y_1, y_2) un intervallo, a cui sia interno il punto $y_0 = Y(x_0)$. Sia assegnata una funzione $x = g(y)$ definita in (y_1, y_2), ivi $D^{\text{II}} - L$ e soddisfacente le

$$(2)\qquad x_0 = g(y_0)\,; \qquad 1 - Y'(x_0)\,g'(y_0) \neq 0\,.$$

Siano date inoltre $\dfrac{n(n+1)}{2} + 1$ funzioni $\varphi_0(y), \varphi_{rs}(y)\ (r+s = 1, 2, \ldots, n-1)$, $G(y)$, definite in (y_1, y_2), ivi $D^{\text{II}} - L$ e soddisfacenti le

$$(\text{VI}')\qquad \varphi_0(y_0)\,\Phi(x_0) + \sum_{r+s=1}^{n-1} \varphi_{rs}(y_0)\,\Phi_{rs}(x_0) = G(y_0)$$

$$(\text{VII}')\qquad (\varrho_1)_0^{n-1}\,\varphi_{n-1,0}(y) - (\varrho_1)_0^{n-2}\,\varphi_{n-2,1}(y) + \cdots + \\ + (-1)^{n-2}(\varrho_1)_0\,\varphi_{1,n-2}(y) + (-1)^{n-1}\varphi_{0,n-1}(y) \neq 0\,.$$

In queste ipotesi vale il

TEOREMA I′. « *Esiste uno e un solo integrale della* (I′) $z = z(x, y)$, *che è definito in un campo* δ *abbastanza piccolo del piano* xy, *a cui è interno il punto* (x_0, y_0), *è ivi* $D^{n+1} - L$, *contiene la striscia caratteristica* (IV′) *di ordine* $n-1$ *e soddisfa la condizione*

$$(\text{VIII}')\qquad \varphi_0(y)\,z(g(y), y) + \sum_{r+s=1}^{n-1} \varphi_{rs}(y)\,p_{rs}(g(y), y) = G(y)\ (^{33})\,».$$

---

(33) Il TEOR. VI′ di (M_1) (§ 7, n. 4, p. 115) è un caso molto particolare del TEOR. IV′ del testo, nell'ipotesi che sia, identicamente in (y_1, y_2),

$$(^*)\qquad \varphi_0(y) = \varphi_{rs}(y) = 0 \qquad (r + s = 1, 2, \ldots, n-2),$$

e che le $\varphi_{n-1-i,i}(y)\ (i = 0, 1, \ldots, n-1)$ siano costanti in (y_1, y_2) ed abbiano i valori

$$(^{**})\qquad \begin{cases} \varphi_{n-1,0} = (A_{n0})_0\,; \qquad \varphi_{n-2,1} = (-A_{n0}\,\varrho_1 + A_{n-1,1})_0\,; \ldots; \\ \varphi_{0,n-1} = ((-1)^{n-1} A_{n0}\,\varrho_1^{n-1} + (-1)^{n-2} A_{n-1,1}\,\varrho_1^{n-2} + \cdots + A_{1,n-1})_0 \end{cases}$$

4. Per dimostrare il TEOR. IV′ ci si riconduce al sistema quasi lineare

$$
(\mathrm{IX}')\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial z}{\partial x}=p_{10}\,; \quad \dfrac{\partial p_{10}}{\partial x}=p_{20}\,, \quad \dfrac{\partial p_{01}}{\partial x}=p_{11}\,; \quad \dfrac{\partial p_{20}}{\partial x}=p_{30}\,,\ldots;\ldots; \\[2mm]
\dfrac{\partial p_{n-2,0}}{\partial x}=p_{n-1,0}\,, \quad \dfrac{\partial p_{n-3,1}}{\partial x}=p_{n-2,1}\,,\ldots, \dfrac{\partial p_{0,n-2}}{\partial x}=p_{1,n-2}\,; \\[2mm]
\dfrac{\partial p_{n-1,0}}{\partial y}=\dfrac{\partial p_{n-2,1}}{\partial x}\,, \dfrac{\partial p_{n-2,1}}{\partial y}=\dfrac{\partial p_{n-3,2}}{\partial x}\,,\ldots,\dfrac{\partial p_{1,n-2}}{\partial y}=\dfrac{\partial p_{0,n-1}}{\partial x} \\[2mm]
A_{n0}\dfrac{\partial p_{n-1,0}}{\partial x}+A_{n-1,1}\dfrac{\partial p_{n-2,1}}{\partial x}+\ldots+A_{2,n-2}\dfrac{\partial p_{1,n-2}}{\partial x}+ \\[2mm]
+A_{1,n-1}\dfrac{\partial p_{0,n-1}}{\partial x}+A_{0n}\dfrac{\partial p_{0,n-1}}{\partial y}=B\,.
\end{cases}
$$

Tale sistema contiene $\dfrac{n(n+1)}{2}$ equazioni in altrettante incognite; si ragiona poi in modo simile a quello tenuto nel § 2 (anzi vi è qui qualche semplificazione).

5. La relazione (VIII′) non contenga alcuna tra le derivate di ordine $n-1$, e sia $h\,(h<n-1)$ l'ordine massimo delle derivate che compaiono in essa, cioè la (VIII′) abbia la forma

$$
(\mathrm{X}')\qquad \varphi_0(y)\,z(g(y),y)+\sum_{r+s=1}^{h}\varphi_{rs}(y)\,p_{rs}(g(y),y)=G(y)\,.
$$

Supposto che le funzioni $g(y)\,,\varphi_0(y)\,,\varphi_{rs}(y)\,(r+s=1\,,2\,,\ldots h)\,,\ G(y)$ siano $D^{n+1-h}-L$, si derivi $n-1-h$ volte la (X′) rispetto a y, ottenendo una relazione della forma

$$
(3)\qquad \psi_0(y)\,z(g(y),y)+\sum_{r+s=1}^{n-1}\psi_{rs}(y)\,p_{rs}(g(y),y)=G^{(n-1-h)}(y)\,,
$$

dove le $\psi_0(y)\,,\psi_{rs}(y)\ (r+s=1\,,2\,,\ldots,n-1)$ sono funzioni $D^{II}-L$ in $(y_1\,,y_2)$, calcolabili facilmente; in particolare

$$
(4)\quad \psi_{n-1-i,i}(y)=\sum_{\lambda=0}^{n-1-h}\binom{n-1-h}{\lambda}g'^{\,n-1-h-\lambda}(y)\,\varphi_{h-i+\lambda,i-\lambda}(y)\ (i=0,1,\ldots,n-1),
$$

avendo posto (come già nel § 3, n. 1) $\varphi_{rs}(y)=0$ identicamente in $(y_1\,,y_2)$ se $r<0$ oppure $s<0$.

Ragionando come nel § 3, n. 1 si dimostra il

TEOREMA II'. « *Nelle stesse ipotesi del* TEOR. I' *circa le* $A_{n-i,i}$ $(i = 0, 1, \dots, n)$, B *e le funzioni* (IV'), *se* $g(y)$, $\varphi_0(y)$, $\varphi_{rs}(y)$ $(r+s=1, 2, \dots, h)$, $G(y)$ *sono funzioni* $D^{n+1-h} - L$ in (y_1, y_2), *se valgono le* (2) *e le*

$$\text{(XI')} \quad \begin{cases} \varphi_0(y_0)\,\Phi(x_0) + \sum\limits_{r+s=1}^{h} \varphi_{rs}(y_0)\,\Phi_{rs}(x_0) = G(y_0) \\[2ex] \dfrac{d^i}{dy^i}\left[\varphi_0(y)\,z(g(y), y) + \sum\limits_{r+s=1}^{h} \varphi_{rs}(y)\,p_{rs}(g(y), y)\right]_{\substack{y=y_0 \\ z=\Phi(x_0) \\ p_{rs}=\Phi_{rs}(x_0)}} = G^{(i)}(y_0) \\[2ex] (i = 1, 2, \dots, n-1-h). \end{cases}$$

$$\text{(XII')} \quad (\varrho_1)_0^{n-1}\,\psi_{n-1,0}(y) - (\varrho_1)_0^{n-2}\,\psi_{n-2,0}(y) + \dots + (-1)^{n-1}\,\psi_{0,n-1}(y) \neq 0,$$

dove le $\psi_{n-1-i,i}(y)$ $(i = 0, 1, \dots, n-1)$ *sono date dalle* (4), *esiste uno e un solo integrale della* (I') $z = z(x, y)$, *definito in un campo* δ *sufficientemente piccolo, a cui è interno il punto* (x_0, y_0), *ivi* $D^{n+1} - L$, *che contiene la striscia caratteristica* (IV') *di ordine* $n-1$, *e soddisfa la condizione* (X') ».

6. Se tutte le $\varphi_{rs}(y)$ $(r+s=1, 2, \dots, h)$ sono nulle identicamente in (y_1, y_2) e $\varphi_0(y)$ non si annulla mai in (y_1, y_2), posto

$$Z(y) = \frac{G(y)}{\varphi_0(y)}$$

la (X') diviene

$$\text{(XIII')} \qquad z(g(y), y) = Z(y),$$

e il TEOR. II' diviene:

TEOREMA. III'. « *Nelle stesse ipotesi del* TEOR. I' *circa le funzioni* $A_{n-i,i}$ $(i = 0, 1, \dots, n)$, B *e le funzioni* (IV'), *se* $g(y)$, $Z(y)$ *sono funzioni* $D^{n+1} - L$ *in* (y_1, y_2), *e se valgono le* (2) *e le*

$$\text{(XIV')} \quad \begin{cases} \Phi(x_0) = Z(y_0) \\[1ex] \left[\dfrac{d^i z(g(y), y)}{d y^i}\right]_{\substack{y=y_0 \\ p_{rs}=\Phi_{rs}(x_0)}} = Z^{(i)}(y_0) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \end{cases}$$

esiste uno e un solo integrale della (I′) $z = z(x, y)$, *che è definito in un campo* δ, *abbastanza piccolo, a cui è interno il punto* (x_0, y_0), *è ivi* $D^{n+1} - L$, *contiene la striscia caratteristica* (IV′) *di ordine* $n - 1$, *e nei punti della curva* $x = g(y)$ *si riduce alla funzione assegnata* $Z(y)$ ».

Geometricamente: « *Esiste una e una sola superficie integrale* Σ *della* (I′), *che contiene la striscia caratteristica data* (IV′) *di ordine* $n - 1$, *e passa per una curva* (in generale) *sghemba assegnata di equazioni*

$$x = g(y), \quad z = Z(y) \text{ ».}$$

Si ha così, nel campo delle funzioni di variabile reale, un risultato fondamentale per la teoria delle caratteristiche di ordine $n - 1$ per l'equazione quasi-lineare di ordine n, con $n > 2$.

Per $n = 2$ il TEOR. III′ è già stato dimostrato nei nostri lavori citati in ([4]), come caso particolare del problema di GOURSAT ([34]). Invece il TEOR. I′ ha carattere di novità anche per $n = 2$ (mentre per $n = 2$ il TEOR. II′ coincide col TEOR. III′).

7. Per l'equazione (I′) vale ancora il seguente:

TEOREMA IV′. « *Supposte soddisfatte tutte le ipotesi del* TEOR. I′, *tranne quelle relative alla curva* $x = g(y)$, *esiste uno e un solo integrale* $z = z(x, y)$ *della* (I′), *che è definito in un campo* δ *sufficientemente piccolo, a cui è interno il punto* (x_0, y_0), *è ivi* $D^{n+1} - L$, *contiene la striscia caratteristica* (IV′), *di ordine* $n - 1$, *e nei punti di una sua curva caratteristica, passante per il punto* $(x_0, y_0, \Phi(x_0))$ *e appartenente a un ben determinato sistema, diverso da quello a cui appartiene la striscia caratteristica data* (IV′), *soddisfa la condizione*

$$\text{(XV')} \qquad \varphi_0(y)\, z(x, y) + \sum_{r+s=1}^{n-1} \varphi_{rs}(y)\, p_{rs}(x, y) = G(y) \text{ » } (^{35}).$$

Il TEOR. IV′ si dimostra, riconducendosi ad un teorema analogo per il sistema quasi-lineare (IX′), dimostrato in (M_2) ([36]).

([34]) Cfr. il primo dei lavori citati in ([4]), § 8, p. 227-229, e il secondo, dei lavori citati in ([4]) § 4, p. 19-23 (cfr. in particolare il n. 3, p. 23).

([35]) Il TEOR III′ di (M_1) (§ 7, n. 4, p 115) è un caso particolare del presente TEOR IV′, quando le $\varphi_0(y)$, $\varphi_{rs}(y)$ $(r + s = 1, 2, \ldots, n - 1)$ soddisfino le (*) e (**) della nota ([33]).

([36]) (M_2), § 3, n. 1 e n. 2, p. 174-175, TEOR. II.

8. Come conseguenza di uno qualunque dei TEOR. I′, II′, III′, IV′ del presente paragrafo si possono dimostrare i TEOR. I′ e II′ di (M_1) [37], che sono di importanza fondamentale nella teoria delle caratteristiche di ordine $n-1$ per l'equazione quasi lineare (I′), e sono relativi all'***esistenza di infinite superfici integrali della*** (I′), ***che contengono una data striscia caratteristica*** (*di ordine* $n-1$), *e all'esistenza di infinite superfici integrali della* (I′), ***che hanno con una data superficie integrale un contatto di ordine*** $n-1$ ***nei punti di una sua curva caratteristica.***

Dal TEOR. IV′ si può ottenere una nuova conferma del risultato già ottenuto in (M_1) [38]: « *Se* $n>2$, ***date due striscie caratteristiche di ordine*** $n-1$ ***della*** (I′) ***di due diversi sistemi, aventi un elemento di ordine*** $n-1$ ***in comune, in generale non esiste alcuna superficie integrale della*** (I), ***che le contenga entrambe; se tale superficie, eventualmente, esiste, essa è unica*** ».

La dimostrazione è del tutto simile a quella data nel § 4, n. 3 per l'equazione generale (I) e le striscie caratteristiche di ordine n.

Il caso $n=2$ fa eccezione, cioè, *se* $n=2$, ***esiste una superficie integrale della*** (I′), ***che contiene due striscie caratteristiche del primo ordin***[illegible]***appartenenti ai due diversi sistemi e aventi un elemento del primo ordine***[illegible]***mune;*** l'esistenza e l'unicità di tale superficie integrale seguono dal [illegible]. IV′, che per $n=2$ coincide con un teorema dimostrato in un no[illegible] lavoro anteriore [39].

(37) (M_1), § 7, n 3, p. 114 115.

(38) (M_1), § 7, n. 5, p. 115-116

(39) Cfr. la seconda delle Memorie citate in (4), § 4, n. 5, TEOR. III′, p. 22-23; se $n=2$ si ha qualche riduzione nelle ipotesi.