ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GAETANO FICHERA

Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno, relativi all'equilibrio di un corpo elastico

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 4, nº 1-2 (1950), p. 35-99
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1950_3_4_1-2_35_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SULL'ESISTENZA E SUL CALCOLO DELLE SOLUZIONI DEI PROBLEMI AL CONTORNO, RELATIVI ALL'EQUILIBRIO DI UN CORPO ELASTICO (1)

di GAETANO FICHERA (Roma)

INTRODUZIONE

I problemi d'integrazione delle classiche equazioni dell'elastostatica sono stati oggetto, com'è a tutti noto, di un'imponente quantità di lavori, diversi dei quali giustamente famosi nella letteratura matematica. Tuttavia non si può affermare che detti problemi, quando vengano considerati per domini di forma arbitraria, abbiano avuto un'esauriente trattazione sia dal punto di vista esistenziale che da quello dell'effettiva determinazione numerica delle soluzioni. Infatti, per quanto riguarda il teorema di esistenza, solo il caso in cui sulla frontiera del dominio sono assegnati i valori degli spostamenti è stato diffusamente trattato, e sono particolarmente interessanti le dimostrazioni che di tale teorema dànno il LAURICELLA (2) e il LICHTENSTEIN (3), dimostrazioni che sono però sempre relative al caso di domini la cui frontiera è sprovvista di singolarità. Meno trattato è invece il problema nel quale su tutta la frontiera sono assegnate combinazioni lineari delle derivate parziali prime degli spostamenti, che possono assumere il significato fisico di componenti di forze, agenti sulla superficie esterna del corpo elastico. La questione sempre per domini a frontiera regolare si può dire risoluta dal KORN (4), il quale in una vastissima Memoria perviene a dimostrare il teorema di esistenza per il problema dell'equilibrio di un corpo elastico, sottoposto ad un assegnato sistema di forze, mediante un procedimento di approssimazioni successive, ma non può certo dirsi che il metodo seguìto

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del calcolo.

(2) LAURICELLA [1] ved. bibliografia alla fine del lavoro.

(3) LICHTENSTEIN [1].

(4) KORN [1]

sia semplice. La ragione della complicazione risiede però nella natura stessa della questione, poichè, mentre il problema di assegnati spostamenti superficiali può riguardarsi come la naturale estensione alle equazioni dell'elasticità di quello di DIRICHLET per le funzioni armoniche, non può dirsi che il problema delle tensioni sia l'analogo di quello di NEUMANN per tali funzioni. Esso ha invece come equivalente nella teoria del potenziale un problema di derivata obliqua e, pertanto, ove si volesse estendere, per conseguire il teorema di esistenza, il metodo, che l'abate BERTRAND (5), prima, e il GIRAUD (6) poi, hanno adottato per stabilire l'esistenza di una funzione armonica di assegnata derivata obliqua, consistente nel rappresentare l'incognita per mezzo di un semplice strato, di cui si determina la densità, risolvendo una equazione integrale a nucleo non sommabile, si perverrebbe alla traduzione del problema in un sistema di equazioni integrali a nuclei non sommabili, ma, soltanto, ad integrale convergente nel senso di CAUCHY. È assai presumibile che ad un tale sistema possano estendersi i classici teoremi di FREDHOLM, ciò che è già stato fatto in casi particolari, ad esempio quando il sistema si riduce ad una sola equazione (7). Questo consentirebbe un rapido conseguimento del teorema di esistenza. La sopraddetta estensione appare, però, tutt'altro che semplice.

Non mi consta che sia poi stato mai trattato il problema al contorno misto, che presenta un ordine di difficoltà ancóra superiore, rispetto ai due problemi precedenti, specie se le due parti della frontiera del corpo, sulle quali, rispettivamente, sono assegnati gli spostamenti e le tensioni non risultano staccate. Nè mi pare che siano stati mai considerati procedimenti intesi a dimostrare la convergenza di metodi di calcolo delle soluzioni dei vari problemi al contorno.

In questa Memoria, ispirandomi ai metodi generali d'integrazione delle equazioni alle derivate parziali, che il mio Maestro, prof. Mauro PICONE (8), ha introdotto nell'Analisi e che, discostandosi dagli ordinari procedimenti, si basano su un'interpretazione funzionale delle formule di reciprocità, pervengo a teoremi di esistenza per i problemi al contorno, di vario tipo, di cui si è dianzi parlato, teoremi che vengono acquisiti anche per domini con frontiera avente singolarità, nonchè a procedimenti per il calcolo delle soluzioni.

Un'idea che si è rivelata efficacissima, non solo per il conseguimento di quest'ultimo scopo, ma addirittura per poter pervenire alla dimostrazione

---

(5) BERTRAND [1].
(6) GIRAUD [1].
(7) GIRAUD [2].
(8) PICONE [1] pagg. 752-65, [2], [3].

di teoremi d'esistenza, deriva da un metodo proposto dal PICONE per il calcolo di vettori che siano soluzioni di equazioni alle derivate parziali, per le quali, detta $\mathcal{F}\mathcal{D}$ la frontiera del dominio $\mathcal{D}$, sussista una formula di reciprocità, ad esempio, del tipo seguente

$$\int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} \{u\, L[v] - v\, L[u]\}\, d\sigma = 0$$

essendo L un certo operatore lineare. Se allora si dispone di un sistema $\{v_i\}$ di soluzioni particolari che gode di opportune proprietà di completezza e si fa l'ipotesi che, ad esempio, su $\mathcal{F}\mathcal{D}$ sia assegnato $L[u]$. Posto

$$u_n = \Sigma\, c_i^{(n)}\, v_i\,, \qquad \gamma_j = \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} v_j\, L[u]\, d\sigma\,,$$

si ottiene dalla precedente relazione, sostituendo u con u_n

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^{(n)} \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} v_i\, L[v_j]\, d\sigma = \gamma_j \qquad (j = 1\,, 2\,, \dots, n)\,:$$

Si tratta di stabilire se per ogni n il sistema è compatibile e di decidere se u_n converge e se il suo limite dà la soluzione del problema.

L'espletamento di tale indagine si rivela interessante, oltre che per i risultati a cui conduce, anche per i mezzi analitici il cui impiego essa richiede e che conducono a stabilire risultati di Analisi funzionale lineare, che già di per sè possono, forse, avere qualche importanza.

Strumento molto efficace si rivela anche una teoria generale dei potenziali di semplice e doppio strato, intesi in un senso più esteso del consueto, i cui risultati contengono come casi particolari non solo quelli classici, ben noti, ma anche quelli più generali ottenuti da EVANS e MILES (9).

(9) EVANS-MILES [1].

CAPITOLO I.

Formole di Green e teoremi di unicità

1. POSIZIONE DEI PROBLEMI. — Sia $\mathfrak{D}$ un dominio dello spazio euclideo $x_1 x_2 x_3$ la cui frontiera $\mathcal{F}\mathfrak{D}$ sia costituita da un numero finito di porzioni di superficie regolari, noi considereremo in $\mathfrak{D} - \mathcal{F}\mathfrak{D}$ il seguente sistema di tre equazioni differenziali nelle componenti u_1, u_2, u_3 del vettore incognito u, funzione del punto $x \equiv (x_1, x_2, x_3)$:

$$(1) \qquad \begin{cases} \Delta_2 u_1 + k \dfrac{\partial \vartheta}{\partial x_1} = f_1 , \\[2ex] \Delta_2 u_2 + k \dfrac{\partial \vartheta}{\partial x_2} = f_2 , \qquad \vartheta = \operatorname{div} u = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} . \\[2ex] \Delta_2 u_3 + k \dfrac{\partial \vartheta}{\partial x_3} = f_3 , \end{cases}$$

Vettorialmente questo sistema si scrive al modo seguente

$$(1') \qquad \Delta_2 u + k \operatorname{grad} \operatorname{div} u = f \text{ [10]}.$$

Il vettore $f \equiv (f_1, f_2, f_3)$ si suppone assegnato in $\mathfrak{D} - \mathcal{F}\mathfrak{D}$; k è una costante numerica nota.

Con $\nu \equiv (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ indicheremo il versore sulla normale a $\mathcal{F}\mathfrak{D}$ in un suo punto, diretto verso l'interno di $\mathfrak{D}$ e porremo

$$\frac{d u}{d \nu} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \nu_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \nu_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3} \nu_3 ,$$

$$\frac{d u_i}{d \nu} = \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \nu_1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \nu_2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_3} \nu_3 , \qquad (i = 1, 2, 3) .$$

---

[10] Avverto che con $\Delta_2 u$ indico il vettore le cui componenti, rispetto ad una terna trirettangola levogira, si ottengono prendendo i laplaciani delle corrispondenti componenti di u rispetto alla stessa terna

Con $L[u]$ denoteremo il vettore così definito su $\mathcal{F}\mathcal{D}$, indicata con λ una costante numerica:

$$L[u] = (k - \lambda) \operatorname{div} u \,.\, \nu + (1 + \lambda) \frac{d\,u}{d\,\nu} + \lambda (\nu \wedge \operatorname{rot} u)\,.$$

Si ottiene per le componenti di $L[u]$:

$$L_1[u] = \frac{d\,u_1}{d\,\nu} + k\,\vartheta\,\nu_1 + \lambda \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \nu_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \nu_3 - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \nu_1 - \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \nu_1 \right),$$

$$L_2[u] = \frac{d\,u_2}{d\,\nu} + k\,\vartheta\,\nu_2 + \lambda \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \nu_3 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \nu_1 - \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \nu_2 - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \nu_2 \right),$$

$$L_3[u] = \frac{d\,u_3}{d\,\nu} + k\,\vartheta\,\nu_3 + \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \nu_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \nu_2 - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \nu_3 - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \nu_3 \right).$$

I problemi che considereremo sono i tre seguenti: determinare un vettore u verificante in $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$ la (1), avendo assegnato:

1^0) il vettore u su tutta $\mathcal{F}\mathcal{D}$,

2^0) il vettore $L[u]$ su tutta $\mathcal{F}\mathcal{D}$,

3^0) su una parte $\mathcal{F}_1\mathcal{D}$ di $\mathcal{F}\mathcal{D}$ il vettore u, sulla restante parte $\mathcal{F}_2\mathcal{D}$ il vettore $L[u]$.

Verremo in seguito a determinare intervalli entro cui debbono variare k e λ perchè sussistano teoremi di unicità e di esistenza e procedimenti per il calcolo della soluzione. A questi intervalli appartengono le costanti dell'elasticità.

Per $k = \lambda = 0$ si ottengono, in particolare, i noti problemi al contorno per l'equazione $\Delta_2 u = f$.

2. Formole di Green. — Supponiamo che il dominio $\mathcal{D}$ sia limitato e siano u e u' due vettori continui in $\mathcal{D}$ assieme alle loro derivate prime, o, come anche si dice, secondo una locuzione del Picone, ***biregolari*** in $\mathcal{D}$, e aventi le derivate seconde continue in $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$ e sommabili in $\mathcal{D}$. Impiegando procedimenti, ormai d'uso comune, si dimostrano le seguenti formole di Green

$$(2) \qquad \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} \{ u \times L[u'] - u' \times L[u] \}\, d\,\sigma + \int_{\mathcal{D}} \{ u \times (\Delta_2 u' + k \operatorname{grad} \operatorname{div} u') -$$

$$- u' \times (\Delta_2 u + k \operatorname{grad} \operatorname{div} u) \}\, d\,T = 0$$

$$(3)\qquad \int_{\mathcal{FD}} \{u \times L[u]\}\, d\sigma + \int_{\mathcal{D}} \{u \times (\Delta_2 u + k \operatorname{grad} \operatorname{div} u)\}\, d\,T +$$

$$+ \int_{\mathcal{D}} \Big\{ k (\operatorname{div} u)^2 + |\operatorname{grad} u_1|^2 + |\operatorname{grad} u_2|^2 + |\operatorname{grad} u_3|^2 +$$

$$+ 2\lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \Big\}\, d\,T = 0.$$

Con $\overline{xy}$ denoteremo la distanza fra i due punti x e y. Supposto $k \neq -1$ si consideri la seguente matrice (di SOMIGLIANA)

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{1}{\overline{xy}} - \alpha_k \dfrac{\partial^2 \overline{xy}}{\partial x_1^2} & -\alpha_k \dfrac{\partial^2 \overline{xy}}{\partial x_1 \partial x_2} & -\alpha_k \dfrac{\partial^2 \overline{xy}}{\partial x_1 \partial x_3} \\[2ex] -\alpha_k \dfrac{\partial^2 \overline{xy}}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{1}{\overline{xy}} - \alpha_k \dfrac{\partial^2 \overline{xy}}{\partial x_2^2} & -\alpha_k \dfrac{\partial^2 \overline{xy}}{\partial x_2 \partial x_3} \\[2ex] -\alpha_k \dfrac{\partial^2 \overline{xy}}{\partial x_1 \partial x_3} & -\alpha_k \dfrac{\partial^2 \overline{xy}}{\partial x_2 \partial x_3} & \dfrac{1}{\overline{xy}} - \alpha_k \dfrac{\partial^2 \overline{xy}}{\partial x_3^2} \end{matrix} \right\| \quad \left(\alpha_k = \frac{k}{2(1+k)} \right).$$

Diremo $s^i(x, y)$ il vettore che ha per componenti i tre elementi della riga i-esima di questa matrice.

Si ha, supposto fisso y, e pensando $s^i(x, y)$ come fuzione di x:

$$L_1 [s^{(1)}(x, y)] = 3\, \frac{(1+\lambda) k}{2(1+k)} \left(\frac{\partial \overline{xy}}{\partial x_1} \right)^2 \frac{d}{d\nu} \frac{1}{\overline{xy}} + \frac{2 + (1-\lambda) k}{2(1+k)} \frac{d}{d\nu} \frac{1}{\overline{xy}},$$

$$L_2 [s^{(1)}(x, y)] = 3\, \frac{(1+\lambda) k}{2(1+k)} \frac{\partial \overline{xy}}{\partial x_1} \frac{\partial \overline{xy}}{\partial x_2} \frac{d}{d\nu} \frac{1}{\overline{xy}} +$$

$$+ \frac{k - \lambda(2+k)}{2(1+k)} \left(\nu_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{\overline{xy}} - \nu_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{\overline{xy}} \right),$$

$$L_3 [s^{(1)}(x, y)] = 3\, \frac{(1+\lambda) k}{2(1+k)} \frac{\partial \overline{xy}}{\partial x_1} \frac{\partial \overline{xy}}{\partial x_3} \frac{d}{d\nu} \frac{1}{\overline{xy}} +$$

$$+ \frac{k - \lambda(2+k)}{2(1+k)} \left(\nu_3 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{\overline{xy}} - \nu_1 \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{1}{\overline{xy}} \right).$$

$$L_1\,[s^{(2)}(x\,,y)] = 3\,\frac{(1+\lambda)\,k}{2\,(1+k)}\,\frac{\partial\,\overline{xy}}{\partial\,x_1}\,\frac{\partial\,\overline{xy}}{\partial\,x_2}\,\frac{d}{d\,\nu}\,\frac{1}{\overline{xy}} + \\ + \frac{k-\lambda\,(2+k)}{2\,(1+k)}\left(\nu_1\,\frac{\partial}{\partial\,x_2}\,\frac{1}{\overline{xy}} - \nu_2\,\frac{\partial}{\partial\,x_1}\,\frac{1}{\overline{xy}}\right),$$

$$L_2\,[s^{(2)}(x\,,y)] = 3\,\frac{(1+\lambda)\,k}{2\,(1+k)}\left(\frac{\partial\,\overline{xy}}{\partial\,x_2}\right)^2\frac{d}{d\,\nu}\,\frac{1}{\overline{xy}} + \frac{2+(1-\lambda)\,k}{2\,(1+k)}\,\frac{d}{d\,\nu}\,\frac{1}{\overline{xy}},$$

$$L_3\,[s^{(2)}(x\,,y)] = 3\,\frac{(1+\lambda)\,k}{2\,(1+k)}\,\frac{\partial\,\overline{xy}}{\partial\,x_2}\,\frac{\partial\,\overline{xy}}{\partial\,x_3}\,\frac{d}{d\,\nu}\,\frac{1}{\overline{xy}} + \\ + \frac{k-\lambda\,(2+k)}{2\,(1+k)}\left(\nu_3\,\frac{\partial}{\partial\,x_2}\,\frac{1}{\overline{xy}} - \nu_2\,\frac{\partial}{\partial\,x_3}\,\frac{1}{\overline{xy}}\right).$$

$$L_1\,[s^{(3)}(x\,,y)] = 3\,\frac{(1+\lambda)\,k}{2\,(1+k)}\,\frac{\partial\,\overline{xy}}{\partial\,x_1}\,\frac{\partial\,\overline{xy}}{\partial\,x_3}\,\frac{d}{d\,\nu}\,\frac{1}{\overline{xy}} + \\ + \frac{k-\lambda\,(2+k)}{2\,(1+k)}\left(\nu_1\,\frac{\partial}{\partial\,x_3}\,\frac{1}{\overline{xy}} - \nu_3\,\frac{\partial}{\partial\,x_1}\,\frac{1}{\overline{xy}}\right),$$

$$L_2\,[s^{(3)}(x\,,y)] = 3\,\frac{(1+\lambda)\,k}{2\,(1+k)}\,\frac{\partial\,\overline{xy}}{\partial\,x_2}\,\frac{\partial\,\overline{xy}}{\partial\,x_3}\,\frac{d}{d\,\nu}\,\frac{1}{\overline{xy}} + \\ + \frac{k-\lambda\,(2+k)}{2\,(1+k)}\left(\nu_2\,\frac{\partial}{\partial\,x_2}\,\frac{1}{\overline{xy}} - \nu_3\,\frac{\partial}{\partial\,x_2}\,\frac{1}{\overline{xy}}\right),$$

$$L_3\,[s^{(3)}(x\,,y)] = 3\,\frac{(1+\lambda)\,k}{2\,(1+k)}\left(\frac{\partial\,\overline{xy}}{\partial\,x_3}\right)^2\frac{d}{d\,\nu}\,\frac{1}{\overline{xy}} + \frac{2+(1-\lambda)\,k}{2\,(1+k)}\,\frac{d}{d\,\nu}\,\frac{1}{\overline{xy}}.$$

Con un classico procedimento dalla (2) si derivano le seguenti formole (di SOMIGLIANA), valevoli per ogni punto x interno a $\mathfrak{D}$

$$(4)\qquad \begin{aligned} -4\,\pi\,u_1(x) = &\int_{\mathfrak{FD}} \{L[u] \times s^{(1)}(x\,,y) - u\,(y) \times L_y\,[s^{(1)}(x\,,y)]\}\,d_y\,\sigma\, + \\ &+ \int_{\mathfrak{D}} \{[\Delta_2\,u + k \operatorname{grad}\operatorname{div} u] \times s^{(1)}(x\,,y)\}\,d_y\,T, \end{aligned}$$

$$- 4 \pi u_2(x) = \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} \{ L[u] \times s^{(2)}(x, y) - u(y) \times L_y[s^{(2)}(x, y)] \} d_y \sigma +$$

$$+ \int_{\mathcal{D}} \{ [\Delta_2 u + k \operatorname{grad} \operatorname{div} u] \times s^{(2)}(x, y) \} d_y T,$$

$$- 4 \pi u_3(x) = \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} \{ L[u] \times s^{(3)}(x, y) - u(y) \times L_y[s^{(3)}(x, y)] \} d_y \sigma +$$

$$+ \int_{\mathcal{D}} \{ [\Delta_2 u + k \operatorname{grad} \operatorname{div} u] \times s^{(3)}(x, y) \} d_y T.$$

Supponiamo ora $\mathcal{D}$ non limitato, ma avente frontiera $\mathcal{F}\mathcal{D}$ limitata e sia $f \equiv 0$ in $\mathcal{D}$. Applicando le (4) ad una soluzione $u(x)$ di (1'), per ogni dominio limitato T contenuto in $\mathcal{D}$, si constata che il vettore $u(x)$ è analitico in $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$. Derivando ambo i membri di ciascuna delle (1) e precisamente la prima rispetto a x_1 la seconda rispetto a x_2, la terza rispetto a x_3 e poscia sommando, si trae

$$(1 + k) \Delta_2 \vartheta = 0$$

e pertanto se è, come abbiamo supposto, $k \neq -1$, la funzione div u è armonica in $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$. Ne viene, applicando l'operatore Δ_2 a ciascuna delle (1)

$$\Delta_4 u_1 = \Delta_4 u_2 = \Delta_4 u_3 = 0 .$$

Detta o l'origine delle coordinate è noto che, se una funzione è bi iperarmonica in $\mathcal{D}$ e infinitesima all'infinito, essa allora si comporta all'infinito come $\dfrac{1}{\overline{ox}}$ e le sue derivate come $\dfrac{1}{\overline{ox}^2}$ (11), sicchè possiamo affermare che, se $u(x)$ è biregolare in $\mathcal{D}$ e verifica la (1') con $f \equiv 0$ e se inoltre è

$$\lim_{\overline{ox} \to \infty} | u(x) | = 0 ,$$

potendosi determinare una costante positiva H tale che in $\mathcal{D}$ riesca

$$| u(x) | < \frac{H}{\overline{ox}} \qquad \left| \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) \right| < \frac{H}{\overline{ox}^2} \quad (i = 1, 2, 3),$$

le formole (2), (3), (4) sussistono anche in questo caso.

(11) PICONE [4].

3. Teoremi di unicità. — D'ora in avanti indicheremo con $\mathfrak{D}$ un dominio regolare limitato e con $\overline{\mathfrak{D}}$ il dominio illimitato, tale che $\mathcal{F}\overline{\mathfrak{D}} = \mathcal{F}\mathfrak{D}$, con U la totalità dei vettori biregolari in $\mathfrak{D}$ e con $\overline{U}$ quella dei vettori biregolari in $\mathfrak{D}$ e infinitesimi all'infinito.

Ci proponiamo di dare teoremi di unicità per i problemi al contorno 1^0), 2^0) e 3^0) di cui al n. 1, relativi all'equazione (1') considerati nelle classi di vettori U o $\overline{U}$.

A tale scopo occorre premettere il seguente lemma:

I. — *La seguente forma quadratica nelle 9 variabili indipendenti,*

$$\xi_1\,,\ \xi_2\,,\ \xi_3\,,\ \eta_1\,,\ \eta_2\,,\ \eta_3\,,\ \zeta_1\,,\ \zeta_2\,,\ \zeta_3:$$

$$\Pi = k(\xi_1 + \eta_2 + \zeta_3)^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 + \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 +$$
$$+ 2\lambda(\xi_2\eta_1 + \eta_3\zeta_2 + \zeta_1\xi_3 - \xi_1\eta_2 - \eta_2\zeta_3 - \zeta_3\xi_1)$$

è definita (positiva), allora e allora soltanto che k e λ verificano le seguenti limitazioni:

$$k > -1\,, \qquad -1 < \lambda < \gamma_k\,, \tag{5}$$

essendo γ_k il minore fra i due numeri 1 e $\dfrac{3k+1}{2}$.

Posto

$$\Pi_0 = (k+1)(\xi_1^2 + \eta_2^2 + \zeta_3^2) + 2(k-\lambda)(\xi_1\eta_2 + \eta_2\zeta_3 + \zeta_3\xi_1)\,,$$

$$\Pi_1 = \eta_1^2 + \xi_2^2 + 2\lambda\xi_2\eta_1\,,$$

$$\Pi_2 = \zeta_2^2 + \eta_3^2 + 2\lambda\eta_3\zeta_2\,,$$

$$\Pi_3 = \xi_3^2 + \zeta_1^2 + 2\lambda\zeta_1\xi_3\,,$$

si ha

$$\Pi = \Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3\,.$$

Ovviamente la forma Π sarà definita allora e allora soltanto che lo saranno tutte quattro le forme Π_0, Π_1, Π_2, Π_3, ciascuna rispetto alle variabili da cui dipende. Perchè sia definita ognuna delle ultime tre occorre e basta che sia

$$-1 < \lambda < 1\,. \tag{6}$$

La matrice della Π_0 è la seguente

$$\begin{Vmatrix} k+1 & k-\lambda & k-\lambda \\ k-\lambda & k+1 & k-\lambda \\ k-\lambda & k-\lambda & k+1 \end{Vmatrix}$$

perchè, quindi, essa sia definita positiva è necessario e sufficiente che sia

$$k+1>0\,, \quad (k+1)^2-(k-\lambda)^2>0\,,$$

$$(k+1)^3-(k-\lambda)^2(2\lambda+k+3)>0\,.$$

La seconda disuguaglianza equivale a

$$-1<\lambda<2k+1\,. \tag{7}$$

Per quanto riguarda la terza, posto:

$$k-\lambda=\tau\,, \quad \lambda+1=\alpha\,,$$

essa si scrive

$$2\tau^3-3\alpha\tau^2+\alpha^3>0\,. \tag{8}$$

Ora il polinomio di terzo grado al primo membro ha lo zero doppio $\tau=\alpha$ e l'ulteriore zero è $\tau=-\frac{\alpha}{2}$ per cui la (8) è soddisfatta per

$$\tau>-\frac{\alpha}{2}\,, \quad \tau\neq\alpha\,,$$

cioè

$$k-\lambda>-\frac{k+1}{2}\,, \quad k-\lambda\neq k+1\,,$$

che equivalgono alle seguenti

$$\lambda<\frac{3k+1}{2}\,, \quad \lambda\neq-1\,. \tag{9}$$

Dall'essere $k+1>0$, segue $2k+1>\frac{3k+1}{2}$ e quindi una volta soddisfatta la prima delle (5), sono soddisfatte le (6), (7), (9) se è soddisfatta la seconda delle (5).

II. — *Comunque si assuma $k > -1$, è unica la soluzione del problema* 1^0) *nella classe U e così pure nella classe $\overline{U}$.*

La dimostrazione consegue ovviamente dalla (3) e dal lemma testè dimostrato, se facciamo vedere che, qualunque sia $k > -1$, esiste qualche λ verificante la seconda delle (5). Ed infatti basta assumere

$$\lambda \begin{cases} = k & \text{se} \quad -1 < k \leq 0\,, \\ = 0 & \text{se} \quad k \geq 0\,. \end{cases}$$

In modo ovvio, sempre dalla (3) e dal lemma I, seguono i teoremi:

III. — *Se k e λ verificano le* (5), *la soluzione del problema* 2^0) *nella classe U è determinata a meno di un vettore costante, mentre è unica la soluzione di detto problema nella classe $\overline{U}$.*

IV. — *Nelle ipotesi del teorema precedente è unica la soluzione tanto in U che in $\overline{U}$ del problema* 3^0).

Di particolare interesse è il caso $\lambda = 1$. Sussistono allora i seguenti teoremi:

V. — *Se è $\lambda = 1$, $k > \dfrac{1}{3}$ la soluzione del problema* 2^0) *nella classe U è determinata a meno del vettore $a + (x - o) \wedge b$ essendo a e b vettori costanti arbitrari, mentre è unica quella nella classe $\overline{U}$.*

Nelle ipotesi ammesse per λ e k la forma quadratica Π_0 di cui alla dimostrazione del lemma I è definita positiva, come si osserva riguardando la dimostrazione del lemma stesso. Da ciò segue, per la (3), che se u è un vettore tale che

$$L[u] = 0\,, \qquad \Delta_2 u + k \operatorname{grad} \operatorname{div} u = 0\,,$$

deve essere

$$(10) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} = \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0\,, \\[2ex] \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0\,, \quad \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0\,, \quad \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0\,. \end{cases}$$

Con operazioni di derivazione si deduce che ciascuna delle funzioni u_1, u_2, u_3 deve avere tutte le derivate seconde nulle, e quindi ciascuna è funzione lineare di x_1, x_2, x_3. Imponendo a tali funzioni lineari di soddisfare alle (10) segue la dimostrazione del teorema.

VI. — *Nelle ipotesi del teorema precedente è unica la soluzione del problema* 3^0) *in $\overline{U}$. Lo è pure in U se $\mathcal{F}_1 \mathfrak{D}$ contiene tre punti non allineati.*

La cosa è ovvia per quel che riguarda $\overline{U}$. Siano $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ tre punti non allineati di $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$. Dalle relazioni

$$a + (x^{(1)} - o) \wedge b = 0 ,$$

$$a + (x^{(2)} - o) \wedge b = 0 ,$$

$$a + (x^{(3)} - o) \wedge b = 0 ,$$

segue

$$(x^{(1)} - x^{(2)}) \wedge b = 0 , \qquad (x^{(2)} - x^{(3)}) \wedge b = 0 ,$$

e non essendo paralleli i due vettori $(x^{(1)} - x^{(2)})$ e $(x^{(2)} - x^{(3)})$ deve essere $b = 0$ e quindi anche $a = 0$.

VII. — *Nelle ipotesi del teorema III condizione necessaria perchè esista una soluzione del problema* 2°) *nella classe* U *è che i vettori* $\mathcal{L}$ *ed* f, *rispettivamente assegnati su* $\mathcal{F}\mathcal{D}$ *e in* $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$, *verifichino la condizione*

$$\int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} \mathcal{L} \, d\sigma + \int_{\mathcal{D}} f \, d\, T = 0 , \tag{11}$$

mentre nell'ipotesi del teorema V, assieme alla precedente, deve essere anche soddisfatta la condizione

$$\int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} [(x - o) \wedge \mathcal{L}] \, d\sigma + \int_{\mathcal{D}} [(x - o) \wedge f] \, d\sigma = 0. \tag{12}$$

Consideriamo, nella dimostrazione, solo il caso $\lambda = 1$, $k > \dfrac{1}{3}$. Dalla (2) segue, qualunque siano i vettori costanti a e b,

$$\int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} \{[a + (x - o) \wedge b] \times \mathcal{L}\} \, d\sigma + \int_{\mathcal{D}} \{[a + (x - o) \wedge b] \times f\} \, d\, T = 0$$

e quindi

$$a \times \left[\int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} \mathcal{L} \, d\sigma + \int_{\mathcal{D}} f \, d\, T \right] + b \times \left[\int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} [(x - o) \wedge \mathcal{L}] \, d\sigma + \int_{\mathcal{D}} [(x - o) \wedge f] \, d\, T \right] = 0.$$

e, pertanto, data l'arbitrarietà di a e b seguono la (11) e la (12).

Capitolo II.

Teoria generalizzata dei potenziali di superficie

1. Definizioni e notazioni. — Sia Σ una superficie di classe 2, dotata, cioè, di piano tangente e curvature principali variabili con continuità, e siano $\alpha_1(E), \alpha_2(E), \alpha_3(E)$ tre funzioni completamente additive e a variazione finita dell'insieme boreliano E di Σ. Con $\alpha(E)$ indicherò il vettore $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Diro che il vettore $v(x)$, definito su Σ, è sommabile rispetto al vettore determinante $\alpha(E)$, se le sue componenti $v_1(x), v_2(x), v_3(x)$ sono tali, nel senso di Stieltjes, rispetto ad $\alpha_1(E), \alpha_2(E), \alpha_3(E)$. Porrò allora

$$\int_\Sigma v(x) \times d\,\alpha = \int_\Sigma (v_1(x)\,d\,\alpha_1 + v_2(x)\,d\,\alpha_2 + v_3(x)\,d\,\alpha_3).$$

Fissato il versore normale ν_x a Σ nel punto x, indicherò con Σ_ϱ^+ la superficie parallela a Σ e avente da Σ distanza ϱ, che si trova dalla parte dell'asse normale positivo, e con Σ_ϱ^- quella che trovasi dalla parte opposta. Se E è un insieme di Σ con E_ϱ^+ ed E_ϱ^- indicherò i corrispondenti insiemi su Σ_ϱ^+ e Σ_ϱ^-. Dirò, infine, $\sigma(E)$ la misura superficiale (nel senso di Lebesgue) di E e $\sigma_\varrho^\pm(E)$ quella di $E_\varrho^\pm$.

Avverto che in seguito con $L^0[u]$ indicherò il vettore $L[u]$ quando si assuma $\lambda = \dfrac{k}{2+k}$.

2. Teoremi preliminari e richiami. — VIII. *Comunque si fissi il punto x su Σ e il valore ϱ in un interrallo $(0, \varrho_0)$, sussiste la limitazione*

$$\left| \int_{\Sigma_\varrho^\pm} \frac{1}{\overline{x\,y}}\, d_y\, \sigma_\varrho^\pm \right| < L$$

con L costante indipendente da x e da ϱ.

È evidente che, se Σ può decomporsi in un numero finito $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_p$ di superficie, tali che ciascuna di esse Σ_i sia interna ad una superficie Σ'_i, contenuta in Σ, e per la quale il teorema è vero, sarà anche vero per Σ. Basterà pertanto dimostrarlo nella ipotesi che Σ sia tale che comunque si fissi in essa il punto x, assunto il piano π tangente in x a Σ come piano $x_1 x_2$ e la normale in x come asse x_3, l'equazione di Σ sia $x_3 = \varphi(x_1, x_2)$ con $\varphi(x_1, x_2)$ definita nel dominio T_x del piano π proiezione di Σ su π. Sia allora H un numero positivo tale che si abbia in T_x

$$| \varphi(x_1, x_2) | < H(x_1^2 + x_2^2), \ | \varphi_{x_1}(x_1, x_2) | < H(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$| \varphi_{x_2}(x_1, x_2) | < H(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

È ben lecito supporre H indipendente da x e tale che risulti $\varrho_0 < \dfrac{1}{4H}$

Il punto y abbia le coordinate $x_1 + \varrho \nu_1, x_2 + \varrho \nu_2 \ x_3 + \varrho \nu_3$, essendo

$$\nu_1 = \frac{-\varphi_{x_1}}{(1 + \varphi_{x_1}^2 + \varphi_{x_2}^2)^{1/2}}, \ \nu_2 = \frac{-\varphi_{x_2}}{(1 + \varphi_{x_1}^2 + \varphi_{x_2}^2)^{1/2}}, \ \nu_3 = \frac{1}{(1 + \varphi_{x_1}^2 + \varphi_{x_2}^2)^{1/2}}.$$

Si ha:

$$\overline{xy}^2 = (x_1 + \varrho \nu_1)^2 + (x_2 + \varrho \nu_2)^2 + (x_3 + \varrho \nu_3)^2 \geq x_1^2 + x_2^2 - 2 | \varrho | (| \nu_1 | | x_1 | +$$

$$+ | \nu_2 | \ | x_2 |) > x_1^2 + x_2^2 - 4 H \varrho_0 (x_1^2 + x_2^2) = (1 - 4 H \varrho_0)(x_1^2 + x_2^2).$$

Ne segue, detta K una conveniente costante, indipendente da x:

$$\left| \int_{\Sigma_\varrho^{\mp}} \frac{1}{\overline{xy}} d_y \sigma_\varrho^{\mp} \right| < K \int_{T_x} \frac{d x_1 d x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}} < K \int_C \frac{d x_1 d x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}} = 2 \pi K R,$$

avendo indicato con C un cerchio con centro nell'origine e raggio R maggiore del diametro di ciascuno dei domini T_x.

Richiamo alcune ben note relazioni di limite della teoria del potenziale.

Se ξ è su Σ e non è sul bordo di Σ si ha

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} & \lim_{x \to \xi (\text{su } \nu_\xi^{\mp})} \int_\Sigma \frac{d}{d \nu_y} \frac{1}{\overline{xy}} d_y \sigma = \pm 2\pi + \int_\Sigma \frac{d}{d \nu_y} \frac{1}{\overline{\xi y}} d_y \sigma, \\ & \lim_{x \to \xi (\text{su } \nu_\xi^{\pm})} \int_\Sigma \frac{d}{d \nu_\xi} \frac{1}{\overline{xy}} d_y \sigma = \mp 2\pi + \int_\Sigma \frac{d}{d \nu_\xi} \frac{1}{\overline{\xi y}} d_y \sigma. \end{aligned} \right.$$

([12]) Con

$$\lim_{x \to \xi (\text{su } \nu_\xi^{\pm})}$$

intendo il limite ottenuto facendo tendere x a ξ sull'asse normale positivo (negataivo) Σ in ξ.

Se Σ è dotata di bordo $\mathscr{B}\Sigma$ e ξ è un punto regolare di tale bordo si ha:

$$
(14)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
&\lim_{x \to \xi (\text{su } \nu_\xi^{\mp})} \int_\Sigma \frac{d}{d\nu_y} \frac{1}{\overline{xy}}\, d_y\sigma = \pm \pi + \int_\Sigma \frac{d}{d\nu_y} \frac{1}{\overline{\xi y}}\, d_y\sigma ,\\
&\lim_{x \to \xi (\text{su } \nu_\xi^{\pm})} \int_\Sigma \frac{d}{d\nu_\xi} \frac{1}{\overline{xy}}\, d_y\sigma = \mp \pi + \int_\Sigma \frac{d}{d\nu_\xi} \frac{1}{\overline{\xi y}}\, d_y\sigma .
\end{aligned}
\right.
$$

Se infine ξ è un punto angoloso di $\mathscr{B}\Sigma$, detto ω l'angolo formato dai due archi di $\mathscr{B}\Sigma$ che si saldano in ξ, contato opportunamente, si ha

$$
(15)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
&\lim_{x \to \xi\, \text{su } \nu_\xi^{\pm}} \int_\Sigma \frac{d}{d\nu_y} \frac{1}{\overline{xy}}\, d_y\sigma = \pm \omega + \int_\Sigma \frac{d}{d\nu_y} \frac{1}{\overline{\xi y}}\, d_y\sigma ,\\
&\lim_{x \to \xi\, \text{su } \nu_\xi^{\mp}} \int_\Sigma \frac{d}{d\nu_\xi} \frac{1}{\overline{xy}}\, d_y\sigma = \mp \omega + \int_\Sigma \frac{d}{d\nu_\xi} \frac{1}{\overline{\xi y}}\, d_y\sigma .
\end{aligned}
\right.
$$

Con gli stessi ragionamenti mediante i quali si stabiliscono le (13), (14), (15) si dimostrano — e ciò è stato del resto già esplicitamente fatto ad es. dal LAURICELLA (13) — analoghe relazioni per gli integrali

$$
\int_\Sigma \frac{\partial\, \overline{xy}}{\partial y_i} \frac{\partial\, \overline{xy}}{\partial y_j} \frac{d}{d\nu_y} \frac{1}{\overline{xy}}\, d_y\sigma ,\quad \int_\Sigma \frac{\partial\, \overline{xy}}{\partial x_i} \frac{\partial\, \overline{xy}}{\partial x_j} \frac{d}{d\nu_\xi} \frac{1}{\overline{xy}}\, d_y\sigma ,\quad (i, j = 1\,.\,2\,,3).
$$

si ha precisamente

$$
(16)\qquad
\begin{aligned}
&\lim_{x \to \xi (\text{su } \nu_\xi^{\mp})} \int_\Sigma \frac{\partial\, \overline{xy}}{\partial y_i} \frac{\partial\, \overline{xy}}{\partial y_j} \frac{d}{d\nu_y} \frac{1}{\overline{xy}}\, d_y\sigma = \pm \lambda_{ij}(\xi) + \int_\Sigma \frac{\partial\, \overline{\xi y}}{\partial y_i} \frac{\partial\, \overline{\xi y}}{\partial y_j} \frac{d}{d\nu_y} \frac{1}{\overline{\xi y}}\, d_y\sigma ,\\
&\lim_{x \to \xi\, \text{su } \nu_\xi^{\pm}} \int_\Sigma \frac{\partial\, \overline{xy}}{\partial x_i} \frac{\partial\, \overline{xy}}{\partial x_j} \frac{d}{d\nu_\xi} \frac{1}{\overline{xy}}\, d_y\sigma = \mp \lambda_{ij}(\xi) + \int_\Sigma \frac{\partial\, \overline{\xi y}}{\partial x_i} \frac{\partial\, \overline{\xi y}}{\partial x_j} \frac{d}{d\nu_\xi} \frac{1}{\overline{\xi y}}\, d_y\sigma ,
\end{aligned}
$$

essendo

---

(13) Cfr. G. LAURICELLA, [1].

$$\lambda_{ij}(\xi)\left\{\begin{aligned} &= 0\,, \quad \text{se } i \neq j \\ &= \frac{2\pi}{3}\,, \quad \text{se } i = j \text{ e } \xi \text{ interno a } \Sigma\,, \\ &= \frac{\pi}{3}\,, \quad \text{se } i = j \text{ e } \xi \text{ punto regolare di } \mathcal{B}\Sigma\,, \\ &= \frac{\omega}{3}\,, \quad \text{se } i = j \text{ e } \xi \text{ punto angoloso di } \mathcal{B}\Sigma\,. \end{aligned}\right.$$

È anche da ricordare che nelle ipotesi ammesse per Σ gli integrali

$$\int_\Sigma \left| \frac{d}{d\nu_y} \frac{1}{\overline{xy}} \right| d_y\sigma\,, \qquad \int_\Sigma \left| \frac{d}{d\nu_\xi} \frac{1}{\overline{xy}} \right| d_y\sigma$$

si mantengono limitati, il primo quando x varia comunque nello spazio e il secondo al variare comunque di ξ su Σ e di x su ν_ξ. Lo stesso accade ovviamente degli integrali:

$$\int_\Sigma \left| \frac{\partial \overline{xy}}{\partial y_i} \frac{\partial \overline{xy}}{\partial y_j} \frac{d}{d\nu_y} \frac{1}{\overline{xy}} \right| d_y\sigma\,, \qquad \int_\Sigma \left| \frac{\partial \overline{xy}}{\partial x_i} \frac{\partial \overline{xy}}{\partial x_j} \frac{d}{d\nu_\xi} \frac{1}{\overline{xy}} \right| d_y\sigma\,.$$

Si tenga infine presente che:

IX. — *Nelle ipotesi ammesse per Σ, comunque i due punti x e y varino su di essa, sussiste la limitazione*

$$\left| \frac{d}{d\nu_y} \frac{1}{\overline{xy}} \right| < \frac{A}{\overline{xy}}$$

con A costante positiva (14).

3. TEOREMI SUI SEMPLICI E DOPPI STRATI GENERALIZZATI. — Verremo adesso a stabilire alcuni teoremi concernenti i seguenti integrali

$$\int_\Sigma s^{(i)}(x\,,y) \times d_y\alpha\,, \qquad \int_\Sigma L_y\left[s^{(i)}(x\,,y)\right] \times d_y\alpha \qquad (i = 1\,,2\,,3)\,,$$

(14) Cfr. ad es. G. FICHERA [2].

che chiameremo, rispettivamente, di *semplice strato generalizzato* e di *doppio strato generalizzato.*

X. — *Il vettore* $s^{(i)}(\xi, y)$ $(i = 1, 2, 3)$ *per quasi tutti i punti* ξ *di* Σ *è funzione di* y *sommabile rispetto al vettore* $\alpha(E)$ *su* Σ. *Inoltre*

$$\int_{\Sigma} s^{(i)}(\xi, y) \times d_y\, \alpha$$

è funzione di ξ *sommabile rispetto a* $\sigma(E)$ *su* Σ, *avendosi*

$$(17) \qquad \lim_{\varrho \to 0} \int_{E_\varrho^{\pm}} d_x\, \sigma_\varrho^{\pm} \int_{\Sigma} s^{(i)}(x, y) \times d_y\, \alpha = \int_{E} d_\xi\, \sigma \int_{\Sigma} s^{(i)}(\xi, y) \times d_y\, \alpha .$$

Si constata in modo ovvio che comunque si assumano i due punti x e y nello spazio si ha

$$| s^{i}(x, y) | < \frac{A}{\overline{x\,y}}$$

essendo A una costante. Ne viene che la funzione di ξ: $| s^{(i)}(\xi, y) |$ è sommabile rispetto a $\sigma(E)$ su Σ e il suo integrale

$$\int_{\Sigma} | s^{i}(\xi, y) | \; d_\xi\, \sigma$$

è funzione continua di y per cui — per un noto criterio di sommabilità del TONELLI ([15]) — il vettore $s^{i}(\xi, y)$ è sommabile nel prodotto topologico di Σ per se stesso, Σ^2, rispetto al vettore determinante $\sigma(E_\xi)\,\alpha\,[E_y]$. Applicando il teorema di FUBINI ([16]) ne viene che per quasi tutti gli ξ di Σ esiste l'integrale

$$\int_{\Sigma} s^{(i)}(\xi, y) \times d_y\, \alpha$$

e che è funzione di ξ sommabile su Σ, avendosi comunque si assuma E

$$\int_{E} d_\xi\, \sigma \int_{\Sigma} s^{(i)}(\xi, y) \times d_y\, \alpha = \int_{\Sigma} \left[\int_{E} s^{(i)}(\xi, y)\, d_\xi\, \sigma \right] \times d_y\, \alpha .$$

([15]) Cfr. M. PICONE [5] pag. 239.

([16]) Loc. cit (1), da pag. 230 a pag 233.

Si ha d'altra parte

$$\lim_{\varrho \to 0} \int_{E_\varrho^\pm} s^{(i)}(x, y)\, d_y\, \sigma_\varrho^\pm = \int_E s^{(i)}(\xi, y)\, d_y\, \sigma,$$

essendo inoltre (teor. VIII)

$$\left| \int_{E_\varrho^\pm} s^{(i)}(x, y)\, d_y\, \sigma_\varrho^\pm \right| < L.$$

Abbiamo allora

$$\lim_{\varrho \to 0} \int_{E_\varrho^\pm} d_x\, \sigma_\varrho^\pm \int_\Sigma s^{(i)}(x, y) \times d_y\, \alpha = \lim_{\varrho \to 0} \int_\Sigma \left[\int_{E_\varrho^\pm} s^{(i)}(x, y)\, d_x\, \sigma_\varrho^\pm \right] \times d_y\, \alpha =$$

$$= \int_\Sigma \left[\lim_{\varrho \to 0} \int_{E_\varrho^\mp} s^{(i)}(x, y)\, d_y\, \sigma_\varrho^\pm \right] \times d_y\, \alpha$$

e quindi si ha la (17).

XI. — *Il vettore* $L_\xi^0 [s^{(i)}(\xi, y)]$ $(i = 1, 2, 3)$ *per quasi tutti i punti* ξ *di* Σ *è funzione di* y *sommabile rispetto al vettore* $\alpha(E)$ *su* Σ, *riuscendo*

$$\int_\Sigma L_\xi^0 [s^{(i)}(\xi, y)] \times d_y\, \alpha$$

funzione di ξ *sommabile rispetto a* $\sigma(E)$ *su* Σ. *Si ha inoltre per ogni porzione di superficie regolare* Γ *contenuta in* Σ

$$(18) \qquad \lim_{\varrho \to 0} \int_{\Gamma_\varrho^\pm} d_x\, \sigma_\varrho^\pm \int_\Sigma L_x^0 [s^{(i)}(x, y)] \times d_y\, \alpha = \mp 2\pi\, \alpha_i(\Gamma - \mathcal{B}\Gamma) \mp$$

$$\mp \pi\, \alpha_i \left(\mathcal{B}\Gamma - \sum_{p=1}^{n} V_p \right) \mp \sum_{p=1}^{n} \omega_p\, \alpha_i(V_p) + \int_\Gamma d_\xi\, \sigma \int_\Sigma L_\xi^0 [s^{(i)}(\xi, y)] \times d_y\, \alpha,$$

avendo supposto che il bordo $\mathcal{B}\Gamma$ *di* Γ *si compone di* n *archi di curva regolari saldantesi nei vertici* $V_1, V_2, \ldots, V_n$ *ed essendo* ω_p *la misura dell'angolo formato dai due archi che si saldano in* V_p.

Poichè se ξ e y sono due punti di Σ si ha, come si constata osservando le espressioni di $L_j\,[s^{(i)}(x\,,y)]$ del Cap. I $\left(\text{con } \lambda = \dfrac{k}{2+k}\right)$:

$$| \; L_\xi^0\,[s^{(i)}(\xi\,,y)] \; | < A \left| \frac{d}{d\,\nu_\xi} \frac{1}{\overline{\xi\,y}} \right| ,$$

la prima parte del teorema — tenendo presente il lemma IX — si dimostra come l'analoga del teorema precedente. Si ha poi, come segue facilmente dalle (16)

$$\lim_{\varrho\to 0} \int_{\Gamma_\varrho^{\mp}} L_x^0\,[s^{(i)}(x\,,y)]\,d_x\,\sigma_\varrho^{\pm} \begin{cases} = \displaystyle\int_\Gamma L_\xi^0\,[s^{(i)}(\xi\,,y)]\,d\,\sigma & \text{se } y \subset \Sigma - \Gamma\,, \\[2ex] = \mp\, 2\,\pi + \displaystyle\int_\Gamma L_\xi^0\,[s^{(i)}(\xi\,,y)]\,d_\xi\,\sigma & \text{se } y \subset \Gamma - \mathcal{B}\,\Gamma\,, \\[2ex] = \mp\,\pi + \displaystyle\int_\Gamma L_\xi^0\,[s^{(i)}(\xi\,,y)]\,d_\xi\,\sigma & \text{se } y \subset \mathcal{B}\,\Gamma - \displaystyle\sum_{p=1}^{n} V_p\,, \\[2ex] = \mp\,\omega_p + \displaystyle\int_\Gamma L_\xi^0\,[s^{(i)}(\xi\,,y)]\,d_\xi\,\sigma & \text{se } y \equiv V_p\ (p=1,\,2,\dots,n) \end{cases}$$

D'altra parte, essendo

$$\left| \int_{\Gamma_\varrho^{\mp}} L_x^0\,[s^{(i)}(x\,,y)]\,d_x\,\sigma \right| \leq A \int_{\Gamma_\varrho^{\mp}} \left| \frac{d}{d\,\nu_x} \cdot \frac{1}{\overline{x\,y}} \right| d_x\,\sigma\,,$$

ne viene che la funzione di y al primo membro è uniformemente sommabile su Σ al variare di ϱ, e quindi

$$\lim_{\varrho\to 0} \int_{\Gamma_\varrho^{\mp}} d_x\,\sigma \int_\Sigma L_x^0\,[s^{(i)}(x\,,y)] \times d_y\,\alpha = \lim_{\varrho\to 0} \int_\Sigma \left[\int_{\Gamma_\varrho^{\pm}} L_x^0\,[s^{(i)}(x\,,y)]\,d_x\,\sigma \right] \times d_y\,\alpha =$$

$$= \int_\Sigma \lim_{\varrho\to 0} \left[\int_{\Gamma_\varrho^{\pm}} L_x^0\,[s^{(i)}(x\,,y)]\,d_x\,\sigma \right] \times d_y\,\alpha\,,$$

donde la (18).

XII. — *Il vettore $L^0_y[s^{(i}(\xi, y)]$ per quasi tutti i punti ξ di Σ è funzione di y sommabile rispetto al vettore $\alpha(E)$, riuscendo*

$$\int_\Sigma L^0_y[s^{i}(\xi, y)] \times d_y\,\alpha$$

funzione di ξ sommabile su Σ rispetto a $\sigma(E)$. Si ha inoltre per ogni porzione di superficie regolare contenuta in Σ:

$$\lim_{\varrho\to 0}\int_{\Gamma^{\pm}_{\varrho}} d_x\,\sigma^{\mp}_{\varrho}\int_\Sigma L^0_y[s^{i}(x, y)] \times d_y\,\alpha = \pm 2\pi\,\alpha_i(\Gamma - \mathcal{B}\Gamma) \pm \tag{19}$$

$$\pm \pi\,\alpha_i\left(\mathcal{B}\Gamma - \sum_{p=1}^{n} V_p\right) \pm \sum_{p=1}^{n}\omega_p\,\alpha_i(V_p) + \int_\Gamma d_\xi\,\sigma\int_\Sigma L^0_y[s^{i}(\xi, y)] \times d_y\,\alpha\,.$$

La dimostrazione è analoga a quella del teorema precedente ([17]).

Dirò che il vettore determinante $\alpha(E)$ è *assolutamente continuo* se esiste un vettore $\varphi(x)$ *sommabile* su Σ tale che risulti per ogni boreliano E:

$$\alpha(E) = \int_E \varphi(x)\,d\sigma$$

cioè:

$$\alpha_1(E) = \int_E \varphi_1(x)\,d\sigma\,,\ \alpha_2(E) = \int_E \varphi_2(x)\,d\sigma\,,\ \alpha_3(E) = \int_E \varphi_3(x)\,d\sigma\,.$$

XIII. — *Se $\alpha(E)$ è assolutamente continuo assieme alle relazioni di limite* (17), (18), (19) *sussistono, per quasi tutti i punti ξ di Σ, le seguenti altre*

$$\lim_{x\to\xi(\mathrm{su}\,\nu^{\mp}_{\xi})}\int_\Sigma s^{i}(x, y) \times \varphi(y)\,d_y\,\sigma = \int_\Sigma s^{i}(\xi, y) \times \varphi(y)\,d\,y\,: \tag{20}$$

$$\lim_{x\to\xi(\mathrm{su}\,\nu^{\mp}_{\xi})}\int_\Sigma L^0_x[s^{i}(x, y)] \times \varphi(y)\,d_y\,\sigma = +2\pi\,\varphi_i(\xi) + \tag{21}$$

$$+\int_\Sigma L^0_\xi[s^{i}(\xi, y)] \times \varphi(y)\,d\,y\,,$$

([17]) Tre teoremi, casi particolari dei teor. X, XI, XII, trovansi già nella mia Nota [3]. Cfr. anche EVANS-MILES [13].

$$\lim_{x \to \xi \text{ su } \nu_\xi^{(\pm)}} \int_\Sigma L_y^0 [s^{(1)}(x, y)] \times \varphi(y)\, d_y \sigma = \pm 2\pi \varphi_i(\xi) + \tag{22}$$

$$+ \int_\Sigma L_y^0 [s^{(1)}(\xi, y)] \times \varphi(y)\, d y \, .$$

La dimostrazione delle (20), (21), (22) è già stata esplicitamente acquisita, per il caso $k = 0$, in una mia Memoria ([18]) e i ragionamenti che là vengono condotti possono ripetersi immutati anche nel caso più generale che adesso consideriamo. ci dispensiamo, pertanto, dal ripeterli.

Altro teorema che si dimostra in modo perfettamente analogo al caso $k = 0$ è il seguente ([19]):

XIV. — *Il vettore $\varphi(x)$ definito in Σ verifichi una condizione di* HÖLDER *del tipo.*

$$| \varphi(x) - \varphi(y) | < M \overline{x y}^\tau \qquad (M > 0, 0 < \tau \leq 1)$$

e sia D un dominio la cui frontiera contenga una porzione di superficie regolare Σ' interna a Σ, ma in modo tale che nessun segmento di centro un punto ξ di Σ' sia contenuto in D. In tali ipotesi, il vettore:

$$u_i(x) = \int_\Sigma s^{(i)}(x, y) \times \varphi(y)\, d y$$

è biregolare in D.

Il motivo per cui i teoremi XI e XII sono stati considerati solamente per l'operatore L^0, cioè per $\lambda = \dfrac{k}{2+k}$, risiede nel fatto che solamente per tale valore di λ i vettori $L[s^{(i)}(x, y)]$, quando x ed y sono entrambi su Σ, riescono ivi sommabili. La (21) e la (22) potrebbero anche dimostrarsi per λ qualsiasi, ma bisognerebbe allora supporre $\varphi(x)$ hölderiano su Σ e interpretare gli integrali al secondo membro come opportuni integrali principali di CAUCHY ([20]). Evito di sviluppare tali considerazioni perchè inessenziali ai fini che mi prefiggo.

([18]) Cfr. FICHERA [2] pagg. 6-14.
([19]) Cfr. KELLOGG [1] pag. 165.
([20]) BOULIGAND, GIRAUD, DELENS [1] pag. 28.

CAPITOLO III

Teoremi di completezza

1. RICHIAMI DI ANALISI FUNZIONALE LINEARE. [21] — Sia $\mathcal{L}$ uno spazio lineare di funzioni vettoriali $u(x)$, definite in uno stesso insieme E, a tre componenti $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$. Sia, inoltre, definita una distanza (u, u') fra due vettori di $\mathcal{L}$, o, come anche si dice, lo spazio $\mathcal{L}$ sia normalizzato. Se $\{u\}$ è un insieme di $\mathcal{L}$, dicesi inviluppo lineare di $\{u\}$ e si indica con $\overline{\{u\}}$ la totalità dei vettori di $\mathcal{L}$, che possono ottenersi come combinazioni lineari di un numero finito di vettori di $\{u\}$. L'insieme $\{u\}$ dicesi completo nello spazio $\mathcal{L}$ se $\overline{\{u\}}$ è ovunque denso in $\mathcal{L}$. Sussiste il seguente teorema di BANACH.

XV. — *Condizione necessaria e sufficiente perchè $\{u\}$ sia completo è che qualsiasi funzionale lineare, il quale sia nullo in $\{u\}$, lo sia in tutto $\mathcal{L}$.*

Supposto che E sia un insieme di punti di uno spazio euclideo chiuso e limitato, indicheremo con $\mathcal{L}(E)$ lo spazio dei vettori continui in E per il quale si assume

$$(u, u') = \max_E |u - u'| ,$$

mentre indicheremo con $\mathcal{H}(E)$ lo spazio dei vettori di norma sommabile in E, per il quale si ha

$$(u, u') = \int_E |u - u'|^2 \, d x .$$

2. PROPRIETÀ DI ALCUNI FUNZIONALI. — In tutto questo capitolo supporremo che $\mathfrak{D}$ sia un dominio limitato la cui frontiera è costituita da un numero finito di superficie chiuse di classe 2.

Sussistono i seguenti teoremi:

XVI. — *Se k è un valore per il quale sussiste il teorema di unicità del problema* 1⁰) *nella classe U e se per ogni x esterno a $\mathfrak{D}$ si ha*

$$\int_{\mathcal{F}\mathfrak{D}} s^{(i)}(x, y)\, d_y \alpha = 0 \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{23}$$

[21] Per le definizioni e i teoremi richiamati in questo paragrafo cfr. PICONE [6]

il funzionale

$$I[u] = \int_{\mathcal{F}\mathfrak{D}} u \times d\,\alpha$$

è identicamente nullo nella classe dei vettori sommabili su $\mathcal{F}\mathfrak{D}$ *rispetto ad* α. *Se in particolare* α *è assolutamente continuo il vettore* φ *è quasi ovunque nullo.*

Dalla (23) per la (18) si deduce

$$0 = 2\,\pi\,\alpha_i(\Gamma) + \int_{\Gamma} d_\xi\,\sigma \int_{\mathcal{F}\mathfrak{D}} L^0_\xi\,[s^{(i)}(\xi\,,y)] \times d_y\,\alpha \qquad (i = 1\,,2\,,3)$$

qualunque sia la porzione di superficie regolare Γ di Σ tale però che $\alpha_i(\mathcal{B}\,\Gamma) = 0$, $\alpha_i(V_p) = 0$ $(p = 1\,,2\,,\ldots,n)$.

Qualunque sia l'insieme boreliano E di $\mathcal{F}\mathfrak{D}$ poniamo

$$\alpha'_i(E) = -\frac{1}{2\,\pi}\int_E d_\xi\,\sigma \int_{\mathcal{F}\mathfrak{D}} L^0_\xi\,[s^{(i)}(\xi\,,y)] \times d_y\,\alpha\,, \qquad (i = 1\,,2\,,3) \tag{24}$$

$$\alpha''_i(E) = \alpha_i(E) - \alpha'_i(E)\,.$$

È ovvio che le funzioni additive e a variazione finita $\alpha''_i(E)$ sono nulle per ogni $E \equiv \Gamma$ con $\alpha_i(\mathcal{B}\,\Gamma) = 0$, $\alpha_i(V_p) = 0$. Posto allora

$$\varphi_i(\xi) = -\frac{1}{2\,\pi}\int_{\mathcal{F}\mathfrak{D}} L^0_\xi\,[s^{(i)}(\xi\,,y)] \times d_y\,\alpha\,,$$

si ha

$$\varphi_i(\xi) = -\frac{1}{2\,\pi}\int_{\mathcal{F}\mathfrak{D}} L^0_\xi\,[s^{(i)}(\xi\,,y)] \times d_y\,\alpha'\,.$$

Si trae allora dalla (24)

$$\varphi_i(\xi) = -\frac{1}{2\,\pi}\int_{\mathcal{F}\mathfrak{D}} \{L^0_\xi\,[s^{(i)}(\xi\,,y)] \times \varphi(y)\}\,d_y\,\sigma\,, \qquad (i = 1\,,2\,,3)\,.$$

Il vettore $\varphi(\xi)$ è pertanto autosoluzione di un sistema di equazioni integrali i cui nuclei si comportano come $\dfrac{d}{d\,\nu}\,\dfrac{1}{\overline{\xi\,y}}$, cioè (teor. IX) come $\dfrac{1}{\overline{\xi\,y}}$.

Tale vettore deve essere hölderiano, come segue da ragionamenti di tipo ben noto. Ne viene che il vettore di componenti

$$u_i(x) = \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} [s^{(i)}(x, y)] \times d\sigma$$

è continuo in tutto lo spazio, biregolare in $\mathcal{D}$ e ivi soluzione delle (1) con $f \equiv 0$, mentre si annulla su $\mathcal{F}\mathcal{D}$. Ciò implica $\varphi(y) \equiv 0$. Ne segue la tesi.

Con analoghi ragionamenti si dimostra che

XVII. — *Sia k un valore per il quale la soluzione del problema* 2⁰) *— considerato per $\lambda = \frac{k}{2+k}$ — sia determinata nella classe U a meno di un vettore costante e si abbia per ogni x esterno a $\mathcal{D}$:*

$$\int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} L_y^0 [s^{(i)}(x, y)] \times d_y \alpha = 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{25}$$

allora il funzionale $I[u]$ del teor. precedente è identicamente nullo nella classe dei vettori sommabili su $\mathcal{F}\mathcal{D}$ rispetto ad α ed ortogonali (22) *ai vettori* $(1, 0, 0)$ $(0, 1, 0)$ *e* $(0, 0, 1)$. *Se in particolare α è assolutamente continuo il vettore φ è quasi ovunque uguale ad un vettore costante.*

Dai teoremi di unicità nella classe $\overline{U}$, segue anche che:

XVIII. — *La tesi del teor. XVI seguita a valere anche se la* (23) *o la* (25), *essendo $\mathcal{F}\mathcal{D}$ costituita da un'unica superficie chiusa, sussistono per ogni x interno a $\mathcal{D}$.*

3. SISTEMI DI SOLUZIONI PARTICOLARI. — D'ora in avanti supporremo nella ( ) $f \equiv 0$; ci occuperemo, cioè, del sistema

$$\Delta_2 u + k \operatorname{grad} \operatorname{div} u = 0. \tag{1_0}$$

D'altra parte tutti i problemi d'integrazione del sistema (1) si riducono in modo ovvio ad analoghi problemi relativi a (1_0).

Diremo che il vettore u è *omogeneo di grado ν e di polo x^0* se le sue componenti sono funzioni omogenee di grado ν delle differenze $x_1 - x_1^{(0)}$, $x_2 - x_2^{(0)}$, $x_3 - x_3^{(0)}$. Diremo inoltre che il vettore w è *armonico* se verifica l'equazione $\Delta_2 w = 0$, se cioè le sue componenti sono funzioni armoniche.

Sussiste il seguente teorema:

---

(22) Avverto che chiamo ortogonali (su $\mathcal{F}\mathcal{D}$) due vettori se è nullo l'integrale esteso a $\mathcal{F}\mathcal{D}$ del loro prodotto scalare.

XIX. — *Condizione necessaria e sufficiente perchè il vettore u omogeneo di grado intero ν e di polo $x^{(0)}$ sia soluzione di (1_0) è che esista un vettore armonico w, pur'esso omogeneo di grado ν e polo $x^{(0)}$, per il quale si abbia*

$$(26) \qquad u = w - \frac{k}{2} \frac{\overline{x^{(0)} x}^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} w}{k(\nu - 1) + 2\nu - 1}.$$

Il vettore w riesce univocamente determinato.

Si osservi anzitutto che la quantità

$$k(\nu - 1) + 2\nu - 2$$

è certo diversa da zero qualunque sia l'intero ν. Infatti se fosse nulla sarebbe $\nu = \dfrac{2 + 2k}{4 + 2k}$, mentre invece ν è intero.

La dimostrazione della sufficienza altro non implica che un'elementare verifica. Dimostriamo la necessità. Si ponga

$$(27) \qquad w = u + \frac{k}{2} \frac{\overline{x^{(0)} x}^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} u}{2\nu - 1}.$$

Tenendo presente che se z è una funzione armonica omogenea in $x_1 - x_1^{(0)}$, $x_2 - x_2^{(0)}$, $x_3 - x_3^{(0)}$ di grado $\nu - 1$ si ha, com'è facile constatare:

$$\Delta_2 (\overline{x^{(0)} x}^2 \operatorname{grad} z) = 2(2\nu - 1) \operatorname{grad} z,$$

si deduce

$$\Delta_2 w = \Delta_2 u + k \operatorname{grad} \operatorname{div} u = 0,$$

cioè w è armonico.

Per dimostrare che w verifica la (26) basta far vedere che

$$(28) \qquad \frac{\operatorname{grad} \operatorname{div} u}{2\nu - 1} = \frac{\operatorname{grad} \operatorname{div} w}{k(\nu - 1) + 2\nu - 1}.$$

Dalla (27) si ha

$$\operatorname{div} w = \operatorname{div} u + \frac{k(\nu - 1)}{2\nu - 1} \operatorname{div} u$$

e quindi la (28). Resta da provare l'unicità di w. Operando con Δ_2 sui due membri della

$$(26') \qquad 0 = w - \frac{k}{2} \frac{\overline{x_0 x}^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} w}{k(\nu - 1) + 2\nu - 1},$$

si trae

$$\operatorname{grad}\operatorname{div} w = 0 \, ,$$

e quindi div $w =$ costante.

Segue dalla (26′) $w = 0$ e, pertanto, l'asserita unicità.

Dal teorema dimostrato segue ovviamente che

XX. — *Detto μ_ν il numero massimo delle funzioni armoniche omogenee di grado intero ν in $x_1 - x_1^{(0)}, x_2 - x_2^{(0)}, x_3 - x_3^{(0)}$ linearmente indipendenti* [23] *e $p_1, p_2, \ldots, p_{\mu_\nu}$ un sistema di tali funzioni, tutti i vettori omogenei di grado ν e polo x^0 soluzioni di (1_0) si ottengono come combinazioni lineari dei seguenti $3\,\mu_\nu$ vettori linearmente indipendenti*

$$\omega'_{i\nu} \equiv \left(p_i + \lambda_\nu \overline{x_0 x}^2 \frac{\partial^2 p_i}{\partial x_1^2} , \lambda_\nu \overline{x_0 x}^2 \frac{\partial^2 p_i}{\partial x_1 \partial x_2} , \lambda_\nu \overline{x_0 x}^2 \frac{\partial^2 p_i}{\partial x_1 \partial x_3}\right),$$

$$\omega''_{i\nu} \equiv \left(\lambda_\nu \overline{x_0 x}^2 \frac{\partial^2 p_i}{\partial x_1 \partial x_2} , p_i + \lambda_\nu \overline{x_0 x}^2 \frac{\partial^2 p_i}{\partial x_2^2} , \lambda_\nu \overline{x_0 x}^2 \frac{\partial^2 p_i}{\partial x_2 \partial x_3}\right),$$

$$\omega'''_{i\nu} \equiv \left(\lambda_\nu \overline{x_0 x}^2 \frac{\partial^2 p_i}{\partial x_1 \partial x_3} , \lambda_\nu \overline{x_0 x}^2 \frac{\partial^2 p_i}{\partial x_2 \partial x_3} , p_i + \lambda_\nu \overline{x_0 x}^2 \frac{\partial^2 p_i}{\partial x_3^2}\right),$$

$$\left(\lambda_\nu = -\frac{k}{2} \frac{1}{k(\nu - 1) + 2\nu - 1}\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu_\nu) .$$

Quando in seguito parleremo di *sistema di soluzioni omogenee di* (1_0) *di polo* x_0, intenderemo quello costituito dalla infinità numerabile dei vettori $\omega'_{i\nu}, \omega''_{i\nu}, \omega'''_{i\nu}$, allorchè l'intero ν assume tutti i possibili valori. Diremo anche *sistema di soluzioni polinomiali omogenee* di (1_0) un sistema di soluzioni omogenee di polo l'origine delle coordinate e grado $\nu \geq 0$.

4. TEOREMI DI COMPLETEZZA. — Supponiamo che il dominio $\mathfrak{D}$ sia limitato esternamente dalla superficie chiusa Σ_0 e internamente dalle superficie chiuse $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_q$. Consideriamo nell'interno del dominio limitato da Σ_j il punto x_j $(j = 1, 2, \ldots, q)$, sia $\{\omega_m\}$ un sistema di soluzioni polinomiali omogenee di (1_0) e $\{\tau_m^j\}$ un sistema di soluzioni omogenee di grado intero negativo e polo x^j. Diciamo $\{v^i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ l'infinità numerabile di vettori ottenuta ordinando in successione l'insieme costituito da tutti i vettori dei sistemi $\{\omega_m\}, \{\tau_m^{(1)}\}, \ldots, \{\tau_m^{(q)}\}$.

---

[23] Il numero μ_ν — com'è noto — è uguale a $2\nu + 1$ se ν è non negativo, a $-2\nu - 1$ nell'altro caso.

È evidente che

XXI. — *Condizione necessaria e sufficiente perchè il vettore determinante* $\alpha(E)$ *verifichi per ogni* x *esterno a* $\mathfrak{D}$ *le* (23) *o le* (25) *è che esso verifichi rispettivamente i seguenti sistemi d'infinite equazioni integrali*

$$(23') \qquad \int_{\mathfrak{F}\mathfrak{D}} v^{(i)} \times d\,\alpha = 0\,, \qquad\qquad (25') \qquad \int_{\mathfrak{F}\mathfrak{D}} L^0\,[v_0^{(i)}]\,d\,\alpha = 0\,.$$

Sussistono i seguenti teoremi di completezza

XXII. — *Se* k *è un valore per il quale sussiste il teorema di unicità per il problema* 1^0) *nella classe* U, *il sistema* $\{v^i\}$ *è completo nello spazio* $\mathcal{L}(\mathfrak{F}\mathfrak{D})$ *e quindi anche nello spazio* $\mathcal{H}(\mathfrak{F}\mathfrak{D})$.

È noto che un funzionale lineare $I[u]$ in $\mathcal{L}(\mathfrak{F}\mathfrak{D})$ può mettersi sotto la seguente forma

$$I[u] = \int_{\mathfrak{F}\mathfrak{D}} u \times d\,\alpha\,.$$

Sia allora

$$I[v^{(i)}] = \int_{\mathfrak{F}\mathfrak{D}} v^{(i)} \times d\,\alpha = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

Ma ciò implica le (23) e quindi $I[u] \equiv 0$ qualunque sia u in $\mathcal{L}$.

Il ragionamento vale anche, in particolare, per lo spazio $\mathcal{H}(\mathfrak{F}\mathfrak{D})$ dato che allora si ha

$$I[u] = \int_{\mathfrak{F}\mathfrak{D}} u \times \varphi\,d\,\sigma$$

essende φ un vettore di $\mathcal{H}(\mathfrak{F}\mathfrak{D})$.

In modo analogo si ha·

XXIII. — *Nelle ipotesi per* k *ammesse nel teor.* III *il sistema* $\{L^0\,[v^i]\}$ *è completo nello spazio* $\mathcal{L}_0(\mathfrak{F}\mathfrak{D})\,[\mathcal{H}_0(\mathfrak{F}\mathfrak{D})]$, *costituito da tutti i vettori di* $\mathcal{L}(\mathfrak{F}\mathfrak{D})$ $[\mathcal{H}(\mathfrak{F}\mathfrak{D})]$ *ortogonali ai vettori* $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$.

Si ha anche per il teor. XVIII:

XXIV. — *Detto* $x^{(0)}$ *un punto intero a* $\mathfrak{D}$, *che supponiamo limitato da un'unica superficie chiusa, nelle ipotesi per* k *ammesse nel teor.* II, *oppure in quelle del teor.* III, *il sistema* $\{\tau^{(i)}\}$ *delle soluzioni omogenee di grado intero negativo e polo* $x^{(0)}$, *oppure il sistema* $\{L^0\,[\tau^i]\}$ *è completo in* $\mathcal{L}[\mathfrak{F}\mathfrak{D}]$ $[\mathcal{H}(\mathfrak{F}\mathfrak{D})]$.

CAPITOLO IV.

Teoremi d'esistenza per il problema 1^0) (24)

1. TEOREMA D'ESISTENZA OTTENUTO CON PROCEDIMENTO CLASSICO. — Supponendo che il dominio limitato $\mathfrak{D}$ abbia una frontiera costituita dalla superficie Σ_0 (esterna) e dalle $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_q$ (interne) di classe 2, è possibile conseguire il teorema d'esistenza per il problema 1^0) estendendo un procedimento già impiegato dal LAURICELLA (25) per un dominio ad unico contorno e che in sostanza è l'estensione alle equazioni dell'elasticità del metodo classico di FREDHOLM per dimostrare il principio di DIRICHLET nella teoria del potenziale. In questa trattazione considereremo, però, anche il caso che i dati su $\mathcal{F}\mathfrak{D}$ siano sommabili anzichè continui, come d'ordinario si suole. Ciò ci è consentito dal modo generale col quale abbiamo svolto la teoria del potenziale.

Sussiste il seguente teorema:

XXV. — *Ad ogni vettore $\overline{u}(\xi)$ definito su $\mathcal{F}\mathfrak{D}$ ed ivi sommabile si può far corrispondere un vettore $\varphi(\xi)$ sommabile su $\mathcal{F}\mathfrak{D}$ e $3\,q$ costanti c_j^m $(m=1,2,\ldots,q;$ $j=1,2,3)$ in modo tale che, detto x^m un punto arbitrariamente fissato nell'interno del dominio limitato da Σ_m e posto*

$$u_i(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{F}\mathfrak{D}} \{ L_y^0 [s^i(x, y)] \times \varphi(y) \} \, d_y\sigma + \sum_{m=1}^{q} \sum_{j=1}^{3} c_j^m \, s_i^{(j)}(x, x^m), \quad (i=1,2,3)$$

il vettore $u(x)$ — che in $\mathfrak{D} - \mathcal{F}\mathfrak{D}$ soddisfa alla (1_0) — verifica la seguente condizione al contorno

$$\lim_{x \to \xi \, (\mathrm{su}\ \nu_\xi +)} u(x) = \overline{u}(\xi)$$

per quasi tutti i punti ξ di $\mathcal{F}\mathfrak{D}$.

Se $\overline{u}(\xi)$ è continuo su $\mathcal{F}\mathfrak{D}$, tale riesce $\varphi(\xi)$ e tale è quindi $u(x)$ in $\mathfrak{D}$.

---

(24) I teoremi di esistenza per i problemi 1^0), 2^0) e 3^0) saranno sempre relativi al sistema (1_0). È noto come — supposto f, termine noto di (1), hölderiano in $\mathfrak{D}$ — ci si possa sempre ricondurre a questo caso.

(25) Cfr. LAURICELLA [1].

Consideriamo il seguente sistema di equazioni integrali di seconda specie si **Fredholm** nel vettore incognito $\varphi(\xi)$

$$\bar{u}_i(\xi) - \sum_{m=1}^{q} \sum_{j=1}^{3} c_j^{(m)} s_i^{(j)}(\xi, x^{(m)}) = \varphi_i(x) + \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} \{L_y^0 [s^{(i)}(\xi, y)] \times \varphi(y)\} \, d_y \sigma$$

$$(i = 1, 2, 3).$$

Il sistema omogeneo ad esso associato ha, per $\lambda = 1$, come autosoluzioni i $3q$ vettori linearmente indipendenti $\varphi^{(m\,j)}(\xi)$ $(m = 1, 2, \ldots, q$; $j = 1, 2, 3)$, essendo le componenti $\varphi_i^{(m,j)}(\xi)$ $(i = 1, 2, 3)$ di $\varphi^{(m,j)}$ così definite

$$\varphi_i^{(m\,j)}(\xi) \begin{cases} = 1 & \text{se } \xi \text{ è su } \Sigma_m \text{ e } i = j, \\ = 0 & \text{negli altri casi.} \end{cases}$$

Dimostriamo che l'autovalore $\lambda = 1$ ha rango $3q$. Consideriamo a tale scopo il sistema omogeneo trasposto

$$(30) \qquad 0 = \psi_i(\xi) + \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} \{L_\xi^0 [s^{(i)}(\xi, y)] \times \psi(y)\} \, d_y \sigma$$

e ammettiamo che $\psi^1, \psi^2, \ldots, \psi^{3q+1}$ siano autosoluzioni per $\lambda = 1$ linearmente indipendenti di tale sistema, che, pertanto, risultano hölderiane su $\mathcal{F}\mathcal{D}$.

Consideriamo il vettore

$$w_i(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} \left\{ s^{(i)}(x, y) \times \sum_{m=1}^{3q+1} c_m \psi^m(y) \right\} d_y \sigma \qquad (i = 1, 2, 3).$$

([26]) Il sistema (29) è un sistema di **Fredholm**, essendo su $\mathcal{F}\mathcal{D}$. $|L_y^0 [s^{(i)}(\xi, y)]| < \dfrac{A}{\overline{\xi y}}$.
La teoria per tali sistemi si fa, generalmente, supponendo limitati i vettori incogniti e i termini noti Ma poichè se $h(y)$ è sommabile su $\mathcal{F}\mathcal{D}$ tale riesce per quasi tutti gli ξ di $\mathcal{F}\mathcal{D}$ la funzione $h(y) \dfrac{1}{\overline{\xi y}}$, essendo a sua volta sommabile su $\mathcal{F}\mathcal{D}$ la funzione di ξ: $\displaystyle\int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} h(y) \frac{1}{\overline{\xi y}} \, d\sigma$, tutti i risultati di quella teoria permangono inalterati anche se si suppone, soltanto, che il vettore termine noto e il vettore incognito sono sommabili su $\mathcal{F}\mathcal{D}$, avendo sempre senso le integrazioni che quella teoria comporta ed essendo sempre lecite le inversioni nell'ordine d'integrazione, richieste nella teoria stessa.

In virtù delle (30) e del teor. III il vettore $w(x)$ è identicamente nullo all'esterno di Σ_0, qualunque siano le costanti $c_1, c_2, \ldots, c_{3q+1}$, laddove è costante all'interno di ciascuno dei domini limitati da $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_m$, e possono allora scegliersi le anzidette costanti non tutte nulle e in modo che $w(x)$ sia identicamente nullo in tutti lo spazio. Ciò implica

$$c_1 \psi^{(1)} + c_2 \psi^{(2)} + \ldots + c_{3q+1} \psi^{(3q+1)} \equiv 0 .$$

Vi sono quindi solamente $3q$ autosoluzioni linearmente indipendenti. Siano $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \ldots, \psi^{(3q)}$. La condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema (29) ammetta soluzione è che il vettore termine noto sia ortogonale a ciascuno di questi vettori. Devono cioe esser soddisfatte le seguenti $3q$ condizioni:

$$(31) \qquad \int\limits_{\mathcal{FD}} \left\{ \left[\bar{u}(\xi) - \sum_{m=1}^{q} \sum_{j=1}^{3} c_j^{(m)} s^{(j)}(\xi, x^{(m)}) \right] \times \psi^{(h)}(\xi) \right\} d_\xi \sigma = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots, 3q),$$

dalle quali risultano univocamente determinate le costanti c_j^m. Se invero il determinante dei coefficienti del sistema (31) fosse nullo potremmo prendere $3q$ costanti γ_j^m non tutte nulle in modo tale da riuscire:

$$\int\limits_{\mathcal{FD}} \left\{ \left[\sum_{m=1}^{q} \sum_{j=1}^{3} \gamma_j^{(m)} s^{(j)}(\xi, x^{(m)}) \right] \times \psi^{h}(\xi) \right\} d_\xi \sigma = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, 3q).$$

Ne seguirebbe che il vettore

$$v(x) = \sum_{m=1}^{q} \sum_{j=1}^{3} \gamma_j^m s^{(j)}(x, x^{(m)})$$

potrebbe rappresentarsi al modo seguente

$$(32) \qquad v_i(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathcal{FD}} \{ L_y^0 [s^i(x, y)] \times \varphi(y) \} d_y \sigma \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Ma ciò è assurdo perchè, detta Σ'_m $(m = 1, 2, \ldots, q)$ una qualsiasi superficie chiusa, che racchiude Σ_m ed esclude ogni Σ_h con $h \neq m$ e contenuta in $\mathcal{D}$, mentre il vettore $w(x)$ a secondo membro delle (32) è tale che

$$\int\limits_{\Sigma'_m} L_i^0 [w] \, d\sigma = 0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

come si constata con facili calcoli, riesce invece

$$\int_{\Sigma'_m} L_i^0 [v] \, d\sigma \neq 0$$

se tale è $\gamma_j^{(m)}$.

Posto

$$f(\xi) = \bar{u}(\xi) - \sum_{m=1}^{q} \sum_{j=1}^{3} c_j^{(m)} s^{(j)}(\xi, x^{(m)})$$

il vettore $\varphi(\xi)$ sarà dato — come segue dalla teoria delle equazioni integrali di FREDHOLM — da formule del tipo

$$\varphi_i(\xi) = f_i(\xi) + \int_{\mathcal{FD}} [R^{(i)}(\xi, y) \times f(y)] \, d_y \sigma +$$

$$+ \sum_{m=1}^{q} \sum_{j=1}^{3} K_{mj} \varphi^{mj}(\xi) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

riuscendo il vettore $R^{(i)}(\xi, y)$ continuo su $\mathcal{FD}$ se $\xi \neq y$ e verificante la limitazione

$$|R^{(i)}(\xi, y)| < \frac{A}{\overline{\xi y}} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

con A costante ed essendo le K_{mj} costanti arbitrarie. Segue da ciò che se $u(\xi)$ è continuo su $\mathcal{FD}$, essendo tale anche $f(\xi)$, è pure continuo $\varphi(\xi)$, ma allora per un noto teorema sui doppi strati [27], che seguita a sussistere con dimostrazione inalterata per i doppi strati generalizzati da noi considerati, riesce continuo in $\mathcal{D}$ il vettore $u(x)$.

2. MATRICE DI GREEN PER IL PROBLEMA 1^0) — Il teorema d'esistenza dimostrato ci assicura anche dell'esistenza di una matrice

$$(33) \qquad \| G_j^{(i)}(x, y) \| \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

la quale gode delle seguenti proprietà

α) *Detto $G^{(i)}(x, y)$ il vettore di componenti*

$$[G_1^{(i)}(x, y), G_2^{(i)}(x, y), G_3^{(i)}(x, y)]$$

si ha

$$G^{(i)}(x, y) = -g^{(i)}(x, y) + \frac{1}{4\pi} s^{(i)}(x, y) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

(27) Cfr KELLOGG [1] pag. 168, teor. IX

e il vettore $g^{(i)}(x\,,y)$ *per ogni fissato* x *in* $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$ *verifica come funzione di* y *le* (1_0) *mentre si ha per* x *in* $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$ *e* y *su* $\mathcal{F}\mathcal{D}$

$$G^{(i)}(x\,,y) = 0\,.$$

β) *La matrice* $\| G^{\,i}_{j}(x\,,y) \|$ *coincide con la sua trasposta. Si ha cioè*

$$G^{\,i}_{j}(x\,,y) = G^{\,j}_{i}(x\,,y) \qquad (i\,,j = 1\,,2\,,3)$$

γ) *Ciascuna funzione* $G^{\,i}_{j}(x\,,y)$ *è funzione biregolare di* $(x\,,y)$ *se questi rispettivamente variano in due domini contenuti in* $\mathcal{D}$ *e privi di punti in comune.*

La proprietà α) segue dal teor XXV quando si assuma $\overline{u}(\xi) = s^{\,i}(x\,,\xi)$ $(i = 1\,,2\,,3)$. Per dimostrare la β) e la γ) non c'è che da ripetere le dimostrazioni che si fanno per dimostrare le analoghe proprietà della funzione di GREEN per il problema di DIRICHLET, relativo alle funzioni armoniche. Dalle (4) segue che ogni soluzione biregolare del problema 1⁰) per l'equazione (1_0) può mettersi sotto la forma seguente

$$u_i(x) = \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} L_y\,[G_i(x\,,y)] \times u(y)]\,d_y\,\sigma \qquad (i = 1\,,2\,,3)$$

Diremo che la (33) è la *matrice di* GREEN relativa al dominio $\mathcal{D}$ per il problema 1⁰).

3. LEMMA SUL POTENZIALE DI VOLUME. — Vogliamo adesso dare un teorema di esistenza per il problema 1⁰) che, non fondandosi sulla teoria delle equazioni integrali, sia valido per un dominio $\mathcal{D}$ la cui frontiera possa anche presentare singolarità. Il procedimento che seguiremo, fondato su un nuovo teorema di inversione della formola di GREEN, procedimento che nei successivi capitoli impiegheremo anche per i problemi 2⁰) e 3⁰), si discosta dai metodi esistenziali classici e si inquadra in quella parte dell'Analisi funzionale, relativa all'inversione delle trasformazioni funzionali lineari. E, però, prima necessario approntare gli strumenti analitici di cui ci varremo in seguito nel corso delle nostre dimostrazioni. Dimostriamo intanto il seguente lemma:

XXVI. — *Sia* $\mathcal{D}$ *un dominio dello spazio la cui frontiera possa decomporsi in un numero finito di porzioni di superficie (aperte) di classe 2 e sia* $h(y)$ *una funzione, verificante in ogni dominio completamente interno a* $\mathcal{D}$ *una condizione di* HÖLDER *e di quadrato sommabile in* $\mathcal{D}$. *Per quasi tutti i punti* ξ *di* $\mathcal{F}\mathcal{D}$ *riescono sommabili in* $\mathcal{D}$ *le funzioni di* y:

$$h(y)\,\frac{\partial}{\partial y_i}\,\frac{1}{\overline{\xi y}} \qquad (i = 1\,,2\,,3) \tag{34}$$

e si ha

$$(35) \qquad \lim_{x \to \xi (\text{su } \nu_\xi^\pm)} \int_{\mathfrak{D}} h(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{\overline{x y}} d_y T = \int_{\mathfrak{D}} h(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{\overline{\xi y}} d_y T \; (i = 1, 2, 3)$$

Poichè si ha

$$\left| h(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{\overline{\xi y}} \right| \leq |h(y)| \frac{1}{\overline{\xi y}^2}$$

e dato che $\int_{\mathcal{F}\mathfrak{D}} \frac{1}{\overline{\xi y}^2} d_1 \sigma$ è hilbertiana su $\mathfrak{D}$, segue la sommabilità su $\mathfrak{D}$, per quasi tutti gli ξ di $\mathcal{F}\mathfrak{D}$, della funzione (34). Sia Σ una porzione di superficie regolare di classe 2 facente parte della frontiera di $\mathfrak{D}$ e tale che si possa determinare $\varrho_0 > 0$ in modo che per $0 \leq \varrho \leq \varrho_0$ l'insieme descritto da Σ_ϱ^+ appartenga a $\mathfrak{D}$. Si noti che tutti i punti di $\mathcal{F}\mathfrak{D}$ nei quali è determinata la normale sono interni ad una porzione disuperficie regolare (di diametro convenientemente piccolo) siffatta.

Sia inoltre L una costante positiva per la quale si abbia al variare di ϱ nell'intervallo chiuso $(0, \varrho_0)$

$$\int_{\mathfrak{D}} \left[\int_{\Sigma_\varrho^+} \frac{d_x \sigma_\varrho^+}{\overline{x y}^2} \right]^2 d_y T < L .$$

Una tale costante esiste certamente dato che è

$$\int_{\mathfrak{D}} \left[\int_{\Sigma_\varrho^+} \frac{d_x \sigma_\varrho^+}{\overline{x y}^2} \right]^2 d_y T = \int_{\Sigma_\varrho^+} \int_{\Sigma_\varrho^+} d_x \sigma_\varrho^+ d_\xi \sigma_\varrho^+ \int_{\mathfrak{D}} \frac{1}{\overline{x y}^2} \frac{1}{\overline{\xi y}^2} d_y T \leq$$

$$< B \int_{\Sigma_\varrho^+} \int_{\Sigma_\varrho^+} \frac{1}{\overline{x y}} d_x \sigma \, d_\xi \sigma ,$$

essendo B una costante positiva e dato che (teor. VIII) l'ultimo integrale scritto è limitato al variare di ϱ. Proveremo che, comunque si assuma su Σ l'insieme misurabile E si ha uniformemente rispetto ad E:

$$\lim_{\varrho \to 0} \int_{E_\varrho^+} d_x \sigma_\varrho^+ \int_{\mathfrak{D}} h(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{\overline{x y}} d_y T = \int_E d_\xi \sigma \int_{\mathfrak{D}} h(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{\overline{\xi y}} d_y T .$$

Dato $\varepsilon > 0$, sia $\mathfrak{T}_\varepsilon$ un dominio interno a $\mathfrak{D}$ tale che sia

$$\int_{\mathfrak{D}-\mathfrak{T}_\varepsilon} | h(y) |^2 d_y T < \frac{\varepsilon^2}{9L}.$$

Esiste un conveniente ϱ_ε che suppongo minore di ϱ_0, tale che per $\varrho < \varrho_\varepsilon$ si ha, qualunque sia E in Σ:

$$\left| \int_{E_\varrho^+} d_x \sigma_\varrho^+ \int_{\mathfrak{T}_\varepsilon} h(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{\overline{xy}} d_y T - \int_E d_\xi \sigma \int_{\mathfrak{T}_\varepsilon} h(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{\overline{\xi y}} d_y T \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Abbiamo allora qualunque sia E in Σ per $\varrho < \varrho_\varepsilon$

$$\left| \int_{E_\varrho^+} d_x \sigma_\varrho^+ \int_{\mathfrak{D}} h(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{\overline{xy}} d_y T - \int_E d_\xi \sigma \int_{\mathfrak{D}} h(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{\overline{\xi y}} d_y T \right| <$$

$$\leq \left| \int_{E_\varrho^+} d_x \sigma_\varrho^+ \int_{\mathfrak{T}_\varepsilon} h(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{\overline{xy}} d_y T - \int_E d_\xi \sigma \int_{\mathfrak{T}_\varepsilon} h(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{\overline{\xi y}} d_y T \right| +$$

$$+ \int_{\Sigma_\varrho^+} d_x \sigma_\varrho^+ \int_{\mathfrak{D}-\mathfrak{T}_\varepsilon} | h(y) | \frac{1}{\overline{xy}^2} d_y T + \int_{\Sigma} d_\xi \sigma \int_{\mathfrak{D}-\mathfrak{T}_\varepsilon} | h(y) | \frac{1}{\overline{\xi y}^2} d_y T <$$

$$\frac{\varepsilon}{3} + \sqrt{\int_{\mathfrak{D}-\mathfrak{T}_\varepsilon} | h(y) |^2 d T \cdot \int_{\mathfrak{D}} \left[\int_{\Sigma_\varrho^+} \frac{1}{\overline{xy}^2} d_x \sigma_\varrho^+ \right]^2 d_y T} +$$

$$+ \sqrt{\int_{\mathfrak{D}-\mathfrak{T}_\varepsilon} | h(y) |^2 d T \int_{\mathfrak{D}} \left[\int_{\Sigma} \frac{1}{\overline{\xi y}^2} d_\xi \sigma \right]^2 d_y T} < \varepsilon .$$

Ciò prova il nostro asserto. Ne segue che la funzione del punto x di Σ_ϱ^+

$$\int_{\mathfrak{D}} h(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{\overline{xy}} d_y T$$

converge in misura, quando $\varrho \to 0$, alla funzione del punto ξ di Σ

$$\int_{\mathfrak{D}} h(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{\overline{\xi y}} d_y T \text{ [28]}.$$

Per un noto teorema sulla convergenza in misura, fissato quasi ovunque ξ in Σ esiste una successione di punti $\{x^{(n)}\}$ su ν_ξ^+ tale che $\lim_{n \to \infty} x^{(n)} = \xi$ e per la quale

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathfrak{D}} h(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{\overline{x^{(n)} y}} d_y T = \int_{\mathfrak{D}} h(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{\overline{\xi y}} d_y T \tag{36}$$

Siano $\xi_i = \varphi_i(u_1, u_2)$ $(i = 1, 2, 3)$ le equazioni parametriche di Σ e $A_{u_1 u_2}$ il suo dominio base. Consideriamo per $0 \leq \varrho \leq \varrho_0$ il sistema di coordinate curvilinee a superficie parallele dato dalla trasformazione

$$x_i = \varphi_i(u_1, u_2) + \varrho\, \nu_i(u_1, u_2) \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{37}$$

essendo ν_1, ν_2, ν_3 i coseni direttori della normale positiva a Σ nel punto ξ di coordinate $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$. Detto $J(u_1, u_2, \varrho)$ lo jacobiano di tale trasformazione sia ϱ_0 abbastanza piccolo da riuscire

$$J(u_1, u_2, \varrho) > m > 0. \tag{38}$$

Diciamo $\mathcal{S}$ lo strato descritto da Σ_ϱ^+ al variare di ϱ nell'intervallo chiuso $(0, \varrho_0)$ e, posto

$$H(x_1, x_2, x_3) = \int_{\mathfrak{D}} h(y) \frac{1}{\overline{x y}} d_y T,$$

consideriamo in $\mathcal{S} - \mathcal{F}\mathcal{S}$ la funzione

$$g_i(x) = g_i(\xi, \varrho) = \nu_1(\xi) \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_1} + \nu_2(\xi) \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_2} +$$
$$+ \nu_3(\xi) \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_3}, \qquad (i = 1, 2, 3).$$

---

[28] Cfr. FICHERA [8] pag. 17, teor. XVI.

Poichè le derivate seconde di H sono sommabili in S (29), tale risulta $g_i(x)$ e si ha:

$$\int_S g_i(x)\, d\, T = \int_0^{\varrho_0} d\,\varrho \int_{A_{u_1 u_2}} g_i[\varphi_1 + \varrho\, \nu_1, \varphi_2 + \varrho\, \nu_2, \varphi_3 + \varrho\, \nu_3]\, J\, d\, u_1\, u_2 .$$

Per la (38) ne segue che per quasi tutti gli ξ di Σ è sommabile nell'intervallo $(0, \varrho_0)$ la funzione $g_i(\xi, \varrho)$ Pertanto la funzione di ϱ

$$\int_\varrho^{\varrho_0} g_i(\xi, \tau)\, d\, \tau$$

è convergente per $\varrho \to 0$, ma tale funzione altro non e — a meno di una costante additiva — che

$$-\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\int_{\mathfrak{D}} h(y) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{\overline{x\, y}}\, d_y\, T = \int_{\mathfrak{D}} h(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{\overline{x\, y}}\, d_y\, T$$

considerata per x su ν_ξ^+. In virtù della (36) segue la (35) relativa a ν_ξ^+. Allo stesso modo si dimostra quella relativa a ν_ξ^-.

4. TEOREMA D'INVERSIONE E DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI ESISTENZA IN IPOTESI PIÙ GENERALI PER IL DOMINIO $\mathfrak{D}$. — Sussiste un teorema d'inversione che è di tipo diverso di quello gia dimostrato in un precedente lavoro ed al quale, peraltro, faremo ricorso nel successivo capitolo. Con L^* intenderemo l'operatore L quando si assuma $\lambda = -1$.

XXVII. — *Siano: $\mathfrak{D}$ un dominio limitato la cui frontiera si compone di un numero finito di porzioni di superficie di classe 2, $\varphi_0(x)$ uno scalare e $\varphi(x)$ un vettore verificanti in $\mathfrak{D} \cdot \mathcal{F}\mathfrak{D}$ l'equazione*

$$(k+1)\,\mathrm{grad}\,\varphi_0 - \mathrm{rot}\,\varphi = 0, \tag{37}$$

che soddisfano in ogni dominio interno a $\mathfrak{D}$ ad una condizione di HÖLDER *e tali che φ_0 e $|\varphi|$ siano di quadra o sommabile in $\mathfrak{D}$: $\overline{u}(\xi)$ un vettore sommabile su $\mathcal{F}\mathfrak{D}$.*

(29) Cfr. FRIEDRICHS [1].

Se per ogni x' esterno a $\mathfrak{D}$, $\varphi_0(x)$, $\varphi(x)$ e $\overline{u}(\xi)$ verificano le equazioni:

$$
(38) \qquad 0 = \int_{\mathcal{F}\mathfrak{D}} \{\overline{u}(y) \times L^*[s^{(i)}(x', y)]\} d_y\sigma + \int_{\mathfrak{D}} \{(k+1)\varphi_0 \operatorname{div}_y s^{(i)}(x', y) + \varphi \times \operatorname{rot}_y s^{(i)}(x', y)\} d_y T \qquad (i = 1, 2, 3),
$$

il vettore così definito:

$$
(39) \qquad 4\pi u_i(x) = \int_{\mathcal{F}\mathfrak{D}} \{\overline{u}(y) \times L^*[s^{(i)}(x, y)]\} d_y\sigma + \int_{\mathfrak{D}} \{(k+1)\varphi_0 \operatorname{div}_y s^{(i)}(x, y) + \varphi \times \operatorname{rot}_y s^{(i)}(x, y)\} d_y T, \qquad (i = 1, 2, 3),
$$

che in $\mathfrak{D} - \mathcal{F}\mathfrak{D}$ verifica la (1_0), soddisfa su $\mathcal{F}\mathfrak{D}$ alla condizione

$$
(40) \qquad \lim_{x \to \xi \, (\text{su } \overset{+}{\nu}_\xi)} u(x) = \overline{u}(\xi),
$$

per quasi tutti i punti ξ di $\mathcal{F}\mathfrak{D}$.

Il vettore a secondo membro delle (38) rappresentato da integrali superficiali verifica in $\mathfrak{D} - \mathcal{F}\mathfrak{D}$ la (1_0), come si constata ovviamente. Detto poi $\mathfrak{T}$ un qualsiasi dominio regolare interno a $\mathfrak{D}$, si ha per ogni x interno a $\mathfrak{T}$ tenendo presente la (37):

$$
\int_{\mathfrak{D}} \{(k+1)\varphi_0 \operatorname{div}_y s^{(i)}(x, y) + \varphi \times \operatorname{rot}_y s^{(i)}(x, y)\} d_y T =
$$

$$
= \int_{\mathfrak{D}-\mathfrak{T}} \{(k+1)\varphi_0 \operatorname{div}_y s^{(i)}(x, y) + \varphi \times \operatorname{rot}_y s^{(i)}(x, y)\} d_y T -
$$

$$
- \int_{\mathcal{F}\mathfrak{T}} \{[(k+1)\varphi_0 \nu - (\nu \wedge \varphi)] \times s^{(i)}(x, y)\} d_y\sigma \qquad (i = 1, 2, 3)
$$

ed è facile constatare che ciascuno dei vettori al secondo membro verifica nell'interno di $\mathfrak{T}$ la (1_0).

Poichè si ha fissato ξ su $\mathcal{F}\mathfrak{D}$

$$
4\pi \overline{u}_i(\xi) = \int_{\mathcal{F}\mathfrak{D}} \{\overline{u}(\xi) \times L^*[s^{(i)}(x, y)]\} d_y\sigma \qquad (i = 1, 2, 3)
$$

qualunque sia x interno a $\mathfrak{D}$, e

$$0 = \int_{\mathcal{F}\mathfrak{D}} \{\overline{u}(\xi) \times L^* [s^i (x', y)]\} \, d_y \sigma \qquad (i = 1, 2, 3)$$

qualunque sia x' esterno a $\mathfrak{D}$, per dimostrare la (40) basta far vedere che, detto x un punto su ν_ξ^+ e x' il suo simmetrico rispetto a ξ, si ha

$$(41) \qquad \lim_{x' \to \xi (\text{su } \nu_\xi^+)} \int_{\mathcal{F}\mathfrak{D}} \{[\overline{u}(y) - \overline{u}(\xi)] \times [L^* [s^i (x, y)] - L^* [s^i (x', y)]\} \, d_y \sigma = 0 ,$$

$$(42) \qquad \lim_{x \to \xi (\text{su } \nu_\xi^+)} \left\{ \int_{\mathfrak{D}} \{(k+1)\varphi_0 \operatorname{div} s^i (x, y) + \varphi \times \operatorname{rot}_y s^i (x, y)\} \, d_y T - \right.$$

$$\left. - \int_{\mathfrak{D}} \{(k+1)\varphi_0 \operatorname{div} s^i (x', y) + \varphi \times \operatorname{rot}_y s^i (x', y)\} \, d_y T \right\} = 0 , \qquad (i = 1, 2, 3) .$$

Ho già dimostrato in un altro lavoro ([30]) la (41). La (42) è una conseguenza del lemma dimostrato nel numero precedente, come si constata quando si scrivono esplicitamente le espressioni di $\operatorname{div}_y s^i (x, y)$ e delle componenti di $\operatorname{rot}_y s^{(i)} (x, y)$.

Indicherò con C_u la classe dei vettori $u(x)$ soluzioni in $\mathfrak{D} \cdot \mathcal{F}\mathfrak{D}$ di (1_0) e per i quali, esistendo il limite (40) possono applicarsi formule come la (41) e la (42) con una conveniente funzione φ_0 e un conveniente vettore φ. Tale classe contiene quella dei vettori biregolari in $\mathfrak{D}$ e soluzioni di (1_0) in $\mathfrak{D} \cdot \mathcal{F}\mathfrak{D}$, basta infatti allora assumere $\varphi_0 = \operatorname{div} u$ e $\varphi = \operatorname{rot} u$ e si constata che vengono soddisfatte le (38) e (39).

Dal teorema testè dimostrato segue che:

XXVIII. — *Condizione necessaria e sufficiente perchè esista la soluzione del problema* 1°) *nella classe* C_u *è che ammetta soluzione nella classe delle funzioni hölderiane nell'interno di* $\mathfrak{D}$ *e di quadrato sommabile in* $\mathfrak{D}$ *il sistema di equazioni funzionali* (37), (38) *nelle quali sono incognite la funzione* φ_0 *e il vettore* φ.

Prima di dare un teorema d'esistenza per la soluzione di tale sistema occorre premettere il seguente lemma:

([30]) Cfr. FICHERA [1] pag. 23. Qui veramente è supposto $\lambda = 1$, ma la dimostrazione permane inalterata qualunque sia λ, quindi, in particolare, anche per $\lambda = -1$.

XXIX. — *Se la successione di funzioni bi-iperarmoniche* $\{f_h\}$ *converge in media nel dominio limitato* $\mathfrak{D}$, *essa converge uniformemente nell'interno di* $\mathfrak{D}$.

Dato x, denoterò con $\omega(x)$ la superficie sferica di raggio 1 e centro x e con $\delta(x)$ la distanza di x da $\mathcal{F}\mathfrak{D}$. Un punto y dello spazio è determinato una volta nota la traccia $y^{(1)}$ del raggio vettore $\overrightarrow{xy}$ su $\omega(x)$ e il modulo ϱ di $\overrightarrow{xy}$, sicchè denoteremo y al modo seguente: $(\varrho, y^{(1)})$. Supposto x interno a $\mathfrak{D}$ sussiste, per $\varrho < \delta(x)/\sqrt{2}$, la seguente proprietà di media dovuta al PICONE [31]

$$f_k(x) - f_h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega(x)} \{f_k(\varrho, y^{(1)}) - f_h(\varrho, y^{(1)})\}\, d_{y^{(1)}}\omega -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{\omega(x)} \{f_k(\varrho\sqrt{2}, y^{(1)}) - f_h(\varrho\sqrt{2}, y^{(1)})\}\, d_{y^{(1)}}\omega .$$

Se $\Omega_R(x)$ è il dominio sferico di centro x e raggio R, posto

$$F_{hk}(x) = f_k(x) - f_h(x),$$

e fissato $R = \delta(x)/2\sqrt{2}$, abbiamo dalla precedente relazione

$$\frac{R^3}{3} F_{hk}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega_R} F_{hk}\, dT - \frac{1}{8\sqrt{2}\,\pi}\int_{\Omega_{R\sqrt{2}}} F_{hk}\, dT,$$

da cui

$$|F_{hk}(x)| \leq \frac{3}{2\pi R^3}\int_{\Omega_R} |F_{hk}|\, dT + \frac{3}{4\sqrt{2}\,\pi R^3}\int_{\Omega_{R\sqrt{2}}} |F_{hk}|\, dT .$$

Se $\mathfrak{T}$ è un dominio interno a $\mathfrak{D}$ e se δ è la distanza di $\mathfrak{T}$ da $\mathcal{F}\mathfrak{D}$, otteniamo per ogni x di $\mathfrak{T}$:

$$|F_{hk}(x)| < \frac{48}{\pi\delta^3}\int_{\mathfrak{D}} |F_{hk}|\, dT \leq \frac{48\,(\text{mis}\, D)^{1/2}}{\pi\delta^3}\left[\int_{\mathfrak{D}} |F_{hk}|^2\, dT\right]^{1/2},$$

e pertanto la tesi.

Siamo ora in grado di dimostrare il preannunciato teorema d'esistenza per il sistema (38) e quindi per il problema 1⁰) in virtù del teor. XXVIII.

---

(31) Cfr. PICONE [7].

XXX. — *Condizione sufficiente perchè il sistema* (37), (38) *abbia soluzione è che il vettore $\overline{u}(\xi)$ assegnato su $\mathcal{F}\mathfrak{D}$ sia ivi la traccia di un vettore $w(x)$ definito in tutto $\mathfrak{D}$, avente $\operatorname{div} w$ e $|\operatorname{rot} w|$ di quadrato sommabile in $\mathfrak{D}$, e uniformemente sommabile sulle frontiere di una successione di domini regolari che invade $\mathfrak{D}$.*

La condizione ammessa per $\overline{u}(\xi)$ è molto generale. Essa è, in particolare, verificata se $\overline{u}(\xi)$ è la traccia su $\mathcal{F}\mathfrak{D}$ di un vettore avente derivate prime ivi di norma sommabile, oppure, ancora più particolarmente, se è la traccia di un vettore biregolare in $\mathfrak{D}$.

Dette $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ le componenti di φ, possiamo considerare come incognita del nostro problema il vettore Φ a quattro componenti: $(1+k)^{1/2}\varphi_0$, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

Si consideri il sistema $\{v^{(i)}\}$ di soluzioni particolari di (1_0) introdotto nel capitolo precedente. Posto

$$(1+k)^{1/2}\operatorname{div} v^{i} = V_0^{(i)}, \quad \frac{\partial v_3^{(i)}}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2^{(i)}}{\partial x_3} = V_1^{(i)},$$

$$\frac{\partial v_1^{(i)}}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3^{i}}{\partial x_1} = V_2^{(i)}, \quad \frac{\partial v_2^{i}}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1^{i}}{\partial x_2} = V_3^{i},$$

e detto $W^{(i)}$ il vettore di componenti $V_0^{(i)}, V_1^{(i)}, V_2^{i}, V_4^{i}$ si constata facilmente che le (38) equivalgono al seguente sistema di infinite equazioni integrali di FISCHER-RIESZ.

$$\int_{\mathfrak{D}} (\Phi \times W^{i})\, dT = -\int_{\mathcal{F}\mathfrak{D}} \{\overline{u} \times L^*[v^{i}]\}\, d\sigma \qquad (i = 1, 2, \ldots,) \tag{43}$$

Possiamo supporre che il sistema di vettori $\{W^{(i)}\}$ sia ortonormale su $\mathfrak{D}$, ciò che equivale a sostituire al sistema delle $\{v^{i}\}$ un sistema in cui ciascun vettore sia una combinazione lineare di un numero finito di $v^{(i)}$ Posto

$$c_i = -\int_{\mathcal{F}\mathfrak{D}} \{\overline{u} \times L^*[v^{i}]\}\, d\sigma$$

si ha, detta $\{\mathfrak{C}_n\}$ una successione di domini regolari che invade $\mathfrak{D}$,

$$c_i = -\lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{F}\mathfrak{C}_n} \{w \times L^*[v^{i}]\}\, d\sigma = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{C}_n} \{(1+k)\operatorname{div} w \operatorname{div} v^{(i)} +$$

$$+ \operatorname{rot} w \times \operatorname{rot} v^{i}\}\, dT = \int_{\mathfrak{D}} (\Psi \times W^{(i)})\, dT$$

avendo indicato con Ψ il vettore di componenti

$$\Psi_0 = \operatorname{div} w \, , \; \Psi_1 = \frac{\partial w_3}{\partial x_2} - \frac{\partial w_2}{\partial x_3} \, , \; \Psi_2 = \frac{\partial w_1}{\partial x_3} - \frac{\partial w_3}{\partial x_1} \, , \; \Psi_3 = \frac{\partial w_2}{\partial x_1} - \frac{\partial w_1}{\partial x_2} \, .$$

La serie $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$ è, pertanto, convergente per il teorema di BESSEL e quindi la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \, W^{(i)} \tag{44}$$

converge in media in $\mathfrak{D}$ e, per il lemma premesso, essendo le componenti dei suoi termini funzioni bi-iperarmoniche, essa converge uniformemente nell'interno di $\mathfrak{D}$. La sua somma che indichiamo con Φ è la soluzione cercata. È ovvio che riescono verificate le (43) e quindi, posto:

$$\varphi_0 = \frac{1}{(1+k)^{1/2}} \, \Phi_0 \, , \; \varphi_1 = \Phi_1 \, , \; \varphi_2 = \Phi_2 \, , \; \varphi_3 = \Phi_3 \, ,$$

le (38). Poichè si ha per ogni i:

$$(1+k)^{1/2} \frac{\partial}{\partial x_1} V_0^{(i)} - \frac{\partial}{\partial x_2} V_3^{(i)} + \frac{\partial}{\partial x_3} V_2^{(i)} = 0 \, , \text{ etc.}$$

e dato che l'anzidetta uniforme convergenza nell'interno di $\mathfrak{D}$ ha per conseguenza quella di qualsiasi derivata parziale della serie (44), come segue dalla teoria delle funzioni iperarmoniche, ne viene che φ_0, φ_1, φ_2, φ_3 (le quali sono bi-iperarmoniche in $\mathfrak{D} \; \mathcal{F}\mathfrak{D}$ e di quadrato sommabile in $\mathfrak{D}$) verificano la (37). Il teorema è così completamente dimostrato.

Introducendo il vettore Φ testè trovato nella (39) si ottiene la soluzione del problema 1^0).

Ci si può adesso chiedere se nell'ipotesi che $w(x)$ e quindi $\overline{u}(\xi)$ sia continuo, tale riesce la soluzione costruita col metodo indicato. Sfruttando un tipo di ragionamento già impiegato dal FRIEDRICHS [32] può dimostrarsi che, in tale ipotesi, la soluzione data dalla (39) riesce continua in ogni dominio contenuto in $\mathfrak{D}$ e che escluda qualsiasi punto singolare di $\mathcal{F}\mathfrak{D}$. Ma di ciò ci occuperemo in un prossimo lavoro nel quale verranno studiate le proprietà qualitative delle soluzioni dei problemi al contorno ottenute coi nuovi metodi impiegati nella presente Memoria.

---

[32] Cfr. FRIEDRICHS [3].

CAPITOLO V.

Teorema d'esistenza per il problema 2°)

1. PREMESSE ED IPOTESI SUL DOMINIO $\mathcal{D}$. — Prenderemo adesso a considerare il problema 2°) che esamineremo solo per il caso di maggiore difficoltà, che poi è quello che interessa la teoria matematica dell'elasticità, cioè per $k > \frac{1}{3}$ e $\lambda = 1$. Assumeremo quindi

$$L[u] = (k-1) \operatorname{div} u . \nu + 2 \frac{d u}{d \nu} + (\nu \wedge \operatorname{rot} u).$$

Pertanto in questo capitolo, quando ci serviremo dell'operatore L, intenderemo sempre che esso abbia la definizione suddetta.

Verremo a dare per il problema 2°) un teorema d'esistenza con un metodo, basato, come quello del capitolo precedente, sulla inversione di una certa trasformazione funzionale lineare, ma analiticamente più interessante, in quanto la maggiore difficoltà del problema ora in istudio, richiede una maggiore ricchezza di strumenti analitici. Tale metodo si applica, ed anzi con assai minor difficoltà, anche per conseguire il teorema d'esistenza per il problema 2°) nelle ipotesi per K e λ di cui al teor. III, casi che però non hanno interesse dal punto di vista fisico e che, pertanto, non considereremo.

Supporrò che $\mathcal{D}$ sia un dominio limitato, la cui frontiera, come al solito, sia composta di porzioni di superficie regolari di classe 2 : $\sigma_1, \sigma_2 \ldots, \sigma_p$. Sia A_i il dominio del piano (u_1, u_2) base per σ_i $(i = 1,2, \ldots, p)$. Due superficie σ_i e σ_j abbiano, eventualmente, solo punti del loro bordo in comune. Farò le seguenti ipotesi.

1°) È possibile definire un versore $\mu(\xi)$ funzione del punto ξ variabile su $\mathcal{F}\mathcal{D}$ il quale sia funzione continua di ξ e sia sempre penetrante nell'interno di $\mathcal{D}$, ed anzi detta ω la misura dell'angolo che $\mu(\xi)$ forma con il versore $\nu(\xi)$ normale a σ_i in ξ e diretto verso l'interno di $\mathcal{D}$, riesca sempre $0 \leq \omega \leq \omega_0 < \frac{\pi}{2}$.

2°) Considerato $\mu(\xi)$ come funzione del punto u di A_i, esso sia continuo e dotato di derivate parziali prime continue in tutto A_i.

3°) Esista un numero positivo ϱ_0 tale che per $0 \leq \varrho \leq \varrho_0$ la corrispondenza posta fra $\mathcal{F}\mathcal{D}$ e il luogo descritto da $x = \xi + \varrho\, \mu(\xi)$ al variare di ξ su $\mathcal{F}\mathcal{D}$ sia biunivoca.

Si badi bene che la classe dei domini $\mathcal{D}$ che godono della anzidetta proprietà è molto ampia.

Essa contiene quella costituita da dominî la cui frontiera si compone di un numero finito di superficie chiuse di classe 2, basta allora assumere $\mu(\xi)$ coincidente con $\nu(\xi)$. Ma alla suddetta classe possono anche appartenere dominî la cui frontiera presenti singolarità. Ad esempio appartiene ad essa ogni dominio limitato da superficie poliedriche a facce piane.

Con $\mathcal{D}_\varrho$ indicherò il dominio limitato la cui completa frontiera $\mathcal{F}\mathcal{D}_\varrho$ è il luogo descritto dal punto $x = \xi + \varrho\, \mu(\xi)$ quando ξ descrive $\mathcal{F}\mathcal{D}$.

2. Teoremi preliminari. — Ad ogni vettore u associamo il tensore simmetrico le cui componenti ε_{ij} sono così definite

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

Tale tensore ha un ben noto significato fisico in quanto esso caratterizza lo stato di deformazione del corpo elastico. La forma quadratica

$$\Pi[v] = \sum_{i,j}^{1,3} \varepsilon_{ij}^2 + \frac{k-1}{2}\left(\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ii}\right)^2$$

chiamasi *potenziale di deformazione.*

Tale forma quadratica, considerata come funzione delle sei variabili indipendenti $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}$ riesce definita positiva, nell'ipotesi ammessa $k > \frac{1}{3}$.

Poichè si suppone isotropo il corpo elastico si può addirittura supporre $k > 1$.

Sussiste il seguente *teorema della disuguaglianza di* Korn (33), di cui molto recentemente il Friedrichs (34) ha dato una rigorosa ed elegante dimostrazione:

XXXI. — *Esiste una costante positiva $A_{\mathcal{D}}$ che dipende unicamente dal dominio $\mathcal{D}$, tale che comunque si consideri un vettore u biregolare in $\mathcal{D}$ e soddisfacente la condizione*

$$\int_{\mathcal{D}} \operatorname{rot} u \; dT = 0$$

(33) Cfr. Korn [2].

(34) Cfr. Friedrichs [2].

si abbia

$$\int_{\mathfrak{D}} |\mathrm{grad}\, u_i|^2 \, dT < A_{\mathfrak{D}} \int_{\mathfrak{D}} \Pi[u] \, d\, T \qquad (i = 1, 2, 3) \quad .$$

Per la dimostrazione rimandiamo alla citata Memoria di FRIEDRICHS.

Altro teorema di cui ci varremo è il seguente:

XXXII. — *Se $h(x)$ è una funzione avente derivate prime continue in $\mathfrak{D} - \mathcal{F}\mathfrak{D}$ e sommabili in $\mathfrak{D}$, fissato quasi ovunque ξ su $\mathcal{F}\mathfrak{D}$ esiste il limite*

$$\lim_{\varrho \to 0} h(\xi + \varrho\, \mu) \tag{46}$$

riuscendo la funzione $h(x)$ uniformemente sommabile su $\mathcal{F}\mathfrak{D}_\varrho$ al variare di ϱ fra 0 e ϱ_0.

Supponiamo — cosa ben lecita — che i dominî base $A_1, A_2, \ldots, A_p$ delle superficie $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$ siano a due a due privi di punti in comune. Si consideri la trasformazione

$$x = \xi + \varrho\, \mu(\xi)$$

definita al variare di $u \equiv (u_1, u_2)$ nel dominio

$$A = \sum_{i=1}^{p} A_i$$

e di ϱ in $(0, \varrho_0)$. Sia $J(u \,.\, \varrho)$ il suo jacobiano. Un facile calcolo mostra che in ogni punto di A_i si ha, detto $\sigma_i(u)\, d\, u$ l'elemento superficiale di σ_i

$$J(u, 0) = \cos\omega\, \sigma_i(u) \geq \cos\omega_0\, \sigma_i(u) > 0 \,,$$

per cui posso supporre ϱ_0 tale che per $u \subset A$ e $0 < \varrho < \varrho_0$ riesca

$$J(u, \varrho) \geq m > 0 \,.$$

Indico con $\mathcal{S}$ il dominio descritto da x quando ξ descrive $\mathcal{F}\mathfrak{D}$ (cioè u descrive A) e ϱ l'intervallo $(0, \varrho_0)$. Sia $g(x) \equiv g(\xi, \varrho)$ la funzione definita al

---

([35]) FRIEDRICHS si serve di questo lemma per dimostrare il teorema d'esistenza per il problema 1°) servendosi del metodo variazionale, secondo l'indirizzo di HILBERT e COURANT [1] Credo che i metodi esistenziali impiegati in queta Memoria, *e che è possibile usare tutte le volte che può tentarsi l'impiego di quello variazionale,* siano di questo più potenti in quanto, oltre ad essere applicabili a qualsiasi problema al contorno (anche a quelli misti), dànno risultati più espressivi circa il modo con cui vengono assunti i dati al contorno modo seguente in ogni punto di $\mathcal{S} - \mathcal{F}\mathcal{D}$

$$g(x) \equiv g(\xi, \varrho) = \mu(\xi) \operatorname{grad} h(x)$$

Tale funzione è sommabile in $\mathcal{S}$ e si ha:

$$\int_{\mathcal{S}} g(x)\, d\, x = \int_0^{\varrho_0} d\, \varrho \int_A g(\xi, \varrho)\, J(u, \varrho)\, d\, u,$$

Ne segue che per quasi tutti gli ξ di $\mathcal{F}\mathcal{D}$ è sommabile la funzione di $\varrho : g(\xi, \varrho)$ in $(0, \varrho_0)$ e quindi esiste il limite

$$\lim_{\varrho \to 0} \int_{\varrho}^{\varrho_0} g(\xi, \tau)\, d\, \tau .$$

Ma si ha

$$h(\xi + \varrho_0 \mu) - h(\xi + \varrho \mu) = \int_{\varrho}^{\varrho_0} g(\xi, \tau)\, d\, \tau ,$$

epperò resta dimostrata l'esistenza del limite (46).

Indichiamo con $\sigma_{i\varrho}$ la superficie d'equazione

$$x = \xi + \varrho\, \mu(\xi) \qquad (\xi \subset \sigma_i)$$

e sia ω_ϱ l'angolo (fra 0 e π) che il versore normale ν_ϱ a $\sigma_{i\varrho}$ nel punto di $\sigma_{i\varrho}$ corrispondente a ξ, diretto verso l'interno di $\mathcal{D}_\varrho$, forma con $\mu(\xi$. Poniamo

$$H(\xi, \varrho) = \cos \omega_\varrho$$

La funzione $H(\xi, \varrho)$ è continua per $u \subset A_i$ e $0 \leq \varrho \leq \varrho_0$ per cui, essendo $H(\xi, 0) \geq \cos \omega_0 > 0$, possiamo supporre che riesca sempre $H(\xi, \varrho) \geq$ $\geq H_0 > 0$. Si ha

$$\int_{\mathcal{F}\mathcal{D}_\varrho} h(x)\, d\, \sigma = \sum_{i=1}^{p} \int_{A_i} h(\xi + \varrho \mu)\, \sigma_{i\varrho}(u)\, d\, u$$

Con $\sigma_{i\varrho}(u)\, d\, u$ si è indicato l'elemento superficiale di $\sigma_{i\varrho}$. Si ha d'altra parte

$$|\, \sigma_{i\varrho}(u)\, | = \left| \frac{J(u, \varrho)}{\cos \omega_\varrho} \right| \leq \frac{|\, J(u, \varrho)\, |}{H_0};$$

$$| h(\xi + \varrho\,\mu) | = \left| \int_{\varrho_0}^{\varrho} g(\xi, \tau)\, d\tau + h(\xi + \varrho_0\,\mu) \right| \leq$$

$$\leq \int_0^{\varrho_0} | g(\xi, \tau) | \; d\tau + | h(\xi + \varrho_0\,\mu) |$$

dalle quali segue la uniforme sommabilità di $h(x)$ su $\mathcal{F}\mathcal{D}_\varrho$.

Sussiste il seguente teorema di inversione la cui dimostrazione è stata oggetto di una precedente ricerca ([36]).

XXXIII. — *Se* $\overline{u}(\xi)$ *e* $t(\xi)$ *sono due vettori sommabili su* $\mathcal{F}\mathcal{D}$ *e tali che per ogni* x' *esterno a* $\mathcal{D}$ *verificano le equazioni*

$$(47) \qquad 0 = \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} \{\overline{u}(y) \times L_y[s^i(x', y)] - t(y) \times s^i(x', y)\}\, d_y\sigma, \quad (i = 1, 2, 3)$$

il vettore così definito

$$(48) \qquad 4\pi u_i(x) = \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} \{\overline{u}(y) \times L_y[s^i(x, y)] - t(y) \times s^i(x, y)\}\, d_y\sigma \quad (i = 1, 2, 3)$$

che in $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$ *soddisfa la* (1_0), *verifica le seguenti condizioni al contorno*

$$\lim_{x \to \xi \text{ su } \nu_\xi^+} u(x) = \overline{u}(\xi), \quad \lim_{x \to \xi \text{ su } \nu_\xi^+} L[u] = t(\xi)$$

per quasi tutti i punti ξ *di* $\mathcal{F}\mathcal{D}$.

Indicheremo con $\mathcal{E}_u$ la classe dei vettori soluzioni di (1_0) ai quali siano applicabili le formule (47) e (48). Tale classe contiene quella dei vettori soluzioni di (1_0) e biregolari in $\mathcal{D}$. È ovvio che:

XXXIV — *Condizione necessaria e sufficiente perchè esista la soluzione del problema* 2°) *nella classe* $\mathcal{E}_u$ *è che esista la soluzione del sistema integrale* (47) *nell'incognita* $\overline{u}(\xi)$.

Nel paragrafo seguente daremo un teorema di esistenza per il sistema integrale anzidetto e quindi per il problema 2°)

Consideriamo la varietà Γ dei vettori $t(\xi)$ definiti su $\mathcal{F}\mathcal{D}$ tali che esistano per ciascuno di essi tre vettori $t^{1}(x)$, $t^{(2)}(x)$, $t^{(3)}(x)$ definiti in tutto

---

([36]) Cfr FICHERA [1].

$\mathfrak{D}$ ivi continui e con derivate prime continue in $\mathfrak{D} - \mathfrak{F}\mathfrak{D}$ e per i quali si ha

$$t^{(i)}(\xi) \times \nu = t_i(\xi) \tag{51}$$

riuscendo inoltre, qualunque sia il dominio regolare $\mathfrak{D}'$ contenuto in $\mathfrak{D}$

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{\mathfrak{F}\mathfrak{D}'} t^{(i)} \times \nu \, d\sigma = 0 \,, \\ & \int_{\mathfrak{F}\mathfrak{D}'} \{x_j (t^{(i)} \times \nu) - x_i (t^{(j)} \times \nu)\} \, d\sigma = 0 \,, \qquad (i\,,j = 1\,,2\,,3). \end{aligned} \right. \tag{52}$$

Si ha:

XXXV. — *Condizione necessaria perchè esista la soluzione biregolare del problema 2°) è che il vettore $t(\xi)$ assegnato su $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$ appartenga alla varietà V.*

Sia infatti $u(x)$ la soluzione del problema 2°) con assegnato $t(\xi)$ su $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$. Posto

$$t_i^{(i)} = (k-1)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) + 2\,\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \qquad (i = 1\,,2\,,3)$$

$$t_j^{(i)} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \qquad (i \neq j),$$

si constata ovviamente che sono soddisfatte le (51) e (52).

Le (52) implicano le seguenti equazioni che sussistono in $\mathfrak{D} - \mathfrak{F}\mathfrak{D}$

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial t_j^{(i)}}{\partial x_j} = 0 \ (i = 1\,,2\,,3), \tag{53}$$

$$t_j^{(i)} = t_i^{(j)} \qquad (i\,,j = 1\,,2\,,3).$$

3. Teorema di esistenza. — *Se $t(\xi)$ appartiene alla varietà V esiste la soluzione del sistema integrale* (47) *e quindi la soluzione del problema* 2°) *nella classe $\mathcal{E}_u$.*

Introducendo il solito sistema $\{v^{(j)}\}$ di soluzioni particolari di (1_0), si può trasformare il sistema (47) in quello equivalente di infinite equazioni di Fischer-Riesz

$$\int_{\mathfrak{F}\mathfrak{D}} \{\bar{u}(\xi) \times L[v^{(j)}]\} \, d\sigma = \int_{\mathfrak{F}\mathfrak{D}} \{t(\xi) \times v^{(j)}(\xi)\} \, d\sigma \,, \qquad (j = 1\,,2\,,\ldots). \tag{54}$$

Ad ogni vettore u associamo il seguente vettore $\Gamma[u]$ a sei componenti così definite:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma_1[u] = (1-\alpha)\,\varepsilon_{11} - \alpha\,\varepsilon_{22} - \alpha\,\varepsilon_{33}\,,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma_2[u] = -\alpha\,\varepsilon_{11} + (1-\alpha)\,\varepsilon_{22} - \alpha\,\varepsilon_{33}\,,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma_3[u] = -\alpha\,\varepsilon_{11} - \alpha\,\varepsilon_{22} + (1-\alpha)\,\varepsilon_{33}\,,$$

$$\Gamma_4[u] = \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}\,, \quad \Gamma_5[u] = \varepsilon_{13} + \varepsilon_{31}\,,$$

$$\Gamma_6[u] = \varepsilon_{23} + \varepsilon_{32}\,,$$

essendo ε_{ij} le componenti del tensore di deformazione definite al paragrafo precedente e

$$3\,\alpha = 1 - \sqrt{\frac{3\,k-1}{2}}\,.$$

Si constata che assunti comunque i vettori costanti a e b si ha

$$\Gamma[a + (x-0) \wedge b] = 0$$

e che dette p e q due costanti

$$\Gamma[p\,u + q\,v] = p\,\Gamma[u] + q\,\Gamma[v].$$

Si ha inoltre

$$|\,\Gamma[u]\,|^2 = 2\,\Pi[u]$$

Siano $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ sei funzioni così definite in $\mathfrak{D}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_1 = (1-\alpha)\,\varepsilon_1 - \alpha\,\varepsilon_2 - \alpha\,\varepsilon_3\,,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_2 = -\alpha\,\varepsilon_1 + (1-\alpha)\,\varepsilon_2 - \alpha\,\varepsilon_3\,,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_3 = -\alpha\,\varepsilon_1 - \alpha\,\varepsilon_2 + (1-\alpha)\,\varepsilon_3\,.$$

$$\varphi_4 = t_2^{(1)}\,, \quad \varphi_5 = t_3^{(1)}\,, \quad \varphi_6 = t_3^{(2)}\,,$$

essendo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ le soluzioni del seguente sistema a determinante diverso da zero

$$(k+1)\,\varepsilon_1 + (k-1)\,\varepsilon_2 + (k-1)\,\varepsilon_3 = t_1^{(1)},$$

$$(k-1)\,\varepsilon_1 + (k+1)\,\varepsilon_2 + (k-1)\,\varepsilon_3 = t_2^{(2)},$$

$$(k-1)\,\varepsilon_1 + (k-1)\,\varepsilon_2 + (k+1)\,\varepsilon_3 = t_3^{(3)}.$$

le funzioni φ_h, per l'ipotesi ammessa dall'appartenenza di $t(\xi)$ a V, sono continue in $\mathfrak{D}$.

Supponiamo che il sistema di vettori $\{\Gamma[v^{(j)}]\}$ risulti ortonormale su $\mathfrak{D}$. Ciò equivale, eventualmente, a sostituire i vettori $v^{(i)}$ con opportune combinazioni lineari di questi stessi vettori.

Posto

$$c_j = -\int_{\mathfrak{F}\mathfrak{D}} \{t \times v^{(j)}\}\, d\,\sigma \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

io dico che la serie $\sum_{j=1}^{\infty} c_j^2$ è convergente.

Si ha infatti applicando la formula di GREEN, tenendo presenti le (53) e indicando con Φ il vettore che ha per componenti le funzioni φ_h

$$c_j = \int_{\mathfrak{D}} \{\Phi \times \Gamma[v^{(j)}]\}\, d\,T$$

che prova il nostro asserto. Fissato il punto $x^{(0)}$ nell'interno di $\mathfrak{D}$ determiniamo i vettori costanti $a^{(j)}$ e $b^{(j)}$ in modo tale che siano soddisfatte le condizioni

$$v^{(j)}(x^{(0)}) + a^{(j)} + (x^{(0)} - o) \wedge b^{(j)} = 0$$

(55) $$\int_{\mathfrak{D}} \operatorname{rot}\,[v^{(j)} + a^{(j)} + (x - o) \wedge b^{(j)}]\, d\,T = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

Poniamo

$$w^{(j)} = v^{(j)} + a^{(j)} + (x - o) \wedge b^{(j)}.$$

Dimostriamo che la serie di vettori

(56) $$\sum_{j=1}^{\infty} c_j\, w^{(j)}$$

converge uniformemente nell'interno di $\mathfrak{D}$ e che le serie

$$(57) \qquad \sum_{j=1}^{\infty} c_j \operatorname{grad} w_i^{(j)} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

convergono in media in $\mathfrak{D}$ e quindi — poichè $w_i^{(j)}$ è biperarmonica — uniformemente nell'interno di $\mathfrak{D}$. Dato che tutti i termini della serie (56) si annullano in uno stesso punto basta dimostrare la convergenza in media in $\mathfrak{D}$ delle serie (57). Si ha infatti, tenendo presente la (55)

$$\int_{\mathfrak{D}} \left| \sum_{j=n+1}^{n+p} c_j \operatorname{grad} w_i^{(j)} \right|^2 d\,T = \int_{\mathfrak{D}} \left| \operatorname{grad} \sum_{j=n+1}^{n+p} c_j w^{(j)} \right|^2 d\,T \leq$$

$$\leq A_{\mathfrak{D}} \int_{\mathfrak{D}} \Pi \left[\sum_{i=n+1}^{n+p} c_j w^{(j)} \right] d\,T = \frac{A_{\mathfrak{D}}}{2} \int_{\mathfrak{D}} \left| \Gamma \left[\sum_{j=n+1}^{n+p} c_j v^{(j)} \right] \right|^2 d\,T = \frac{A_{\mathfrak{D}}}{2} \sum_{j=n+1}^{n+p} c_j^2 .$$

Indicato con u il vettore somma della serie (56), poichè $|\operatorname{grad} u_i|^2$ è sommabile in $\mathfrak{D}$, esiste, in virtù del lemma XXXII il limite

$$\lim_{\varrho \to 0} u(\xi + \varrho\, \mu)$$

per quasi tutti i punti ξ di $\mathcal{F}\mathfrak{D}$. Tale limite che chiamerò $\overline{u}(\xi)$ è sommabile su $\mathcal{F}\mathfrak{D}$ e verifica il sistema (54). Si ha infatti, tenendo presente l'anzidetto lemma:

$$\int_{\mathcal{F}\mathfrak{D}} \{\overline{u} \times L[v^{(j)}]\}\, d\,\sigma = \lim_{\varrho \to 0} \int_{\mathcal{F}\mathfrak{D}_\varrho} \{u \times L[v^{j}]\}\, d\,T = - \lim_{\varrho \to 0} \int_{\mathfrak{D}_\varrho} \{\Gamma[u] \times \Gamma[v^{j}]\}\, d\,T =$$

$$= - \int_{\mathfrak{D}} \{\Gamma[u] \times \Gamma[v^{(j)}]\}\, d\,T = - c_j = \int_{\mathcal{F}\mathfrak{D}} \{ t \times v^{j} \}\, d\,\sigma .$$

Il teorema è così completamente dimostrato.

È ovvio che qualsiasi altro vettore del tipo:

$$\overline{u}(\xi) + a + (\xi - o) \wedge b$$

è soluzione del sistema (47).

Capitolo VI.

Teorema d'esistenza per il problema 3°)

1. Preliminari e teorema d'inversione. — Lo stesso procedimento impiegato per ottenere il teorema di esistenza per il problema 2^0) può, opportunamente modificato, condurre al teorema d'esistenza per il problema 3^0). Tale circostanza — a mio avviso — fornisce una nuova conferma della efficacia dei procedimenti esistenziali impiegati in questo lavoro. In una mia recente memoria ([37]) ho mostrato come il procedimento, che verrò ad esporre, possa applicarsi anche ad equazioni generali del secondo ordine di tipo ellittico, che verificano la condizione di autoaggiunzione. Ho anche succintamente considerato il caso delle equazioni dell'elasticità, che, però, adesso riprenderò dando maggiori dettagli ed esponendo compiutamente tutte le dimostrazioni.

Faremo l'ipotesi che il dominio $\mathfrak{D}$ sia del tipo considerato nel capitolo precedente, supporremo inoltre che esista un dominio $\mathfrak{D}'$, la cui frontiera è costituita da un numero finito di superficie chiuse di classe 2, contenente $\mathfrak{D}$ e tale che non sia vuoto l'insieme chiuso

$$\overline{\mathcal{F}_1 \mathfrak{D}} = \mathcal{F}\mathfrak{D} \, . \, \mathcal{F}\mathfrak{D}'$$

e che anzi si componga della somma di un numero finito di porzioni di superficie regolari aperte. Supporrò altresì che non sia vuoto l'insieme chiuso

$$\mathcal{F}_2 \mathfrak{D} = \mathcal{F}\mathfrak{D} - \overline{\mathcal{F}_1 \mathfrak{D}} + D(\mathcal{F}\mathfrak{D} - \overline{\mathcal{F}_1 \mathfrak{D}}) \; ([38]),$$

che pertanto si compone di un numero finito di superficie regolari aperte. Posto

$$\mathcal{F}_1 \mathfrak{D} = \mathcal{F}\mathfrak{D} - \mathcal{F}_2 \mathfrak{D}$$

si viene a decomporre $\mathcal{F}\mathfrak{D}$ nella somma dei due insiemi $\mathcal{F}_1 \mathfrak{D}$ ed $\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}$ aperto il primo e chiuso il secondo.

([37]) Cfr. Fichera [5]

([38]) Se $\mathfrak{I}$ è un'insieme con $D\,\mathfrak{I}$ ne indico il derivato.

Su $\mathcal{F}_1 \mathfrak{D}$ supporrò assegnati i valori di u e su $\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}$ quelli di $L[u]$. Avverto che, così come nel capitolo precedente, mi limiterò a considerare soltanto i casi che interessano la teoria matematica dell'elasticità e, pertanto, assumerò $k > \frac{1}{3}$ e $\lambda = 1$ nell'espressione dell'operatore L.

Nelle applicazioni il problema 3_0) si presenta generalmente, assegnando nullo il vettore u su $\mathcal{F}_1 \mathfrak{D}$ cioè supponendo incastrato il corpo lungo la parte del contorno esterno che corrisponde a $\mathcal{F}_1 \mathfrak{D}$ e supponendo inoltre che lungo $\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}$ sia sottoposto a date forze. D'altra parte qualsiasi problema del tipo 3^0) può ricondursi al caso che su $\mathcal{F}_1 \mathfrak{D}$ sia $u = 0$, pertanto noi prenderemo in esame solo questo caso e verremo a dimostrare l'esistenza di un vettore u che in $\mathfrak{D} - \mathcal{F}\mathfrak{D}$ verifica la (1_0) e su $\mathcal{F}\mathfrak{D}$ la condizione

$$(58) \qquad u = 0 \quad \text{su} \quad \mathcal{F}_1 \mathfrak{D}; \qquad L[u] = t \quad \text{su} \quad \mathcal{F}_2 \mathfrak{D},$$

con t vettore assegnato, specificando la classe di soluzioni a cui appartiene u e il modo con cui vengono assunti i dati al contorno.

D'ora in avanti, quindi, parlando del problema 3^0), intenderemo riferirci al caso suddetto, espresso dalle (58).

Indicata con

$$\| G_j^{(i)}(x, y) \| \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

la matrice di GREEN per il problema 1^0) relativo al dominio $\mathfrak{D}'$ (Cfr. cap. IV, n. 2); sussiste il seguente teorema di inversione:

XXXVII. — *Se $u(\xi)$ e $t(\xi)$ sono due vettori sommabili su $\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}$ e tali che per ogni x' contenuto in $\mathfrak{D}' - \mathfrak{D}$ verificano le equazioni*

$$(59) \qquad 0 = \int_{\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}} \{ \overline{u}(y) \times L_y [G^{(i)}(x', y)] - t(y) \times G^{(i)}(x', y) \} \, d_y \sigma \qquad (i = 1, 2, 3),$$

il vettore così definito

$$(60) \qquad u_i(x) = \int_{\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}} \{ \overline{u}(y) \times L_y [G^{(i)}(x, y)] - t(y) \times G^{(i)}(x, y) \} \, d_y \sigma \qquad (i = 1, 2, 3)$$

che in $\mathfrak{D} - \mathcal{F}\mathfrak{D}$, soddisfa la (1_0) verifica le seguenti condizioni al contorno

$$(61) \qquad \lim_{x \to \xi} u(x) = 0, \quad \text{se } \xi \text{ è su } \mathcal{F}_1 \mathfrak{D};$$

$$\lim_{x \to \xi \,(\mathrm{su}\, v_\xi^+)} u(x) = \overline{u}(\xi), \qquad \lim_{x \to \xi \,(\mathrm{su}\, v_\xi^+)} L[u] = t(\xi) \tag{62}$$

per quasi tutti i punti ξ *di* $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$ (39).

Comunque si fissi ξ su $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$, esso avrà distanza positiva da $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$. È ovvio che risulta

$$\lim_{x \to \xi} \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}} \{ t(y) \times G^{(i)}(x, y) \} \, d_y \sigma = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

D'altra parte il vettore $L_y[G^{(i)}(x, y)]$, quando $x \to \xi$ converge uniformemente al variare di y su $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$ (proprietà γ) cap. IV, n. 2) e pertanto, poichè $G^{(i)}(\xi, y)$ è funzione di y identicamente nulla in $\mathcal{D} - \xi$, per il teorema della derivabilità. si ha

$$\lim_{x \to \xi} L_y [G^{(i)}(x, y)] = 0$$

uniformemente rispetto a y su $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$. Ne segue

$$\lim_{x \to \xi} \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}} \{ \overline{u}(y) \times L_y [G^{(i)}(x, y)] \} \, d_y \sigma = 0$$

e quindi la (61). Poichè la $G_j^{(i)}(x, y)$ si decompone al modo seguente

$$G_j^{(i)}(x, y) = - g_j^{(i)}(x, y) + \frac{1}{4\pi} s_j^{(i)}(x, y)$$

e la $g_j^{(i)}(x, y)$ è funzione biregolare di x e di y per dimostrare le (62) si ripetono gli stessi ragionamenti che si seguono per dimostrare il teorema XXXIII.

Indicheremo con E_u^0 la classe dei vettori nulli su $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$ continui in $\mathcal{D} - \mathcal{F}_2 \mathcal{D}$, aventi derivate prime e seconde continue in $\mathcal{D} - \mathcal{F} \mathcal{D}$ e soluzioni ivi di (1_0), per i quali, inoltre, siano applicabili le formule (59) e (60).

Tale classe contiene quella delle soluzioni biregolari di (1_0) nulle su $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$. Si ha evidentemente che

XXXVIII. — *Condizione necessaria e sufficiente perchè esista la soluzione del problema* 1^0) *nella classe* E_u^0 *è che esista la soluzione del sistema integrale* (59) *nell'incognita* $\overline{u}(\xi)$.

---

(39) L'idea di dimostrare un teorema d'inversione nel quale alla soluzione fondamentale si sostituisce la funzione di GREEN, relativa ad un dominio contenente il dato, è stata per la prima volta attuata dal GHIZZETTI nel caso particolare che $\mathcal{D}$ sia un dominio normale del piano (x, y) e che $\mathcal{D}'$ sia la striscia nella quale $\mathcal{D}$ è iscritto. Cfr. GHIZZETTI [1], [2].

2. TEOREMA D'ESISTENZA. — XXXIX. *Se* $t(\xi)$ *è la traccia su* $\mathcal{F}_2\mathfrak{D}$ *di un vettore* $t^*(\xi)$ *definito su tutta* $\mathcal{F}\mathfrak{D}$ *ed appartenente alla varietà* V, *esiste la soluzione del sistema integrale* (59) *e quindi la soluzione del problema* 3^0) *nella classe* E_u.

Indichiamo con $\mathcal{T}$ un dominio contenuto in $\mathfrak{D}' - \mathfrak{D}$ e che abbia punti in ogni insieme connesso di cui si compone $\mathfrak{D}' - \mathfrak{D}$. Sia $\{\varphi^{(j)}(x')\}$ un sistema di vettori hilbertianamente completo in $\mathcal{T}$ e poniamo

$$w_i^{(j)}(x) = \int_{\mathcal{T}} \{\varphi^{(j)}(x') \times G^{(i)}(x, x')\}\, d\,T \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Il sistema di vettori $\{w^{(j)}\}$ è un sistema di soluzioni biregolari in $\mathfrak{D}$ di (1_0), che si annullano su $\mathcal{F}_1\mathfrak{D}$.

È evidente che il sistema integrale (59) equivale al seguente di FISCHER-RIESZ

$$\int_{\mathcal{F}_2\mathfrak{D}} \{\overline{u}(\xi) \times L[w^{(j)}]\}\, d\,\sigma = \int_{\mathcal{F}_2\mathfrak{D}} \{t(\xi) \times w^{(j)}(\xi)\}\, d\,\sigma .$$

Possiamo supporre che il sistema $\{\varphi^{(j)}\}$ sia tale che il sistema di vettori a sei componenti $\{\Gamma[w^{(j)}]\}$ risulti ortonormale in $\mathfrak{D}$. Posto

$$c_j = -\int_{\mathcal{F}_2\mathfrak{D}} \{t \times w^{(j)}\}\, d\,\sigma ,$$

poichè si ha

$$c_j = -\int_{\mathcal{F}\mathfrak{D}} \{t^* \times w^{(j)}\}\, d\,\sigma ,$$

può ripetersi la dimostrazione fatta nel teorema d'esistenza del capitolo precedente e provare che la serie $\sum_{j=1}^{\infty} c_j^2$ è convergente.

Si ponga

$$\overline{w}^{(j)} = w^{(j)} + a^{(j)} + (x - o) \wedge b^{(j)} \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

e si determinino i vettori costanti $a^{(j)}$ e $b^{(j)}$ in modo che siano verificate le condizioni

$$\overline{w}^{(j)}(x^{(0)}) = 0 , \qquad \int_{\mathfrak{D}} \operatorname{rot} \overline{w}^{(j)}\, d\,T = 0 ,$$

essendo x^0 un punto interno a $\mathfrak{D}$. Ragionando allora come nel capitolo precedente, si vede che la serie di vettori

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j \, \overline{w}^{(j)} \tag{63}$$

converge uniformemente nell'interno di $\mathfrak{D}$, laddove le serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j \operatorname{grad} \overline{w}_i^{(j)} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

convergono in media in $\mathfrak{D}$ e, quindi, uniformemente nello interno di $\mathfrak{D}$. Poniamo

$$\overline{\overline{W}}^{(n)} = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \, \overline{w}^{(j)} .$$

Io dico che è possibile trovare una successione crescente di indici $n_1, n_2, \dots, n_h \dots$ tale che la successione $\{\overline{\overline{W}}^{(n_h)}\}$, la quale converge uniformemente nell'interno di $\mathfrak{D}$, converga quasi ovunque su $\mathcal{F}\mathfrak{D}$. Consideriamo lo strato $\mathcal{S}$ già introdotto nella dimostrazione del lemma XXXII e poniamo

$$\overline{\overline{W}}_{\varrho}^{(n)}(\xi, \varrho) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \overline{\overline{W}}^{(n)}}{\partial x_i} \mu_i ;$$

consideriamo, cioè, la derivata del vettore $\overline{\overline{W}}^{(n)}$ rispetto alla direzione individuata dal versore μ. La successione $\{\overline{\overline{W}}_{\varrho}^{(n)}\}$ converge in media in $\mathcal{S}$ e, detta $\overline{\overline{W}}$ la somma della serie (63), il suo limite sarà $\overline{\overline{W}}_{\varrho}$. Poniamo

$$g^{(n)}(\xi) = \int_0^{\varrho_0} | \, \overline{\overline{W}}_{\varrho}^{(n)}(\xi, \varrho) - \overline{\overline{W}}_{\varrho}(\xi, \varrho) \, |^2 \, J(\xi, \varrho) \, d\varrho$$

essendo $J(\xi, \varrho)$ lo jacobiano della trasformazione

$$x = \xi + \varrho \, \mu(\xi)$$

che sappiamo essere limitato in $\mathcal{S}$ e dotato di estremo inferiore $m > 0$. Si ha

$$\lim_{n \to \infty} \int_{A_{u_1 u_2}} g^{(n)} \, d u_1 \, d u_2 = 0 .$$

Possiamo allora determinare una successione crescente di indici n_1, $n_2, \ldots, n_h, \ldots$ e un insieme di misura nulla $\mathcal{N}$, contenuto in $\mathcal{F}\mathcal{D}$, tale che, per ogni ξ di $\mathcal{F}\mathcal{D} - \mathcal{N}$, si abbia

$$\lim_{h \to \infty} g^{(n_h)}(\xi) = 0 .$$

Ne viene, per ξ in $\mathcal{F}\mathcal{D} - \mathcal{N}$:

$$\lim_{h \to \infty} \int_0^{\varrho_0} | \overline{W}_\varrho^{(n_h)}(\xi, \varrho) - \overline{W}_\varrho(\xi, \varrho) |^2 d\varrho = 0,$$

dato che

$$\int_0^{\varrho_0} | \overline{W}_\varrho^{(n_h)}(\xi, \varrho) - \overline{W}_\varrho(\xi, \varrho) |^2 d\varrho \leq \frac{1}{m} \int_0^{\varrho_0} | \overline{W}_\varrho^{(n_h)}(\xi, \varrho) - \overline{W}_\varrho(\xi, \varrho) |^2 J(\xi, \varrho) d\varrho .$$

Cioè la successione di funzione di ϱ: $\{\overline{W}_\varrho^{(n_h)}\}$ converge in media, per quasi tutti gli ξ di $\mathcal{F}\mathcal{D}$, verso $\overline{W}_\varrho$. Avremo allora per ξ in $\mathcal{F}\mathcal{D} - \mathcal{N}$

$$\lim_{h \to \infty} \int_0^{\varrho_0} \overline{W}_\varrho^{(n_h)}(\xi, \tau) \, d\tau = \int_0^{\varrho_0} \overline{W}_\varrho(\xi, \tau) \, d\tau . \tag{64}$$

La (64) equivale alla seguente relazione

$$\lim_{h \to \infty} \{\overline{W}^{(n_h)}(\xi, \varrho_0) - \overline{W}^{(n_h)}(\xi . 0)\} = \int_0^{\varrho_0} \overline{W}_\varrho(\xi, \tau) \, d\tau . \tag{65}$$

Poichè $\{\overline{W}^{(n_h)}(\xi, \varrho_0)\}$ è convergente essendo (ξ, ϱ_0) interno a $\mathcal{D}$, ne segue che la successione $\{\overline{W}^{(n_h)}\}$ converge nel punto ξ di $\mathcal{F}\mathcal{D}$ considerato, quindi tale successione converge in $\mathcal{F}\mathcal{D} - \mathcal{N}$.

Posto

$$W^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} c_j w^{(j)}, \quad A^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} c_j a^{(j)},$$

$$B^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} c_j b^{(j)},$$

poichè la successione $\{W^{(n_h)}\}$ è convergente in ogni punto di $\mathcal{F}_1\mathcal{D}$, essendo ivi tutti nulli i suoi termini, ne segue che la successione $\{A^{(n_h)} + (x - o) \wedge B^{(n_h)}\}$ converge su $\mathcal{F}_1\mathcal{D}$ essendo

$$A^{(n_h)} + (x - o) \wedge B^{(n_h)} \doteq \overline{W}^{(n_h)} - W^{(n_h)}$$

e quindi converge in tutto lo spazio.

Possiamo pertanto affermare che la successione $\{W^{(n_h)}\}$ converge uniformemente nell'interno di $\mathcal{D}$ e le successioni $\{\text{grad}\, W_i^{(n_h)}\}$ convergono in media in $\mathcal{D}$ e uniformemente nell'interno di $\mathcal{D}$. Detto $u(x)$ il vettore limite della successione $\{W^{(n_h)}\}$, in virtù del lemma XXXII, tale vettore è uniformemente sommabile su $\mathcal{F}\mathcal{D}_\varrho$ ed esiste il limite di $u(\xi, \varrho) \equiv u(\xi + \varrho\,\mu)$ quando ϱ tende a zero, per quasi tutti gli ξ di $\mathcal{F}\mathcal{D}$. In particolare, se ξ è un punto di $\mathcal{F}_1\mathcal{D} - \mathcal{N}$, poichè si ha

$$\lim_{\varrho \to 0} u(\xi, \varrho) = - \lim_{\varrho \to 0} \int_\varrho^{\varrho_0} u_\varrho(\xi, \tau)\, d\tau + u(\xi, \varrho_0)$$

si deduce, tenendo presente la (65)

$$\lim_{\varrho \to 0} u(\xi, \varrho) = - \int_0^{\varrho_0} u_\varrho(\xi, \tau)\, d\tau + u(\xi, \varrho_0) = \lim_{h \to \infty} W^{(n_h)}(\xi, 0) = 0\,.$$

Orbene il vettore che su $\mathcal{F}_2\mathcal{D}$ è definito (quasi ovunque) al modo seguente

$$\overline{u}(\xi) = \lim_{\varrho \to 0} u(\varrho, \xi)$$

è la soluzione del sistema integrale (59).

Infatti si ha

$$\int_{\mathcal{F}_2\mathcal{D}} \{\overline{u} \times L[w^{(j)}]\}\, d\sigma = \lim_{\varrho \to 0} \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}_\varrho} \{u \times L[w^{(j)}]\}\, d\sigma =$$

$$= - \lim_{\varrho \to 0} \int_{\mathcal{D}_\varrho} \{\Gamma[u] \times \Gamma[w^{(j)}]\}\, dT = - \int_{\mathcal{D}} \{\Gamma[u] \times \Gamma[w^{(j)}]\}\, dT,$$

e poichè la successione

$$\left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j\, \Gamma[w^{(j)}] \right\} \equiv \left\{ \Gamma\left[\sum_{j=1}^{n} c_j\, w^{(j)} \right] \right\}$$

deve necessariamente convergere in media verso $\Gamma[u]$, che è il limite di una successione ad essa subordinata, si ha anche

$$\int_{\mathfrak{D}} \{\Gamma[u] \times \Gamma[w^{(j)}]\}\, d\,T = c_j\,.$$

Ne segue:

$$\int_{\mathcal{F}_2\mathfrak{D}} \{\overline{u} \times L[w^{(j)}]\}\, d\,\sigma = \int_{\mathcal{F}_2\mathfrak{D}} \{t \times w^{(j)}\}\, d\,\sigma\,.$$

Resta così acquisito il teorema.

Capitolo VII.

Procedimenti per il calcolo delle soluzioni

1. Approssimazione delle soluzioni mediante successioni di soluzioni particolari. — I teoremi di completezza conseguiti nel capitolo III permettono la dimostrazione dei seguenti altri, nell'enunciare i quali sottointenderemo sempre che u sia una soluzione biregolare di (1_0) e il dominio $\mathcal{D}$, per adesso, limitato

XL. — *È possibile determinare per ogni fissato intero m un numero finito q_m di costanti $c_1^{(m)}, c_2^{(m)}, \ldots, c_{q_m}^{(m)}$, tali che posto*

$$u^{(m)} = c_1^{(m)} v^{(1)} + c_2^{(m)} v^{(2)} + \ldots + c_{q_m}^{(m)} v^{(q_m)},$$

la successione $\{ u^{(m)} \}$ converge uniformemente in $\mathcal{D}$ verso il vettore u.

Naturalmente si suppone che K sia un valore per il quale sussiste il teorema di unicità per il problema 1^0) nella classe U.

In virtù del teorema XXII è allora possibile costruire una successione del tipo della $\{ u^{(m)} \}$ la quale converge uniformemente su $\mathcal{F}\mathcal{D}$ verso u. Il vettore $u - u^{(m)}$ d'altronde, può rappresentarsi in $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$ nel modo indicato dal teorema XXV. Segue da ciò facilmente che la convergenza uniforme su $\mathcal{F}\mathcal{D}$ implica quella in tutto $\mathcal{D}$.

In modo analogo, sempre sfruttando i teoremi XXII e XXV si dimostra che:

XLI. — *Dette $\gamma_1^{(m)}, \gamma_2^{(m)}, \ldots, \gamma_m^{(m)}$ le costanti che rendono minima la seguente funzione quadratica nelle m variabili $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$:*

$$\int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} | u - \gamma_1 v^{(1)} - \gamma_2 v^{(2)} \ldots \gamma_m v^{(m)} |^2 \, d\sigma ,$$

e posto

$$u^{(m)} = \gamma_1^{(m)} v^{(1)} + \gamma_2^{(m)} v^{(2)} + \ldots + \gamma_m^{(m)} v^{(m)},$$

la successione $\{ u^{(m)} \}$ converge in media su $\mathcal{F}\mathcal{D}$ e uniformemente in ogni insieme chiuso interno a $\mathcal{D}$ verso il vettore u (40).

---

(40) Per i dettagli delle dimostrazioni cfr Fichera [3] e [9].

Quest'ultimo teorema quantunque meno espressivo, dal punto di vista della convergenza dalla successione $\{u^{(m)}\}$, del precedente è però di maggiore utilità pratica in quanto permette l'effettiva determinazione delle costanti $\gamma_i^{(m)}$, conoscendo i valori della u su $\mathcal{F}\mathcal{D}$.

Può dimostrarsi che le costanti $\gamma_i^{(m)}$ possono calcolarsi anche rendendo minimo il seguente integrale

$$\int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} \left| L[u] - \sum_{i=1}^{m} \gamma_i L[v^{(i)}] \right|^2 d\sigma$$

sempre in modo che la successione $\{u^{(m)}\}$ converga uniformemente nell'interno di $\mathcal{D}$ verso u. Si hanno in tal modo due procedimenti per il calcolo numerico delle soluzioni dei problemi al contorno 1^0) e 2^0).

Dai teoremi enunciati segue facilmente il seguente:

XLII. — *Se u è una soluzione di (1_0) nell'insieme aperto A, anche non limitato, è possibile costruire una successione $\{u^{(m)}\}$ del tipo anzidetto la quale converge uniformemente in ogni insieme limitato contenuto in A verso il vettore u* (41).

Per l'approssimazione delle soluzioni di (1_0) in un dominio illimitato ma di frontiera limitata, sfruttando il teorema XXIV si dimostrano in modo analogo ai precedenti i seguenti altri:

XLIII. — *Se $\mathcal{D}$ è limitato da un'unica superficie chiusa e u è una soluzione di (1_0) in $\overline{\mathcal{D}}$* (cfr. pag. 9), *è possibile per ogni fissato intero m determinare un numero finito q_m di costanti: $c_1^{(m)}, c_2^{(m)}, \ldots, c_{q_m}^{(m)}$, tali che posto*

$$u^{(m)} = c_1^{(m)} \tau^{(1)} + c_2^{(m)} \tau^{(2)} + \ldots + c_{q_m}^{(m)} \tau^{(m)}$$

la successione $\{u^{(m)}\}$ converge uniformemente in $\overline{\mathcal{D}}$ verso u, avendo indicato con $\{\tau^{(i)}\}$ il sistema delle soluzioni omogenee di grado intero negativo e polo x^0 interno a $\mathcal{D}$.

XLIV. — *Nelle ipotesi del teorema precedente, dette $\gamma_1^{(m)}, \gamma_2^{(m)}, \ldots, \gamma_m^{(m)}$ le costanti che rendono minima la seguente funzione quadratica*

$$\int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} | u - \gamma_1 \tau^{(1)} - \tau_2 \gamma^{(2)} - \ldots - \gamma_m \tau^{(m)} |^2 d\sigma,$$

e posto

$$u^{(m)} = \gamma_1^{(m)} \tau^{(1)} + \gamma_2^{(m)} \tau^{(2)} + \ldots + \gamma_m^{(m)} \tau^{(m)},$$

(41) Cfr. FICHERA [9] pag. 511.

la successione $\{u^{(m)}\}$ *converge in media su* $\mathcal{F}\mathfrak{D}$ *e uniformemente in ogni insieme chiuso, anche non limitato, interno a* $\overline{\mathfrak{D}}$ *verso il vettore* $\overline{u}$.

2. Metodo di calcolo di Picone. Dimostrazione della convergenza. — Vogliamo adesso occuparci della dimostrazione della convergenza del metodo di calcolo ideato dal Picone e di cui abbiamo già parlato nell'introduzione. Le idee impiegate nella dimostrazione dei teoremi di esistenza dei capitoli precedenti provengono, in sostanza, dall'applicazione di questo metodo a scopi non esclusivamente quantitativi, ma anche esistenziali.

Per rendere più spedito il discorso introduciamo una locuzione. Diremo che in sistema di soluzioni particolari $\{v^{(j)}\}$ di (1_0) in $\mathfrak{D}$ è ivi *completo* (*P*) nella classe U_0 delle soluzioni biregolari di (1_0) in $\mathfrak{D}$ se, dato comunque u in U_0, è possibile costruire una successione $\{u^{(m)}\}$, con $u^{(m)}$ combinazione lineare di un numero finito di $v^{(j)}$, in guisa tale che $\{\operatorname{grad} u_i^{(m)}\}$, $(i=1, 2, 3)$, converga in media in $\mathfrak{D}$ verso grad u_i. La dimostrazione del teorema di esistenza del problema 2^0), fatta nel capitolo V, contiene gli elementi analitici per poter affermare la completezza (*P*) del sistema di soluzioni particolari $\{v^{(j)}\}$ là impiegato.

Sussiste il seguente teorema:

XLIV. — *Se* $\{v^{(j)}\}$ *è completo* (*P*) *in* $\mathfrak{D}$, *per ogni soluzione biregolare* u *di* (1_0) *in* $\mathfrak{D}$ *può costruirsi una successione* $\{u^{(m)}\}$, *con*

$$u^{m} = c_1^{(m)} v^{(1)} + c_2^{(m)} v^{(2)} + \ldots + c_m^{(m)} v^{(m)},$$

la quale converge uniformemente nell'interno di $\mathfrak{D}$ *verso un vettore che differisce da* u *per uno spostamento rigido ed essendo le costanti* $c_j^{(m}$ *soluzioni del sistema*

$$(66)\qquad \sum_{j=1}^{m} c_j^{(m)} \int_{\mathcal{F}\mathfrak{D}} \{v^{(j)} \times L[v^{(j)}]\}\, d\sigma = \int_{\mathcal{F}\mathfrak{D}} \{L[u] \times v^{(i)}\, d\sigma \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

oppure del sistema

$$(67)\qquad \sum_{j=1}^{m} c_j^{(m)} \int_{\mathcal{F}\mathfrak{D}} \{v^{(i)} \times L[v^{(j)}]\}\, d\sigma = \int_{\mathcal{F}\mathfrak{D}} \{u \times L[v^{(i)}]\}\, d\sigma \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

Fissato l'intero m, si consideri il polinomio quadratico, mai negativo:

$$F_m(c_1, c_2, \ldots, c_m) = 2\int_{\mathfrak{D}} \Pi\left[\sum_{j=1}^{m} c_j v^{(j)} - u\right] dT = \int_{\mathfrak{D}} \left\{\Gamma\left[\sum_{j=1}^{m} c_j v^{(j)} - u\right] \times \Gamma\left[\sum_{j=1}^{m} c_i v^{(i)} - u\right]\right\} dT =$$

$$= \sum_{ij}^{1m} c_i c_j \int_{\mathfrak{D}} \{\Gamma[v^{(i)}] \times \Gamma[v^{(j)}]\}\, dT - 2\sum_{i=1}^{m} \int_{\mathfrak{D}} \{\Gamma[v^{(i)}] \times \Gamma[u]\}\, dT + \int_{\mathfrak{D}} \{\Gamma[u] \times \Gamma[u]\}\, dT.$$

Tale polinomio è minimo quando le c_j verificano il sistema

$$(68) \quad \sum_{j=1}^{n} c_j \int_{\mathfrak{D}} \{\Gamma[v^{(i)}] \times \Gamma[v^{(j)}]\} \, d\,t = \int_{\mathfrak{D}} \{\Gamma[v^{(j)}] \times \Gamma[u]\} \, d\,T, \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

che, applicando la formula di GREEN, si trasforma nel sistema (66) oppure nel (67), dei quali, pertanto, è dimostrata la compatibilità. Se $\{c_1^{(m)}, c_2^{(m)}, \ldots \ldots c_m^{(m)}\}$ è soluzione di (68) sarà, per l'ipotesi fatta della completezza (Γ) del sistema di soluzioni $\{v^{(j)}\}$:

$$\lim_{m \to \infty} \Gamma_m (c_1^{(m)}, c_2^{(m)}, \ldots c_m^{(m)}) = 0 .$$

Ne viene che $\Gamma\left[\sum_{j=1}^{m} c_j v^{(j)}\right]$ converge in media in $\mathfrak{D}$ e quindi uniformemente nell'interno di $\mathfrak{D}$ verso $\Gamma[u]$. Da ciò segue la dimostrazione del teorema.

Questo teorema fornisce un efficace procedimento per la risoluzione numerica dei problemi al contorno 1^0) e 2^0). È ovvio come il procedimento possa estendersi anche al problema 3^0), a condizione, però, di disporre di un sistema di soluzioni di (1_0) completo (Γ) nella classe delle soluzioni biregolari di (1_0) nulle su $\mathcal{F}_1 \mathfrak{D}$. Tale è ad esempio il sistema $\{w^{(j)}\}$ impiegato nella dimostrazione del teorema di esistenza per il problema 3^0).

[Pervenuto alla Redazione il 10 gennaio 1950]

Nota aggiunta durante la correzione delle bozze di stampa.

L'errore di approssimazione commesso, impiegando i metodi di calcolo, descritti in questo ultimo capitolo, può essere maggiorato, come ho dimostrato nella mia Nota dal titolo: *Sulla maggiorazione dell'errore di approssimazione nei metodi di integrazione numerica delle equazioni della fisica matematica,* in corso di stampa nei Rendiconti dell'Accademia Nazionale di Scienze e Lettere di Napoli

BIBLIOGRAFIA

AMERIO LUIGI

[1] *Sull'integrazione dell'equazione $\Delta_2 u - \lambda^2 u = f$ in un dominio di connessione qualsiasi,* Rend. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, vol. 78 (1944 45).

[2] *Sull'integrazione dell'equazione $\Delta_{2k} u = f$,* Annali di Matematica pura ed applicata, Tomo 24, serie IV, (1945).

[3] *Sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno per le equazioni del secondo ordine di tipo ellittico,* American Journal of Mathematics, vol. LXIX, n. 3 (July, 1947).

[4] *Sull'equazione di propagazione del calore,* Rend. di Matematica e delle sue applicazioni (1946).

BERTRAND GASTON

[1] *La théorie des marées et les équations intégrales,* Annales scientifiques de l'Ecole Normale supérieure, tome 40 (1923).

BOULIGAND G., GIRAUD G., DELENS P.

[1] *Le problème de la dérivée oblique en théorie du potentiel,* Actualités scientifiques et industrielles, Hermann, Paris (1935).

EVANS G. C., MILES E. R. C.

[1] *Potentials of general masses in single and double layers,* Journal of Mathematics, vol. 53 (1931).

FICHERA GAETANO

[1] *Sull'equilibrio di un corpo elastico isotropo e omogeneo,* Rend. Seminario Mat. Università di Padova, vol. XVII (1948).

[2] *Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio per taluni sistemi di funzioni,* Annali di Matematica pura ed applicata, tomo 27, serie IV (1948).

[3] *Applicazione della teoria del potenziale di superficie ad alcuni problemi di analisi funzionale lineare,* Giornale di Matematiche di Battaglini, s. IV, v. 78 (1948-49).

[4] *Teoremi d'esistenza per il problema biiperarmonico,* Rend. Acc. Naz. Lincei, s. VIII, vol. V (1948)

[5] *Analisi esistenziale per le soluzioni dei problemi al contorno misti, relativi all'equazione ed ai sistemi di equazioni del secondo ordine di tipo ellittico, autoaggiunti,* Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa (1949).

[6] *Sulla risoluzione di un particolare sistema di due equazioni vettoriali,* Le Matematiche, (1948).

[7] *Sui problemi analitici della elasticità piana,* Rend. della Facoltà di Scienze dell'Università di Cagliari (1949).

[8] *Intorno al passaggio al limite sotto il segno d'integrale*, Portugaliae Mathematica, vol 4 (1943)

[9] *Sull'approssimazione delle funzioni armoniche in tre variabili mediante successioni di particolari funzioni armoniche*, Rend Acc Naz Lincei, s VIII, v III, (1947).

FRIEDRICHS H. O

[1] *A theorem of Lichtenstein*, Duke Mathematical Journal, vol 14, n 1 (1947)

[2] *On the boundary-value problems of the theory of elasticity and Korn's inequality*, Annals of Mathematics s II. v. 48, n 2 (1947)

[3] *Die Randwert - und Eigenwertprobleme aus der theorie der elastichen Platten* (*Anwendung der direkten Methoden der Variationsrechnung*) Mathematische Annalen 98 Band (1928)

GHIZZETTI ALDO

[1] *Sul metodo della trasformata parziale di Laplace ad intervallo d'integrazione finito*, Rend. di Mat e delle sue applicazioni (1947).

[2] *Applicazione del metodo della trasformata parziale di Laplace al problema di Dirichlet per l'equazione $\Delta_2 u - \lambda^2 u = f$ in n variabili*. Rend. Seminario Matem Università Padova (1948).

[3] *Sopra un particolare problema misto di Dirichlet-Neumann per l'equazione di Laplace, trattato col metodo delle trasformate parziali*, Rend. di Mat e delle sue Applicazioni (1946).

GIRAUD GEORGES

[1] Ved. BOULIGAND - GIRAUD - DELENS

[2] *Equations a intégrales principales*, Ann d. Ec Norm Sup s III, t 51 (1934)

HILBERT D - COURANT

[1] *Methoden der mathematischen Physik*, Springer, vol II (1937)

KELLOGG O. D.

[1] *Foundations of potential theory*, Springer, Berlin, (1929).

KORN A.

[1] *Solutions générale du problème d'équilibre dans la théorie de l'élasticité, dans le cas ou les efforts sont donnés à la surface*, Annales, Toulouse Université (1908)

[2] *Ueber einige Ungleichungen, welche in der Theorie der elastichen und elektrischen Schwingungen eine Rolle spielen*, Bulletin International, Cracovie Akademija Umiejet (1909).

LAURICELLA GIUSEPPE

[1] *Alcune applicazioni della teoria delle equazioni funzionali alla Fisica-Matematica*, Nuovo Cimento, s. V, t. 13 (1907).

LEVI EUGENIO ELIA

[1] *I problemi dei valori al contorno per le equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali* Memorie della Società dei XL, t. XVI (1910).

LICHTENSTEIN LEON

[1] *Ueber die erste Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie* Mathematischen Zeitschrift Bd 20 (1924).

MARCOLONGO ROBERTO

[1] *Teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici,* Hoepli, (1904).

MIRANDA CARLO

[1] *Approssimazione di una funzione armonica in tre variabili mediante polinomi armonici,* Rend. Circ. Mat. Palermo, t. LVI (1932).
[2] *Sul principio di Dirichlet per le funzioni armoniche* Rend. Acc. Naz. Lincei, s. VIII, vol. III (1947).
[3] *Sull'approssimazione delle funzioni armoniche in tre variabili,* Rend. Acc. Naz. Lincei, s. VIII, v. IV (1948).

PICONE MAURO

[1] *Appunti di Analisi Superiore,* I Ediz., Rondinella, Napoli, (1940)
[2] *Nuovi metodi risolutivi per i problemi d'integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali e nuove applicazioni della trasformata multipla di Laplace nel caso delle equazioni a coefficienti costanti,* Atti Acc Scienze Torino (1939-40).
[3] *Sulla traduzione in equazione integrale lineare di prima specie dei problemi al contorno concernenti i sistemi di equazioni lineari a derivate parziali,* Rend. Acc. Naz. Lincei (tre note), s VIII, v. II (1947).
[4] *Nuovi indirizzi di ricerva nella teoria e nel calcolo delle soluzioni di talune equazioni lineari alle derivate parziali della Fisica Matematica,* Ann Scuola Normale Sup. Pisa, s. II, v. V (1936).
[5] *Teoria moderna dell'integrazione delle funzioni,* Scuola Norm. Sup. Pisa Libreria Goliardica (1945-46).
[6] *Lezioni di Analisi funzionale lineare,* Istituto di Alta Matematica, Roma (1942).
[7] *Sulla convergenza delle successioni di funzioni iperarmoniche,* Boulletin Mathematique de la Societé Roumaine des Sciences, t. XXXVIII (1936).

SOBRERO LUIGI

[1] *Elasticidade,* Boffoni, Rio de Janeiro (1942)

TREFFTZ F.

[1] *Mathematische Elastizitatstheorie,* Handbuch der Physik, Bd VI, Springer, Berlin (1928).