

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

MARIO CARAFA

Risoluzione in termini finiti dell'equazione integrale di Fredholm generale nel campo analitico

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 4,
n° 3-4 (1950), p. 175-190

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1950_3_4_3-4_175_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

RISOLUZIONE IN TERMINI FINITI DELL'EQUAZIONE INTEGRALE DI FREDHOLM GENERALE, NEL CAMPO ANALITICO

di MARIO CARAFA (Roma)

PREMESSA. — In un altro mio lavoro⁽¹⁾, dove tratto le equazioni funzionali lineari mediante la Teoria dei funzionali analitici⁽²⁾, ho dato un metodo di calcolo per esprimere in termini finiti il *nucleo risolvente* di una estesa classe di equazioni integrali lineari nel campo analitico tra le quali figura anche l'equazione di FREDHOLM.

In questa nota si generalizzano i risultati trovati, relativamente a questo ultimo tipo di equazione, eliminando tutte le ipotesi restrittive che allora si erano poste sul campo di regolarità del nucleo dell'equazione.

1. GENERALITÀ. — Consideriamo l'equazione integrale di FREDHOLM⁽³⁾ (equazione integrale lineare di 2^a specie⁽⁴⁾):

$$(1,1) \quad \gamma(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \alpha) \gamma(\alpha) d\alpha$$

nella quale supponiamo che il termine noto $f(x)$ sia analitico e regolare in un certo dominio D_0 ed il nucleo $K(x, \alpha)$ sia anch'esso analitico e regolare

(1) Cfr.: *Calcolo del nucleo risolvente delle equazioni funzionali lineari mediante un numero finito di integrazioni*

«Collectanea Mathematica» Vol. I fasc. I - 1948 - Barcellona. Per abbreviare le citazioni, questa Memoria sarà indicata nel seguito con N. R.

(2) Per la Teoria dei funzionali analitici si rimanda alle seguenti Memorie del Prof. LUIGI FANTAPPIÉ (nelle citazioni i titoli saranno abbreviati con le lettere qui ad essi preposte): F. A. — *I funzionali analitici* «Memorie dell'Accademia dei Lincei» s. 6^a Vol. III, fasc. 11 1930; N. F. — *Nuovi fondamenti della teoria dei funzionali analitici* «Memorie dell'Accademia d'Italia» vol XII, n 13, 1941 - pp 617 706. Per una trattazione più aggiornata cfr. l'opera di prossima pubblicazione: L. FANTAPPIÉ e F. PELLEGRINO - *Théorie des fonctionelles analytiques*. Edition du Griffon - Neuchâtel (Svizzera).

(3) Cfr. E. GOURSAT - *Cours d'analyse mathématique* Ed. Gauthier Villars - 1915 - Vol. III n. 557 p. 344.

(4) Cfr. M. PICONE - *Appunti di analisi superiore* - Ed. Rondinella 1940 - pag. 561.

per x ed α variabili rispettivamente in domini D_1 e D_2 . Per i domini D_0, D_1 e D_2 si suppone *soltanto*, come d'altronde è necessario, che contengano nel loro interno il cammino d'integrazione $\widehat{a b}$ (aperto, intrecciato o chiuso, di andamento qualunque).

Per quanto si è detto potrà sempre considerarsi un dominio semplicemente o molteplicemente connesso D_3 , contenente nel suo interno il cammino d'integrazione $\widehat{a b}$ e contenuto a sua volta nei domini D_0, D_1 e D_2 . Se Δ è la minima distanza dei punti di $\widehat{a b}$ dal contorno di D_3 , possiamo sempre riportarci al caso in cui Δ sia maggiore dell'unità.

Infatti detto ν un numero reale positivo minore di Δ , basta trasformare il dominio D_3 con l'omotetia di fattore $1/\nu$ e centro nell'origine, perchè allora i punti del trasformato $\widehat{a' b'}$ di $\widehat{a b}$ avranno una distanza minima dal contorno di D_3' pari a Δ/ν ($\Delta/\nu > 1$).

Si porrà quindi nella (1,1):

$$x = \nu x'$$

$$\alpha = \nu \alpha'$$

ottenendosi l'altra equazione, che scriviamo ancora con le variabili x ed α :

$$(1,2) \quad \gamma(\nu x) = f(\nu x) + \lambda \nu \int_{a/\nu}^{b/\nu} K(\nu x, \nu \alpha) \gamma(\nu \alpha) d\alpha$$

Possiamo inoltre supporre di avere operato un'altra sostituzione di variabili tale che l'estremo a coincida con l'origine.

Torneremo quindi all'equazione (1,1) supponendo di trovarci già nelle condizioni sopradette con $\Delta > 1$ e con $a = 0$. Supporremo inoltre per semplicità che il cammino d'integrazione $\widehat{a b}$ sia aperto, ma si vedrà in seguito che la trattazione e le formule non cambiano anche se $\widehat{a b}$ è chiuso.

2. IL NUCLEO ITERATO N.ESIMO ED IL NUCLEO AUSILIARIO. — Il nucleo iterato n .esimo è dato dall'espressione:

$$(2,1) \quad K_n(x, \alpha) = \int_0^b K(x, \alpha_{n-1}) d\alpha_{n-1} \int_0^b K(\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}) d\alpha_{n-2} \dots$$

$$\dots \int_0^b K(\alpha_2, \alpha_1) K(\alpha_1, \alpha) d\alpha_1$$

Prendiamo ora sul cammino d'integrazione \widehat{ob} , $m - 1$ punti x_2, x_3, \dots, x_m tali che per due qualunque di essi consecutivi risulti:

$$(2,2) \quad |x_{v+1} - x_v| < \frac{1}{2} \quad (v = 1, 2, \dots, m)$$

dove deve intendersi per semplicità di scrittura che: $x_1 = 0$ e $x_{m+1} = b$.

Dividendo l'integrazione lungo il cammino \widehat{ob} in tante integrazioni parziali estese ai singoli archi $\widehat{x_v x_{v+1}}$, potremo scrivere il nucleo iterato n -esimo nel modo seguente:

$$(2,3) \quad K_n(x, \alpha) = \\ = \sum_{1, v_{n-1}}^m \int_{x_{v_{n-1}}}^{x_{v_{n-1}+1}} K(x, \alpha_{n-1}) d\alpha_{n-1} \sum_{1, v_{n-2}}^m \int_{x_{v_{n-2}}}^{x_{v_{n-2}+1}} K(\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}) d\alpha_{n-2} \dots \\ \dots \sum_{1, v_1}^m \int_{x_{v_1}}^{x_{v_1+1}} K(\alpha_2, \alpha_1) K(\alpha_1, \alpha) d\alpha_1$$

ovvero:

$$(2,3)' \quad K_n(x, \alpha) = \\ = \sum_{1, v_{n-1}, v_{n-2}, \dots, v_1}^m \int_{x_{v_{n-1}}}^{x_{v_{n-1}+1}} K(x, \alpha_{n-1}) d\alpha_{n-1} \int_{x_{v_{n-2}}}^{x_{v_{n-2}+1}} K(\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}) d\alpha_{n-2} \dots \\ \dots \int_{x_{v_1}}^{x_{v_1+1}} K(\alpha_2, \alpha_1) K(\alpha_1, \alpha) d\alpha_1$$

Poniamo ora nella (2,3)' per l'integrazione lungo il generico arco $\widehat{x_{v_s} x_{v_s+1}}$:

$$(2,4) \quad \alpha_s = c_{v_s} \tau_s + x_{v_s} \quad \begin{matrix} (s = 1, 2, \dots, n-1) \\ (v_s = 1, 2, \dots, m) \end{matrix}$$

dove è:

$$(2,5) \quad c_{v_s} = 2(x_{v_s+1} - x_{v_s})$$

si otterrà :

$$(2,6) \quad K_n(x, \alpha) = \\ = \sum_1^m c_{v_{n-1}, v_{n-2}, \dots, v_1} \int_0^{1/2} c_{v_{n-1}} K(x, c_{v_{n-1}} \tau_{n-1} + x_{v_{n-1}}) d\tau_{n-1} \cdot \\ \cdot \int_0^{1/2} c_{v_{n-2}} K(c_{v_{n-1}} \tau_{n-1} + x_{v_{n-1}}, c_{v_{n-2}} \tau_{n-2} + x_{v_{n-2}}) d\tau_{n-2} \cdot \dots \\ \cdot \int_0^{1/2} c_{v_1} K(c_{v_2} \tau_2 + x_{v_2}, c_{v_1} \tau_1 + x_{v_1}) K(c_{v_1} \tau_1 + x_{v_1}, \alpha) d\tau_1$$

Dalla (2,4) si ricava :

$$(2,7) \quad \tau_s = \frac{\alpha - x_{v_s}}{c_{v_s}}$$

perciò quando il punto x_s descrive il dominio D_3 , il punto τ_s descrive un dominio D_{v_s} che si ottiene spostando D_3 con una traslazione pari a $-x_{v_s}$ e trasformandolo poi con l'omotetia

$$(2,8) \quad \tau = \frac{\alpha}{c_{v_s}}$$

Dato poi che $|c_{v_s}| < 1$, come si ricava dalle (2,2) e (2,5), ne viene che il dominio D_{v_s} contiene (come D_3) il cerchio di centro nell'origine e raggio Δ , infatti il trasformato del punto x_{v_s} viene ora a trovarsi nell'origine.

Da quanto si è detto si deduce che la funzione

$$(2,9) \quad K(c_{v_s} \tau_s + x_{v_s}, c_{v_r} \tau_r + x_{v_r})$$

è regolare per τ_s in D_{v_s} e τ_r in D_{v_r} ed in particolare per $|\tau_s| < \Delta$ e $|\tau_r| < \Delta$ ($\Delta > 1$, cfr. n. 1).

Sviluppiamo allora come è possibile la funzione (2,9), dopo averla moltiplicata per c_{v_r} , in una serie doppia di potenze di τ_s e τ_r convergente per $|\tau_s| < \Delta$ e $|\tau_r| < \Delta$, cioè :

$$(2,10) \quad c_{v_r} K(c_{v_s} \tau_s + x_{v_s}, c_{v_r} \tau_r + x_{v_r}) = \sum_{k,h}^{\infty} a_{v_s v_r, k h} c_{v_s}^k c_{v_r}^h \tau_s^k \tau_r^h$$

dove può essere $v_s, v_r = 0, 1, \dots, m$ e dove deve intendersi :

$$(2,11) \quad c_0 = 1 \quad \text{e} \quad x_0 = 0$$

Rappresentiamo poi nella (2,6) le K che ivi figurano con lo sviluppo (2,10) ed integriamo termine a termine come è possibile.

Si otterrà per risultato lo sviluppo seguente:

$$(2,12) \quad K_n(x, \alpha) = \sum_{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}}^m \sum_{k_0, h_0, \dots, k_{n-1}, h_{n-1}}^\infty a_{0, v_{n-1}, k_{n-1}, h_{n-1}} a_{v_{n-1}, v_{n-2}, k_{n-2}, h_{n-2}} \dots a_{v_2, v_1, k_1, h_1} a_{v_1, 0, k_0, h_0} x^{k_{n-1}} \alpha^{h_0} \prod_{s=1}^{n-1} \frac{1}{(h_s + k_{s-1} + 1) 2^{h_s + k_{s-1} + 1}}$$

sviluppo valido per $|x| < \Delta$ ed $|\alpha| < \Delta$.

Consideriamo poi la funzione (che potremo chiamare *nucleo ausiliario* della (1,1)):

$$(2,13) \quad \begin{aligned} K(\beta, \vartheta, x, \alpha) &= \sum_{u,v}^m 2^{u+v} \beta^u \vartheta^v c_v K(c_u x + x_u, c_v \alpha + x_v) = \\ &= \sum_{u,v}^m \sum_{k,h}^\infty a_{u,v,k,h} 2^{u+v} \beta^u \vartheta^v x^k \alpha^h \end{aligned}$$

dove è $|\beta| \leq 2$, $|\vartheta| \leq 2$ ed $|x| < \Delta$, $|\alpha| < \Delta$.

Se supponiamo per un momento di porre nella (2,13) $\beta = \vartheta = 1/2$ e ne calcoliamo l'iterato n -esimo:

$$(2,14) \quad \int_0^{1/2} K\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x, \alpha_{n-1}\right) d\alpha_{n-1} \int_0^{1/2} K\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}\right) d\alpha_{n-2} \dots \dots \int_0^{1/2} K\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \alpha_2, \alpha_1\right) K\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \alpha_1, \alpha\right) d\alpha_1$$

si vede facilmente che sostituendo alla K il suo sviluppo (2,13) l'iterato n -esimo (2,14) sarà rappresentato da una serie nella quale figureranno tutti i termini dello sviluppo (2,12) mescolati con infiniti altri. Se quindi si eliminano questi ultimi termini dall'iterato n -esimo (2,14) si ottiene proprio il nucleo iterato K_n .

Approfittando ora del fatto che il nucleo K è regolare per x ed α variabili in un cerchio di raggio maggiore di 1 e che il cammino d'integrazione nella (2,14) è tutto interno al cerchio di raggio unitario e concentrico al precedente, come vedremo al numero seguente, si possono applicare i

risultati di N. R. calcolando il nucleo iterato K_n con un numero di integrazioni (definite) finito ed indipendente da n . Si osservi poi, come già si era premesso al n. 1, che la trattazione resta identica anche se il cammino d'integrazione è intrecciato o chiuso, infatti K_n può ancora rappresentarsi con la (2,6) e quindi con la (2,12) ed il *nucleo ausiliario* sarà ancora dato dalla (2,13). Anche in questi altri casi conviene fare in modo che il cammino d'integrazione passi per l'origine.

3. - CALCOLO DEL NUCLEO ITERATO n -ESIMO CON UN NUMERO D'INTEGRAZIONI FINITO ED INDIPENDENTE DA n . — Consideriamo la particolare funzione (*preparatrice* n -esima; cfr. N. R. nn. 4, 5 e 6):

$$(3,1) \quad M_n(\beta, \vartheta, x, \alpha, \xi) = \sum_{0}^{\infty} \frac{\xi^{n+1} a_{u,v,k,h}^{[u,v,k,h]}}{\beta^{u+1} \vartheta^{v+1} x^{k+1} \alpha^{h+1}}$$

dove è

$$(3,2) \quad \begin{aligned} |\beta| = |\xi| = 2; \quad |\xi| = 1; \quad |x| > 1; \quad |\alpha| > 1 \\ [u, v, k, h] = (2u + 1) 2^{v+k+h+2} + 2^{k+h+1} + 2^h \end{aligned}$$

e quindi la serie (3,1) converge assolutamente.

Si ricordi che al n. 3 di N. R. si dimostra che i numeri interi $[u, v, k, h] = (2u + 1) 2^{v+k+h+2} + 2^{k+h+1} + 2^h$ sono in corrispondenza biunivoca con le quadruple *ordinate* (u, v, k, h) .

Eseguiamo poi il *prodotto funzionale emisimmetrico* ⁽⁵⁾ della M_n per il nucleo ausiliario K rispetto alle variabili β, ϑ, x ed α , cioè calcoliamo l'integrale multiplo:

$$(3,3) \quad \begin{aligned} \overline{K}_n(\xi) &= \frac{1}{(2\pi i)^4} \int_{C_2} d\beta \int_{C_2} d\vartheta \int_{C_1} dx \int_{C_1} d\alpha M_n K = \\ &= \sum_{0}^m \sum_{0}^{\infty} a_{u,v,k,h} a_{u,v,k,h} 2^{u+v} \xi^{(n+1)[u,v,k,h]} \end{aligned}$$

dove con C_2 e C_1 si sono indicate le circonferenze con centro nell'origine e raggi rispettivamente 2 e R_1 , essendo $1 < R_1 < 2$.

(5) Cfr. F. A. n. 34 pag. 55

Si faccia ora la potenza n -esima ordinaria della K_n e se ne scriva lo sviluppo che si ottiene sostituendo ad essa la serie (3,3), cioè

$$(3,4) \quad \begin{aligned} & \overline{K}_n^n(\xi) = \\ & = \sum_0^m a_{u_{n-1}, v_{n-1}; \dots; u_0, v_0} \sum_0^\infty a_{k_{n-1}, h_{n-1}; \dots; k_0, h_0} a_{u_{n-1}, v_{n-1}, k_{n-1}, h_{n-1}} a_{u_{n-2}, v_{n-2}, k_{n-2}, h_{n-2}} \dots \\ & \dots a_{u_0, v_0, k_0, h_0} \xi^{\sum_0^{n-1} (u_s + v_s) + \sum_0^{n-1} (n+1) [u_s, v_s, k_s, h_s]} \end{aligned}$$

ed osserviamo che ciascun termine di questa serie multipla si presenta in essa $\omega_{u,v,k,h}$ volte, se con $\omega_{u,v,k,h}$ si indica il numero delle permutazioni con ripetizione delle n quadruple ordinate $(u_{n-1}, v_{n-1}, k_{n-1}, h_{n-1}), \dots, (u_0, v_0, k_0, h_0)$ ovvero, per la sopraricordata corrispondenza biunivoca, degli n numeri interi $[u_{n-1}, v_{n-1}, k_{n-1}, h_{n-1}], \dots, [u_0, v_0, k_0, h_0]$.

Introduciamo poi la funzione (per $n > 1$):

$$(3,5) \quad \begin{aligned} & S_n(x, \alpha, \xi) = \\ & = \sum_0^\infty a_{q_{n-1}, \dots, q_1} \sum_0^\infty a_{\mu_{n-1}, \nu_{n-1}; \dots; \mu_0, \nu_0} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\sum_1^{n-1} q_s}}{\omega_{q, \mu, \nu}} x^{\mu_{n-1}} \alpha^{\nu_0} \left(\prod_s^{n-1} \frac{1}{(\nu_s + \mu_{s-1} + 1) 2^{\nu_s + \mu_{s-1} + 1}} \right) \xi^{V_{q, \mu, \nu}} \end{aligned}$$

dove è $|\xi| = 1$ e

$$V_{q, \mu, \nu} = -1 - \left((n+1)^{[0, q_{n-1}, \mu_{n-1}, \nu_{n-1}]} + (n+1)^{[q_{n-1}, q_{n-2}, \mu_{n-2}, \nu_{n-2}]} + \dots + \dots + (n+1)^{[q_1, \mu_0, \nu_0]} \right)$$

e dove $\omega_{q, \mu, \nu}$ è il numero delle permutazioni con ripetizione degli n numeri interi: $[0, q_{n-1}, \mu_{n-1}, \nu_{n-1}], [q_{n-1}, q_{n-2}, \mu_{n-2}, \nu_{n-2}], \dots, [q_1, 0, \mu_0, \nu_0]$.

Per $n = 1$ si ponga invece:

$$(3,5)' \quad S_1(x, \alpha, \xi) = \sum_0^\infty a_{\mu_0, \nu_0} x^{\mu_0} \alpha^{\nu_0} \xi^{-(1+2^{[0, 0, \mu_0, \nu_0]})}$$

e si tenga presente che $K_1(x, \alpha) = K(x, \alpha) = \sum_0^\infty a_{k, h} a_{0, k, h} x^k \alpha^h$ (cfr. la (2,10)).

Le serie (3,5) e (3,5)' convergono totalmente per $|x| \leq x_0 < 1$ ed $|\alpha| \leq \alpha_0 < 1$. Indicando allora con C la circonferenza del piano complesso ξ con centro nell'origine e raggio unitario, si trova che:

$$(3,6) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C S_n(x, \alpha, \xi) \overline{K}_n^n(\xi) d\xi = K_n(x, \alpha)$$

Infatti se nel caso di $n > 1$ indichiamo con $V_{u,v,k,h}$ l'esponente della ξ del termine generico dello sviluppo (3,4) della \overline{K}_n^n , cioè:

$$V_{u,v,k,h} = (n+1)^{[u_{n-1}, v_{n-1}, k_{n-1}, h_{n-1}]} + \dots + (n+1)^{[u_0, v_0, k_0, h_0]}$$

per quanto si è dimostrato al n. 3 di N. R. la condizione :

$$(3,7) \quad V_{q,u,v} + V_{u,v,k,h} = -1$$

si verifica soltanto quando *tutti* gli esponenti

$$[u_{n-1}, v_{n-1}, k_{n-1}, h_{n-1}], \dots, [u_0, v_0, k_0, h_0]$$

risultano uguali agli esponenti

$$[0, q_{n-1}, \mu_{n-1}, \nu_{n-1}], \dots, [q_1, 0, \mu_0, \nu_0]$$

Pensando allora di sostituire nella (3,6) alle S_n e \overline{K}_n^n rispettivamente i loro sviluppi (3,5) e (3,4) è chiaro che l'integrazione rispetto alla ξ (che può eseguirsi termine a termine per la totale convergenza delle serie) per quanto si è detto, unirà tra loro soltanto i termini degli sviluppi di S_n e \overline{K}_n^n per i quali è verificata la (3,7), annullando tutti gli altri e dando così per risultato il nucleo iterato K_n di sviluppo (2,12)⁽⁶⁾. Analoghe considerazioni valgono nel caso di $n = 1$.

Supposte quindi note le funzioni S_n ed M_n , la (3,2) e la (3,6) che danno rispettivamente la \overline{K}_n e la K_n , ci dicono come si era annunciato nel titolo del paragrafo, che: *il nucleo iterato n-esimo si può calcolare con un numero di integrazioni (definite) finito ed indipendente da n*.

Essendo poi le funzioni S_n ed M_n completamente indipendenti dal nucleo $K(x, \alpha)$ dell'equazione integrale (1,1), potranno essere tabellate una volta per tutte ed impiegate poi in ogni caso per le equazioni di FREDHOLM qui trattate.

4. - CALCOLO DEL NUCLEO RISOLVENTE DELL'EQUAZIONE INTEGRALE DI FREDHOLM. — Come già si fece osservare in N. R., per calcolare in *termini finiti* il nucleo risolvete occorre evitare di introdurre per ogni termine dello sviluppo di detto nucleo, una nuova *preparatrice* M_n . Conviene infatti sostituire ad essa una funzione M equivalente, per il calcolo di K_n , alla M_n qualunque sia n e che può chiamarsi perciò *preparatrice generale*; detta funzione ha lo sviluppo seguente :

$$(4,1) \quad M(\beta, \vartheta, x, \alpha, \xi, r, t) = \sum_1^{\infty} r^s t^s M_s(\beta, \vartheta, x, \alpha, \xi)$$

(6) Si osservi che il calcolo del nucleo iterato n -esimo qui riportato può considerarsi come una particolare *potenza n-esima funzionale generalizzata* del nucleo ausiliario (cfr. N. R. n. 6).

dove si ha $|r| \leq r_0 < 1$, $|t| = 1$, e dove la generica M_s è la preparatrice s -esima data dalla (3,1) per $n = s$.

Risultando quindi dalla (3,1), qualunque sia s :

$$(4,2) \quad |M_s| \leq \frac{1}{(|x| - 1)(|\alpha| - 1)}$$

la serie (4,1) certamente converge totalmente per $|r| \leq r_0 < 1$; $|x| \geq R_1$ ed $|\alpha| \geq R_1$ (si ricordi che $R_1 (> 1)$ è il raggio della circonferenza C_1 che figura nella (3,3)).

Sostituiamo nella (3,3) alla M_n la funzione M e chiamiamola con \bar{K} la funzione che ne risulta, cioè:

$$(4,3) \quad \bar{K}(\xi, r, t) = \frac{1}{(2\pi i)^4} \int_{C_2} d\beta \int_{C_2} d\vartheta \int_{C_1} dx \int_{C_1} d\alpha M K = \sum_1^{\infty} r^s t^s \bar{K}_s(\xi)$$

Si dimostra poi facilmente (cfr. N. R. - n. 8), che:

$$(4,4) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dt}{t^{n+1}} \bar{K}^n(\xi, r, t) = r^{n^2} \bar{K}^n(\xi)$$

integrando lungo la circonferenza $C = (0, 1)$ del piano complesso t .

Si consideri infine la particolare funzione:

$$(4,5) \quad S(x, \alpha, \xi, t, u, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n^2}}{t^{n+1} u^{n+1}} S_n(x, \alpha, \xi)$$

il cui sviluppo è formato mediante le S_n già definite con le (3,5) e (3,5)' e che è totalmente convergente per:

$$|x| \leq x_0 < 1; \quad |\alpha| \leq \alpha_0 < 1; \quad |t| = 1; \quad |r| \leq r_0 < 1; \quad |u| \geq \varrho_0$$

(dove ϱ_0 verrà poi definito) risultando infatti dalla (3,5):

$$|S_n| < \left(\frac{16}{3}\right)^{n-1} (1 - x_0)(1 - \alpha_0)$$

e dato che, essendo $r_0 < 1$, prefissato un qualunque numero $p > 1$ da un certo n in poi si avrà $r_0^n < \frac{3\varrho_0}{16p}$ e quindi $r_0^{n^2} < \left(\frac{3\varrho_0}{16p}\right)^n$, ovvero $\left(\frac{16r_0^n}{3\varrho_0}\right)^n < \left(\frac{1}{p}\right)^n$.

Se poi indichiamo con K_0 il massimo di $|K(x, \alpha)|$ per x ed α in D_3 , si ha evidentemente, (indicando con l la lunghezza del cammino d'integrazione \widehat{ob}):

$$(4,6) \quad |K_n(x, \alpha)| \leq l^{n-1} K_0^n$$

e quindi lo sviluppo del *nucleo risolvete* dell'equazione di FREDHOLM (1,1):

$$(4,7) \quad \mathcal{R}(\lambda; x, \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x, \alpha)$$

converge totalmente per

$$(4,8) \quad \lambda \leq \lambda' < \frac{1}{lK_0}$$

Si deduce allora per la (4,4) che:

$$(4,9) \quad \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_C dt \int_{C_3} du S(x, \alpha, \xi, t, u, r) \frac{1}{\lambda [1 - u \lambda \overline{K}(\xi, r, t)]} = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} r^{2n^2} S_n(x, \alpha, \xi) \overline{K}_n(\xi)$$

dove con C_3 si è indicata la circonferenza $(0, \varrho_0)$ del piano u avendo preso⁽⁷⁾:

$$\varrho_0 < 9(R_1 - 1)^2(1 - r_0)/4R_1^2 r_0 \lambda' K_0 (4^{m+1} - 1)^2.$$

In definitiva seguendo quanto già fu detto e dimostrato ai nn. 1, 2 ed 8 di N. R. e per la (3,6) si ottiene:

$$(4,10) \quad \mathcal{R}(\lambda; x, \alpha) = \\ = \frac{\partial}{\partial \theta_{\theta=1}} \frac{1}{(2\pi i)^4} \int_{C_4} dr \int_C d\xi \int_C dt \int_{C_3} du \frac{P_0(r, \theta) S(x, \alpha, \xi, t, u, r)}{\lambda [1 - u \lambda \overline{K}(\xi, r, t)]}$$

(7) Infatti la funzione $1/(1 - u \lambda \overline{K})$ per $|u \lambda \overline{K}| < 1$ può rappresentarsi con la serie geometrica $\sum_0^{\infty} u^k \lambda^k \overline{K}^k$, perciò ϱ_0 viene preso in modo che detta serie converga. Si osservi che dalla (2,13) si ricava $|K| \leq \frac{1}{9} K_0 (4^{m+1} - 1)^2$.

dove C_4 è la circonferenza $(0, r_0)$ del piano r e la $P_0(r, \theta)$ è la particolare funzione (di *prolungamento*, cfr. N. R. n. 1) avente lo sviluppo:

$$(4,11) \quad P_0(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\theta^k}{r^{k+1}}$$

Si ricordi inoltre che la funzione \overline{K} è data dalla (4,3).

Dato poi che le funzioni S , M e P_0 sono indipendenti dal nucleo K dell'equazione, dal cammino di integrazione \widehat{ab} e dalla sua ripartizione in m parti indicata al n. 2, la determinazione dei loro valori nel campo di variabilità che interessa potrà farsi una volta per sempre e ritenendole quindi funzioni note (al pari di tante altre trascendenti già conosciute e tabellate) per la (4,10) si può affermare che:

il nucleo risolvete della più generale equazione integrale di FREDHOLM (nel campo analitico) può calcolarsi con un numero finito di integrazioni definite ed una derivazione partendo direttamente dal nucleo dato ed impiegando tre particolari funzioni indipendenti dal nucleo stesso.

5. - ESAME DEI RISULTATI. — È importante notare che, mentre per calcolare il nucleo risolvete sommando la classica serie dei nuclei iterati occorrono infinite integrazioni, ora invece, come si è visto, dette *integrazioni si possono ridurre ad un numero finito.*

Ricordando poi che con la generica funzione S_n si riesce a trasformare la potenza ordinaria n -esima della \overline{K}_n (cfr. la (3,6)) ovvero della K (cfr. la (4,4)) nel nucleo iterato n -esimo K_n , è allora evidente che la funzione S formata con tutte le S_n (cfr. la (4,5)) ha nella formula finale (4,10) un compito essenziale e specifico, a differenza delle altre due funzioni fisse M e P_0 , che figurano anch'esse nella (4,10), le quali hanno invece un compito accessorio.

Quanto si è ora detto è meglio messo in luce da una notevole relazione che lega la S al *nucleo risolvete* considerato come funzionale (analitico *non lineare*) del nucleo K .

Si dimostrerà infatti al n. 6, che la S può scriversi nella forma seguente:

$$S = F[\mathcal{R}_0]$$

dove F è un funzionale analitico *lineare*, indipendente da qualunque nucleo K ed \mathcal{R}_0 è il *nucleo risolvete* di una particolare equazione integrale di FREDHOLM il cui nucleo U è anch'esso *indipendente* da K .

Si vede così che la *struttura della S* , dato che F è *lineare*, è in sostanza *identica a quella del nucleo risolvete stesso*; così pure si può vedere che quella della generica S_n *ricopia la struttura del nucleo iterato n -esimo.*

Questa proprietà della funzione S si ricollega ai risultati di un altro mio lavoro⁽⁸⁾, quando appunto si consideri il *nucleo risolvnte* come un funzionale del *nucleo* K dell'equazione di FREDHOLM.

Risulta infatti nel citato lavoro (n. 9) che per un funzionale analitico *non lineare* definito in una regione lineare esiste una speciale funzione u che individua completamente il funzionale, dato che con essa è possibile calcolare il funzionale stesso con un numero finito di operazioni. Detta speciale funzione u si ottiene calcolando il funzionale per una particolare funzione, dipendente in più da un parametro (linea analitica).

Per la proprietà ora ricordata la funzione u può chiamarsi *l'indicatrice* del funzionale, come già FANTAPPIÈ⁽⁹⁾ ha chiamato la funzione che gode di proprietà analoga nel caso dei *funzionali analitici lineari*.

Ad essa corrisponde ora la funzione \mathcal{R}_0 che, come si è detto, si ottiene calcolando il funzionale « *nucleo risolvnte* » per un particolare nucleo U .

È quindi, ripetiamo, la funzione \mathcal{R}_0 che può considerarsi come *l'indicatrice*⁽¹⁰⁾ del *nucleo risolvnte* quale funzionale analitico (*non lineare*) del nucleo K definito nella regione funzionale lineare delle funzioni analitiche $K(x, \alpha)$ regolari per x ed α variabili nel dominio D_3 .

OSSERVAZIONE. — I risultati ottenuti in N. R. possono applicarsi direttamente per calcolare il *nucleo risolvnte* nel caso particolare in cui il nucleo K dell'equazione di FREDHOLM è regolare per x ed α variabili in un cerchio.

Il caso generale qui trattato, *ma soltanto quando il cammino \widehat{ob} è aperto (e non intrecciato)*, si può anche risolvere riportandolo a detto caso particolare nel modo seguente:

1^o) con un cambiamento di variabili si trasforma il cammino d'integrazione in un segmento rettilineo;

2^o) si considerano poi le nuove variabili x ed α in un rettangolo sufficientemente ristretto intorno al cammino d'integrazione, in modo che ivi il nucleo risulti regolare, e si trasforma quindi conformemente, mediante funzioni ellittiche⁽¹¹⁾, detto rettangolo in un cerchio.

(8) Cfr. - *Espressione in forma finita di ogni funzionale analitico non lineare*. - Accademia Nazionale dei XL - Serie IV - Vol 1 - 1950 .

In questo lavoro si considerano soltanto funzionali di funzioni di una sola variabile, ma la generalizzazione al caso delle funzioni in più variabili è immediata.

(9) Cfr. F. A - n. 26 pag. 41 ed N. F. n. 13 pag. 659.

(10) Sarebbe più esatto chiamarla *un'indicatrice* del nucleo risolvnte, dato che possono ottenersi varie *indicatrici* tra loro equivalenti ma diverse per la diversa impostazione del calcolo.

(11) Cfr. G. SANSONE, *Lezioni sulla teoria delle funzioni di una variabile complessa*, Ed. CEDAM — Padova 1949 — Vol. II, n. 26 p. 144.

Si deve però osservare che per questa via, quando il campo di regolarità del nucleo è molto vario e il cammino d'integrazione risulta, senza possibilità di riduzione, molto tormentato, allora la trasformazione indicata in 1°) potrà farsi anche nel più semplice dei modi tuttalpiù mediante un polinomio il cui grado può essere comunque elevato e la cui inversione conseguentemente sarà molto laboriosa e, inconveniente più grave, *diversa da caso a caso*.

Con il metodo esposto nei numeri precedenti invece, le due suddette trasformazioni sono eliminate e si ottiene il *nucleo risolvente* con una formula generale applicabile in ogni caso e per di più anche quando il cammino d'integrazione è intrecciato o chiuso.

6. - STRUTTURA DELLA FUNZIONE S. — Consideriamo la funzione:

$$(6,1) \quad L_n(\beta, \vartheta, x, \alpha, \eta) = \sum_{p,q}^{\infty} \sum_{\mu,\nu}^{\infty} \frac{1}{\varrho^{\mu+\nu+p+q} 2^{p+q}} \frac{\beta^p}{\vartheta^{q+1}} x^\mu \alpha^\nu \eta^{(n+1)[p,q,\mu,\nu]}$$

dove è

$$|\eta| = |\beta| = |\vartheta| = 1; \quad \frac{1}{2} < \varrho < 1; \quad |x| \leq x_0; \quad |\alpha| \leq \alpha_0$$

con

$$\frac{1}{2} < x_0 < \varrho \text{ e } \frac{1}{2} < \alpha_0 < \varrho,$$

condizioni che assicurano la totale convergenza della serie a secondo membro.

Scriviamo poi l'equazione integrale di FREDHOLM:

$$(6,2) \quad \gamma = f + \frac{\Omega}{2\pi i} \int_C d\vartheta \int_0^{1/2} d\alpha L_n \cdot \gamma$$

(dove C è la circonferenza (0,1)) e calcoliamone il nucleo iterato n-esimo ⁽¹²⁾:

$$(6,3) \quad L_{n(n)}(\beta, \vartheta, x, \alpha, \eta) = \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \int_C d\vartheta_{n-1} \int_0^{1/2} d\alpha_{n-1} L_n(\beta, \vartheta_{n-1}, x, \alpha_{n-1}, \eta) \int_C d\vartheta_{n-2} \int_0^{1/2} d\alpha_{n-2} L_n(\vartheta_{n-1}, \vartheta_{n-2}, \alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \eta) \dots \int_C d\vartheta_1 \int_0^{1/2} d\alpha_1 L_n(\vartheta_2, \vartheta_1, \alpha_2, \alpha_1, \eta) L_n(\vartheta_1, \vartheta, \alpha_1, \alpha, \eta)$$

⁽¹²⁾ Per n = 1 si ponga: L₁₍₁₎ = L₁.

Sostituendo in questa alla L_n il suo sviluppo (6,1) si trova:

$$(6,4) \quad L_{n(n)}(\beta, \vartheta, x, \alpha, \eta) = \\ = \sum_0^\infty p_{n-1, q_{n-1}, q_{n-2}, \dots, q_0} \sum_0^\infty \mu_{n-1, r_{n-1}, \dots, r_0, v_0} \frac{\beta^{p_{n-1}}}{\vartheta^{q_0+1}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{p_{n-1} + q_0 + 2 \sum_1^{n-1} q_s}}{\varrho^{p_{n-1} + q_0 + 2 \sum_1^{n-1} q_s + \sum_0^{n-1} (\mu_s + r_s)}} \cdot \\ \cdot x^{\mu_{n-1}} \alpha^{v_0} \left(\prod_s^{n-1} \frac{1}{(\nu_s + \mu_{s-1} + 1) 2^{\nu_s + \mu_{s-1} + 1}} \right) \eta^{V_{p, q, \mu, v}}$$

dove si è posto

$$V_{p, q, \mu, v} = (n+1)^{[p_{n-1}, q_{n-1}, \mu_{n-1}, r_{n-1}]} + (n+1)^{[q_{n-1}, q_{n-2}, \mu_{n-2}, r_{n-2}]} + \\ \dots + (n+1)^{[q_1, q_0, \mu_0, v_0]}$$

Si osservi poi che

$$(6,5) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C d\vartheta L_{n(n)}(0, \vartheta, x, \alpha, \eta) = \\ = \sum_0^\infty q_{n-1, \dots, q_1} \sum_0^\infty \mu_{n-1, r_{n-1}, \dots, r_0, v_0} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{1 \sum_1^{n-1} q_s} x^{\mu_{n-1}} \alpha^{v_0}}{\varrho^{\frac{n-1}{2 \sum_1^{n-1} q_s + \sum_0^{n-1} (\mu_s + r_s)}} \left(\prod_s^{n-1} \frac{1}{(\nu_s + \mu_{s-1} + 1) 2^{\nu_s + \mu_{s-1} + 1}} \right) \eta^{V_{q, \mu, v}}}$$

dove ora è

$$V_{q, \mu, v} = (n+1)^{[0, q_{n-1}, \mu_{n-1}, r_{n-1}]} + (n+1)^{[q_{n-1}, q_{n-2}, \mu_{n-2}, r_{n-2}]} + \\ \dots + (n+1)^{[q_1, 0, \mu_0, v_0]}$$

si ottiene cioè una serie formata con tutti e soli i termini della (6,4) per i quali si ha:

$$p_{n-1} = q_0 = 0; \quad \vartheta = 1.$$

Introduciamo ora l'altra particolare funzione:

$$(6,6) \quad H_n(\xi \eta) = \\ = \sum_0^\infty p_{n-1, q_{n-1}, \dots, q_0} \sum_0^\infty \mu_{n-1, r_{n-1}, \dots, r_0, v_0} \frac{\varrho^{\sum_0^{n-1} (p_s + q_s + \mu_s + r_s)}}{\omega_{p, q, \mu, v}^2} (\xi \eta)^{V_{p, q, \mu, v}}$$

dove è $|\xi| = |\eta| = 1$ e ϱ ha lo stesso valore che si è scelto nella (6.1) e dove si è posto:

$$\bar{V}_{p,q,\mu,\nu} = -1 - \sum_0^{n-1} (n+1)^{[p_s, q_s, \mu_s, \nu_s]}$$

inoltre con $\omega_{p,q,\mu,\nu}$ si indica il numero delle permutazioni con ripetizione degli n numeri interi $[p_s, q_s, \mu_s, \nu_s]$ con $s = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Nelle ipotesi fatte la (6.6) come serie multipla di funzioni di $\xi \eta$, è totalmente convergente.

Si osservi che la presenza del coefficiente $1/\omega_{p,q,\mu,\nu}^2$ fa sì che nella serie (6.6) il termine generico

$$\varrho^{\sum_0^{n-1} (p_s + q_s + \mu_s + \nu_s)} (\xi \eta)^{\bar{V}_{p,q,\mu,\nu}}$$

si presenti una volta sola e con a coefficiente $1/\omega_{p,q,\mu,\nu}$.

Per quanto si è detto si trova facilmente, ricordando quello che si è osservato a proposito della (3.6) (cfr. anche la (3.5)):

$$(6,7) \quad \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_C d\eta H_n(\xi \eta) \int_C d\vartheta L_{n(n)}(0, \vartheta, x, \alpha, \eta) = S_n(x, \alpha, \xi)$$

Si osservi subito che la struttura della H_n non ha nessun legame con quella del nucleo iterato n -esimo come risulta anche dalla simmetria tra gli indici p, q, μ e ν nel suo sviluppo (6.6), a differenza invece della S_n che, a parte il coefficiente $1/\omega_{p,q,\mu,\nu}$, ha la stessa struttura del nucleo iterato n -esimo $L_{n(n)}$. Consideriamo poi la funzione U formata con tutte le L_n date dalla (6.1):

$$(6,8) \quad U = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \tau^{n!} L_n(\beta, \vartheta, x, \alpha, \eta)$$

dove è $|\tau| = 1$ ed $|r| \leq r_0 < 1$ con che la serie ora scritta risulta totalmente convergente essendo qualunque sia n (cfr. quanto si è posto per la (6.1)):

$$|L_n| \leq 4 \varrho^4 / (2\varrho - 1)^2 (\varrho - x_0) (\varrho - \alpha_0).$$

Scriviamo ora l'equazione integrale (6.2) mettendo al posto della L_n la U , cioè:

$$(6,9) \quad \gamma = f + \frac{\Omega}{2\pi i} \int_C d\vartheta \int_0^{1/2} d\alpha U \cdot \gamma$$

e detto U_n il suo *nucleo iterato n-esimo* si ricava, tenendo presente quanto fu dimostrato al n. 8 di N.R. :

$$(6,10) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d\tau}{\tau^{m+1}} U_n = r^{n^2} L_{n(n)}$$

Chiamiamo allora con \mathcal{R}_0 il nucleo risolvente della (6,9), cioè poniamo :

$$(6,11) \quad \mathcal{R}_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \Omega^{n-1} U_n$$

ed introduciamo la funzione H formata con tutte le H_n

$$(6,12) \quad H = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(\xi \eta)}{(\tau t)^{m+1} \Omega^n u^{n+1}}$$

dove è $|\tau| = |t| = 1$ e che quindi è una serie totalmente convergente per $|\Omega u| \geq a_0 > 1/(1-\varrho)^4$ (risulta infatti dalla (6,6) $H_n < 1/(1-\varrho)^{4n}$).

Applicando allora quanto sopra si è detto, dalle (6,7) e (6,10) discende:

$$(6,13) \quad \frac{1}{(2\pi i)^4} \int_C d\eta \int_C d\vartheta \int_C d\tau \int_C d\Omega H \cdot (\mathcal{R}_0)_{\beta=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n^2}}{t^{m+1} u^{n+1}} S_n = S$$

dove C' è un'opportuna circonferenza del piano complesso Ω ⁽¹³⁾.

Se allora indichiamo nella (6,13) con F il funzionale *analitico lineare*, prodotto di tutte le operazioni lineari applicate al *nucleo risolvente* \mathcal{R}_0 , si potrà scrivere la S nella forma più succinta:

$$S = F[\mathcal{R}_0]$$

Si deve poi notare che, per quanto si è detto a proposito della H_n , la struttura della funzione H come può dedursi dallo sviluppo (6,12) non ha nessun particolare legame con quella del nucleo risolvente.

⁽¹³⁾ Si osservi che dalla (6,8) si ottiene $|U| \leq 4\varrho^4 r_0 / (1-r_0)(2\varrho-1)^2(\varrho-x_0)(\varrho-\alpha_0)$ e perciò limitando opportunamente r_0 si può ottenere sempre la convergenza della (6,11) comunque si debba delimitare il campo di variabilità di Ω per la convergenza della (6,12).