Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

C. Longo

Sulle trasformazioni puntuali fra due S_r nell'intorno di una coppia a jacobiano nullo di caratteristica massima

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 5, nº 3-4 (1951), p. 161-173

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1951_3_5_3-4_161_0>

SULLE TRASFORMAZIONI PUNTUALI FRA DUE S_r NELL'INTORNO DI UNA COPPIA A JACOBIANO NULLO DI CARATTERISTICA MASSIMA

di C. Longo (Roma)

1. — Scopo della Nota (*).

Nella presente Nota determino le condizioni necessarie e sufficienti affinchè una trasformazione puntuale T fra due S_r sia approssimabile fino all'intorno d'ordine n in una coppia di punti corrispondenti (O, O') con una trasformazione cremoniana, nel caso che nella coppia considerata lo jacobiano sia nullo di caratteristica $r-1$.

Una trasformazione del tipo in esame determina una proiettività degenere fra gli intorni del 1^0 ordine di O e O' avente come spazio singolare una retta per O, detta *retta stazionaria*. È noto (1) che, in generale, le trasformazioni in esame non si possono approssimare, oltre l'intorno del primo ordine, con una trasformazione cremoniana; ed è anche noto (2) che, nel caso che O sia semplice per la Jacobiana, condizione necessaria e sufficiente affinchè esse si possano approssimare fino all'intorno del secondo ordine con una trasforma-

(*) In una prima redazione del presente lavoro (di cui ho distribuito alcuni estratti) sono incorso in una svista, in seguito alla quale credevo di dover completare il risultato di Villa e Vaona enunciato a pag. 166. Debbo invece dichiarare che tale risultato è esatto e mi scuso presso il prof. Villa della distribuzione dei suddetti estratti e Lo ringrazio per aver accolto questa rettifica.

(1) E. Bompiani. — *Corrispondenze puntuali fra piani proiettivi: esame delle Jacobiane.* Memorie Acc. Italia XIV, 1943.

(2) E. Bompiani. — *Sulle Jacobiane di una corrispondenza puntuale fra piani.* Rend. Acc. Lincei, 8^0, II, 1947.

M. Villa. — *Sulle trasformazioni puntuali in una coppia a jacobiano nullo nel caso cremoniano.* Rend. Acc. Lincei, VIII, II, 1947.

G. Vaona. — *Ancora sul caso cremoniano delle trasformazioni puntuali.* Boll. U. M. I., 3, VI, 1951.

zione cremeniana è che la retta stazionaria sia tangente in O alla Jacobiana.

Supposto O semplice per la Jacobiana, è chiaro che condizione *necessaria* affinchè una trasformazione del tipo in esame sia approssimabile sino all'intorno d'ordine n è che la condizione precedente sia soddisfatta in tutto l'intorno di ordine $n-2$ di centro O ed appartenente alla Jacobiana. Dimostro che tale condizione è anche sufficiente.

Nel caso che O sia punto $(s-1)^{\text{plo}}$ per la Jacobiana dimostro che condizione necessaria e sufficiente affinchè la trasformazione sia approssimabile con una trasformazione cremoniana fino a tutto l'intorno d'ordine s, è che la tangente stazionaria sia tangente principale $(s-1)^{\text{pla}}$ alla Jacobiana.

A partire da questo risultato determino le condizioni necessarie e sufficienti affinchè la T sia approssimabile cremonianamente fino all'intorno d'ordine $n\,(n > s)$.

Assegno inoltre alcune caratterizzazioni geometriche delle condizioni determinate: per $r = 2{,}3$ ed $n = 2$ tali caratterizzazioni sono gia state date da VILLA e VAONA (3).

Si osservi che se il punto O è semplice per la Jacobiana il determinante jacobiano in O ha caratteristica $r-1$; ma non viceversa.

I risultati per $r = 2$ e nel caso di O punto semplice della Jacobiana sono già contenuti in un lavoro di C. F. MANARA (4) di cui sono venuto casualmente a conoscenza solo quando il presente lavoro era terminato: anche in questo caso, però, il metodo da me seguito è diverso da quello del MANARA.

2. — RICHIAMI E POSIZIONI DEL PROBLEMA.

Sia T

$$x'_i = x'_i(x_1, \ldots, x_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

una trasformazione puntuale fra due spazi lineari $S_r(x_1 \ldots x_r)$ e $S'_r(x'_1 \ldots x'_r)$ nella quale si corrispondano i punti O ed O'.

Indichiamo con

2.1 $$J = \frac{\partial(x_1, \ldots, x'_r)}{\partial(x_1, \ldots, x'_r)} = 0$$

la Jacobiana della trasformazione.

(3) M. VILLA, G. VAONA. — *Sul caso cremoniano delle trasformazioni puntuali fra due piani o spazi.* Boll. U. M. I, III, V, 1950.

(4) C. F. MANARA. — *Sulle trasformazioni puntuali di un piano in un altro nell'intorno di un punto semplice della Jacobiana.* Atti Sem. Mat. e Fis. Un. Modena, 1951.

Ringrazio il MANARA per l'interessante estratto inviatomi.

Se in O è $J \neq 0$, la trasformazione è *regolare* nella coppia (O, O') ed è noto ([5]) che è approssimabile con trasformazioni cremoniane fino all'intorno di ordine n (qualsiasi finito), o, come diremo per brevità, la trasformazione è n-*cremoniana*.

Supponiamo che in O si abbia $J = 0$ e che la caratteristica del determinante jacobiano in O sia massima, ossia $r - 1$.

È noto ([6]) che con una parziale opportuna scelta dei riferimenti in S_r e S'_r le equazioni della T si possono porre nella forma:

$$2.2 \quad \begin{cases} x'_i = x_i + \varphi_{2,i}(x, z) + [3]_{xz} & (i = 1, 2, \ldots, r-1; s \geq 2) \\ z' = \psi_{2,0}(x) + \ldots + \psi_{s,0}(x) + z\,\psi_{s-1,1}(x) + \ldots + z^{s-1}\psi_{1,s-1}(x) + \\ \qquad + a_s z^s + [s+1]_{xz} \end{cases}$$

dove si è posto $x_r = z$, $x'_r = z'$ e si indicano con $\varphi_{h,i}(x, z)$ e $\psi_{h,l}(x)$ forme di grado h nelle variabili indicate e con $[n]_{x,z}$ termini di grado (complessivo) non minore di n.

L'omografia singolare Ω tra le stelle di centro O e O', determinata dalla trasformazione, ha come spazi singolari la retta $x_1 = \ldots = x_{r-1} = 0$ e l'iperpiano $z' = 0$; questi spazi singolari si diranno rispettivamente la *retta* e l'*iperpiano stazionario;* la Ω subordina poi una proiettività non singolare ω tra gli iperpiani per la retta stazionaria e gli S_{r-2} per O' appartenenti all'iperpiano stazionario.

È subito visto che la trasformazione 2.2 si può ottenere come prodotto di una trasformazione del tipo

$$2.3 \qquad T \equiv \begin{cases} x'_i = \bar{x}_i \\ z' = \psi_{2,0}(\bar{x}) + \ldots + \psi_{s,0}(\bar{x}) + \bar{z}\,\psi_{s-1,1}(\bar{x}) + \ldots + a_s \bar{z}^s + [s+1]_{xz} \end{cases}$$

per una trasformazione regolare nella coppia (O, O')

$$2.4 \qquad R \equiv \begin{cases} \bar{x}_i = x_i + \varphi_{2,i}(x, z) + [3]_{xz} \\ \bar{z} = z \,. \end{cases}$$

([5]) B. Segre. — *Corrispondenze analitiche e trasformazioni cremoniane.* Annali di Mat. IV, 28, 1949.

C. F. Manara. — *Approssimazione delle trasformazioni puntuali regolari, mediante trasformazioni cremoniane.* Rend. Acc. Lincei, VII, 8, 1950.

([6]) M. Villa — G. Vaona. — *Le trasformazioni puntuali in una coppia a jacobiano nullo.* Ren. Acc. Lincei, VIII, 6, 1949.

Una trasformazione del tipo 2.3 la diremo una trasformazione *pseudo-dejonqueriana.*

Per quanto si è ricordato sulle trasformazioni regolari, è chiaro che condizione necessaria e sufficiente affinchè la trasformazione 2.2 sia n cremoniana, è che lo sia la trasformazione 2.3.

Nel seguito ci riferiremo quindi sempre a trasformazioni *pseudo-dejonqueriane.*

§ 1. — Approssimabilità cremoniana nell'intorno di un punto semplice della Jacobiana.

3. — TRASFORMAZIONI FRA PIANI.

Nella 2.3 posto $x_1 = y$, $x'_1 = y'$ si ha, essendo in tal caso $s = 2$,

3.1
$$\begin{cases} y' = y \\ z' = a\,y^2 + b\,y\,z + c\,z^2 + \varphi_3(y, z) + \ldots \end{cases}$$

La condizione necessaria e sufficiente affinchè la trasformazione precedente sia 2-cremoniana (7) è che la tangente stazionaria sia tangente alla curva Jacobiana; ciò porta $c = 0$.

La trasformazione 3.1 si può allora scrivere

3.2
$$\begin{cases} y' = y \\ z' = a\,y^2 + y\,z + \varphi_3(y, z) + \ldots + \varphi_n(y, z) + [n+1] \end{cases}$$

con

3.3
$$\varphi_s(y, z) = \sum_0^s{}_h\, a_{h,s-h}\, y^h\, z^{s-h}.$$

La curva Jacobiana ha equazione

3.4
$$y + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + \ldots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} + \ldots = 0.$$

TEOREMA: *Supposto che nella* 3.2 *si abbia*

3.5
$$a_{0,h} = 0, \quad (h = 3, \ldots, n-1)$$

(7) cfr. Il Lavoro citato in (2).

condizione necessaria e sufficiente affinchè nei punti dell'E_{n-1} di origine O ed appartenente alla Jacobiana 3.4 la tangente stazionaria coincida con la tangente alla Jacobiana è che si abbia $a_{0,n} = 0$.

Nell'ipotesi 3.5 per l'E_{n-1} appartenente alla Iacobiana 3.4 si ha:

$$y = -n\, a_{0,n}\, z^{n-1} + [n]_z .$$

Sia $\overline{O}(\overline{y}, \overline{z})$ un punto della Jacobiana.

La tangente stazionaria in $\overline{O}$, a meno d'infinitesimi d'ordine superiore ad $n-2$, rispetto all'infinitesimo principale $\overline{z}$, ha equazione:

$$y = 0 ,$$

mentre la tangente alla Jacobiana in $\overline{O}$ ha equazione:

$$y = -n(n-1)\, a_{0,n}\, \overline{z}^{n-2}\, z$$

e queste coincidono se e soltanto se $a_{0,n} = 0$.

Le condizioni 3.5 (per $h = 3, \ldots, n$) sono quindi *necessarie* perchè la trasformazione sia n cremoniana.

Soddisfatte tali condizioni ta trasformazione 3.2 si può scrivere:

3.6 $$\begin{cases} y' = y \\ z' = a y^2 + y\,\{z + \varphi_2(y, z) + \ldots + \varphi_{n-1}(y, z)\} + [n+1] ; \end{cases}$$

si può quindi considerare come prodotto delle due trasformazioni:

$$\begin{cases} y' = y_1 \\ z' = a\, y_1^2 + y_1 z_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = y \\ z_1 = z + \varphi_2(y, z) + \ldots + \varphi_{n-1}(y, z) + [n] \end{cases}$$

di cui la prima rappresenta una trasformazione quadratica e la seconda è regolare.

Le condizione 3.5 sono quindi anche *sufficienti.*

È subito visto che alle precedenti condizioni analitiche si può dare la seguente interpretazione geometrica:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una trasformazione puntuale fra due piani in una coppia di punti corrispondenti (O, O') a jacobiano nullo nell'intorno del punto O, semplice per la Jacobiana, sia approssimabile fino all'intorno d'ordine n con una trasformazione cremoniana è che l'elemento E_n d'origine O ed appartenente alla jacobiana appartenga alla curva corrispon-

dente alla retta stazionaria per O'; ovvero, *che le curve corrispondenti alle rette per O' abbiano un E_n comune* (appartenente necessariamente alla jacobiana).

La caratterizzazione precedente ha evidentemente carattere topologico, quindi caratterizza le trasformazioni n-cremoniane del tipo in esame anche non pseudo dejonqueriane.

4. — TRASFORMAZIONI FRA DUE S_3: APPROSSIMABILITÀ FINO INTORNO 3° ORDINE.

Per $r = 3$ indicate con x, y, z, e x', y', z' rispettivamente le coordinate in S_3 e S'_3 le equazioni 2.3 nel caso di O semplice per la Jacobiana (e quindi $s = 2$) si scrivono

4.1
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = \psi_{2,0}(x, y) + z\, \psi_{2,1}(x, y) + a\, z^2 + \varphi_3(x, y, z) + [4]. \end{cases}$$

La condizione (8) necessaria e sufficiente affinchè la trasformazione sia 2-cremoniana è che sia $a = 0$.

Si verifica facilmente che la condizione precedente equivale al fatto che le superficie (o meglio le loro calotte del 2° ordine) corrispondenti ai piani per O' abbiano in comune l'E_2.

$$x = [3]_t \quad , \quad y = [3]_t \quad , \quad z = t + [2]_t .$$

Questo fatto ha carattere topologico; quindi si ha il risultato di VILLA e VAONA:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una trasformazione puntuale T fra due S_3 sia approssimabile, fino all'intorno del 2° ordine in una coppia (O, O') a jacobiano nullo, con O punto semplice della Jacobiana, con una trasformazione cremoniana è che le superficie corrispondenti ai piani per O' abbiano in comune un E_2 di centro O.

Supposta la 4.1 2-cremoniana possiamo assumere come piano $y = 0$ il piano tangente in O alla Jacobiana e nella 4.1 si ha

4.3
$$z' = \psi_2(x, y) + y\, z + \varphi_3(x, y, z) + \ldots + \varphi_n(x, y, z) + [n] .$$

Determiniamo ora le condizioni affinchè la trasformazione sia 3-cremoniana.

---

(8) Nota (1) pag. 2.

Poniamo:

4.4 $\varphi_s(x, y, z) = \psi_{s,0}(x, y) + z\,\psi_{s-1,1}(x, y) + \ldots + z^{s-l}\,\psi_{1,s-1}(x, y) + a_s z^s$

$$\psi_{h,k}(x, y) = \sum_{0}^{h\ k}{}_{l}\, a_{h-l,l}\, x^{h-l} y^l \qquad (h + k = s).$$

Per la superficie jacobiana J si ha

4.5 $$y + \psi_{2,1}(x, y) + 2z\,\psi_{1,2}(x, y) + 3a_3 z^2 + \ldots = 0.$$

Consideriamo il punto $\overline{O}(u, o, v)$, appartenente all'intorno del primo ordine di centro O della superficie Jacobiana. Effettuata la trasformazione

$$x = \overline{x} + u \quad , \quad y = \overline{y} \quad , \quad z = \overline{z} + v$$

in modo da portare l'origine in $\overline{O}$, con facili calcoli, si ha che la tangente stazionaria in $\overline{O}$ ha equazioni:

$$\overline{x} = \overline{y} = 0.$$

Questa è tangente in $\overline{O}$ alla Jacobiana se e soltanto se

$$\left(\frac{\partial J}{\partial z}\right)_{\overline{0}} = 2\,\overset{2}{a}_{1,0}\,u + 6\,a_3\,v = 0.$$

Se si vuole che questa relazione valga qualunque sia $\overline{O}$ si deve avere

4.6 $$\overset{2}{a}_{1,0} = 0 \quad , \quad a_3 = 0.$$

Queste condizioni sono dunque *necessarie* perchè la T sia 3-cremoniana. Soddisfatte le 4.6 si ha:

$$z' = \psi_{2,0}(x, y) + yz + \psi_{3,0}(x, y) + z\,\psi_{2,1}(x, y) + a_2\,y\,z^2 + [4]$$

e la trasformazione T risulta allora prodotto (fino all'intorno del 3^0 ordine) delle due trasformazioni:

$$\begin{cases} x' = \overline{x} \quad , \quad y' = \overline{y} \\ z' = \psi_{20}(\overline{x}, \overline{y}) + \psi_{3,0}(\overline{x}, \overline{y}) + \overline{z}\,\{\overline{y} + \psi_{2,1}(\overline{x}, \overline{y})\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{x} = x, \ \overline{y} = y \\ \overline{z} = z + a_2 z^2 \end{cases}$$

di cui la prima è una trasformazione di DE-JONQUIÈRES e la seconda è regolare.

Le condizioni 4.6 sono quindi anche *sufficienti* affinchè la trasformazione 4.2 sia 3-cremoniana.

È facile verificare che le condizioni 4.6 corrispondono al fatto che le superficie corrispondenti ai piani per O' abbiano in comune l'E_3:

$$4.7 \qquad x = [4]_t \quad , \quad y = [4]_t \quad , \quad z = t + [2]_t$$

e che le superficie corrispondenti ai piani per la retta $z' = y' = 0$ (corrispondente al piano tangente in O alla Jacobiana nella proiettività ω (n. 2)) siano tangenti fra loro lungo l'E_2 (4.2) appartenente al precedente E_3.

Le condizioni precedenti hanno carattere topologico; quindi:

Sia (O, O') una coppia di punti corrispondenti in una trasformazione puntuale T fra due S_3 a jacobiano nullo, con O punto semplice della Jacobiana: le condizioni necessarie e sufficienti affinchè la T sia approssimabile fino all'intorno del 3^0 ordine con una trasformazione cremoniana sono:

1) *le superficie corrispondenti ai piani per O' debbono avere in comune un E_3.*

2) *indicata con j' la retta per O', appartenente al piano stazionario e corrispondente al piano tangente in O alla Jacobiana, nella proiettività tra i piani per la retta stazionaria per O e le rette per O' del piano stazionario, le superficie corrispondenti ai piani per j' si tocchino lungo l'E_2 appartenente all'E_3.*

OSSERVAZIONE. — Le condizioni 4.6 si possono determinare osservando che, con la scelta fatta del piano tangente in O alla Jacobiana lo sviluppo della z' nella 4.1, deve coincidere, qualunque sia la x con l'analogo sviluppo della z' nella 3.6.

5. — TRASFORMAZIONI FRA DUE S_3: APPROSSIMABILITÀ FINO ALL'INTORNO D'ORDINE n.

Si ha:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la trasformazione 4.1 sia n cremoniana è che essa si possa scrivere nella forma

$$5.1 \qquad \begin{cases} x' = x, \quad y' = y \\ z' = A_n(x, y) + B_{n-1}(x, y)\, C_{n-1}(x, y, z) + [n+1] \end{cases}$$

con

5.1′
$$\begin{aligned} A_n \quad (x, y) &= \psi_2(x, y) + \dots + \psi_n(x, y) \\ B_{n-1}(x, y) &= y + \varphi_2(x, y) + \dots + \varphi_n(x, y) \\ C_{n-1}(x, y) &= z + z^2 \{a_2 + \zeta_1(x, y, z) + \dots + \zeta_{n-3}(x, y, z)\}. \end{aligned}$$

La sufficienza della condizione è subito vista, in quanto come nel caso della 3-cremonianità, la 5.1 si può considerare come prodotto di una trasformazione di DE-JONQUIÈRES e di una trasformazione regolare.

Dimostriamo che la condizione è necessaria. Poichè essa è soddisfatta per $n = 2,3$ (n. prec.) procediamo per induzione.

Supposta la $T(n-1)$-cremoniana si ha quindi

$$z' = A_{n-1}(x, y) + B_{n-2}(x, y) C_{n-2}(x, y, z) + \\ + \psi_{n,0}(x, y) + z\, \psi_{n-1,1}(x, y) + \dots + a_n z^n .$$

Condizione necessaria affinchè la trasformazione sia n-cremoniana è che la tangente stazionaria in ogni punto della Jacobiana appartenente all'intorno d'ordine $n-2$ del punto O (ossia alla calotta σ^J_{n-2} di centro O ed appartenente alla Jacobiana) sia tangente alla Jacobiana.

Con facili calcoli si ha:

1⁰) equazione della σ^J_{n-2}:

$$x = u, \quad z = v, \quad y = \alpha_2 u^2 + \dots + \alpha_{n-2} u^{n-2} + [n-1]_{uv}$$

ove

$$x = u, \quad y = \alpha_2 u^2 + \dots + \alpha_{n-2} u^{n-2} + [n-1]_u$$

è l'elemento lineare individuato dalla curva di equazione $B_{n-2}(x, y) = 0$

2⁰) posto

$$x = \bar{x} + u, \quad z = \bar{z} + v, \quad y = \bar{y} + \alpha_2 u^2 + \dots + \alpha_{n-2} u^{n-2}$$

la tangente stazionaria nel punto $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 0$ ha equazione

$$\bar{x} = \bar{y} = 0;$$

3⁰) indicato con $\overset{n}{a}_{h0}$ il coefficiente di x^h nella forma $\psi_{h,n-h}(x, y)$ la tangente stazionaria è tangente alla Jacobiana se e soltanto se

$$a_n = 0, \quad \overset{n}{a}_{h,0} = 0 \qquad h = 2, \dots, n-2);$$

4^0) le condizioni precedenti sono le condizioni necessarie e sufficienti affinchè la 5.2 abbia la forma che ha la z' nella 5.1.

È così dimostrato quanto si voleva.

Determiniamo ora una caratterizzazione geometrica della 5.1.

La superficie Jacobiana relativa alla 5.1 ha equazioni

$$B_{n-1}(x, y)[1 + \ldots] + [n]_{xyz} = 0$$

e la sua calotta σ^J_{n-1} posto $x = u$, $z = v$ ha equazioni del tipo

$$x = u + [n]_{uv}, \quad y = \alpha_2 u^2 + \ldots + \alpha_{n-1} u^{n-1} + [n]_{uv}, \quad z = v + [n]_{uv}.$$

Alla calotta σ^J_{n-1} la trasformazione 5.1 fa corrispondere, l'elemento lineare E'_{n-1}

$$x' = u + [n]_u, \quad y' = \alpha_2 u^2 + \ldots + \alpha_{n-1} u^{n-1} + [n]_u,$$

$$z' = \beta_2 u^2 + \ldots + \beta_{n-1} u^{n-1} + [n]_u$$

ove i coefficienti β_h dipendono dalle α_k e dai coefficienti del polinomio $A_n(x, y)$.

Quindi condizione necessaria affinchè la T sia n-cremoniana è che esista una calotta d'ordine $n - 1$ di centro O alla quale corrisponda un elemento lineare E'_{n-1}.

La condizione è sufficiente: infatti se esiste un elemento E'_{n-1} di centro O' che si trasforma in una calotta questa è necessariamente del tipo

$$y = \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_{n-1} x^{n-1} + [n]_{xz}$$

e pertanto la trasformazione è del tipo 5.1.

Quindi:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una trasformazione puntuale fra due S_3 in una coppia (O, O') a jacobiano nullo, con O punto semplice della Jacobiana sia approssimabile fino all'intorno d'ordine n con una trasformazione cremoniana è che esista una calotta di centro O d'ordine $n - 1$, a cui corrisponda un elemento lineare E'_{n-1} di centro O'.

Si osservi che al punto O' corrisponde l'E_n avente equazione

$$x = [n + 1]_t, \quad y = [n + 1]_t, \quad z = t + [2]_t;$$

ne segue che ai piani per O' corrispondono superficie passanti per l'E_n precedente.

6. — TRASFORMAZIONI FRA DUE $S_r\,(r > 3)$.

Quanto si è detto nei due numeri precedenti per $r = 3$, si trasporta immediatamente al caso $r > 3$: basta sostituire ad x ed x' rispettivamente x_i ed x'_i.

Si ha quindi:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una trasformazione pseudo de-jonqueriana sia n-cremoniana è che essa si posssa scrivere nella forma

$$\begin{cases} x'_i = x_i \\ z' = A_n(x) + B_{n-1}(x)\, C_{n-1}(x, z) + [n+1] \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r-1)$$

ove A_n, B_{n-1} sono polinomi nelle x di gradi rispettivamente n ed $n-1$, C_{n-1} polinomio di grado $n-1$ nelle x e z, contenente il termine di primo grado in z.

Ancora:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una trasformazione puntuale fra due S_r in una coppia (O, O') a jacobiano nullo, con O punto semplice della Jacobiana, sia approssimabile fino all'intorno d'ordine n con una trasformazione cremoniana è che esista una calotta ad $r-1$ dimensioni di centro O e d'ordine $n-1$ a cui corrisponda una calotta ad $r-2$ dimensioni di centro O'.

§ 2. — Approssimabilità cremoniana nell' intorno di un punto multiplo della Jacobiana.

7. — TRASFORMAZIONI FRA PIANI.

Nella 2.3 posto $x_1 = y$ e $x'_1 = y'$ e supposto il punto $O\,(s-1)^{\text{plo}}$ per la curva jacobiana, si ha:

7.1 $$T \equiv \begin{cases} y' = y \\ z' = a_{20}\, y^2 + \ldots + a_{s0}\, y^s + a_{s-1,1}\, y^{s-1} z + \ldots + a_{0,s}\, z^s + [s+1]_{yz}\,. \end{cases}$$

La curva Jacobiana ha equazione:

7.2 $$a_{s-1,1}\, y^{s-1} + 2\, a_{s-2,2}\, y^{s-2} z + \ldots + s\, a_{0,s}\, z^{s-1} + [s]_{yz} = 0\,.$$

Supponiamo che esista una trasformazione cremoniana T_c che approssimi la T fino all' intorno d'ordine s.

Poichè al punto O corrisponde un ben determinato punto O', il punto O non è fondamentale per la T_c. Inoltre poichè le componenti della Jacobiana, contate ciascuna una sola volta sono curve di genere virtuale $\varrho = 0$ [9], queste non hanno punti multipli fuori dei punti fondamentali. Quindi perchè O sia $(s-1)^{\text{pl}}$ la componente passante per O deve essere componente $(s-1)^{\text{pla}}$ per la Jacobiana.

Ne segue che condizione necessaria perchè esista una trasformazione che approssimi la T nella coppia (O, O') O deve essere origine di $s-1$ rami lineari, tangenti in O con tangente la tangente stazionaria. Poichè questa ha equazione $y = 0$, dalla 6.2 si ha che condizioni necessarie perchè la 6.1 sia s-cremoniana è che si abbia

7.3 $$a_{s-2,2} = a_{s-3,3} = \ldots = a_{0,s} = 0 .$$

Soddisfatte queste condizioni la trasformazione T (7.1) si scrive

$$\begin{cases} y' = y \\ z' = a_{20}\, y^2 + \ldots + a_{s0}\, y^s + a_{s-1,2}\, y^{s-1} z + [s+1]_{yz} \end{cases}$$

ed è evidente che essa è s-cremoniana.

Quindi: *condizioni necessarie e sufficienti affinchè la trasformazione T sia s-cremoniana è che siano soddisfatte le* 7.3.

Con ragionamento del tutto analogo al caso di O punto semplice, si ha:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la trasformazione in esame sia n-cremoniana è che essa si possa scrivere nella forma:

7.4 $$\begin{cases} y' = y \\ z' = a_{20}\, y^2 + \ldots + a_{s-1,0}\, y^{s-1} + y^{s-1}\{\varphi_1(y, z) + \ldots + \\ \qquad + \varphi_{n-s+1}(y, z)\} + [n+1]_{yz} \end{cases}$$

Le equazioni precedenti mettono poi in evidenza che anche in questo caso vale la caratterizzazione data alla fine del n. 3; quindi:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una trasformazione puntuale fra piani in una coppia (O, O') a jacobiano nullo di caratteristica uno sia approssimabile con una trasformazione cremoniana è che esista un elemento E_n di centro O che si trasformi nel punto O': ovvero, che le curve corrispondenti alle rette per O' abbiamo un E_n comune.

---

(9) F. ENRIQUES, *Le superficie algebriche,* Zanichelli, 1949, p. 35.

7. — TRASFORMAZIONI FRA DUE $S_r (r > 2)$.

Dal confronto di quanto si è detto nel n. prec. con quanto si è visto nel caso che O sia punto semplice della Jacobiana, si può senz'altro affermare, che le caratterizzazioni date al n. 6 valgono anche nel caso attuale.

Esse quindi caratterizzano le trasformazioni puntuali in una coppia (O, O') a jacobiano nullo con determinante jacobiano di caratteristica massima tanto nel caso che O sia punto semplice della Jacobiana, quanto nel caso che O sia punto multiplo.

[*Pervenuta in Redazione il 12 VI-1951*]