

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

MARIO BENEDICTY

**Sopra le trasformazioni birazionali in sé di un campo neutro,
in particolare nel caso di genere effettivo nullo**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 4,
n° 3-4 (1950), p. 157-173*

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1950_3_4_3-4_157_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOPRA LE TRASFORMAZIONI BIRAZIONALI IN SÈ DI UN CAMPO NEUTRO, IN PARTICOLARE NEL CASO DI GENERE EFFETTIVO Nullo

di MARIO BENEDICTY (Roma)

Col presente lavoro inizio lo studio delle trasformazioni birazionali in sè di un campo neutro ⁽¹⁾, e delle questioni che si pongono di conseguenza.

Premetto che le nozioni relative ai campi neutri, qui presupposte, e le relative notazioni, si riferiscono ad una fondamentale memoria di SEVERI ⁽²⁾. In particolare, intendo per *campo neutro γ di caratteri p, δ_1, δ_2* una curva algebrica di genere effettivo p , considerata in senso invariante, su cui siano fissate $\delta_1 + \delta_2 = \delta$ coppie neutre, delle quali δ_1 costituite da punti distinti e δ_2 da punti coincidenti, di modo che $\pi = p + \delta$ risulta il genere virtuale del campo neutro considerato.

Si pone anzitutto la questione di precisare che cosa si intenda per trasformazione birazionale di un campo neutro in sè (o in un altro). Ho accettato senz'altro la definizione seguente, che deriva dalla natura stessa della questione:

Si intende per trasformazione birazionale in sè di un campo neutro una trasformazione birazionale in sè della curva, su cui è assegnato il campo neutro, la quale muti coppie neutre in coppie neutre.

È immediata conseguenza della definizione, che coppie neutre di punti coincidenti, ovvero distinti, vanno in coppie dello stesso tipo.

Scopo di questo lavoro è di determinare quei campi neutri di genere effettivo nullo, i quali ammettono trasformazioni birazionali in sè (nn. 1, 3, 4) e di studiare alcune proprietà di questi campi: questioni di esistenza, particolarizzazione dei moduli, limitazioni per il numero delle trasformazioni (nn. 5, 6); interpretazione trascendente (nn. 7, 8). Enuncio incidentalmente anche il teorema di SCHWARZ KLEIN in un campo neutro (di qualsivogliano caratteri) (n. 2).

⁽¹⁾ Ciò in relazione a ricerche dei proff. SEVERI e CONFORTO sulle funzioni quasi abeliane

⁽²⁾ F. SEVERI *Funzioni quasi abeliane*, Pontificiae Academiae Scientiarum Scripta VATA, n. 4, 1947, che nel seguito citerò con F. Q. A.

1. — Si consideri il campo γ di caratteri $p = 0$, δ_1, δ_2 ; senza restrizione alcuna si potrà supporre che esso sia realizzato assegnando $\delta_1 + \delta_2$ coppie neutre sopra una retta proiettiva r . Una trasformazione birazionale in sè del campo sarà, in base alla definizione data, una proiettività della r in sè, la quale muti coppie neutre in coppie neutre. Si tratta di determinare i campi per i quali esistono siffatte proiettività.

Escludo anzitutto i casi banali $\pi = 0$ e $\pi = 1$.

Nel primo di essi le trasformazioni in questione sono le ∞^3 proiettività di r in sè.

Nel caso $\pi = 1$, se è $\delta_1 = 1$, le trasformazioni del campo costituiscono un gruppo a due schiere continue ∞^1 : le proiettività che mutano in sè ciascun punto della coppia neutra, le quali costituiscono un sottogruppo, e le involuzioni che scambiano i punti della coppia. Sempre per $\pi = 1$, se è $\delta_2 = 1$, le trasformazioni del campo costituiscono il gruppo continuo ∞^2 delle proiettività che mutano in sè la coppia assegnata, che ammettono cioè come unito il punto in cui coincidono i punti della coppia.

Ad evitare nel seguito un caso che si presenta spesso come eccezionale, conviene considerare a parte anche il campo neutro χ di caratteri $p = \delta_1 = 0$, $\delta_2 = 2$. L'insieme delle trasformazioni di χ in sè è in tal caso un gruppo a due schiere continue ∞^1 : il sottogruppo delle proiettività che mutano in sè ciascuna coppia e l'insieme delle involuzioni che scambiano le coppie.

È evidente che ciascuno dei campi qui considerato è individuato, almeno di proiettività, dai suoi interi caratteristici.

2. — In un campo neutro di caratteri $p = 0$, $\pi > 1$, diverso dal campo χ , il numero dei punti distinti appartenenti alla totalità delle coppie neutre non è inferiore a 3, quindi l'insieme di tali punti e, a maggior ragione, il campo neutro, è mutato in sè da un numero finito di proiettività. Quindi:

Sopra un campo neutro di caratteri $p = 0$, $\pi > 1$, diverso dal campo χ , non può esistere che un numero finito di trasformazioni birazionali in sè.

Tale enunciato si può però estendere anche a p qualunque.

Infatti, se $p > 1$, esso è immediata conseguenza del teorema classico, perchè una trasformazione birazionale di un campo neutro è anzitutto una trasformazione birazionale del relativo campo assoluto, e di queste non ne esiste che un numero finito.

Nel caso $p = 1$, se è $\pi > 2$, ovvero $\delta_1 = 1$ e $\delta_2 = 0$, il numero dei punti distinti appartenenti alla totalità delle coppie neutre non è inferiore a 2, quindi, anche se il campo assoluto è a modulo particolare, esiste al più un numero finito di trasformazioni che mutano in sè tale totalità; se è $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 1$, esiste un numero finito di trasformazioni che mutano la coppia in sè, cioè aventi un assegnato punto unito.

Ne segue il *teorema di SCHWARZ-KLEIN in un campo neutro* ⁽³⁾:

Sopra un campo neutro di genere virtuale $\pi > 1$, diverso dal campo χ di caratteri $p = \delta_1 = 0$, $\delta_2 = 2$, non può esistere che un numero finito di trasformazioni birazionali in sè, mentre per χ e per i campi di genere virtuale $\pi \leq 1$ esistono infinite trasformazioni.

Corollari immediati sono:

Ogni trasformazione birazionale sopra un campo neutro di genere virtuale $\pi > 1$, diverso dal campo χ , è ciclica.

L'insieme di tutte le trasformazioni birazionali in sè di un campo neutro di genere virtuale $\pi > 1$, diverso dal campo χ , è un gruppo di ordine finito.

3. — D'ora in poi sia sempre $p = 0$. Ad esclusione del campo χ , già preso in esame, e per $\pi > 1$, ogni trasformazione birazionale in sè di un campo γ si rappresenterà sopra la retta r del n. 1 mediante una proiettività ciclica che muta coppie neutre in coppie neutre; e la totalità delle trasformazioni di γ darà luogo ad un gruppo finito di proiettività siffatte. Poichè quest'ultimo appartiene necessariamente ad uno dei tipi ben noti, si determineranno tutti i campi γ possedenti trasformazioni birazionali in sè studiando i sistemi di coppie di punti della r mutati in sè dai vari gruppi finiti di proiettività.

Per ciascuno di tali gruppi, e sia r il suo ordine, i possibili sistemi di coppie neutre saranno così costituiti:

a) da una coppia (A_1, B_1) di punti distinti e dalle sue r trasformate nelle trasformazioni del gruppo: (A_i, B_i) ($i = 1, 2, \dots, r$). Tali coppie sono distinte finchè A_1 e B_1 non assumono particolari posizioni e ciò accade precisamente soltanto nei seguenti casi b) e c);

b) se $A_i \equiv B_j$ ($i \neq j$), è necessariamente $A_j \equiv B_i$, allora (A_i, B_i) è una coppia di una involuzione del gruppo; le trasformate di una tale coppia sono $r/2$ distinte; potrebbero ancora tra loro coincidere quando si verificasse anche il seguente caso c), ovvero, a priori, quando la coppia appartenesse anche ad un'altra involuzione del gruppo; ma anche in questa seconda alternativa si ricadrebbe nel caso c), chè la coppia sarebbe costituita dai punti uniti della (o delle) trasformazione prodotto delle due involuzioni;

c) se $A_i \equiv A_j$ ($i \neq j$), è necessariamente $B_i \equiv B_j$, allora (A_i, B_i) è la coppia dei punti uniti di una trasformazione del gruppo, necessariamente distinti, chè in un gruppo finito non esistono proiettività paraboliche.

⁽³⁾ Questo teorema mi viene confermato dal prof. Conforto, che ha avuto occasione di dimostrarlo nelle sue ricerche

d) da una coppia (A_1, A_1) di punti coincidenti e dalle sue r trasformate nelle trasformazioni del gruppo: (A_i, A_i) ($i = 1, 2, \dots, r$). Tali coppie sono distinte a meno che non si verifichi il caso seguente;

e) (A_i, A_i) è la coppia data da un punto unito di una trasformazione del gruppo

Nel seguito mi atterrò alla distinzione ora fatta, e alla relativa denominazione. Intenderò inoltre per « coppia di punti coincidenti data dal punto A » la coppia (A, A) .

I gruppi finiti di proiettività sono, com'è ben noto:

- il gruppo ciclico C_n o gruppo della piramide;
- il gruppo diedrale D_{2n} , o gruppo della doppia piramide;
- il gruppo tetraedrale T_{12} ;
- il gruppo ottaedrale O_{24} ;
- il gruppo icosaedrale I_{60} .

Per comodità di linguaggio mi riferirò spesso al poliedro, p. es. inserito nel piano sfera, cui la trasformazione si riferisce o, meglio, alla sua proiezione sopra la sfera dal centro di quest'ultima.

Poichè ciascuno dei gruppi D, T, O, I contiene sottogruppi C , tutti i campi neutri γ che ammettono trasformazioni birazionali in se si ottengono a partire dai gruppi C_n .

Per quanto detto, l'insieme delle coppie neutre di γ è costituito da uno o più sistemi dei tipi indicati nel seguito. È da osservare che alcuni tipi non possono essere presenti contemporaneamente: essi sono indicati con $*$; P, Q, R indicano arbitrari interi non negativi.

a) i P sistemi costituiti ciascuno dalle n coppie trasformate di una generica coppia di punti distinti;

b) (quando n è pari) i Q sistemi costituiti ciascuno dalle $n/2$ coppie trasformate di una coppia di punti simmetrici rispetto all'asse della piramide (cioè coniugati nella involuzione del gruppo);

c $_*$) la coppia costituita dal vertice della piramide e dal punto opposto (cioè dai punti uniti delle trasformazioni del gruppo);

d) gli R sistemi costituiti ciascuno dalle n coppie trasformate di una generica coppia di punti coincidenti;

e $_*$) la coppia, ovvero le due coppie, di punti coincidenti data da uno o dai due punti uniti delle trasformazioni del gruppo.

Poichè, a meno della scelta del riferimento sulla r , può sempre supporre che il gruppo sia costituito dalle trasformazioni $x' = \varepsilon^s x$ ($s = 0, 1, \dots, n-1$; $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$ ⁽⁴⁾), si può dunque affermare:

(4) Ad evitare equivoci indico con π^* il rapporto tra le lunghezze di una circonferenza e del suo diametro

Tutti i campi neutri di genere effettivo nullo, che ammettono trasformazioni birazionali in sè, si possono rappresentare sopra una retta proiettiva in modo che il sistema delle coppie neutre sia uno dei seguenti :

	coppie neutre di punti distinti	coppie neutre di punti coincidenti	δ_1	δ_2	π
γ_1	$(\varepsilon^i \alpha_h, \varepsilon^i \beta_h)$ $(\varepsilon^j \alpha_k, -\varepsilon^j \alpha_k)$ $(0, \infty)$	$(\varepsilon^i \alpha_l, \varepsilon^i \alpha_l)$	$nP + \frac{n}{2} Q + 1$	nR	$\frac{n}{2} L + 1$
γ_2	$(\varepsilon^i \alpha_h, \varepsilon^i \beta_h)$ $(\varepsilon^j \alpha_k, -\varepsilon^j \alpha_k)$	$(\varepsilon^i \alpha_l, \varepsilon^i \alpha_l)$ (∞, ∞)	$nP + \frac{n}{2} Q$	$nR + 1$	$\frac{n}{2} L + 1$
γ_3	$(\varepsilon^i \alpha_h, \varepsilon^i \beta_h)$ $(\varepsilon^j \alpha_k, -\varepsilon^j \alpha_k)$	$(\varepsilon^i \alpha_l, \varepsilon^i \alpha_l)$ (∞, ∞) $(0, 0)$	$nP + \frac{n}{2} Q$	$nR + 2$	$\frac{n}{2} L + 2$
γ_4	$(\varepsilon^i \alpha_h, \varepsilon^i \beta_h)$ $(\varepsilon^j \alpha_k, -\varepsilon^j \alpha_k)$	$(\varepsilon^i \alpha_l, \varepsilon^i \alpha_l)$	$nP + \frac{n}{2} Q$	nR	$\frac{n}{2} L$

dove si deve intendere :

$$\begin{aligned}
 & i = 0, 1, \dots, n-1; j = 0, 1, \dots, n/2 - 1; \\
 & h = 1, 2, \dots, P; k = 1, 2, \dots, Q; l = 1, 2, \dots, R; \\
 & \alpha_h, \beta_h \neq 0, \infty; \alpha_h \neq -\beta_h \text{ se } n \text{ è pari;} \\
 & P, Q, R \text{ interi arbitrari non negativi; } Q = 0 \text{ se } n \text{ è dispari.}
 \end{aligned}$$

È evidente che i campi quasi iperellittici rientrano tra quelli trovati, chè essi posseggono certo la trasformazione ciclica data dalla g_2^1 neutra, e si ottengono tutti dalla tabella (1) per $n = 2$, considerando soltanto coppie b), e). Cioè :

Tutti i campi neutri quasi iperellittici di genere effettivo nullo si possono rappresentare sopra una retta proiettiva in modo che il sistema delle coppie neutre sia uno dei seguenti :

$$\begin{aligned}
 & \gamma_5 (\alpha_1, -\alpha_1), (\alpha_2, -\alpha_2), \dots, (\alpha_P, -\alpha_P) \quad \delta_1 = P, \delta_2 = 0, \pi = P \\
 (1') & \gamma_6 (\alpha_1, -\alpha_1), (\alpha_2, -\alpha_2), \dots, (\alpha_P, -\alpha_P) (\infty, \infty) \quad \delta_1 = P, \delta_2 = 1, \pi = P + 1 \\
 & \gamma_7 (\alpha_1, -\alpha_1), (\alpha_2, -\alpha_2), \dots, (\alpha_P, -\alpha_P) (\infty, \infty) (0, 0) \quad \delta_1 = P, \delta_2 = 2, \pi = P + 2.
 \end{aligned}$$

4. — Il gruppo delle trasformazioni in sè dei campi γ dati dalla (1) potrà essere più ampio di C_n , quando il campo, per certi valori dei caratteri δ_1, δ_2 , ovvero per particolari posizioni delle coppie, si può porre in più modi in una delle forme trovate. I campi così fatti si troveranno tutti, come si è già detto, esaminando gli insiemi di coppie mutati in sè dai vari gruppi D, T, O, I ; le coppie neutre dei campi in questione saranno date da uno o più sistemi dei tipi indicati qui nel seguito. I sistemi contrassegnati, per ciascun gruppo, con lo stesso numero di asterischi, non possono coesistere; H, K, L indicano interi arbitrari non negativi.

D_{2n} con n pari:

coppie di punti distinti:

- a) sistemi di $2n$ coppie trasformate di una coppia generica;
- b₁) sistemi di n coppie trasformate di una coppia simmetrica rispetto all'asse della doppia piramide;
- b₂), b₃) sistemi di n coppie trasformate di una coppia simmetrica rispetto alla congiungente due vertici opposti, ovvero punti medi di lati opposti della base;
- c_{*}) le $n/2$ coppie di vertici opposti della base;
- c_{**}) le $n/2$ coppie di punti medi di lati opposti della base;
- c_{***}) la coppia dei vertici della piramide;

coppie di punti coincidenti:

- d) sistemi di $2n$ coppie trasformate di una coppia generica:
- e_{*}) le n coppie date dai vertici della base;
- e_{**}) le n coppie date dai punti medi dei lati della base;
- e_{***}) le due coppie date dai vertici della piramide.

Caratteri:

$$\delta_1 = \frac{n}{2} H \qquad \delta_2 = n K, n K + 2$$

$$\delta_1 = \frac{n}{2} H + 1 \qquad \delta_2 = n K$$

$$\pi = \frac{n}{2} L, \frac{n}{2} L + 1, \frac{n}{2} L + 2.$$

D_{2n} con n dispari:

coppie di punti distinti:

- a) sistemi di $2n$ coppie trasformate di una coppia generica;
- b) sistemi di n coppie trasformate di una coppia simmetrica rispetto alla congiungente un vertice della base col punto medio del lato opposto;
- c_{*}) le n coppie costituite da un vertice della base e dal punto medio del lato opposto;

c_{**}) la coppia dei vertici della piramide;

coppie di punti coincidenti:

d) sistemi di $2n$ coppie trasformate di una coppia generica;

e_*) le n (ovvero le $2n$) coppie date dai vertici della base (e dai loro opposti);

e_{**}) le due coppie date dai vertici della piramide.

Caratteri:

$$\delta_1 = nH \qquad \delta_2 = nK, nK + 2$$

$$\delta_1 = nH + 1 \qquad \delta_2 = nK$$

$$\pi = nL, nL + 1, nL + 2.$$

T :

coppie di punti distinti:

a) i sistemi di 12 coppie trasformate di una coppia generica;

b) i sistemi di 6 coppie trasformate di una coppia di una involuzione del gruppo;

c_*) le 4 coppie costituite ciascuna da un vertice e dal punto opposto;

c_{**}) le 3 coppie costituite ciascuna dai punti medi di due spigoli opposti;

coppie di punti coincidenti:

d) sistemi di 12 coppie trasformate di una coppia generica;

e_*) le 4 (8) coppie date dai vertici (e dai punti ad essi opposti):

e_{**}) le 6 coppie date dai punti medi degli spigoli.

Caratteri:

$$\delta_1 = 6H \qquad \delta_2 = 12K, +4, +6, +8, +10, +14$$

$$6H + 3 \qquad 12K, +4, +8$$

$$6H + 4 \qquad 12K, +6$$

$$6H + 7 \qquad 12K$$

$$\pi = 6L, +3, +4, +7, +8, +11.$$

O :

coppie di punti distinti:

a) sistemi di 24 coppie trasformate di una coppia generica;

b_1) sistemi di 12 coppie trasformate di una coppia di una delle involuzioni che mutano in sè due spigoli (opposti);

b_2) sistemi di 12 coppie trasformate di una coppia di una delle involuzioni che mutano in sè due vertici (opposti);

c_*) le 3 coppie di vertici opposti;

c_{**}) le 4 coppie di centri di facce opposte;

c_{***}) le 6 coppie di punti medi di spigoli opposti;

coppie di punti coincidenti :

d) sistemi di 24 coppie trasformate di una coppia generica ;

e_{*}) le 6 coppie date dai vertici ;

e_{**}) le 8 coppie date dai centri delle facce ;

e_{***}) le 12 coppie date dai punti medi degli spigoli.

Caratteri :

$$\begin{array}{ll} \delta_1 = 12 H & \delta_2 = 24 K, + 6, + 8, + 12, + 14, + 18, + 20, + 26 \\ 12 H + 3 & 24 K, + 8, + 12, + 20 \\ 12 H + 4 & 24 K, + 6, + 12, + 18 \\ 12 H + 6 & 24 K, + 6, + 8, + 14 \\ 12 H + 7 & 24 K, + 12 \\ 12 H + 9 & 24 K, + 8 \\ 12 H + 10 & 24 K, + 6 \\ 12 H + 13 & 24 K \end{array}$$

$$\pi = 12 L, + 3, + 4, + 6, + 7, + 8, + 9, + 10, + 11, + 13, + 14, + 17.$$

I :

coppie di punti distinti :

a) sistemi di 60 coppie trasformate di una coppia generica ;

b) sistemi di 30 coppie trasformate di una coppia di una involuzione

del gruppo ;

c_{*}) le 6 coppie di vertici opposti ;

c_{**}) le 10 coppie di centri di facce opposte ;

c_{***}) le 15 coppie di punti medi di spigoli opposti ;

coppie di punti coincidenti :

d) sistemi di 60 coppie trasformate di una coppia generica ;

e_{*}) le 12 coppie date dai vertici ;

e_{**}) le 20 coppie date dai centri delle facce ;

e_{***}) le 30 coppie date dai punti medi degli spigoli.

Caratteri :

$$\begin{array}{ll} \delta_1 = 30 H & \delta_2 = 60 K, + 12, + 20, + 30, + 32, + 42, + 50, + 62 \\ 30 H + 6 & 60 K, + 20, + 30, + 50 \\ 30 H + 10 & 60 K, + 12, + 30, + 42 \\ 30 H + 15 & 60 K, + 12, + 20, + 32 \\ 30 H + 16 & 60 K, + 30 \\ 30 H + 21 & 60 K, + 20 \\ 30 H + 25 & 60 K, + 12 \\ 30 H + 31 & 60 K \end{array}$$

$$\pi = 30 L, + 6, + 10, + 12, + 15, + 16, + 20, + 21, + 22, + 25, \\ + 26, + 27, + 31, + 32, + 35, + 37, + 41, + 47.$$

5. — Secondo un teorema di HURWITZ (5), una curva algebrica di genere p non può possedere più di $84(p-1)$ trasformazioni birazionali in sè. Ora tale proprietà può estendersi ai campi neutri di genere effettivo nullo, ed anzi la limitazione può essere notevolmente migliorata; precisamente:

I. Un campo neutro di genere effettivo nullo e genere virtuale $\pi > 1$, diverso dal campo χ di caratteri $\pi = \delta_2 = 2$, $p = \delta_1 = 0$, possiede al più $12(\pi-1)$ trasformazioni birazionali in sè.

II. Un campo neutro di genere effettivo nullo e genere virtuale $\pi > 1$, diverso campo χ dell'enunciato precedente e dai campi realizzabili sopra la sfera, riemanniana di una retta, mediante le seguenti coppie neutre:

- χ_1 coppie di vertici opposti di un ottaedro
- χ_2 coppie di centri di facce opposte di un ottaedro
- χ_3 coppie di vertici opposti di un icosaedro
- χ_4 coppie di centri di facce opposte di un icosaedro
- χ_5 coppie di punti coincidenti date dai vertici di un icosaedro

possiede al più 4π trasformazioni birazionali in sè.

I campi sopra elencati hanno rispettivamente i seguenti caratteri:

χ_1	$\pi = \delta_1 = 3,$	$p = \delta_2 = 0,$	24 trasformazioni
χ_2	4,	0,	24
χ_3	6,	0,	60
χ_4	10,	0,	60
χ_5	$\pi = \delta_2 = 12,$	$p = \delta_1 = 0,$	60

La limitazione data dal teorema II non può essere migliorata se non escludendo infiniti tipi di campi.

Per dimostrare i due teoremi basta esaminare, per ciascuno dei gruppi C, D, T, O, I del n. 3 il genere minimo dei campi neutri ad esso relativi, trascurando, s'intende, i casi $\pi \leq 1$ ed il campo χ , ove questi compaiano. Indicando con ν il numero delle trasformazioni in sè del campo, si ha:

C : il genere minimo, per n pari o dispari rispettivamente, dato dal caso γ_4 della (1) per $P = R = 0, Q = 1$ se n è pari, e $P = Q = 0, R = 1$, ovvero $Q = R = 0, P = 1$ se n è dispari, è:

$$(2) \quad \begin{array}{l} \pi = \frac{n}{2} \\ \pi = n \end{array} \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} \nu = n \\ \nu = n. \end{array}$$

(5) A. HURWITZ: Ueber algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich, Math. Ann., XLI, 1893, p. 403.

D : il genere minimo, per n pari o dispari rispettivamente, dato dai sistemi c_* o c_{**} , ovvero da b) o c_* o e_* , è:

$$(3) \quad \begin{array}{lll} \pi = \frac{n}{2} & \text{con} & \nu = 2n \\ \pi = n & \text{»} & \nu = 2n. \end{array}$$

T : il genere minimo, dato da c_{**} , è:

$$(4) \quad \pi = 3 \quad \text{con} \quad \nu = 12.$$

O : il genere minimo, dato dal campo χ_1 , è:

$$(5) \quad \pi = 3 \quad \text{con} \quad \nu = 24;$$

il valore successivo del genere, dato dal campo χ_2 , è:

$$(6) \quad \pi = 4 \quad \text{con} \quad \nu = 24;$$

il valore ancora successivo, dato da c_{***} o c_* , è:

$$(7) \quad \pi = 6 \quad \text{con} \quad \nu = 24.$$

I : il genere minimo, dato dal campo χ_3 , è:

$$(8) \quad \pi = 6 \quad \text{con} \quad \nu = 60;$$

i valori successivi del genere, dati dai campi χ_4 e χ_5 e dal sistema c_{***} , sono rispettivamente:

$$(9) \quad \pi = 10 \quad \text{con} \quad \nu = 60,$$

$$(10) \quad \pi = 12 \quad \text{»} \quad \nu = 60,$$

$$(11) \quad \pi = 15 \quad \text{»} \quad \nu = 60.$$

Ora, i valori di ν e π dati dalle (2), (3), ..., (11) e quindi, a maggior ragione, quelli relativi ai campi trascritti, verificano la limitazione del teorema I, e quelli dati da (2), (3), (4), (7), (11) e, a maggior ragione, quelli relativi a tutti i campi del teorema II, soddisfanno la $\nu \leq 4\pi$.

Che quest'ultima limitazione sia la più stretta possibile è provato dal fatto che, comunque si scelga π , posto $\delta_1 = \pi$, $\delta_2 = 0$, $n = 2\pi$, il sistema c_* o c_{**} di D_{2n} , con n pari, dà appunto l'insieme delle coppie neutre di un campo di genere π con $2n = 4\pi$ trasformazioni birazionali in sè.

Il campo or ora costruito è iperellittico, ed anzi, se $\pi \neq 3, 6, 15$, esso è l'unico per il quale nella limitazione del teorema II vale l'uguaglianza, come è facile verificare tenendo presenti gli schemi dei nn. precedenti. Per i valori ora esclusi di π si possono avere anche altri casi, oltre a quello iperellittico: coppie di punti medi di spigoli opposti di un tetraedro, ottaedro, icosaedro, ovvero coppie di punti coincidenti date dai vertici di un ottaedro. In altre parole:

III. *I campi neutri di genere effettivo nullo e genere virtuale $\pi > 3$, diverso da 6 e 15, i quali ammettono esattamente 4π trasformazioni birazionali in sè (identità inclusa) sono necessariamente quasi iperellittici, ovvero:*

III'. *I campi neutri di genere effettivo nullo e genere virtuale $\pi > 4$, diverso da 6, 10, 12, 15, i quali ammettono almeno 4π trasformazioni birazionali in sè, sono necessariamente quasi iperellittici*

Un'altra proprietà, analoga a quella di HURWITZ⁽⁶⁾ secondo la quale il periodo di una trasformazione in sè di una curva di genere p non supera $10(p-1)$, e che si dimostra come il teorema II di questo n., è la seguente:

IV. *Il periodo di una trasformazione birazionale in sè di un campo neutro di genere effettivo nullo e genere virtuale $\pi > 1$, diverso dal campo χ , non supera 2π .*

6. — I. *Comunque si fissino gli interi δ_1, δ_2 , esiste un campo neutro di caratteri $p = 0, \delta_1, \delta_2$, che possiede trasformazioni birazionali in sè.*

Infatti, dalla (1), posto $n = 2$ e disponendo degli interi P, Q , si può far sì che δ_1, δ_2 acquistino valori qualsiasi.

II. *Non appena $\delta_1 + \delta_2 > 2$, esistono campi che non sono quasi iperellittici e soddisfanno alle condizioni dell'enunciato precedente.*

Esempi del tipo voluto sono forniti dalla (1), per $n = 2$, dai casi seguenti:

$$\begin{array}{ll} \text{se } \delta_1 \geq 2 & \gamma_2 \text{ o } \gamma_4, \quad \text{con } P \geq 1; \\ \text{se } \delta_1 = 0, 1 (\delta_2 \geq 3, 2) & \gamma_2 \text{ o } \gamma_4, \quad \text{con } R \geq 1. \end{array}$$

Non mi intrattengo a dimostrare che le coppie neutre dei campi così costruiti non appartengono ad alcuna involuzione, quando non siano scelte in maniera particolare.

È però evidente che i campi che ammettono trasformazioni in sè sono, in un certo senso, e di regola, particolari. Per precisare tale affermazione,

(6) A. HURWITZ: *Ueber diejenigen algebraischen Gebilde, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen*, Math. Ann., XXVII, 1888, p. 290.

si chiamino, con SEVERI (7), *moduli* di un campo neutro di genere effettivo nullo i $2\delta_1 + \delta_2 - 3$ parametri dai quali dipende, a meno del riferimento proiettivo, la scelta di un campo neutro (di genere effettivo nullo), per esempio i birapporti indipendenti che si possono formare con i punti delle coppie neutre. La denominazione di « moduli » è giustificata dal fatto che essi, essendo invarianti per proiettività, risultano, nel caso specifico $p = 0$, anche invarianti birazionali del campo neutro, in conseguenza della definizione data nell'introduzione. Si badi bene però che tali moduli non hanno nulla a che vedere con i moduli di un corpo di funzioni quasi abeliane, chè un tale corpo, se ha nullo il carattere p , non dipende da alcun modulo (8).

Ciò posto, avrà senso parlare, per ciascuna coppia di valori δ_1, δ_2 , di campi neutri (di genere effettivo nullo) *a moduli generali*.

Tenendo presente che un gruppo generico di più di quattro punti di una retta non è mutato in sè da alcuna proiettività, sono certo a moduli particolari quei campi neutri che possiedono trasformazioni birazionali in sè e per i quali $2\delta_1 + \delta_2 > 4$.

Quelli per i quali $2\delta_1 + \delta_2 \leq 4$ (e $\delta_1 + \delta_2 \geq 2$) sono :

χ	$\delta_1 = 0$	$\delta_2 = 2$
ψ_1	1	1
ψ_2	0	3
ψ_3	2	0
ψ_4	1	2
ψ_5	0	4

e possiedono sempre almeno le seguenti trasformazioni birazionali in sè : χ, ψ_1, ψ_3 quella data dalla g_2^1 neutra, ψ_2 le proiettività che permutano le tre coppie, ψ_5 le involuzioni che scambiano le coppie a due a due, ψ_4 l'involuzione che scambia i punti della coppia di punti distinti e che permuta le altre due coppie. Ne segue che :

III. *I soli campi neutri di genere effettivo nullo e a moduli generali, i quali ammettono trasformazioni birazionali in sè, sono quelli di caratteri :*

$$\begin{aligned} \pi &= 0, 1, 2 \\ \pi &= 3, \quad \delta_1 = 0, \delta_2 = 3 \\ \pi &= 3, \quad \delta_1 = 1, \delta_2 = 2 \\ \pi &= 4, \quad \delta_1 = 0, \delta_2 = 4. \end{aligned}$$

(7) F. Q. A., n. 21.

(8) F. Q. A., n. 55.

Dall'enunciato precedente e dall'osservazione che i campi ψ_2 e ψ_5 , nonchè ψ_4 , quando il gruppo dei quattro punti non sia armonico, non sono quasi iperellittici, segue immediatamente l'affermazione, del resto a priori molto evidente, che:

IV. *Tutti i campi quasi iperellittici di genere effettivo nullo e genere virtuale maggiore di due sono a moduli particolari* (tra i campi degli stessi caratteri δ_1, δ_2).

Il numero di tali moduli è precisamente $\delta_1 - 1$ ($= \pi - 1, \pi - 2, \pi - 3$ rispettivamente nei casi $\gamma_5, \gamma_6, \gamma_7$), ed esso risulta minore di $2\delta_1 + \delta_2 - 3$ non appena $\delta_1 + \delta_2 > 2$.

V. *Tra i campi neutri di genere effettivo nullo, i quali ammettono trasformazioni birazionali in sé, solo un numero finito di tipi non dipende da moduli.*

Senza soffermarmi sulla ovvia dimostrazione, osservo che possono non dipendere da moduli solo quelli in cui esistono coppie ben determinate, cioè date da punti uniti della trasformazione del gruppo, ovvero per i valori bassi di π , come potrebbe essere p. es. il caso γ_7 con $P = 1$.

7. — Il campo neutro sia realizzato, al solito, sopra una retta r , sulla quale è distesa un'ascissa x , assegnando le coppie neutre di punti distinti (α_s, β_s) ($s = 1, 2, \dots, \delta_1$) e le coppie neutre di punti coincidenti (α_t, α_t) ($t = \delta_1 + 1, \delta_1 + 2, \dots, \delta_1 + \delta_2$).

Un sistema di integrali normali virtualmente di prima specie del campo è allora ⁽⁹⁾:

$$(12) \quad v_s = \log \frac{x - \alpha_s}{x - \beta_s}, \quad v_t = \frac{1}{x - \alpha_t} \quad (s = 1, 2, \dots, \delta_1; t = \delta_1 + 1, \dots, \delta_1 + \delta_2),$$

o quelli, di forma lievemente diversa, che si hanno quando un punto della coppia sia il punto improprio:

$$(12') \quad v^* = \log(x - \alpha^*), \quad v^{**} = x.$$

La tabella dei periodi è in ogni caso:

$$(13) \quad \omega = \begin{vmatrix} B^{(\delta_1, \delta_1)} \\ O^{(\delta_2, \delta_1)} \end{vmatrix},$$

ove B è la matrice diagonale d'ordine δ_1 per la quale gli elementi della diagonale principale sono tutti $2\pi^* i$.

(9) F. Q. A., n. 29.

Il campo ammetta trasformazioni birazionali in sè, e sia τ una di esse :

$$x' = \tau(x) = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Sono anzitutto di banale verifica le formule :

$$(14) \quad \log \frac{\tau(x) - \alpha}{\tau(x) - \beta} = \log \frac{x - \tau^{-1}(\alpha)}{x - \tau^{-1}(\beta)} + \log \frac{a - \alpha c}{a - \beta c},$$

$$\frac{1}{\tau(x) - \alpha} = \frac{(c \tau^{-1}(\alpha) + d)^2}{ad - bc} \frac{1}{x - \tau^{-1}(\alpha)} + \frac{c(c \tau^{-1}(\alpha) + d)}{ad - bc}$$

$$(14') \quad \log(\tau(x) - \alpha) = \log \frac{x - \tau^{-1}(\alpha)}{x - \tau^{-1}(\infty)} + \log \left(\frac{a}{c} - \alpha \right),$$

$$\tau(x) = - \frac{ad - bc}{c^2} \frac{1}{x - \tau^{-1}(\infty)} + \frac{a}{c}.$$

Si osservi che se la coppia (α, β) , o (α, α) , è una coppia neutra del campo, lo è pure $\tau^{-1}(\alpha, \beta) = (\tau^{-1}(\alpha), \tau^{-1}(\beta))$, ovvero $\tau^{-1}(\alpha, \alpha) = (\tau^{-1}(\alpha), \tau^{-1}(\alpha))$. Dopo di ciò siano $v_1, \pm v_2, v_3, v_4$ gli integrali (12) o (12') relativi rispettivamente alle coppie $(\alpha, \beta), \tau^{-1}(\alpha, \beta), (\alpha, \alpha), \tau^{-1}(\alpha, \alpha)$, il doppio segno essendo dovuto all'ambiguità della scelta dell'ordine nella coppia; dalle (14) segue immediatamente :

$$(15) \quad v'_1 = \pm v_2 + \log \frac{a - \alpha c}{a - \beta c}, \quad v'_3 = \frac{(c \tau^{-1}(\alpha) + d)^2}{ad - bc} v_4 + \frac{c(c \tau^{-1}(\alpha) + d)}{ad - bc},$$

dove si è indicato con $v'_i = v_i(x')$ il valore assunto dall'integrale $v_i = v_i(x)$ nel punto x' corrispondente del punto x nella τ . Se in una coppia interviene il punto improprio, le (15) divengono :

$$(15') \quad v'_1 = \pm v_2 + \log \frac{-c\alpha + a}{c}, \quad v'_3 = - \frac{ad - bc}{c^2} v_4 + \frac{a}{c}.$$

Non è escluso, naturalmente, che l'integrale $v_2[v_4]$ possa coincidere, eventualmente a meno del segno, con l'integrale $v_1[v_3]$, chè la relativa coppia potrebbe essere mutata in sè dalla τ . Inoltre i coefficienti degli integrali nei secondi membri delle (15), (15') sono: ± 1 per quelli relativi a coppie di punti distinti, costanti complesse non nulle per quelli relativi a coppie di punti coincidenti: basta osservare nella seconda delle (15), l'unica

dove tale osservazione non è immediata di per sè, non può essere $c\tau^{-1}(x) + d = 0$, chè sarebbe $\alpha = \infty$ e si ricadrebbe nella seconda delle (15'). In ogni caso dunque:

I. Una trasformazione birazionale in sè di un campo neutro di genere effettivo nullo e di caratteri δ_1, δ_2 opera sugli integrali normali virtualmente di prima specie del campo una sostituzione lineare del tipo:

$$(16) \quad v' = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & \gamma \end{vmatrix} v + \lambda_1,$$

dove v, v' indicano le matrici del tipo $(\pi, 1)$ ⁽¹⁰⁾ formate dai valori degli integrali in un punto e nel punto trasformato; $a^{(\delta_1, \delta_1)}, \gamma^{(\delta_2, \delta_2)}$ sono matrici che contengono in ciascuna riga e in ciascuna colonna un solo elemento non nullo; a è inoltre unimodulare (e quindi tali elementi sono uguali a ± 1) e γ è ad elementi complessi; $\lambda_1^{(\pi, 1)}$ è una matrice ad elementi complessi definiti a meno di periodi (dati dalla matrice ω).

Se si considera la varietà quasi abeliana di JACOBI V_π relativa al campo γ , la quale è definita, a meno di trasformazioni birazionali, come la varietà dei gruppi di π punti della curva sostegno del campo (per $p = 0$ essa è una varietà razionale) le quantità ⁽¹¹⁾:

$$u_r = v_r(x_1) + v_r(x_2) + \dots + v_r(x_\pi) \quad (r = 1, 2, \dots, \pi),$$

essendo x_1, x_2, \dots, x_π un gruppo di π punti della retta sostegno del campo, sono funzioni del punto di V_π , definite mod. ω , e, per il teorema di inversione in un campo neutro ⁽¹²⁾, le coordinate del punto di V_π sono funzioni quasi abeliane delle u_r , con la matrice dei periodi ω . Le u_1, u_2, \dots, u_π risultano integrali normali virtualmente di prima specie di funzioni razionali sulla V_π .

Una trasformazione birazionale τ del campo in sè, intesa come trasformazione dei gruppi di π punti, induce una trasformazione birazionale T sopra la V_π . In base all'enunciato I di questo n., e alla definizione degli integrali u_r , la T induce su questi ultimi la trasformazione:

$$(17) \quad u' = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & \gamma \end{vmatrix} u + \lambda,$$

⁽¹⁰⁾ Si intende per matrice M del tipo (p, q) una matrice a p righe e q colonne, e la si indicherà con $M^{(p, q)}$.

⁽¹¹⁾ F. Q. A.; n. 29.

⁽¹²⁾ F. Q. A., n. 26.

ove a, γ sono le medesime matrici della (16), e $\lambda = \pi \lambda_1$, sempre definita mod. ω .

Tali trasformazioni sono quindi casi particolari di una classe molto più vasta, esistente su V_π , che comprende tutte e sole le trasformazioni analitiche e biunivoche della V_π (con $p = 0$) rappresentabili mediante congruenze lineari tra gli integrali virtualmente di prima specie. Tali trasformazioni sono state studiate da CONFORTO ⁽¹³⁾; il risultato fondamentale è che tali trasformazioni sono date tutte e sole, e ciascuna una volta sola, dalle:

$$(18) \quad u' = \begin{vmatrix} a & \beta \\ 0 & \gamma \end{vmatrix} u + \lambda,$$

ove: $a^{(\delta_1, \delta_1)}$ è una matrice unimodulare; $\beta^{(\delta_1, \delta_2)}, \gamma^{(\delta_2, \delta_2)}$ sono matrici arbitrarie del loro tipo, ad elementi complessi, purchè il determinante della γ sia non nullo; $\lambda^{(\pi, 1)}$ è una matrice arbitraria ad elementi complessi, ma, per ciascuna trasformazione, determinata a meno di periodi.

Tra le trasformazioni di CONFORTO sono birazionali quelle per le quali $\beta = 0$, ovvero tutte se, essendo $\delta_1 \delta_2 = 0$, β manca nella (18).

Ora le (17) sono evidentemente casi particolari delle (18), ed anzi di quelle (18) che danno trasformazioni birazionali; quindi:

II. *Il gruppo delle trasformazioni indotte sopra la varietà quasi abeliana di JACOBI relativa ad un campo neutro di genere effettivo nullo dalle trasformazioni birazionali in sè del campo, è un sottogruppo (di trasformazioni birazionali) del gruppo delle trasformazioni di CONFORTO.*

Tale enunciato comporta la seguente osservazione.

Si presenta il fatto singolare che le trasformazioni trovate, per ciascun campo γ , esistono *sempre* sulla varietà quasi abeliana di JACOBI avente i caratteri di γ , ma acquistano un particolare significato geometrico — quello di provenire da trasformazioni di γ — quando il campo diventi tale da ammettere trasformazioni in sè.

I risultati di questo n. valgono anche per il campo χ , più volte escluso da considerazioni generali, perchè, se $(0, 0)$ e (∞, ∞) sono le coppie neutre, le proiettività $x' = \gamma_{11} x, x' = \gamma_{12}/x$ inducono sugli integrali $u_1 = x_1 + x_2$,

$u_2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ le trasformazioni:

$$u' = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \\ & 1 \\ & & \gamma_{11} \end{vmatrix} u, \quad u' = \begin{vmatrix} & \gamma_{12} \\ 1 & \\ & & \gamma_{12} \end{vmatrix} u,$$

⁽¹³⁾ F. CONFORTO : *Sopra le trasformazioni in sè della varietà di Jacobi relativa ad una curva di genere effettivo diverso dal genere virtuale, in ispecie nel caso di genere effettivo nullo*, Ann. di Mat., (4) XXVII, 1948, p. 273

