Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Michele Sce

Su una generalizzazione delle matrici di Riemann (memoria prima)

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 5, nº 1-2 (1951), p. 81-103
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1951_3_5_1-2_81_0>

SU UNA GENERALIZZAZIONE DELLE MATRICI DI RIEMANN (1)

(Memoria prima)

di MICHELE SCE (Pisa)

È ben noto che la teoria delle cosiddette *matrici di* RIEMANN è stata approfondita soprattutto da G. SCORZA (specialmente in [11] e in [12] (2)) e perfezionata assai recentemente da A. A. ALBERT (ved. [1], [2], [4]); dallo studio appunto di questi ultimi lavori siamo stati spinti a ricercare le memorie [14] e [15] di H. WEYL e, in definitiva, a proporre una generalizzazione della nozione di matrice di RIEMANN. Tale generalizzazione, leggendo i lavori del WEYL, appare così immediata, che non osiamo affermare l'assoluta novità del nostro lavoro per quanto esso sia certamente indipendente. È forse di un certo interesse notare che quando la nostra ricerca era già assai avanzata, abbiamo potuto constatare che nella nuova nozione rientrava quella delle matrici dei periodi degli integrali multipli di prima specie sulle varietà algebriche (cfr. [13]).

Questo premesso, facciamo un breve sunto del nostro lavoro.

La prima parte è stata tutta dedicata allo studio delle *matrici di* WEYL (3), cioè allo studio di quelle matrici W tali che (4):

$$W = \Gamma C^{-1} \tag{1}$$

(1) Il presente lavoro costituisce la parte essenziale della mia tesi di Laurea discussa col prof. S. CHERUBINO. La originaria destinazione di questo lavoro valga a giustificare alcuni squilibri rimasti nella revisione.

(2) I numeri tra parentesi quadre si riferiscono alla bibliografia che si trova a pag. 86.

(3) Tali matrici sono state introdotte, con il nome di matrici di RIEMANN generalizzate, dal WEYL in [14]; lo studio poi di tali matrici fu portato molto innanzi dall'ALBERT in [2] con il nome appunto di matrici di WEYL. Poichè però in una nota a piè di pagina di [15] il WEYL garbatamente protesta contro il nuovo nome in [4] l'ALBERT torna alla primitiva denominazione di matrici di RIEMANN generalizzate (G R matrices) e forse questo ha influito sul fatto che la nostra generalizzazione non si sia subito rivelata. Oltre al fatto che intendiamo dare il nome di matrici di RIEMANN generalizzate ad un altro tipo di matrici, abbiamo preferito la denominazione del testo anche perchè le matrici di RIEMANN (che sono rettangolari) non possono certo essere matrici di WEYL (necessariamente quadrate).

(4) In [14] si pone invece $W = C^{-1}\Gamma$; ma la differenza non è sostanziale, bastando considerare in luogo di Γ la sua trasformata (per contragredienza) mediante C.

dove Γ è antisimmetrica definita positiva con elementi in un campo $\mathcal{C}$ (5) e C è antisimmetrica od antiemisimmetrica con elementi in un campo $\mathcal{F}$ (6) contenuto in $\mathcal{C}$.

Usando noti teoremi richiamati nel n. 1, si vede che le matrici di WEYL sono particolari matrici diagonalizzabili con radici caratteristiche tutte reali od immaginarie pure o, come diciamo, particolari matrici *pseudo simmetriche* e *pseudo-emisimmetriche*.

La nostra definizione delle matrici di WEYL è quella di [4] particolarizzando però i campi, la quale restrizione, pur essendo più verbale che sostanziale, ci assicura della validità di tutte le proprietà delle matrici che ci occorrono senza doverci continuamente riferire a trattati come [3] in cui si studiano matrici su campi più lati dei soliti. Nel n. 3, subito dopo la definizione di matrici di WEYL, richiamiamo alcune ben note proprietà delle *algebre semplici* e *semi semplici* (7) che ci servono nei numeri successivi. Anche nel n. 4 poniamo varie definizioni e precisamente quella di *algebra moltiplicazione* di una matrice di WEYL (cioè, seguendo il WEYL, l'algebra delle matrici in $\mathcal{F}$ con essa permutabili) e quelle di matrici di WEYL *equiformi* ed *impure*. La prima di queste due definizioni è formalmente nostra (cioè abbiamo dato un nome ad una nozione già implicita nella teoria) e si ottiene subito quando nella definizione di isomorfismo tra due matrici di WEYL dello stesso ordine, W e W',

$$TW = W'T \tag{2}$$

(dove T è una matrice quadrata non degenere in $\mathcal{F}$) si supponga che W e W' siano di ordini diversi (e quindi T non più quadrata). Diciamo allora impura una matrice di WEYL equiforme ad una della forma triangolare

$$\left\| \begin{array}{c|c} W_1 & W_2 \\ \hline 0 & W_3 \end{array} \right\| \tag{3}$$

---

(5) In [14] si suppone che C sia il campo dei numeri reali; allora ovviamente si impone che Γ sia simmetrica definita. In [2] l'ALBERT cerca di rinunciare alle definitezza di Γ ma avendo riconosciuto che le proprietà più importanti si hanno quando Γ è definita, in [4] suppone Γ antisimmetrica definita. Il passaggio all'antisimmetria dipende dal fatto che in [2] e poi in [4] $\mathcal{C}$ è un campo molto generale, che in particolare può essere il campo complesso.

(6) In [14] si supponeva $\mathcal{C}$ emisimmetrica in $\mathcal{F}$ campo dei numeri razionali; il passaggio fatto dall'ALBERT in [2] a campi più generali imponeva la considerazione dell'antiemisimmetria alla quale l'ALBERT, sempre in [2], ha aggiunto la antisimmetria

(7) Nel testo si troveranno costantemente usate le denominazioni dell'ALBERT (e prima del DICKSON) anzichè quelle dello SCORZA e ciò anche quando nomi americani mal si traducano in italiano. Ad es preferiamo parlare di algebre *divisione* e *matriciali* anzichè di algebre *primitive* e *regolari*.

dove W_1 e W_3 sono matrici quadrate che risultano essere matrici di WEYL; questa definizione si differenzia da quella di WEYL (usata solitamente) per l'uso dell'equiformismo anzichè dell'isomorfismo, ma nel n. 6 dimostriamo l'equivalenza delle due definizioni. Il Lemma di SCHUR (pure nel n. 4) è più ampio di quello che compare in [14] ed in [2]; ma è in sostanza quello che compare in [4] Chap. VIII § 7 nella teoria delle algebre rappresentazioni. Conclude il n. 4 il ben noto teorema (di WEYL) che afferma che l'algebra moltiplicazione di una matrice di WEYL pura è un'algebra divisione.

Nel n. 6, detta *decomposta* una matrice come la (3) con W_2 nulla e *decomponibile* una matrice di WEYL equiforme ad una decomposta si dimostra (e forse in modo non del tutto inelegante) il teorema di POINCARÉ-WEYL [8] secondo il quale ogni matrice impura è decomponibile. Proseguendo nella decomposizione di una matrice impura finchè sia decomposta in matrici pure, si giunge alla cosiddetta *forma canonica* delle matrici di WEYL

$$(4) \qquad \left\| \begin{array}{c|c|c} W_1 & \cdots\cdots & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots\cdots & W_m \end{array} \right\|$$

dove le W_i sono o matrici di WEYL pure oppure composte a loro volta mediante un certo numero t_i di matrici di WEYL pure ed eguali. Poichè l'ordine di tali matrici (per un teorema noto) è invariante per isomorfismi, si può considerare una specie di segnatura della matrice di WEYL che chiamiamo *simbolo complessivo* della matrice.

Con l'aiuto appunto della forma canonica, nel n. 7 dimostriamo il fatto ben noto che l'algebra moltiplicazione di una matrice di WEYL è semisemplice; inoltre adoperando i numeri del simbolo complessivo si trovano alcune limitazioni per l'ordine dell'algebra moltiplicazione e per l'ordine del modulo delle matrici C (antisimmetriche od antiemisimmetriche) che compaiono nella (1). Tutte queste proprietà vengono poi richiamate nel n. 18.

La nozione di matrici di WEYL impure quale è data in [14] od anche come la abbiamo data noi, pur rivelandosi utilissima in molti problemi, è talora insufficiente Perciò nel n. 8 introduciamo una impurità più ristretta imponendo alla matrice di WEYL, oltre alle solite condizioni di impurità,

---

[8] Un teorema analogo è stato dimostrato per le matrici di RIEMANN delle funzioni abeliane speciali da H. POINCARÈ; per le matrici di WEYL la prima dimostrazione si trova in [14] da dove è passata (immutata) in [4] La nostra dimostrazione è un po' diversa anche per la diversa definizione di impurità.

che la matrice (3), W_1 e W_3 siano nella stessa *classe,* cioè a dire che abbiano le stesse radici caratteristiche con molteplicità proporzionali. Anche in questo caso si può raggiungere una forma canonica e definire un simbolo complessivo con l'ausilio del quale si possono trovare limitazioni per l'ordine dell'algebra moltiplicazione e del modulo sopra considerato. Queste proprietà si riallacciano a quelle del n. 19.

Dopo esserci così assicurata una discreta, per quanto limitata, conoscenza delle matrici di WEYL, nella seconda parte si definiscono le matrici di RIEMANN generalizzate come quelle matrici che soddisfano equazioni come:

$$RW = C'R \tag{8}$$

oppure:

$$WR = RC' \tag{8'}$$

(nel primo caso si parla di matrici di RIEMANN generalizzate destre, Rgd.; nel secondo sinistre, Rgs) dove W è una matrice WEYL e C' è una matrice diagonale reale od immaginaria pura. La denominazione che abbiamo dato a queste matrici va, naturalmente, giustificata e ciò facciamo nel Teorema 3 nel quale appunto si dimostra che le matrici di RIEMANN e le matrici dei periodi degli integrali multipli di prima specie su una varietà algebrica sono Rgd.. Per tale dimostrazione occorrono alcune semplici nozioni sulle Rg. che non si possono vedere con una semplice ispezione delle (8); a ciò provvedono i n. 9, 10, 11.

Nel n. 13 si cerca di generalizzare per le Rg. le nozioni di *matrice simultanea, carattere simultaneo, vincolo, indice di singolarità;* naturalmente non possiamo ancora dire quante di queste definizioni siano feconde. Osserviamo però subito che invece della definizione di vincolo di solito preferiamo usare quella di *equiformismo* posta nel n. 14: due Rgd. R ed S le diciamo equiformi se si ha

$$\pi R = S T \qquad \pi^* S = R T^* \tag{9}$$

con T e T^* in $\mathcal{F}$ e ove π, π^* sono composte mediante altre matrici in un certo modo che qui non interessa. Questa definizione generale deve essere di volta in volta precisata secondo i problemi che si studiano; la restrizione, di solito, più conveniente è quella di supporre R ed S della stessa *classe* cioè di tipi proporzionali e con le matrici C' delle (8) ad elementi eguali e di molteplicità proporzionali. Si dimostra poi che le nozioni del n. 13 sono invarianti rispetto all'equiformismo.

Le (9) quando R ed S siano matrici di RIEMANN sono, formalmente, le relazioni di HURWITZ che si trovano nella teoria trascendente delle corrispondenze; nei n. 15 e 16 si cerca di sviluppare questa analogia. Per far questo dobbiamo però ammettere che certe relazioni ottenute a partire dalla prima delle (9) coincidano con le analoghe ottenute partendo dalla seconda delle (9); ciò nel caso delle matrici di RIEMANN si può dimostrare invocando il significato geometrico delle (9) ma nel nostro caso resta un'ipotesi anche se, nel caso particolare delle Rgd. quadrate (Rgdq.) ne venga dato, un principio di dimostrazione. Del resto, più in generale, per le Rgdq. vale tutta la usuale teoria, quale, ad esempio, si trova in [6], [7] e [8].

Nel n. 17 si cerca che relazioni esistano tra l'equiformismo di due Rgd. e quello delle loro matrici di WEYL. Era nostro intento estendere alle Rgd. i risultati conseguiti nel Chap. V^0 di [2]; ciò però ci è riuscito completamente soltanto per le Rgdq.. In relazione poi a quanto nel n. 15 si è detto dei legami tra le matrici T e T^* della (9), si considera l'equiformismo inverso di due matrici di WEYL e si vede che esso è una conseguenza dell'equiformismo diretto (cosa che del resto si era già enunciata nel n. 4).

Nel n. 18 definiamo l'*algebra moltiplicazione* di una Rgd. con il suo ordine (*indice moltiplicazione*) e mostriamo che l'algebra moltiplicazione di una Rgdq. è isomorfa all'algebra moltiplicazione della sua matrice di WEYL, mentre, nel caso generale, possiamo soltanto dire che quest'ultima è isomorfa ad una sotto-algebra della prima [9]. Poichè una matrice di WEYL ha come algebra moltiplicazione un'algebra divisione allora e solo che è pura è chiaro come si possa pensare di chiamare pura una Rgd. la cui algebra moltiplicazione sia un'algebra divisione. Noi abbiamo però preferito dare ad una tale Rgd. la denominazione di *catara*, sembrandoci che troppo poche delle proprietà che ci aspetteremmo dalle Rgd. pure sussistano per le Rgd. catare. D'altra parte, le Rgdq. *acatare* (non catare) si possono portare ad una forma triangolare e successivamente ad una forma decomposta mediante quasi-isomorfismi (isomorfismi a meno di certi scambi delle righe della Rgd. considerata); questo non si può dire che accada per le Rgd. generali e sorge là possibilità di una nuova definizione, quella delle Rgd. *riducibili*. Comunque, per le Rgdq. acatare (che sono anche riducibili) si può costruire tutta una teoria analoga a quella delle matrici di WEYL impure; poichè però tutti quei teoremi sarebbero in sostanza identici a quelli già dimostrati per le

---

[9] In realtà il testo dice che il teorema vale per Rgd *complete;* ma la nota a piè della pagina in cui si pone la definizione di Rgd. complete ci permette di affermare quanto sopra.

matrici di WEYL ([10]), ci limitiamo a dimostrare soltanto l'analogo del Lemma di SCHUR.

La definizione di Rgd. *impure* che dopo tutti questi accostamenti, poniamo nel n. 19, come del resto tutte quelle che dipendono dalla nozione di classe, non è pienamente soddisfacente, nè viene sostanzialmente migliorata nel Teorema 29 che d'altronde vale soltanto per le Rgdq.. Quel che è certo è che la definizione di Rgd. impura, come ci assicuriamo subito, non si riduce nè a quella delle Rgd. acatare, nè a quella delle Rgd. riducibili. Per le Rgdq. si può però dimostrare il Teorema di POINCARÈ generalizzato (secondo cui le Rgdq. impure sono decomponibili) come l'ALBERT lo dimostra per le matrici di RIEMANN in [1]; anche per le Rgdq. si può parlare di una forma canonica come per le matrici WEYL impure in senso stretto ma, come per le Rgdq. riducibili, è inutile dimostrare i teoremi relativi.

Nella Bibliografia ci siamo limitati a citare i lavori che, per qualche ragione, abbiamo ricordato od in questa Introduzione o nel testo anche se molti altri sia sulle matrici di RIEMANN sia, più in generale, sulle matrici ci sono stati utili. Del resto, per quanto riguarda le matrici, supponiamo che siano inutili delle indicazioni per chi voglia interessarsi al nostro lavoro; per quanto riguarda le matrici di RIEMANN, una bibliografia assai amplia (anche se da aggiornare) si trova in [9] e può essere completata con quella che si trova in [4].

BIBLIOGRAFIA

1. ALBERT A. A. — *A note on the Poincaré theorem on impure Riemann matrices* [Ann of Math. v. 36 (1935)] 151-156

2 ALBERT A. A. — *Involutorial simple algebras and real Riemann matrices* [Ann of. Math. v. 36 (1935)] 886 964.

3. ALBERT A. A. — *Modern higher Algebra* [The University of Chigaco Press (1948[6])] pp 320.

4. ALBERT A. A. - *Structure of Algebras* [A M. S. Colloquium v. 24 (1939)] pp. 210.

5. CHERUBINO S. — *Su certe equazioni fondamentali e sul simbolismo delle matrici* [Rend. Sem. Mat. Roma s. 4 v. 1 (1936)] 96-109.

([10]) Questo spiega perchè ci siamo indugiati a dimostrare partitamente teoremi ben noti sulle matrici di WEYL; ciò ha anche alleggerito la seconda parte che, per ragioni di spazio, apparirà in un secondo tempo. Può darsi che, nel frattempo, ci si induca a modificare qualche particolare ma ciò, naturalmente, non potrà alterare questa introduzione che scarsamente.

6. CHERUBINO S — *Sul criterio di equivalenza* [Cir. Mat Palermo v. 62 (1938-1939)].

7. CHERUBINO S — *Sugli invarianti aritmetici delle serie algebriche semplicemente infinite* [Cir. Mat Palermo v. 63 (1940-1941)] 121-146.

8. CHERUBINO S — *Un teorema sulle corrispondenze algebriche tra due curve* [Ann. Sc. Norm. Pisa s 2, v. 11 (1942)] 99-103

9. DE FRANCHIS M. — *Matrici di Riemann e varietà abeliane* [Atti del IX Convegno Volta (Roma 1943)] 43-84.

10. NICOLETTI O. — *Su una classe di equazioni a radici reali* [Rend. Acc. Lincei s. 5, v. 11 (1902)] 124-132.

11. SCORZA G. — *Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann ed alcune sue applicazioni* [Cfr. Mat. Palermo v. 41 (1916)] 263-380.

12. SCORZA G. — *Le algebre di ordine qualunque e le matrici di Riemann* [Cir Mat. Palermo v. 45 (1921)] 1 204.

13. SEVERI F. — *Relazioni tra i periodi degli integrali multipli di prima specie di una varietà algebrica* [Mem. Acc Italia v. 9 (1938)]

14. WEYL H. — *On generalized Riemann matrices* [Ann. of Math v. 35 (1934)] 714-729.

15. WEYL H — *Generalized Riemann matrices and factor sets* [Ann of Math. v. 37 (1936)] 709-745.

PARTE I

LE MATRICI DI WEYL

1. — **DEF. 1**: una matrice quadrata diagonalizzabile (mediante trasformazioni per contragredienza) la diciamo *pseudo-simmetrica* o *pseudo-emisimmetrica* secondo che tutte le sue radici caratteristiche sono reali od immaginarie pure.

Non dimostriamo il seguente

LEMMA 1. — *le radici dell'equazione*

$$|C - \varrho \Gamma| = 0 \tag{1.1}$$

nello scalare ϱ (dove C e Γ sono matrici antisimmetriche, la seconda definita, di ordine n) sono tutte reali e se α è una radice caratteristica di molteplicità μ, la caratteristica di

$$C - \alpha \Gamma$$

è $n - \mu$ e viceversa. (11)

Dividendo allora la (1.1) per il numero non nullo $|\Gamma^{-1}|$ si ottiene che le radici caratteristiche di $\Gamma^{-1} C$ sono tutte reali e che, se diciamo ancora α una tale radice caratteristica di molteplicità μ, la caratteristica di $\Gamma^{-1} C$ è $n - \mu$ e viceversa. Ricordando che le matrici antiemisimmetriche si ottengono tutte moltiplicando una matrice antisimmetrica per l'unità immaginaria, possiamo concludere con il

TEOR. 1. — *una matrice è pseudo-simmetrica (pseudo-emisimmetrica) allora e solo che è prodotto di una matrice antisimmetrica (antiemisimmetrica) e di una matrice antisimmetrica definita.*

Poniamo la

DEF. 2: una matrice antiemisimmetrica C la diciamo *definita positiva* o *negativa*, quando è tale la matrice antisimmetrica $-\sqrt{-1}\, C$.

Allora, ammettendo che $\Gamma^{-1} C$ ha le radici caratteristiche tutte positive o tutte negative secondo che Γ e C sono o no definite dello stesso segno (12), è lecito porre la:

---

(11) Per la dimostrazione ved [10] n 2 ed anche [8] n. 1.

(12) Per la semplice dimostrazione ved. [5] n. 4.

DEF. 3: una matrice pseudo-simmetrica (pseudo-emisimmetrica la diciamo *definita positiva* o *negativa*, secondo che Γ e C siano o no definite dello stesso segno.

2. — Sia ora $\mathcal{C}$ il campo dei numeri complessi e $\mathcal{C}'$, $\mathcal{F}$ due campi tali che:

$$\mathcal{C} \geq \mathcal{C}' \geq \mathcal{F}: \tag{2.1}$$

se $\mathcal{C}$ coincide con $\mathcal{C}'$, $\mathcal{F}$ può essere un campo di numeri reali $\mathcal{R}$ oppure un campo quadratico su $\mathcal{R}$; se $\mathcal{C}'$ è il campo dei numeri reali, $\mathcal{F}$ sarà quello dei numeri razionali.

DEF. 4: una matrice quadrata W di ordine n con elementl in $\mathcal{C}'$ si dice una *matrice di* WEYL *su* $\mathcal{F}$ se esiste una matrice C con elementi in $\mathcal{F}$ tale che:

$$\overline{C}_{-1} = \varepsilon\, C \qquad\qquad \varepsilon = \pm 1$$

e tale che:

$$\Gamma = W\, C \tag{2.2}$$

sia una matrice adp. (13). La matrice C (in generale non unica) si dice una *matrice principale* di W; ε si dice il *numero tipo* di W e questa si dice *pari* o *dispari* secondo che il suo numero tipo è 1 oppure -1.

Nel seguito indicheremo sempre le matrici di WEYL con la lettera W e le matrici principali con C; invece Γ indicherà sempre una matrice adp..

Poichè Γ e C sono quadrate, anche W è quadrata; essendo poi Γ definita, sia W che C sono necessariamente non degeneri. Allora come conseguenza immediata del Teorema 1 si ha il

COR.: *le matrici di* WEYL *sono matrici pseudo-simmetriche o pseudo emisimmetriche secondo che siano pari o dispari.*

Un'altra semplice proprietà delle matrici di WEYL possiamo enunciarla come

TEOR. 2. — *ogni matrice composta con matrici di* WEYL *aventi lo stesso numero tipo, è ancora una matrice di* WEYL *con quel numero tipo.*

3. — Le matrici A con elementi in $\mathcal{C}'$ (od anche in $\mathcal{C}$) permutabili con W costituiscono un'algebra (14) che è isomorfa a quella delle matrici permu-

(13) D'ora in avanti scriveremo sempre *matrice adp.* in luogo di *matrice antisimmetrica definita positiva.*

(14) Qui e nel seguito diciamo semplicemente *algebra* ciò che più precisamente dovremmo chiamare *algebra lineare associativa sul campo* $\mathcal{C}$ (naturalmente il campo sul quale si considera l'algebra è sottaciuto quando sia evidente).

tabili con la forma canonica di W che è diagonale; perciò, se le radici caratteristiche α_i di W hanno molteplicità μ_i, è ben noto che l'algebra delle matrici permutabili con W è di ordine $\Sigma_i \mu_i^2$

Prima di occuparci di una sotto-algebra di tale algebra, crediamo che, per comodità del lettore, sia bene richiamare alcune nozioni della teoria delle algebre, nella sostanza ben note, ma talvolta diversamente enunciate.

DEF. 5: l'unico massimo ideale pseudo nullo (che certo esiste) di un'algebra si dice il *radicale* dell'algebra ([15]).

DEF. 6: Un'algebra si dice *semi-semplice* se il suo radicale è lo zero ideale. ([16])

DEF. 7: Un'algebra che non sia una zero algebra di ordine 1, si dice *semplice* se il suo solo ideale proprio è lo zero ideale. ([17])

Valgono i seguenti teoremi che citiamo soltanto.

TEOR. 3. — *Un'algebra è semi-semplice se e solo se è semplice od è esprimibile come somma diretta di componenti semplici (che, a parte l'ordine, sono univocamente determinate dall'algebra).* ([18])

TEOR. 4. — *Ogni algebra semplice è esprimibile come prodotto diretto di un'algebra matriciale totale e di un'algebra divisione. Viceversa, ogni tale prodotto diretto è semplice.* ([19])

([15]) Cfr. [4] Chap. 2, § 5, Theor. 7.

([16]) — cfr [4] Chap. 3, § 1.

([17]) — cfr. [4] Chap, 3, § 1. Ricordiamo che un'algebra si dice una zero-algebra se il prodotto di due suoi elementi è sempre nullo.

([18]) — cfr. [4] Chap 3, § 2 Theor. 8. Ricordiamo che la somma diretta di 2 algebre:

$$\mathcal{A} = (u_1, \ldots, u_n) \quad \mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_m)$$

è l'algebra

$$\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n, v_1 \ldots v_m)$$

di ordine $m + n$ e tale che

$$u_i v_j = v_j u_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n; \ j = 1, \ldots, m)$$

([19]) cfr. [4] Chap. 3, § 3 theor. 9. Per la definizione del tutto generale di prodotto diretto vedere [4] Chap. 1, § 5; per i nostri scopi è però sufficiente quella data in [3] Chap. 10 § 4 che riportiamo. Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ le algebre di sopra su un campo $\mathcal{C}$. Se le sup-

4. — DEF. 8: *Algebra moltiplicazione* — $\mathcal{A}$ — di una matrice di WEYL W su $\mathcal{F}$ è l'algebra delle matrici permutabili con W ed aventi i loro elementi in $\mathcal{F}$; l'ordine di tale algebra, $h+1$ è l'*indice moltiplicazione* di W.

DEF. 9: date due matrici di WEYL su $\mathcal{F}$, W e W', di ordini rispettivi m ed n, diciamo che W è *formalmente equiforme* a W' se esiste una matrice T di tipo (n, m) con elementi in $\mathcal{F}$ tale che:

$$TW = W'T; \tag{4.1}$$

se esiste anche una matrice T^* di tipo (m, n) e con elementi in $\mathcal{F}$ tale che:

$$WT^* = T^*W' \tag{4.2}$$

diciamo che W e W' sono *formalmente equiformi.* [20] Quando T abbia le righe linearmente indipendenti diciamo che W è *equiforme* a W'; se inoltre T^* è a colonne linearmente indipendenti diciamo che W e W' sono *equiformi.* Quando W è equiforme a W' ed $m = n$, diciamo che W e W' sono *isomorfe.*

---

poniamo dotate di modulo possiamo supporre che i loro moduli siano u_1 e v_1 ed identificarli con l'elemento unità di $\mathcal{C}$.

In tal caso possiamo considerare $\mathcal{C}$ come una sotto algebra comune ad $\mathcal{A}$ ed a $\mathcal{B}$; supponiamo che $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ non abbiano altri elementi in comune. Diciamo prodotto diretto di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ l'algebra

$$\mathcal{P} = \mathcal{A} \times \mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_{mn})$$

dove w_1 è l'elemento unità di $\mathcal{P}$ di ordine di nm su $\mathcal{C}$. L'algebra $\mathcal{P}$ consiste di tutte le somme di tutti i prodotti di quantità di $\mathcal{A}$ per quantità di $\mathcal{B}$. Osserviamo che $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono sotto algebre di $\mathcal{P}$ e che questo è dovuto precipuamente all'ipotesi che $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{P}$ abbiano lo stesso elemento unità.

Ricordiamo poi che un'algebra $\mathcal{M}_s$ si dice un'algebra matriciale totale di ordine s^2 e di grado s, se è isomorfa all'algebra di tutte le matrici quadrate di ordine s. Infine un'algebra $\mathcal{D}$ dotata di modulo si dice un'algebra divisione se tutti i suoi elementi non nulli hanno un inverso.

[20] In realtà l'esistenza di almeno una siffatta T^* segue sempre dalla (4.1). Si verifica infatti facilmente che se C è una matrice principale di W e C' di W' si può sempre porre:

$$T^* = C\,\overline{T}_{-1}\,C'^{-1}. \tag{\&}$$

Qui però non intendiamo usare questo risultato (che sarà ritrovato nel n. 17) anche per non vincolarci ad una prefissata coppia di matrici principali; osserviamo soltanto che, se si adoperasse la (&), non si dedurrebbe soltanto che, se W è formalmente equiforme a W', W e W' sono formalmente equiformi ma anche, se W è equiforme a W', che W e W' sono equiformi.

È bene notare che l'equiformismo (e l'isomorfismo) gode certamente le proprietà riflessiva e transitiva; inoltre per l'isomorfismo è immediato che vale anche la proprietà simmetrica perchè come matrice T si può sempre prendere la T^{-1}.

DEF. 10: Una matrice di WEYL W di ordine n si dirà *impura* se W è equiforme a

$$W' = \left\| \begin{array}{c|c} W_1 & W_2 \\ \hline 0 & W_3 \end{array} \right\| \tag{4.3}$$

dove W_3 è una matrice quadrata di ordine m; altrimenti W si dirà *pura*.

Una matrice come la (5.3) è isomorfa all'altra:

$$\left\| \begin{array}{c|c} W_3 & 0 \\ \hline W_2 & W_1 \end{array} \right\| \tag{4.4}$$

perchè:

$$\left\| \begin{array}{c|c} 0 & I_m \\ \hline I_{n-m} & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} W_1 & W_2 \\ \hline 0 & W_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} W_3 & 0 \\ \hline W_2 & W_1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} 0 & I_m \\ \hline I_{n-m} & 0 \end{array} \right\| .$$

Quindi ogni matrice equiforme alla (4.3) lo è pure alla (4.4)

LEMMA 2. — (di SCHUR): *Se W e W' sono due matrici di* WEYL *pure, la prima formalmente equiforme alla seconda, la matrice T è nulla, oppure W e W' sono isomorfe.*

Supponiamo infatti che T sia di caratteristica $h > 0$. Poichè T è di tipo (n, m) è $h \leq m$, $h \leq n$ ed esiste in T almeno un minore di ordine h non degenere. Mediante le matrici $\mathfrak{J}$ di ordine n ed $\mathfrak{J}'$ di ordine m che operano su T ordinatamente solo scambio di righe o solo scambio di colonne, possiamo portare tale minore nelle prime righe e colonne e scrivere che:

$$\mathfrak{J}\, T\, \mathfrak{J}' \cdot \mathfrak{J}'\, W\, \mathfrak{J}' = \mathfrak{J}\, W'\, \mathfrak{J} \cdot \mathfrak{J}\, T\, \mathfrak{J}' .$$

Possiamo perciò supporre che nelle prime h righe e colonne di T ci sia un minore a non degenere e avremo che:

$$T = \left\| \begin{array}{c|c} a & a\lambda \\ \hline \mu a & \mu a \lambda \end{array} \right\|$$

Chiamate B e C due matrici di ordini rispettivi n ed m assegnate da:

$$B = \left\| \begin{array}{c|c} a^{-1} & 0 \\ \hline -\mu & I_{n-h} \end{array} \right\| \qquad C = \left\| \begin{array}{c|c} I_h & -\lambda \\ \hline 0 & I_{m-h} \end{array} \right\|$$

si ha:

$$B\,T\,C = \left\| \begin{array}{c|c} I_h & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right\| . \tag{4.5}$$

La (4.1) diventa:

$$B\,T\,C\;C^{-1}\,W\,C = B\,W'\,B^{-1}\,B\,T\,C$$

ossia, posto

$$C^{-1}\,W\,C = \left\| \begin{array}{c|c} W_1 & W_2 \\ \hline W_3 & W_4 \end{array} \right\| \qquad B\,W'\,B^{-1} = \left\| \begin{array}{c|c} W_1' & W_2' \\ \hline W_3' & W_4' \end{array} \right\| \tag{4.6}$$

e tenendo presente la (4.5).:

$$\left\| \begin{array}{c|c} W_1 & W_2 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} W_1' & 0 \\ \hline W_3' & 0 \end{array} \right\|$$

quindi si ha:

$$W_2 = 0 \qquad W_3' = 0 \, .$$

Poichè T ha gli elementi in $\mathcal{F}$ anche B e C hanno gli elementi in $\mathcal{F}$ e perciò quelli di (4.6) sono isomorfismi e quindi equiformismi, ma poichè:

$$B\,W'\,B^{-1} = \left\| \begin{array}{c|c} W_1' & W_2' \\ \hline 0 & W_4' \end{array} \right\| , \qquad C^{-1}\,W\,C = \left\| \begin{array}{c|c} W_1 & 0 \\ \hline W_3 & W_4 \end{array} \right\|$$

W e W' sarebbero impure contro l'ipotesi. (21)

Dalla purità di W e W' segue dunque che:

$$h = m \qquad h = n$$

e quindi che:

$$h = m = n \, .$$

Perciò T è quadrata non degenere e W, W' sono isomorfe, a meno che non sia $T = 0$, nel qual caso W e W' sono qualunque.

COR. — *Se W e W' sono pure ed isomorfe nella* (4.1) *T è nulla e non degenere.*

È un caso particolare di questo corollario quello che enunciamo come:

---

(21) Perchè la dimostrazione sia completa bisogna notare che le trasformazioni mediante le $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ sono isomorfismi e che W_4' e W_1 si possono scegliere quadrate.

TEOR. 5. — *L'algebra moltiplicazione di una matrice di* WEYL *pura è un'algebra divisione.*

Allo stesso modo del Lemma 2 si dimostra il:

LEMMA 3. — *se W è formalmente equiforme a W' e W' è pura o T è nulla o W è equiforme a W'.*

5. — DEF. 11: Una matrice di WEYL si dirà *decomponibile* se è equiforme a:

$$W' = \left\| \begin{array}{c|c} W_1 & 0 \\ \hline 0 & W_2 \end{array} \right\| \tag{5.1}$$

con W_2 matrice quadrata.

TEOR. 6. — (di POINCARÈ-WEYL) *Ogni matrice di* WEYL, *W, impura è decomponibile e le matrici da cui è composta sono matrici di* WEYL *con lo stesso numero tipo di W.*

Sia:

$$\Gamma = W\,C \tag{2.2}$$

e W sia equiforme ad una matrice W' avente la forma (5.3). Cioè sia:

$$T\,W = W'\,T \qquad \text{con} \qquad W' = \left\| \begin{array}{c|c} W_1 & W_2 \\ \hline 0 & W_3 \end{array} \right\|$$

e T a righe linearmente indipendenti. Dalla (2.2) si ha:

$$T\,\Gamma = T\,W\,C = W'\,T\,C$$

e quindi:

$$\Gamma' = T\,\Gamma\,\overline{T}_{-1} = W'\,T\,C\,\overline{T}_{-1} = W'\,C'\,;\;\; C' = T\,C\,\overline{T}_{-1}\,.$$

La Γ' è ancora adp. perchè T ha righe linearmente indipendenti, e, se

$$C = \varepsilon\,\overline{C}_{-1} \qquad \text{è anche} \qquad C' = \varepsilon\,\overline{C}'_{-1}\,.$$

Posto:

$$\Gamma' = \left\| \begin{array}{c|c} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \hline \Gamma_3 & \Gamma_4 \end{array} \right\| \qquad C' = \left\| \begin{array}{c|c} C_1 & C_1 \\ \hline C_3 & C_4 \end{array} \right\|$$

si ha:

$$\left\| \begin{array}{c|c} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \hline \Gamma_3 & \Gamma_4 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} W_1 & W_2 \\ \hline 0 & W_3 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} C_1 & C_2 \\ \hline C_3 & C_4 \end{array} \right\|$$

e quindi:

$$\Gamma_4 = W_3\, C_4$$

il che ci assicura che W_3 è una matrice di WEYL con lo stesso numero tipo di W e che C_4 è non degenere (essendo Γ_4 adp.).

Posto:

$$G = \left(\begin{array}{c|c} I & -C_2\, C_4^{-1} \\ \hline 0 & I \end{array}\right)$$

$$\Gamma'' = G\, \Gamma'\, \overline{G}_{-1} = G\, W''\, G^{-1}\, G\, C'\, \overline{G}_{-1}$$

ed osservando che G è in $\mathcal{F}$ e che:

$$C'' = G\, C'\, \overline{G}_{-1} = \left\|\begin{array}{c|c} C_1 & 0 \\ \hline 0 & C_4 \end{array}\right\| \qquad W' = G\, W'\, G^{-1} = \left\|\begin{array}{c|c} W_1 & W_2' \\ \hline 0 & W_3 \end{array}\right\|$$

si può scrivere:

$$\Gamma'' = \left\|\begin{array}{c|c} \Gamma_1' & \Gamma_2' \\ \hline \Gamma_3' & \Gamma_4' \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c|c} W_1 & W_2' \\ \hline 0 & W_3 \end{array}\right\| \left\|\begin{array}{c|c} C_1' & 0 \\ \hline 0 & C_4 \end{array}\right\| = W''\, C'' \tag{5.2}$$

dalla quale si ha $\Gamma_3' = 0$ e, per l'antisimmetria di Γ'', anche $\Gamma_2' = 0$. Ne segue che:

$$W_2'\, C_4 = 0$$

e poichè C_4 è non degenere, deve essere $W_2' = 0$. Inoltre

$$\Gamma_1' = W_1\, C_1'$$

e quindi W_1 è una matrice di WEYL; essa ha lo stesso numero tipo di W perchè C'' (e C_1') è antisimmetrica od antiemisimmetrica insieme a C. Allora, poichè la decomposizione di W si è ottenuta mediante un isomorfismo, W è equiforme a W'' ed il teorema è dimostrato.

Poichè questo teorema ci assicura che le matrici W_1 e W_3 che compaiono nella (4.3) sono matrici di WEYL, esse possono essere pure; se ciò non accade, mediante un numero finito di equiformismi, ci possiamo ridurre ad una matrice della forma:

$$\left\|\begin{array}{c|c|c|c} W_{11} & W_{12} & \cdots\cdots & W_{1t} \\ \hline 0 & W_{22} & \cdots\cdots & W_{2t} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots\cdots & W_{tt} \end{array}\right\| \tag{5.4}$$

dove le W_{ii} sono pure. Diciamo di esserci ridotti a *componenti irriducibili.*

6. — TEOR. 7: *una matrice W è impura allora e solo che è isomorfa ad una matrice della forma* (4.3).

La sufficienza della condizione è manifesta.

Per dimostrare che la condizione è necessaria, supponiamo che sia W' la W ridotta a componenti irriducibili; allora, essendo W equiforme a W', potremo scrivere:

$$\left\| \frac{T_1}{T_2} \right\| W = \left\| \begin{array}{c|c} W_1 & W_2 \\ \hline 0 & W_3 \end{array} \right\| \left\| \frac{T_1}{T_2} \right\| \tag{6.1}$$

con W_3 pura e T_1, T_2 a righe linearmente indipendenti. Dalla (6.1) si ha:

$$T_2 W = W_3 T_2 . \tag{6.2}$$

Potremo, come per la (4.5) del Lemma 2, porre:

$$G T_2 H = (I \mid 0)$$

ove G ed H sono quadrate non degeneri. Si ha dunque:

$$G T_2 H H^{-1} W H = G W_3 G^{-1} G T_2 H$$

che scriviamo:

$$(I \mid 0) W'' = W_3' (I \mid 0) \tag{6.3}$$

con W'' e W_3' isomorfe a W e W' (poichè G ed H sono in $\mathcal{F}$) e quindi W_3' ancora pura. Dividendo W'' opportunamente, come appresso

$$W' = \left\| \begin{array}{c|c} V_1 & V_2 \\ \hline V_3 & V_4 \end{array} \right\|$$

la (6.3) diventa:

$$(V_1 \mid V_2) = (W_3' \mid 0)$$

onde si ha:

$$V_2 = 0 .$$

Abbiamo dunque ottenuto mediante isomorfismi che W'' è della forma (4.4), quindi anche W è isomorfa ad una matrice come (4.3).

Questo teorema ci permette di definire l'impurità anzichè mediante equiformismi, mediante isomorfismi il che talora semplifica i teoremi.

Inoltre per quanto si è visto nel dimostrare il teorema di POINCARÈ-WEYL si può enunciare:

COR. — *Una matrice è decomponibile allora e solo che è isomorfa ad una matrice dalla forma* (5.1).

Le matrici W_1 e W_2 che compaiono nella (5.1) possono essere pure; altrimenti mediante un numero finito di isomorfismi ci si può ridurre ad una matrice composta mediante matrici pure. Diciamo in tal caso che la W è stata *affatto decomposta*.

Ci siano ora in una matrice affatto decomposta due componenti isomorfe; supponiamo per semplicità che le componenti irriducibili della nostra matrice siano due, sia cioè:

$$W = \left\| \begin{array}{c|c} W_1 & 0 \\ \hline 0 & W_2 \end{array} \right\| \qquad T\,W_1 = W_2\,T$$

con W_1 e W_2 pure ed isomorfe. Allora si ha:

$$\left\| \begin{array}{c|c} T & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} W_1 & 0 \\ \hline 0 & W_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} W_2 & 0 \\ \hline 0 & W_2 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} T & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right\|$$

cioè con un ulteriore isomorfismo possiamo eguagliare W_1 e W_2. Abbiamo dunque addirittura che:

TEOR. 8. — *Ogni matrice di* WEYL *impura* W *è isomorfa ad una matrice* W' *composta mediante matrici* W'_i *a due a due distinte e non isomorfe, pure ovvero composte mediante matrici* W'_{ii} *pure ed eguali; inoltre sia le* W'_i *che le* W'_{ii} *sono matrici di* WEYL *tutte con lo stesso numero tipo di* W.

TEOR. 9. — *Gli ordini delle matrici pure* W'_{ii} *di cui si compone una matrice di* WEYL W *(affatto decomposta) dipendono soltanto da* W *(e da* $\mathcal{F}$*)*.

Siano infatti W' e W'' due distinte decomposizioni della W in componenti pure mediante isomorfismi; si ha cioè:

$$G\,W\,G^{-1} = W' \quad H\,W\,H^{-1} = W'';$$

sicchè W' e W'' sono isomorfe. Per il Teorema 8, W' risulterà composta mediante m matrici W'_i ciascuna a sua volta composta mediante t_i matrici pure W'_{ii}; analogamente W'' risulterà composta mediante m' W''_i composte mediante t'_i W''_{ii}. Se una W'_{kk} è isomorfa (o eguale) ad una W''_{ii} mediante un isomorfismo possiamo far si che sia $i = k$, senza diminuzione di generalità, poichè basta cambiare solo l'ordine delle W'_{kk} o delle W''_{ii}. Perciò possiamo supporre che W'_{kk} e W''_{ii} per $i \neq k$ siano non isomorfe ed anche non isomorfe oppure eguali per $i = k$. Allora dall'isomorfismo tra W' e W'', cioè da:

$$P\,W' = W''\,P. \tag{6.4}$$

si ha:

$$P_{ik} W'_k = W''_{ii} P_{ik} \tag{6.5}$$

dove le matrici P_{ik} sono parti della P. Analogamente si ha:

$$p^{ik}_{rs} W'_{kk} = W_{ii} p^{ik}_{rs} \tag{6.6}$$

dove le p^{ik}_{rs} sono parti delle P_{ik}. Poichè le W'_{kk} e le W''_{ii} sono pure ed abbiamo supposto che, per i diverso da k, W'_{kk} non sia isomorfa a W''_{ii}, per il Lemma 2, sarà:

$$p^{ik}_{rs} = 0$$

qualunque siano r ed s ed $i \neq k$. Dunque si ha:

$$P_{ik} = 0\,, \quad i \neq k\,.$$

Perciò, se il numero delle componenti W'_k di W' m fosse diverso da m' numero delle componenti W''_k di W'', P avrebbe una striscia di matrici nulle e sarebbe degenere contro la ipotesi che W' e W'' siano isomorfe; dunque $m = m'$ ed anche P è composta mediante m matrici P_{ii}. Allora le (6.5) si riducono alle:

$$P_{ii} W'_i = W''_i P_{ii}$$

ossia alle:

$$p^{ii}_{rs} W'_{ii} = W''_{ii} p^{ii}_{rs}\,.$$

Le p^{ii}_{rs} relative allo stesso indica i non possono essere tutte nulle, altrimenti P_{ii} sarebbe nulla e P sarebbe degenere. Perciò qualche p^{ii}_{rs} è non nulla e W''_{ii} è isomorfa a W'_{ii}; anzi per le nostre ipotesi esse sono addirittura eguali. Nè può accadere che una W'_i e la corrispondente W''_i siano composte da un numero diverso di W'_{ii} e W''_{ii} (cioè che qualche t_i diverso da t'_i) poichè altrimenti le P_{ii} sarebbero necessariamente rettangolari, quindi T non potrebbe essere non degenere.

Il teorema dimostrato si permette di porre la:

DEF. 12: Una matrice W' isomorfa a W composta mediante m matrici W'_i a loro volta composte mediante t_i matrici W'_{ii} pure ed eguali tali che W'_{ii} non è isomorfa a W'_{kk} per $i \neq k$, si dice *forma canonica di W in $\mathcal{F}$*. Il gruppo di interi

$$\{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$$

ed il numero m li diciamo (rispettivamente) il *simbolo* e l'*indicatore* di W (in $\mathcal{F}$). Una W'_i per la quale sia $t_i = 1$ si dice *isolata*; una matrice di WEYL la cui forma canonica abbia tutte le componenti isolate, la diciamo *isolabile*. Quando $m = 1$ diciamo che la matrice di WEYL è *semplice*.

Vogliamo notare che detto n l'ordine di W e n_i quello di W'_{ii} si ha sempre:

$$n_1 t_1 + n_2 t_2 + \ldots + n_m t_m = n . \tag{6.7}$$

7. — TEOR. 10: *l'algebra moltiplicazione $\mathfrak{A}$ di una matrice di* WEYL *semplice è semplice.*

Sia dunque W la matrice di WEYL semplice che supponiamo in forma canonica e siano $W_i = W_k \; (i, k = 1, \ldots, t)$ le matrici di WEYL pure mediante cui è composta W; siano poi α_{ik} elementi qualunque di $\mathcal{F}$ ed A_{ik} elementi dell'algebra moltiplicazione $\mathfrak{D}$ di W_i. È allora chiaro che tutte e sole le matrici permutabili con W sono le

$$\left\| \begin{array}{c|c|c} \alpha_{11} A_{11} & \ldots\ldots\ldots\ldots & \alpha_{1t} A_{1t} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \alpha_{t1} A_{t1} & \ldots\ldots\ldots\ldots & \alpha_{tt} A_{tt} \end{array} \right\| . \tag{7.1}$$

Ma al variare delle α_{ik} e delle A_{ik}, la (7.1) percorre tutta l'algebra $\mathfrak{D} \times \mathfrak{M}_t$ dove $\mathfrak{M}_t$ è un'algebra matriciale totale di grado t su $\mathcal{F}$; allora, poichè $\mathfrak{D}$ è per il Teorema 5 un'algebra divisione, a causa del Teorema 4, anche il nostro teorema è dimostrato.

Come facile conseguenza dei Teoremi 10 e 3 si ha il

TEOR. 11. — *L'algebra moltiplicazione di una matrice di* WEYL *è un'algebra semisemplice.*

Questi teoremi ci permettono di dare per l'indice moltiplicazione di una matrice di WEYL una limitazione più maneggevole di quella che si può dare considerando l'ordine dell'algebra di tutte le matrici permutabili con W. Infatti, detto $h_i + 1$ l'indice moltiplicazione delle W'_{ii} della Definizione 12, si ha:

$$h + 1 = (h_1 + 1)\, t_1^2 + \ldots + (h_m + 1)\, t_m^2 \tag{7.2}$$

dove gli $h_i + 1$ sono indici moltiplicazione di matrici pure e quindi, con i soliti simboli, è:

$$h_i + 1 \leq n_i \text{ [22]} \tag{7.3}$$

---

[22] In realtà, è noto che $h_i + 1$ è un divisore di n_i; ma questo risultato è inutile per le nostre considerazioni elementari.

e perciò, ricordando anche la (6.7),

(7.4) $$h + 1 \leq n_1 t_1^2 + \ldots + n_m t_m^2 \leq n\, t$$

dove si è posto:

(7.5) $$t_1 + t_2 + \ldots + t_m = t$$

numero delle componenti pure di W. Può darsi che l'ordine di tali componenti pure abbia un minimo $r > 1$; allora è $t \leq \left[\frac{n}{r}\right]$, cioè t non supera il massimo intero contenuto nel numero razionale $\frac{n}{r}$.

Sostituendo ora nella (7.4), possiamo concludere con il

TEOR. 12. — *L'indice moltiplicazione di una matrice di* WEYL *di ordine* n, *non supera mai* $\left[\frac{n^2}{r}\right]$ *dove* r *è il minimo ordine delle componenti pure; inoltre l'indice moltiplicazione di una matrice isolabile non supera mai* n.

L'ultima affermazione si giustifica subito confrontando la (7.4) con la (6.7).

A causa delle successive maggiorazioni fatte può sorgere il dubbio che l'indice moltiplicazione non assuma mai il valore $\left[\frac{n^2}{r}\right]$; per togliere questo dubbio basta però osservare che l'indice moltiplicazione assume quel valore quando si faccia $t_2 = t_3 = \ldots = t_m = 0$ e $h_1 + 1 = r$. L'interesse di questa osservazione sta nel fatto che essa è invertibile sì che possiamo enunciare il

TEOR. 13. — *L'indice moltiplicazione di una matrice di* WEYL *può assumere il valore* $\left[\frac{n^2}{r}\right]$ *allora e solo che è semplice e che la matrice pura mediante cui è composta abbia sia l'ordine che l'indice moltiplicazione eguali ad* r.

La prima parte del Teorema 13 è un caso particolare del

TEOR. 14. — *L'indice moltiplicazione di una matrice di* WEYL *non supera mai il numero*

(7.6) $$n\, t - m\,(m - 1)\, r\, t^*$$

dove abbiamo indicato con t^* *il minimo dei* t_i.

Sia ora A una qualunque moltiplicazione di W e C una sua matrice principale; valgono allora le relazioni:

(7.7) $$A\, W = W A \qquad\qquad (7.7') \quad \varepsilon\, C\, \overline{W}_{-1} = W\, C$$

dalle quali si ottiene:

$$\varepsilon\, A\, C\, \overline{W}_{-1} = W\, A\, C\,. \tag{7.8}$$

Viceversa se B è una matrice che soddisfa la relazione:

$$\varepsilon\, B\, \overline{W}_{-1} = W\, B \tag{7.9}$$

la $B\, C^{-1}$ è una moltiplicazione di W; perciò l'insieme lineare delle matrici B soddisfacenti la (7.9) ha come ordine l'indice moltiplicazione di W. Inoltre tale insieme può contenere elementi degeneri soltanto quando W è impura.

Poichè, quando nella (7.9) si considera in luogo della W una matrice di WEYL ad essa isomorfa, la B si trasforma in una matrice B' anticogrediente a B, lo studio della (7.9) è particolarmente significativo quando la matrice B è antisimmetrica od antiemisimmetrica. Poniamo la

DEF. 13: diciamo *indice di singolarità* $k+1$ di una matrice WEYL W il massimo numero di matrici antisimmetriche $\varepsilon\, B$ linearmente indipendenti soddisfacenti la (7.9).

Portando W alla forma canonica si dimostra il

TEOR. 15. — *Se indichiamo con* k_i+1 *l'indice di singolarità delle matrici di* WEYL *pure che compaiono nella forma canonica di* W *con i soliti simboli si ha:*

$$k+1 = \sum_{i=1}^{m} (k_i+1)\, t_i + \sum_{i=1}^{m} (h_i+1)\, \frac{t_i\,(t_i-1)}{2}\,.$$

È chiaro che è sempre $k_i \leq h_i \leq n_i - 1$; ma in certi casi (ad esempio, quando $\mathcal{F}$ è reale e W dispari) si può avere $k_i < n_i - s$ con $s \geq 1$. Allora ricordando la (7.5) e la (7.6) si ha:

$$k+1 \leq \frac{n\,(t+1) - m\,(m-1)\, r\, t^*}{2} - s\, t\,. \tag{7.11}$$

8. — Per collegare le nozioni precedenti con la molteplicità delle radici caratteristiche di W, consideriamo di nuovo una moltiplicazione A di W. Quando portiamo W a forma diagonale per contragredienza, essa viene ad essere composta mediante le ν matrici scalari $\alpha_i\, I_{\mu_i}$ mentre A viene ad essere composta mediante le ν matrici C_i di ordini μ_i; se perciò indichiamo con μ^* il minore dei numeri μ_i, A può essere non degenere soltanto se l'indice moltiplicazione di W non supera μ^* oppure $2\,\mu^*$ secondo che $\mathcal{F}$ non sia o sia reale. Si ha cioè il

TEOR. 16. — *L'indice moltiplicazione di una matrice di* WEYL *pura non supera la minima molteplicità delle sue radici caratteristiche od il doppio di tale numero secondo che $\mathcal{F}$ non sia o sia reale.*

Per poter estendere, almeno in un certo senso, questo teorema alle matrici di WEYL impure, è opportuno porre la

DEF. 14: due matrici di WEYL W e W' le diciamo della stessa *classe* se hanno le stesse radici caratteristiche α_i e, dette μ_i e μ'_i le molteplicità di α_i in W e W', si ha che:

$$\mu_1 : \mu'_1 = \ldots = \mu_\nu : \mu'_\nu . \tag{8.1}$$

Allora possiamo restringere la nozione di impurità con la

DEF. 15: una matrice di WEYL W si dirà *impura in senso stretto* se alle ipotesi della Definizione 10 aggiungiamo che W_3 sia della stessa classe di W.

Segue subito che anche W_1 è della stessa classe di W.

Si potrebbe allora ottenere un'analogo di Teorema 14; usando invece una disuguaglianza diversa dalla (7.6) si ha il

TEOR. 17. — *Indicando con μ^* la più piccola delle molteplicità delle radici caratteristiche di una matrice di* WEYL *impura in senso stretto, il suo indice moltiplicazione non supera il numero*

$$2\,\mu^* t - 2\,(m-1)\,(\mu^* + t - m) \leq 2\,(\mu^* - m + 1)^2 + 2\,(m-1)$$

o la sua metà secondo che $\mathcal{F}$ è o non reale.

Concludiamo enunciando altri tre teoremi in cui, come nel precedente, si parla sempre di matrici impure in senso stretto e così, per esempio, l'indicatore m è il numero di matrici pure della stessa classe (e non semplicemente di matrici pure come nel n. 7) in cui si può decomporre la nostra matrice di WEYL.

TEOR. 18. — *L'indice di singolarità di una matrice di* WEYL *pura non supera $2\,\mu^* - 1$ o μ^* secondo che $\mathcal{F}$ è o non reale.*

TEOR. 19. — *L'indice di singolarità di una matrice di* WEYL *impura in senso stretto non supera il numero*

$$\mu^* t + \mu^* - t - (m-1)\,(\mu^* + t - m) \leq (\mu^* - m + 1)^2 + (m-1)$$

oppure il numero

$$\frac{1}{2}\,[\mu^{x} + \mu^{x}\,t - (m-1)\,(\mu^{x} + t - m)] \leq \frac{1}{2}\,(\mu^{x} - m + 2)^2 - 2$$

secondo che $\mathcal{F}$ è o non reale.

TEOR. 20. — *per $t > 1$ nessun h cade tra $2\,(\mu^* - 1)\,(t - 1)$ e $2\,\mu^* t - 1$ oppure tra $(\mu^* - 1)\,(t - 1) - 1$ e $\mu^*\,t - 1$ secondo che $\mathcal{F}$ è reale oppur no.*

Vogliamo infine rilevare che quanto si è qui detto per le matrici impure in senso stretto ha un analogo per le matrici di WEYL impure; in quest'ultimo caso, adoperando il teorema richiamato nella (22), si trovano teoremi sulle lacune di k (23).

(23) Le dimostrazioni di tutti questi teoremi (insieme a quelle di vari altri) appariranno forse in un'altra Nota.