ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

TULLIO VIOLA

Sulla ricerca delle estremanti d'un integrale in forma ordinaria, alla frontiera d'un campo dello spazio funzionale lagrangiano del prim'ordine

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 1, nº 1-4 (1949), p. 101-160

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1949_3_1_1-4_101_0>

SULLA RICERCA DELLE ESTREMANTI D'UN INTEGRALE IN FORMA ORDINARIA, ALLA FRONTIERA D'UN CAMPO DELLO SPAZIO FUNZIONALE LAGRANGIANO DEL PRIM'ORDINE

di TULLIO VIOLA (Roma).

INTRODUZIONE

1. L'integrale in forma ordinaria

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y')\, dx$$

sarà da noi considerato, al variare della funzione indipendente $y = y(x)$ in un insieme (« campo ») E dello spazio lagrangiano del prim'ordine, insieme che, in ogni caso, risulterà *compatto* e *chiuso*. Si dovrà dunque intendere E formato esclusivamente di funzioni $y(x)$ definite in $[a, b]$ (¹), ivi continue insieme con le loro derivate prime.

La funzione integranda $f(x, y, y')$ sarà supposta continua, insieme con le sue derivate parziali prime, al variare del punto (x, y, y') in un dominio tridimensionale contenente E, più precisamente al variare di x in $[a, b]$ e (per ogni x) al variare di y e di y' in intervalli contenenti tutti i valori che assumono rispettivamente le funzioni di E e le loro derivate prime (²). In un tal dominio l'integrale $J[y]$, com'è noto, risulta continuo (del prim'ordine) e perciò, nel campo E, $J[y]$ *è un funzionale dotato sia di massimo che di minimo.*

Se le estremanti dell'integrale $J[y]$ in E sono funzioni *interne* ad E, la loro ricerca può tentarsi applicando teorie classiche ben note. Queste divengono però inapplicabili in casi in cui le estremanti risultino *alla frontiera di E* e precisamente venga a mancare la seguente ipotesi:

(¹) Le parentesi quadre indicano « intervallo chiuso », le parentesi tonde indicano « intervallo aperto ».

(²) Per es. per $-\infty < y < +\infty$, $-\infty < y' < +\infty$.

« *L'estremante è una funzione* φ (x) *di* E *tale che, scelti comunque* (*sia pur piccoli*) *un intervallo* [c , d] *parziale di* [a , b] *e un numero reale* $\varepsilon > 0$, *esistono altre funzioni* y (x) *di* E, *appartenenti all'intorno* (*del prim'ordine*) *d'ampiezza* ε *della* φ (x) *e coincidenti con* φ (x) *in ogni punto* x *di* [a , b] *estraneo a* (c , d) ». (3)

2. Il prof. M. PICONE, nelle sue *Lezioni d'Analisi superiore* del 1940-41 (4), ha considerato l'insieme E delle funzioni $y(x)$ che soddisfano a tre condizioni del tipo:

$$[1] \qquad |y(x_0)| \leq H, \; |y'(x_0)| \leq H', \; |y'(x_2) - y'(x_1)| \leq \int_{x_1}^{x_2} L(x)\,dx,$$

ove x_0 è un punto comunque prefissato in $[a, b]$, H ed H' sono due numeri reali non negativi comunque prefissati, infine $L(x)$ è una funzione quasi continua, non negativa e sommabile in $[a, b]$, comunque prefissata. È inteso che la condizione $[1]_3$ dev'esser verificata *per ogni coppia di punti* x_1, x_2 *di* [a , b] $(x_1 < x_2)$: come si riconosce facilmente, essa equivale a richiedere l'esistenza della derivata seconda $y''(x)$ in quasi tutto $[a, b]$, ivi soddisfacente alla limitazione

$$|y''(x)| \leq L(x).$$

Invece $x_0, H, H', L(x)$ sono elementi indipendenti dalla funzione $y(x)$ considerata e perciò caratterizzanti l'insieme E stesso. (5)

Il prof. PICONE aveva proposto, già qualche anno prima, l'interessante problema della ricerca e dell'effettiva costruzione delle estremanti $y(x)$ del funzionale $J[y]$ in un tale insieme E, indicando anche alcune ipotesi restrittive (tra le più semplici), che effettivamente giovano a rendere meno arduo il problema. Tali ipotesi consistono nell'aggiungere alle [1] qualche ulteriore condizione, che venga a rendere meno ampio l'insieme E stesso: s'intende che occorre, volta per volta, assicurarsi della *compattezza* e della *chiusura del prim'ordine* del particolare insieme E che si viene a considerare. (6)

---

(3) Quando invece questa ipotesi venga mantenuta, sembra, in generale, possibile applicare i metodi euleriani a imitazione di quanto, in un saggio abbastanza esteso sull'argomento, ha fatto O. BOLZA, *Vorlesungen über Variationsrechnung* (Teubner 1909) pp. 392 e segg.

(4) Litografie edite dalla D. U. S. A. pp. 128-130.

(5) Nel seguito s'intenderà sempre escluso il caso banale che $L(x)$ si riduca alla costante O in quasi tutto un intervallo parziale (sia pur piccolo) di $[a, b]$.

(6) La compattezza e la chiusura del prim'ordine dell'insieme E esattamente definito dalle [1], sono dimostrate dal prof. PICONE nel loc. cit. p 129.

3. Nella mia memoria « *Procedimenti costruttivi per le estremanti di un funzionale* » (Rendic. Circ. Mat. di Palermo, vol. 62, 1938-39) affrontai il problema ora enunciato, relativamente ad un primo esempio molto particolare, cioè che il funzionale $J[y]$ sia quello esprimente, com'è noto, la lunghezza dell'arco di curva proiettantesi sull'intervallo $[a, b]$:

$$J[y] = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

e aggiungendo alle [1] delle condizioni fortemente restrittive, anzitutto questa: che *la funzione* L(x) *si riduca a una costante positiva* L, il che è quanto dire che le derivate $y'(x)$ delle funzioni dell'insieme E siano *equiuniformemente lipschitziane* in $[a, b]$; inoltre imponendo ulteriori particolari condizioni ai limiti per la curva $y = y(x)$, quali per es.: che siano assegnati i valori $y(a), y(b), y'(a), y'(b)$, oppure i valori $y(a), y(b)$ e uno solo dei valori $y'(a), y'(b)$, oppure i valori che $y(x)$ ed eventualmente anche $y'(x)$ assumono in uno o più punti prefissati di (a, b), ecc. (7)

Le soluzioni che, nella citata memoria, riuscii a trovare per ciascuno dei particolari problemi da me stesso proposti, erano precisamente fornite da *estremanti alla frontiera dell'insieme* E ed anzi da estremanti per le quali appunto l'ipotesi qui enunciata al n. 1 veniva a mancare. Talchè, non riuscendo a trovare un solido punto d'appoggio in una teoria analitica che, in qualche modo, si richiamasse ai classici principi euleriani, o lagrangiani o weierstrassiani . . . , io dovetti allora abbandonare presto il terreno analitico e affidarmi alla fortuna sul terreno geometrico, ideando cioè procedimenti geometrici particolarissimi che, volta per volta, mi conducessero al risultato desiderato. (8)

Vero è che, nella prima parte della mia memoria (loc. cit. nn. 6, 7), io davo pur qualche indicazione d'un procedimento analitico generale che tuttavia non mi riuscì allora di sviluppare.

4. Recentemente la questione è stata ripresa dal Dr. Fernando Bertolini, il quale ne ha fatto l'oggetto d'una interessante tesi di laurea dal

(7) Un sunto della mia citata memoria può leggersi nelle note: « *Sulle estremanti di un integrale in forma ordinaria, dipendente da funzioni a derivate prime equiuniformemente lipschitziane* » e « *Curve di massima lunghezza, rappresentatrici di funzioni* y = f(x) *a derivate uniformemente lipschitziane* » (Rendic. Lincei, vol. *28* serie 6a, 2o sem. 1938, fasc. 10 e 11, pp. 311-317, 371-377).

(8) In un punto anzi ritenni di dover ricorrere a considerazioni di meccanica razionale, concernenti la statica dei fili (loc. cit. n. 16).

titolo: « *Alcuni problemi di estremo per lunghezze di curve ed aree di superficie* » (9). Il DR. BERTOLINI è riuscito sostanzialmente a generalizzare alcuni dei miei procedimenti (diciamo così) « geometrici » e a trovare quindi la *funzione minimizzante* l'integrale

$$J[y] = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx ,$$

nell'ipotesi che l'integrando $L(x)$, che figura al secondo membro della formula $[1]_3$ sia non una semplice costante (come io m'ero limitato a supporre), ma effettivamente *la più generale funzione non negativa e sommabile in* [a, b].

La lettura della tesi del DR. BERTOLINI, che purtroppo non riesce ad avviare fruttuosamente lo studio dei problemi di massima lunghezza, le difficoltà che altri valenti giovani, incoraggiati nella ricerca dal prof. M. PICONE, hanno incontrato e non sono riusciti a superare (malgrado i più accaniti e prolungati sforzi) nel tentativo d'estendere i miei procedimenti geometrici a corrispondenti problemi di minima e di massima lunghezza nello spazio, m'hanno definitivamente convinto della necessità di sviluppare una vera e propria *teoria analitica*, che abbia un carattere di generalità sufficiente a conseguire risultati applicabili ad una larga classe d'integrali $J[y]$, applicabili anche ad un sistema di limitazioni definienti E, che goda della più ampia generalità.

Il presente lavoro è appunto un primo risultato delle mie ricerche sull'argomento e si riferisce ad integrali $J[y]$ di cui uno degli estremanti cercati risulti essere una funzione $\varphi(x)$, per la quale *non solo venga a mancare l'ipotesi enunciata al n. 1,* ma anzi sia soddisfatta l'ipotesi opposta: « *scelti comunque un intervallo* [c, d] (*sufficientemente piccolo*) *parziale di* [a, b] *e un numero* $\varepsilon > 0$ (*comunque piccolo*), *non esistono altre funzioni* y(x) *di* E, *appartenenti all'intorno* (*del prim'ordine*) *d'ampiezza* ε *della* φ(x) *e coincidenti con* φ(x) *in ogni punto* x *di* [a, b] *estraneo a* (c, d) ».

L'insieme E verrà definito mediante limitazioni anche più generali delle stesse [1].

Comunque si vorrà apprezzare questo risultato, si dovrà considerare che la via seguita è del tutto nuova, nessun suggerimento potendomi venire in aiuto (lo ripeto) dalle teorie classiche più o meno note. Si dovrà anche considerare che gli integrali da me qui esemplificati, son di quelli per cui i miei precedenti metodi geometrici si rivelano estremamente particolari e

(9) La seconda parte di questa tesi è in corso di pubblicazione.

delicati, ciò che spiega l'infruttuosità dei tentativi di generalizzazione dei miei giovani e pur valorosi colleghi.

L'idea fondamentale del metodo che passo ad esporre, è quella che, come ho detto, è accennata nella mia sopra citata memoria. Io la riprenderò interamente e la svilupperò, richiamando anche alcune semplici proposizioni e formule, che il Dr. BERTOLINI ha trovato generalizzando e dando notevole snellezza alle mie.

In riguardo alle notazioni adottate, avverto fin d'ora che, mentre i simboli $J[y]$, $J[\varphi]$, ... rappresenteranno sempre i nostri integrali in quanto dipendenti dalle *funzioni* y, φ, ..., il simbolo $J(u)$ rappresenterà invece uno di tali integrali, in quanto dipendente da un *parametro reale* u variabile in un certo intervallo parziale di $[a, b]$ (tale intervallo risultando, volta per volta, chiaramente individuato).

CAPITOLO I.

Il campo di variabilità della funzione indipendente

§ 1. - Le proprietà del campo esteso.

5. Indichiamo con A e denominiamo «*campo esteso*» l'insieme delle funzioni $y(x)$ dello spazio lagrangiano del prim'ordine, che sono continue in $[a, b]$ insieme con le loro derivate prime, ivi soddisfacendo alla limitazione

$$| y'(x_2) - y'(x_1) | \leq \int_{x_1}^{x_2} L(x)\, dx ,$$

per ogni coppia di punti x_1, x_2 di $[a, b]$ $(x_1 < x_2)$.

Indichiamo poi con A^0 l'insieme formato dalle funzioni $y = \varphi(x)$ di A che si definiscono suddividendo $[a, b]$ in un numero *finito* d'intervalli parziali e ponendo in questi, alternativamente, $\varphi'' = + L(x)$, $\varphi'' = - L(x)$. La curva rappresentativa d'una qualunque di queste funzioni, volge la concavità costantemente verso l'alto in ciascuno degli intervalli nei quali è $\varphi'' = + L(x)$, la volge costantemente verso il basso in ciascuno dei rimanenti intervalli: perciò la curva possiede flessi in tutti e soli i punti di divisione e cioè negli estremi, interni ad $[a, b]$, dei detti intervalli parziali. Per comodità di discorso, indicheremo correntemente con la sigla $[P\,D]_\varphi$ tali punti di divisione (compresi a, b), mentre chiameremo *contiguo* a tali punti (o all'insieme di tali punti), ogni intervallo parziale di $[a, b]$ in cui $\varphi''(x)$ ha segno costante.

TEOR. *In corrispondenza d'ogni funzione* $\varphi(x)$ *di* A^0, *è possibile determinare un numero* $\delta_\varphi > 0$ *tale che, se un'altra funzione* $y(x)$ *di* A *soddisfa alle condizioni*

$$y(x_1) = \varphi(x_1),\ y'(x_1) = \varphi'(x_1),\ y(x_2) = \varphi(x_2),\ y'(x_2) = \varphi'(x_2)$$

in due punti x_1, x_2 *di* $[a, b]$ *per cui* $0 < x_2 - x_1 \leq \delta_\varphi$, *allora necessariamente* $y(x)$ *coincide con* $\varphi(x)$ *in tutto* $[x_1, x_2]$.

DIM. Diciamo precisamente ch'è lecito scegliere per δ_φ la minima ampiezza degli intervalli contigui ai $[P\,D]_\varphi$. Infatti, con una tale scelta, due e due sole eventualità possono presentarsi:

a) *In* (x_1, x_2) *non cade alcun* $[P\,D]_\varphi$. Supponiamo per es. che, in (x_1, x_2), sia quasi sempre $\varphi'' = -L(x)$. Avremo allora, per ogni coppia di punti x', x'' in $[x_1, x_2]$,

$$\varphi(x'') = \varphi(x') + \varphi'(x')(x'' - x') - \int_{x'}^{x''} (x'' - t)\, L(t)\, d\,t\,.$$

D'altra parte essendo, per ipotesi,

$$y'(x) \geq y'(x_1) - \int_{x_1}^{x} L(t)\, d\,t\,,$$

qualunque sia x in $[x_1, x_2]$, risulta anche

$$y(x) \geq y(x_1) + y'(x_1)(x - x_1) - \int_{x_1}^{x} (x - t)\, L(t)\, d\,t = \varphi(x)\,.$$

Se, per ipotesi assurda, in un punto x di (x_1, x_2) fosse $y(x) > \varphi(x)$, si avrebbe anche $y'(\xi) > \varphi'(\xi)$ in un certo punto ξ di (x_1, x) e cioè di (x_1, x_2), dunque

$$y(x_2) \geq y(\xi) + y'(\xi)(x_2 - \xi) - \int_{\xi}^{x_2} (x_2 - t)\, L(t)\, d\,t >$$

$$> \varphi(\xi) + \varphi'(\xi)(x_2 - \xi) - \int_{\xi}^{x_2} (x_2 - t)\, L(t)\, d\,t = \varphi(x_2)\,,$$

contro l'ipotesi $y(x_2) = \varphi(x_2)$. Analogamente si ragiona se, in (x_1, x_2), è quasi sempre $\varphi'' = +L(x)$.

b) *In* (x_1, x_2) *cade uno ed un solo* $[P\,D]_\varphi$, *sia* x_3. Supponiamo per es. che sia

$$\varphi'' = -L(x) \text{ in } (x_1, x_3)\,,\ \varphi'' = +L(x) \text{ in } (x_3, x_2).$$

Ragionando sull'intervallo $[x_1, x_3]$ così come in $a)$ s'era ragionato sul l'intervallo ivi indicato con $[x_1, x_2]$, si trova $y(x_3) \geq \varphi(x_3)$. Ragionando in modo del tutto simmetrico sull'intervallo $[x_3, x_2]$ si trova $y(x_3) \leq \varphi(x_3)$. Dunque dev'essere $y(x_3) = \varphi(x_3)$ ed allora, per quanto dimostrato in $a)$, anche $y(x) = \varphi(x)$ in tutto $[x_1, x_3]$ e analogamente in tutto $[x_3, x_2]$. Dunque è proprio $y(x) = \varphi(x)$ in tutto $[x_1, x_2]$.

Analogamente si ragiona, se è

$$\varphi'' = + L(x) \text{ in } (x_1, x_3), \quad \varphi'' = - L(x) \text{ in } (x_3, x_2).$$

OSSERVAZIONI. 1a) Dalla dimostrazione fatta si riconosce anche che, data una qualunque funzione $\varphi(x)$ di A^0, se una qualunque altra funzione $y(x)$ di A coincide con $\varphi(x)$ negli estremi d'un qualunque intervallo parziale $[x_1, x_2]$ di $[a, b]$, nell'interno del quale sia quasi sempre $\varphi'' = + L(x)$ o quasi sempre $\varphi'' = - L(x)$, e se inoltre è $y' = \varphi'$ *anche in uno solo dei due estremi* x_1, x_2, allora $y(x)$ coincide con $\varphi(x)$ in tutto $[x_1, x_2]$.

2a) Le funzioni $\varphi(x)$ soddisfano dunque all'ipotesi enunciata al n. 4, in ogni insieme E che contenga effettivamente di tali funzioni, e ciò precisa il significato di funzioni alla frontiera di A *in ogni intervallo parziale di* $[a, b]$, che possiamo attribuir loro. [10]

6. LEMMA — *Qualunque sia la funzione* y(x) *dell'insieme* A, *esiste sempre una funzione* φ(x) *dell'insieme* A^0, *tale che*

$$[2] \qquad y(a) = \varphi(a), \quad y'(a) = \varphi'(a). \quad y(b) = \varphi(b), \quad y'(b) = \varphi'(b) \ ^{(11)}.$$

DIM. Cominciamo con lo scegliere a piacere due punti h, k tali che $a \leq h \leq k \leq b$ e poniamo

$$[3] \quad \varphi(x) = \begin{cases} y(a) + y'(a)(x-a) - \int_a^x (x-t)\, L(t)\, dt & \text{in } [a, h], \\ y(a) + y'(a)(x-a) - \int_a^h (x-t)\, L(t)\, dt + \int_h^x (x-t)\, L(t)\, dt & \text{in } [h, k], \\ y(a) + y'(a)(x-a) - \int_a^h (x-t)\, L(t)\, dt + & \\ \quad + \int_h^k (x-t)\, L(t)\, dt - \int_k^x (x-t)\, L(t)\, dt & \text{in } [k, b]. \end{cases}$$

---

(10) Se l'estremo c dell'intervallo $[c, d]$ di cui parla l'enunciato del n. 4, coincide con a, l'enunciato stesso richiede soltanto che sia $y(c) = \varphi(c)$, $y(d) = \varphi(d)$, $y'(d) = \varphi'(d)$. La validità della tesi è allora assicurata da quanto s'è detto nella precedente osservazione. Analogamente se l'estremo d coincide con b.

(11) Proposizione generalizzata dalla mia memoria citata, n. 5. La dimostrazione, qui riportata, è del Dr. BERTOLINI.

Per questa funzione risulta

$$\varphi'(x) = \begin{cases} y'(a) - \int\limits_a^x L(t)\,dt & \text{in } [a\,.\,h], \\[2ex] y'(a) - \int\limits_a^h L(t)\,dt + \int\limits_h^x L(t)\,dt & \text{in } [h\,,\,k]. \\[2ex] y'(a) - \int\limits_a^h L(t)\,dt + \int\limits_h^k L(t)\,dt - \int\limits_k^x L(t)\,dt & \text{in } [k\,,\,b], \end{cases}$$

$$\varphi''(x) = \begin{cases} -L(x) & \text{in } [a\,,\,h], \\ +L(x) & \text{in } [h\,,\,k], \\ -L(x) & \text{in } [k\,,\,b], \end{cases}$$

e perciò essa appartiene veramente all'insieme A^0, soddisfacendo inoltre manifestamente alle condizioni $[2]_1$, $[2]_2$. Mostriamo ch'è sempre possibile determinare h e k in modo che siano soddisfatte anche le condizioni $[2]_3$, $[2]_4$. Ciò conduce a scrivere il sistema di due equazioni:

$$[4] \quad \begin{cases} y(a) + y'(a)(b-a) - \int\limits_a^b (b-x)\,L(x)\,dx + 2\int\limits_h^k (b-x)\,L(x)\,dx = y(b) \\[2ex] y'(a) \qquad - \int\limits_a^b L(x)\,dx + 2\int\limits_h^k L(x)\,dx = y'(b)\,, \end{cases}$$

nelle due incognite h, k. Questo sistema può scriversi:

$$\begin{cases} 2\int\limits_h^k (b-x)\,L(x)\,dx = y(b) - y(a) - y'(a)(b-a) + \int\limits_a^b (b-x)\,L(x)\,dx \\[2ex] 2\int\limits_h^k L(x)\,dx = y'(b) - y'(a) + \int\limits_a^b L(x)\,dx\,, \end{cases}$$

od anche

$$[5] \qquad \begin{cases} 2\int\limits_h^k (b-x)\, L(x)\, dx = \int\limits_a^b [L(x) + y''(x)]\,(b-x)\, dx \\ 2\int\limits_h^k L(x)\, dx = \int\limits_a^b [L(x) + y''(x)]\, dx\,, \end{cases}$$

ove si tenga conto che:

$$\begin{cases} y(b) = y(a) + y'(a)(b-a) + \int\limits_a^b (b-x)\, y''(x)\, dx \\ y'(b) = y'(a) + \int\limits_a^b y''(x)\, dx\,. \end{cases}$$

Confrontando fra loro le $[5]_1$, $[5]_2$, s'ottiene infine il sistema nella forma più semplice:

$$[6] \qquad \begin{cases} 2\int\limits_h^k x\, L(x)\, dx = \int\limits_a^b x\,[L(x) + y''(x)]\, dx \\ 2\int\limits_h^k L(x)\, dx = \int\limits_a^b [L(x) + y''(x)]\, dx\,. \end{cases}$$

Queste due equazioni sono compatibili e determinano (almeno) una coppia di valori h, k soddisfacenti alle [4]. Infatti anzitutto il primo membro della $[6]_1$, al variare di h e k in $[a, b]$ $(h \leq k)$, varia tra i valori O e $2\int\limits_a^b x\, L(x)\, dx$, valori tra i quali varia anche il secondo membro al variare di $y(x)$ in A; analoga osservazione può farsi sulla $[6]_2$. In secondo luogo, assegnata $y(x)$, i secondi membri delle [6] sono noti; la $[6]_2$ da sola definisce implicitamente k come funzione di h, continua, quasi ovunque derivabile, crescente e univocamente invertibile: essa, al variare di h fra a e un ben determinato valore i, varia fra un ben determinato valore j e b $(a \leq i \leq b\,;\ a \leq j \leq b)$. Analogamente la $[6]_1$ definisce implicitamente k come funzione di h, in generale diversa da quella ora vista, continua, quasi ovunque derivabile, crescente e univocamente invertibile: essa, al variare di h fra a e un ben determinato valore i_0, varia fra un ben determinato valore j_0 e b ($a \leq i_0 \leq b$; $a \leq j_0 \leq b$).

A provare perciò l'esistenza d'una coppia di valori h, k che soddisfi entrambe le [6], basterà far vedere che $j \leq j_0$, $i \leq i_0$. E infatti j_0 è caratterizzato dall'equazione

$$2 \int_a^{j_0} x\, L(x)\, d\, x = \int_a^b x\, [L(x) + y''(x)]\, d\, x$$

e, se fosse $j > j_0$, risulterebbe

$$2 \int_a^{j} x\, L(x)\, d\, x > \int_a^b x\, [L(x) + y''(x)]\, d\, x$$

donde, sottraendo ad ambo i membri l'integrale

$$\int_a^{j} x\, [L(x) + y''(x)]\, d\, x\,,$$

s'otterrebbe

$$\int_a^{j} x\, [L(x) - y''(x)]\, d\, x > \int_j^b x\, [L(x) + y''(x)]\, d\, x\,.$$

Applicando ora il teor. della media, seguirebbe:

$$j \int_a^{j} [L(x) - y''(x)]\, d\, x > j \int_j^b [L(x) + y''(x)]\, d\, x$$

e di qui, dividendo per j (12) e aggiungendo ad ambo i membri l'integrale

$$\int_a^{j} [L(x) + y''(x)]\, d\, x\,,$$

si avrebbe infine

$$2 \int_a^{j} L(x)\, d\, x > \int_a^b [L(x) + y''(x)]\, d\, x$$

(12) Senza compromettere la generalità della dimostrazione, è lecito supporre $a > 0$

mentre, per la proprietà caratteristica di j, il primo membro di questa disuguaglianza è esattamente uguale al secondo. In modo perfettamente analogo si prova che $i \leq i_0$.

OSSERVAZIONI. 1ª) — Può darsi che il sistema [6] sia soddisfatto da due valori h, k in $[a, b]$ tali che $h = k$. In questo caso si riconosce dalle [4] che la funzione

$$\varphi(x) = y(a) + y'(a)(x - a) - \int_a^x (x - t) L(t)\, dt$$

soddisfa alle condizioni:

$$\varphi(a) = y(a), \quad \varphi'(a) = y'(a), \quad \varphi(b) = y(b), \quad \varphi'(b) = y'(b)$$

e perciò coincide con $y(x)$ in tutto $[a, b]$ (per l'osservaz. 1ª al n. 5). In questo caso, il sistema [6] è in realtà soddisfatto da qualunque coppia di valori h, k coincidenti in uno stesso punto di $[a, b]$.

2ª) Fatta eccezione dell'unico caso $h = k$ precedentemente considerato, si riconosce facilmente che il sistema [6] ammette sempre *una sola soluzione* (h, k). Infatti se tale sistema ammettesse due soluzioni distinte (h, k), (h^*, k^*), si verrebbe a soddisfare alle condizioni [2] non soltanto con la funzione $\varphi(x)$ definita dalle [3], ma anche con la funzione

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} y(a) + y'(a)(x - a) - \displaystyle\int_a^x (x - t) L(t)\, dt & \text{in } [a, h^*], \\[2ex] y(a) + y'(a)(x - a) - \displaystyle\int_a^{h^*} (x - t) L(t)\, dt + \\ \qquad + \displaystyle\int_{h^*}^x (x - t) L(t)\, dt & \text{in } [h^*, k^*], \\[2ex] y(a) + y'(a)(x - a) - \displaystyle\int_a^{h^*} (x - t) L(t)\, dt + \\ \qquad + \displaystyle\int_{h^*}^{k^*} (x - t) L(t)\, dt - \displaystyle\int_{k^*}^x (x - t) L(t)\, dt & \text{in } [k^*, b]. \end{cases}$$

Distinguiamo allora due casi.

a) *Le due coppie* (h , k), (h* , k*) *non si separano.* Se per es. l'intervallo (h, k) contenesse l'intervallo (h^*, k^*), in virtù dell'osservaz. 1ª del n. 5 si riconosce che $\varphi^*(x)$ dovrebbe coincidere con $\varphi(x)$ in tutto (h, k) e quindi che $h = h^*$, $k = k^*$ ciò ch'è contradittorio. Allo stesso risultato si arriverebbe, se i due intervalli (h, k), (h^*, k^*) fossero estranei l'uno all'altro.

b) *Le due coppie* (h , k), (h* , k*) *si separano.* Se per es. fosse $h^* < h < k^* < k$, le due funzioni $\varphi(x)$, $\varphi^*(x)$ dovrebbero coincidere in tutto (h^*, k), in virtù della dimostraz. del teor. del n. 5, *b*, e ciò porterebbe sempre ancora allo stesso risultato contradittorio.

3ª) Si potrebbe dare di questo lemma la dimostrazione del tutto simmetrica alla precedente ponendo, in luogo delle (3), le formule:

$$[7] \qquad \varphi_1(x) = \begin{cases} y(a) + y'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t)\, L(t)\, dt & \text{in } [a, h_1] \\ y(a) + y'(a)(x-a) + \int_a^{h_1} (x-t)\, L(t)\, dt - \int_{h_1}^x (x-t)\, L(t)\, dt & \text{in } [h_1, k_1] \\ y(a) + y'(a)(x-a) + \int_a^{h_1} (x-t)\, L(t)\, dt - \\ \qquad - \int_{h_1}^{k_1} (x-t)\, L(t)\, dt + \int_{k_1}^x (x-t)\, L(t)\, dt & \text{in } [k_1, b] \end{cases}$$

e risolvendo poi il sistema analogo a [4], cioè:

$$[8] \qquad \begin{cases} y(a) + y'(a)(b-a) + \int_a^b (b-x)\, L(x)\, dx - 2\int_{h_1}^{k_1} (b-x)\, L(x)\, dx = y(b) \\ y'(a) + \int_a^b L(x)\, dx - 2\int_{h_1}^{k_1} L(x)\, dx = y'(b), \end{cases}$$

nelle due incognite h_1, k_1. A proposito di questo sistema, si possono fare naturalmente delle osservazioni del tutto analoghe alle precedenti. Ci tratteniamo anche ad osservare che, *in generale,* si troveranno, risolvendo il sistema [8], dei valori h_1, k_1 diversi dai precedenti h, k. Si riconosce poi subito che, nel caso $h = k$ (considerato nell'osservaz. 1ª), risulta $h_1 = a$, $k_1 = b$

(e inversamente) mentre, nel caso opposto $h_1 = k_1$, risulta $h = a$, $k = b$ (e inversamente). Si riconosce anche facilmente che è $h_1 = a$, $a < k_1 < b$ sempre e solo quando $a < h < b$, $k = b$, e allora risulta sempre $h = k_1$. Analogamente si riconosce che è $h = a$, $a < k < b$ sempre e solo quando $a < < h_1 < b$, $k_1 = b$, e allora risulta sempre $h_1 = k$. Questi due casi e i due precedenti ($h = k$ oppure $h_1 = k_1$) sono gli unici nei quali le due funzioni $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$ definite rispettivamente dalle (3) e dalle (7), vengono a coincidere [13].

La fig. 1 rappresenta la funzione $y(x)$ e le due funzioni $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$ definite rispettivamente dalle formule |3| e |7], nel caso generico e supponendo che la funzione $L(x)$ si riduca a costante in tutto $[a, b]$ [14].

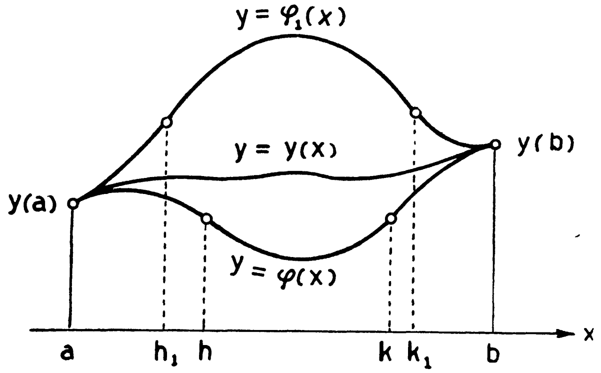

Fig. 1

4ª) Naturalmente le due funzioni $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$ non sono, in generale, le uniche, nell'insieme A_0, che soddisfino alla tesi enunciata. L'unico caso d'eccezione è quello, poc'anzi considerato (osservaz. 3ª), che $\varphi(x)$ e $\varphi_1(x)$ coincidano. Tolto questo caso, si riconosce facilmente (e sarà meglio messo in luce nel seguito) che esistono infinite funzioni siffatte, alle quali è anche lecito aggiungere condizioni ulteriori a quelle contenute nella tesi: per es. che in un punto x_0 comunque prefissato in (a, b) esse assumano un qualunque valore prefissato compreso fra $\varphi(x_0)$ e $\varphi_1(x_0)$ (cfr. la seguente osservaz. 5ª) [15]. Naturalmente tutte queste altre funzioni corrisponderanno a suddivisioni di $[a, b]$ in un numero d'intervalli parziali (v. la definiz. delle funzioni di A^0, data al principio del n. 5) in ogni caso > 3.

5ª) Dimostriamo che, in tutto $[a, b|$, risulta $\varphi(x) \leq y(x) \leq \varphi_1(x)$ [16]. Infatti che sia per es. $\varphi(x) \leq y(x)$ in tutto $[a, h|$ e in tutto $|k, b|$, è già

---

(13) Che *debbano* coincidere, è già a priori assicurato dalla dimostrazione del teor. del n 5.

(14) Tutte le figure di questa memoria sono state disegnate per $L(x) = \text{cost.}$

(15) In particolare $\geq \varphi(x_0)$ se $a < x_0 < h$ oppure $k < x_0 < b$, $\leq \varphi_1(x_0)$ se $a < x_0 < h_1$ oppure $k_1 < x_0 < b$; invece (cfr. la seguente osservaz. 6ª) $> \varphi(x_0)$ se $h \leq x_0 \leq k$, $< \varphi_1(x_0)$ se $h_1 \leq x_0 \leq k_1$.

(16) È $\varphi(x) < \varphi_1(x)$ in tutto (a, b), tolta l'eventualità (accennata nell'osservaz. 3ª) he $\varphi(x)$ e $\varphi_1(x)$ coincidano.

stato sostanzialmente affermato (per es. al n. 5, a). Supponiamo allora, per ipotesi assurda, che sia $y(x_0) < \varphi(x_0)$ in un certo punto x_0 di (h, k). Per la continuità delle due funzioni, esisterebbe tutto un intorno (p, q) di x_0 tale che $h \leq p < q \leq k$, $\varphi(p) = y(p)$, $\varphi(q) = y(q)$ e nel quale sarebbe sempre $y(x) < \varphi(x)$ (fig. 2). Ma allora necessariamente si avrebbe $y'(p) \leq \varphi'(p)$, $y'(q) \geq \varphi'(q)$. Se fosse $y'(p) = \varphi'(p)$ oppure $y'(q) = \varphi'(q)$, sarebbe $y(x) = \varphi(x)$ in tutto $[p, q]$ in virtù dell'osservaz. 1ª al n. 5, e ciò sarebbe contraddittorio. Se invece fosse $y'(p) < \varphi'(p)$, $y'(q) > \varphi'(q)$, si avrebbe $y'(q) - y'(p) > \int_p^q L(x)\,dx$, e ciò sarebbe assurdo.

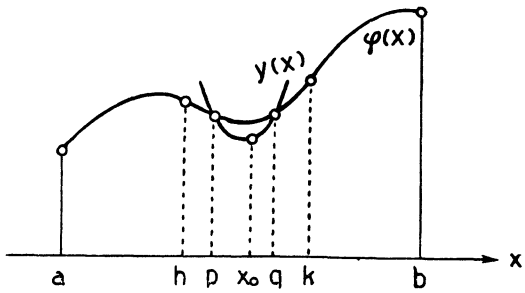

Fig. 2

6ª) Si possono ulteriormente precisare le limitazioni precedenti, affermando che, se in un punto qualunque x_0 di $[h, k]$ è $y(x_0) = \varphi(x_0)$, allora è $y(x) = \varphi(x)$ in tutto $[a, b]$. Infatti, nell'ipotesi detta, è anche necessariamente $y'(x_0) = \varphi'(x_0)$ e perciò $y(x) = \varphi(x)$ in tutto $[a, x_0]$, a causa del n. 5 b (oppure del n. 5 a, qualora sia $x_0 = h$); analogamente si riconosce che è $y(x) = \varphi(x)$ in tutto $[x_0, b]$.

Così pure, se in un punto qualunque x_0 di $[h_1, k_1]$ è $y(x_0) = \varphi_1(x_0)$, allora è $y(x) = \varphi_1(x)$ in tutto $[a, b]$.

7ª) Esaminando il sistema [4], si riconosce subito che i valori h, k da esso forniti, in quanto determinati dai quattro valori $y(a)$, $y'(a)$, $y(b)$, $y'(b)$, risultano funzioni continue di questi. Conseguentemente si riconosce che la funzione $\varphi(x)$ definita dalle [3] e soddisfacente alle condizioni [2], varia con continuità, insieme alla propria derivata prima, al variare dei quattro valori $y(a)$, $y'(a)$, $y(b)$, $y'(b)$. In altre parole: assegnato, comunque piccolo, un numero $\varepsilon > 0$, è sempre possibile determinare corrispondentemente un altro numero $\delta > 0$ tale che, se $y_0(a)$, $y_0'(a)$, $y_0(b)$, $y_0'(b)$ sono quattro valori soddisfacenti alle limitazioni

$$| y_0(a) - y(a) | < \delta, \quad | y_0'(a) - y'(a) | < \delta, \quad | y_0(b) - y(b) | < \delta, \quad | y_0'(b) - y'(b) | < \delta,$$

e se $\varphi_0(x)$ è la funzione definita dalle formule analoghe alle [3] con le condizioni ai limiti

$$y_0(a) = \varphi_0(a), \quad y_0'(a) = \varphi_0'(a), \quad y_0(b) = \varphi_0(b), \quad y_0'(b) = \varphi_0(b),$$

risulti $| \varphi(x) - \varphi_0(x) | < \varepsilon$, $| \varphi'(x) - \varphi_0'(x) | < \varepsilon$ in tutto $[a, b]$.

Analoga osservazione vale relativamente alla funzione $\varphi_1(x)$ definita dalle formule [7].

7. TEOR — *L'insieme* A^0 *è denso nell'insieme* A, *anzi* A *è l'involucro di* A^0 (17).

DIM. — Dobbiamo far vedere che, comunque si prenda in A una funzione $y(x)$ e si fissi un numero $\varepsilon > 0$, esiste in A^0 una funzione $\varphi_\varepsilon(x)$ tale che

$$|\varphi_\varepsilon(x) - y(x)| < \varepsilon, \quad |\varphi'_\varepsilon(x) - y'(x)| < \varepsilon \qquad \text{in tutto } [a\,,\,b].$$

All'uopo suddividiamo $[a\,,\,b]$ in un numero finito d'intervalli parziali, con una legge arbitraria, purchè la massima ampiezza di tali intervalli par. ziali sia minore d'un certo numero $\eta > 0$, che determineremo a posteriori in modo opportuno.

Immaginiamo di ripetere, in ciascuno dei detti intervalli parziali, la costruzione indicata nella dimostrazione del lemma del n. 6 (applicando, a piacere, le formule [3] oppure le formule [7]), avremo appunto una certa funzione $\varphi_\varepsilon(x)$ tale che

$$\varphi_\varepsilon(\bar{x}) = y(\bar{x}), \quad \varphi'_\varepsilon(\bar{x}) = y'(\bar{x}),$$

in ogni estremo $\bar{x}$ degli intervalli di decomposizione.

Sia σ_ε un numero positivo tale da rendere $\int_J L(x)\,dx < \varepsilon$, tutte le volte che mis $J < \sigma_\varepsilon$ ed J è un qualunque insieme misurabile di punti di $[a\,,\,b]$. Risulterà anche, essendo $|y''(x)| \leq L(x)$,

$$|y'(x_2) - y'(x_1)| < \varepsilon, \quad |\varphi'_\varepsilon(x_2) - \varphi'_\varepsilon(x_1)| < \varepsilon \quad \text{quando } |x_2 - x_1| < \sigma_\varepsilon .$$

Basterà dunque assumere $\eta < \sigma_{\varepsilon/2}$, affinchè riesca

$$|y'(x) - y'(\bar{x})| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |\varphi'_\varepsilon(x) - \varphi'_\varepsilon(\bar{x})| < \frac{\varepsilon}{2}$$

tutte le volte che x appartiene a uno degli intervalli parziali di cui $\bar{x}$ è estremo, e quindi

$$|y'(x) - \varphi'_\varepsilon(x)| < \varepsilon \qquad \text{in tutto } [a\,,\,b].$$

(17) Proposizione generalizzata dalla mia memoria citata, nn. 3-5. La dimostrazione, qui riportata, è del Dr. BERTOLINI.

In modo analogo si può determinare, in corrispondenza d'ogni ε, un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che, assumendo $\eta < \delta_{\varepsilon/2}$, riesca

$$| y(x) - \varphi_\varepsilon(x) | < \varepsilon \qquad \text{in tutto } [a\,,\,b].$$

Per costruire la $\varphi_\varepsilon(x)$ cercata, basterà dunque assumere simultaneamente $\eta < \sigma_{\varepsilon/2}$, $\eta < \delta_{\varepsilon/2}$.

Resta con ciò provato che ogni funzione di A è elemento d'accumulazione (del prim'ordine) per A^0, il che basta, essendo A chiuso (anzi perfetto) ed A^0 contenuto in A, a dimostrare che A è l'involucro di A^0.

OSSERVAZIONE. — Questo teor. permette, come subito si riconosce, d'invertire quello del n. 5. Precisamente: se ad una funzione $\bar{y}(x)$ di A è possibile far corrispondere un numero $\delta > 0$ tale che ogni altra funzione $y(x)$ di A soddisfacente alle condizioni

$$y(x_1) = \bar{y}(x_1), \;\; y'(x_1) = \bar{y}'(x_1), \;\; y(x_2) = \bar{y}(x_2), \;\; y'(x_2) = \bar{y}'(x_2)$$

in due punti qualunque x_1, x_2 di $[a\,,\,b]$ per cui $0 < x_2 - x_1 \leq \delta$, coincide con $\bar{y}(x)$ in tutto $[x_1\,,x_2]$, tale funzione $\bar{y}(x)$ appartiene necessariamente ad A^0.

§ 2. - Definizione del campo ristretto. Sue proprietà.

8. — Veniamo ora a definire il subaggregato E di A, entro il quale s'intenderà variare liberamente la funzione $y(x)$ da cui verranno poi a dipendere i nostri integrali $J[y]$. Questo subaggregato si chiamerà anche il « *campo ristretto* » di variabilità della $y(x)$. Per conservare un carattere di generalità sufficiente ad abbracciare tutti i problemi che possono praticamente presentarsi nelle applicazioni, diamo la seguente

DEFINIZ. — *Prefissati ad arbitrio, in* $[\mathrm{a}\,,\,\mathrm{b}]$, $\mathrm{m}+\mathrm{n}$ *punti* $\mathrm{x_i}$, $\mathrm{x'_j}$ $(\mathrm{a} \leq \mathrm{x_1} < \mathrm{x_2} < \ldots < \mathrm{x_m} \leq \mathrm{b}\,,\, \mathrm{a} \leq \mathrm{x'_1} < \mathrm{x'_2} < \ldots < \mathrm{x'_n} \leq \mathrm{b}\,;\, \mathrm{m} \geq 1\,,\, \mathrm{n} \geq 1$ *oppure* $\mathrm{m} \geq 2$, $\mathrm{n} = 0$; *i punti* $\mathrm{x_i}$ *potendo, alcuni o anche tutti, coincidere coi punti* $\mathrm{x'_j}$) e $2(\mathrm{m}+\mathrm{n})$ *costanti* $\mathrm{p_i}$, $\mathrm{P_i}$, $\mathrm{p'_j}$, $\mathrm{P'_j}$ *con* $\mathrm{p_i} \leq \mathrm{P_i}$, $\mathrm{p'_j} \leq \mathrm{P'_j}$, *appartengono ad* E *tutte e sole le funzioni* $\mathrm{y(x)}$ *di* A *tali che*

$$p_i \leq y(x_i) \leq P_i \quad , \quad p'_j \leq y'(x'_j) \leq P'_j \qquad (i = 1\,,2\,,\ldots,m\,;\, j = 1\,,2\,,\ldots,n).$$

Lasciando (per ora) impregiudicata la questione se il campo E, così definito, sia o non sia vuoto, cominciamo col dimostrare il

TEOR. — *Il campo* E *è compatto e chiuso del prim'ordine.*

DIM. — Il caso $m \geq 2$, $n = 0$ si può ricondurre al caso $m \geq 1$, $n \geq 1$, come mostreremo nella seguente osservaz. 1ª: qui ci limitiamo perciò a studiare il caso $m \geq 1$, $n \geq 1$.

La *compattezza* di E si può dedurre, nel modo più semplice, dal noto teor. d'ASCOLI-ARZELÀ, osservando che, già per $m = 1$, $n = 1$, le funzioni $y(x)$ di E sono equiuniformemente continue ed equilimitate in $[a, b]$, insieme con le derivate $y'(x)$ (e quindi lo sono pure per m ed n generici).

a) Infatti l'*equiuniforme continuità delle* $y'(x)$ è assicurata (cfr. n. 7) addirittura per tutte le $y(x)$ di A, dalla condizione

$$| y'(x'') - y'(x') | \leq \int_{x'}^{x''} L(x)\, dx$$

ammessa per ogni coppia di punti x', x'' $(x' < x'')$ di $[a, b]$. Si ha poi, per ogni x di $[a, b]$,

$$p_1' - \int_a^b L(x)\, dx \leq y'(x_1') - \left| \int_{x_1'}^{x} L(t)\, dt \right| \leq$$

$$\leq y'(x) \leq y'(x_1') + \left| \int_{x_1'}^{x} L(t)\, dt \right| \leq P_1' + \int_a^b L(x)\, dx$$

e ciò prova l'*equilimitatezza delle* $y'(x)$ *di* E: è precisamente, in tutto $[a, b]$, $| y'(x) | \leq H'$, indicando con H' il più grande dei due numeri

$$\left| p_1' - \int_a^b L(x)\, dx \right| , \quad \left| P_1' + \int_a^b L(x)\, dx \right| .$$

b) Si ha, in tutto $[a, b]$ e per ogni funzione $y(x)$ di E,

$$y(x_1) + y'(x_1)(x - x_1) - \int_{x_1}^{x} (x - t)\, L(t)\, dt \leq$$

$$\leq y(x) \leq y(x_1) + y'(x_1)(x - x_1) + \int_{x_1}^{x} (x - t)\, L(t)\, dt$$

e quindi

$$p_1 - H'(b-a) - \int_a^b (b-x)\, L(x)\, d\, x \leq$$

$$\leq y(x) \leq P_1 + H'(b-a) + \int_a^b (b-x)\, L(x)\, d\, x\,.$$

Ciò prova l'*equilimitatezza delle* $y(x)$. Abbiamo poi, per ogni coppia di punti x', x'' $(x' < x'')$ di $[a, b]$,

$$|\, y(x'') - y(x')\, | \leq H'(x'' - x') + \int_{x'}^{x''} (x'' - t)\, L(t)\, d\, t$$

e ciò basta ad assicurare l'*equiuniforme continuità delle* y (x) *di* E.

Veniamo a dimostrare la *chiusura di E*. Se $y_0(x)$ è una funzione d'accumulazione del prim'ordine di E, fissato ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, esiste una $y(x)$ di E tale che

$$|\, y(x) - y_0(x)\, | < \varepsilon\,,\ |\, y'(x) - y_0'(x)\, | < \varepsilon \text{ per ogni } x \text{ di } [a, b].$$

Si avrà dunque, per ogni coppia d'indici i, j,

$$y(x_i) - \varepsilon < y_0(x_i) < y(x_i) + \varepsilon\,,\ y'(x_j') - \varepsilon < y_0'(x_j') < y'(x_j') + \varepsilon$$

quindi

$$p_i - \varepsilon < y_0(x_i) < P_i + \varepsilon\,,\ p_j' - \varepsilon < y_0'(x_j') < P_j' + \varepsilon$$

e più precisamente (data l'arbitrarietà di ε)

$$p_i \leq y_0(x_i) \leq P_i\,,\ p_j' \leq y_0'(x_j') \leq P_j'\,.$$

Infine, qualunque sia la coppia di punti x', x'' in $[a, b]\ (x' < x'')$, si ha

$$|\, y_0'(x') - y_0'(x'')\, | \leq |\, y_0'(x') - y'(x')\, | + |\, y'(x') + y'(x'')\, | +$$

$$+ |\, y'(x'') - y_0'(x'')\, | < 2\,\varepsilon + \int_{x'}^{x''} L(x)\, d\, x$$

e quindi più precisamente (data l'arbitrarietà di ε)

$$|\, y_0'(x') - y_0'(x'')\, | \leq \int_{x'}^{x''} L(x)\, d\, x\,.$$

Si conclude che la funzione $y_0(x)$ appartiene anch'essa ad E e con ciò il teor. risulta completamente dimostrato.

OSSERVAZIONI. — 1ª) Se $m \geq 2$, $n = 0$, si ha

$$y(x_1) + y'(x_1)(x_2 - x_1) - \int_{x_1}^{x_2} (x_2 - t) L(t)\, dt \leq y(x_2) \leq$$

$$\leq y(x_1) + y'(x_1)(x_2 - x_1) + \int_{x_1}^{x_2} (x_2 - t) L(t)\, dt$$

perciò

$$y(x_2) - y(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} (x_2 - t) L(t)\, dt \leq y'(x_1)(x_2 - x_1) \leq$$

$$\leq y(x_2) - y(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} (x_2 - t) L(t)\, dt .$$

Dunque, per ogni funzione $y(x)$ di E, posto $x'_1 = x_1$ e

$$p'_1 = \frac{p_2 - P_1 - \int_{x_1}^{x_2} (x_2 - t) L(t)\, dt}{x_2 - x_1} , \quad P'_1 = \frac{P_2 - p_1 + \int_{x_1}^{x_2} (x_2 - t) L(t)\, dt}{x_2 - x_1} ,$$

risulta, per ogni $y(x)$ di E,

$$p'_1 \leq y'(x_1) \leq P'_1 .$$

Con ciò si è senz'altro ricondotti all'ipotesi precedente.

2ª) Si potrebbe provare con esempi semplicissimi, che la tesi del teor. non sarebbe più vera nel caso $m = 1$, $n = 0$, come pure nel caso $m = 0$ ed n arbitrario.

9. — Rileviamo alcune altre semplici ed importanti proprietà del campo E.

a) Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono due funzioni di E, la funzione

$$y_{\alpha\beta}(x) = \alpha\, y_1(x) + \beta\, y_2(x) ,$$

ove α, β sono due costanti positive qualunque tali che $\alpha + \beta = 1$, appartiene anch'essa ad E: appartiene alla frontiera di E, in tutti e soli gli intervalli parziali di $[a, b]$ nei quali è quasi sempre $y_1''(x) = y_2''(x) = + L(x)$, oppure è quasi sempre $y_1''(x) = y_2''(x) = - L(x)$ (ivi risultando pure rispettivamente $y_{\alpha\beta}''(x) = + L(x)$ oppure $y_{\alpha\beta}''(x) = - L(x)$). Se in un punto x di $[a, b]$ è $y_1(x) \neq y_2(x)$, oppure $y_1'(x) \neq y_2'(x)$, è possibile disporre dei due coefficienti α, β in modo che $y_{\alpha\beta}(x)$ sia uguale a un numero l comunque prefissato fra $y_1(x)$ ed $y_2(x)$, oppure in modo che $y_{\alpha\beta}'(x)$ sia uguale a un numero l' comunque prefissato fra $y_1'(x)$ ed $y_2'(x)$.

b) Segue che l'insieme I_x dei valori che tutte le funzioni $y(x)$ di E assumono in un determinato punto x di $[a, b]$, è un intervallo. Dimostriamo precisamente che I_x *è un intervallo chiuso.* Infatti indichiamo con Λ_x l'estremo superiore di I_x, con E_ε l'insieme delle funzioni $y(x)$ di E, tali che $\Lambda_x - y(x) < \varepsilon$, essendo ε un numero positivo arbitrario. Diamo ad ε successivamente i valori $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ e consideriamo la successione d'insiemi

$$E_1 > E_{\frac{1}{2}} > E_{\frac{1}{3}} > \ldots$$

Per la compattezza e chiusura di E, esiste in E una funzione $\overline{y}$ d'accumulazione per la successione e questa funzione è evidentemente tale che $\overline{y}(x) = \Lambda_x$. In modo perfettamente analogo si ragiona con riferimento all'estremo inferiore λ_x di I_x. Naturalmente può anche accadere che l'insieme I_x (se pure esiste) si riduca ad un unico punto.

Proprietà analoghe valgono per l'insieme I_x' dei valori che tutte le derivate $y'(x)$ delle funzioni di E, assumono in un determinato punto x di $[a, b]$ (Cfr. n. 6, osservaz. 4ª).

c) Il campo E, se non è vuoto, contiene certamente delle funzioni $\varphi(x)$ di A^0. Anzi, ragionando in modo perfettamente analogo a quanto s'è fatto al n. 7, si riconosce che ogni funzione $y(x)$ di E che eventualmente non appartenga ad A^0, è elemento d'accumulazione (del prim'ordine) di funzioni $\varphi(x)$ dell'insieme $E^0 = A^0 E$. A queste ultime può poi anche imporsi, occorrendo, la condizione suppletiva d'identificarsi, essa e la propria derivata prima $\varphi'(x)$, rispettivamente con la $y(x)$ considerata e con la sua derivata $y'(x)$, in quanti si vogliono punti di $[a, b]$ (scelti in modo arbitrario, ma sempre in numero finito): all'uopo basta procurare che questi vengano tutti a far parte dei $[P D]_\varphi$.

Anche qui si può dunque affermare che E^0 *è denso in* E e che anzi E *è l'involucro di* E^0 (cfr. n. 7) Ogni eventuale funzione « *isolata* » $y(x)$ di E

appartiene ad E^0 (18). Da quanto precede si deduce anche che, in uno stesso intervallo parziale di $[a, b]$, E non può contenere più d'una funzione isolata (19).

Se E contiene una funzione $y(x)$ che sia isolata in tutto $[a, b]$, allora si presenta il caso particolarissimo che E non contiene alcun'altra funzione.

Daremo, in seguito, esempi illustrativi di questi casi particolari (n. 16).

10. — La questione, lasciata fin ora sospesa, se il campo E sia vuoto o no, si può ora risolvere, nel modo più semplice, ragionando per induzione.

Se $m = n = 1$, E non è certamente vuoto, anzi si riconosce facilmente che è perfetto e che contiene, tra le altre, la funzione lineare

$$y(x) = P_1 + P_1'(x - x_1).$$

Analogamente E non è vuoto ed è anche perfetto, se $m = 2$, $n = 0$, e contiene la funzione lineare

$$y(x) = P_1 + \frac{P_2 - P_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Se ora supponiamo che un certo campo E, genericamente definito, non sia vuoto e aggiungiamo al gruppo di punti $\{x_i, x_j'\}$ (v. la definiz. del n. 8) un $(m + n + 1)^{mo}$ punto x_0, distinto da $x_1, x_2, \ldots, x_m$, possiamo affermare (per il n. 9, *b*) che il campo $\overline{E}$ analogo ad E, ottenuto aggiungendo le condizioni

$$p_0 \leq y(x_0) \leq P_0$$

(p_0, P_0 costanti) a quelle che definiscono E, *è vuoto se*

$$p_0 > mass\, I_{x_0} \quad oppure\ se \quad P_0 < min\, I_{x_0},$$

non è vuoto nel caso contrario. Similmente, se x_0 è distinto da $x_1', x_2', \ldots, x_n'$, il campo $\overline{E}'$ analogo ad E, ottenuto aggiungendo le condizioni

$$p_0' \leq y'(x_0) \leq P_0'$$

(18) Il termine « *isolata* » è inteso con riferimento a un certo intervallo parziale $[c, d]$ di $[a, b]$. Vogliam dire cioè che $y(x)$ gode della seguente proprietà: esiste un numero $\varepsilon > 0$ (dipendente, com'è naturale, dalla $y(x)$ e dall'intervallo $[c, d]$) tale che ogni funzione $y_1(x)$ di E, appartenente all'intorno (del prim'ordine) d'ampiezza ε della $y(x)$, s'identifica con la $y(x)$ in tutto $[c, d]$.

(19) Più precisamente *tutte* le funzioni di E s'identificano con quell'unica, in tutto il detto intervallo parziale.

(p'_0, P'_0 costanti) a quelle che definiscono E, *è vuoto se*

$$p'_0 > mass\, I'_{x_0} \text{ oppure se } P'_0 < min\, I'_{x_0},$$

non è vuoto nel caso contrario.

La ricerca d'una espressione semplice e sintetica delle condizioni restrittive che bisognerebbe imporre agli elementi che concorrono alla definizione del campo E, per poter affermare che esso non è vuoto, ci porterebbe lontano, a studiare dettagli complicati e privi d'interesse per il nostro problema.

11. — Dato un campo E e prefissato un punto qualunque x_0 di $[a, b]$, distinto da $x_1, x_2, \ldots, x_m$, è interessante studiare le funzioni di E che assumono, in x_0, valore uguale al mass I_{x_0}, essendo I_{x_0} l'intervallo chiuso, definito al n. 9, *b*. Valgono, in proposito, le seguenti proposizioni.

LEMMA. — *Una funzione* y (x) *di* E, *tale che* y (x_0) = *mass* I_{x_0}, *coincide necessariamente con una certa funzione* φ (x) *di* E^0, *almeno in tutto un intorno unilaterale di* x_0.

DIM. Ragionando per assurdo, distingueremo due casi.

a) Sia $a < x_0 < b$. Rinchiudiamo x_0 in un intervallo $[c, d]$ parziale di $[a, b]$, tanto piccolo che in esso non cada alcuno dei punti x_i ($i = 1, 2, \ldots, m$), nè alcuno dei punti x'_j ($j = 1, 2, \ldots, n$), fatta al più eccezione del punto x_0 stesso ([20]). Col solito procedimento del lemma del n. 6 (e più precisamente valendosi dell'osservaz. 3ª al n. 6), è possibile costruire una funzione $\varphi(x)$ di E^0, tale che sia

$$\varphi(c) = y(c), \varphi'(c) = y'(c), \varphi(d) = y(d), \varphi'(d) = y'(d)$$

e sia $\varphi(x) > y(x)$ in tutto (c, d) (perchè s'è negata la tesi da dimostrarsi cfr. l'osservaz. 6ª al n. 6). È anche possibile (come facilmente si riconosce) valersi dell'arbitrarietà di scelta dei punti c, d, in modo che risulti $\varphi'(x_0) = y'(x_0)$ (fig. 3).

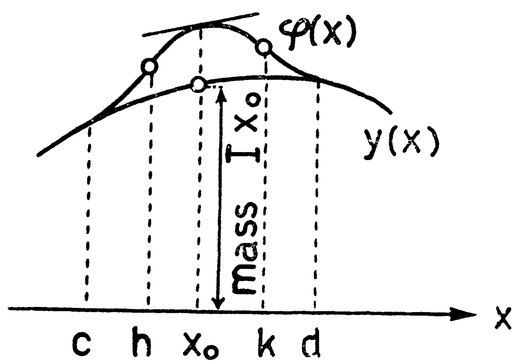

Fig. 3

Si avrebbe dunque $\varphi(x_0) > y(x_0)$, in contradizione con l'ipotesi $y(x_0) =$ mass I_{x_0}.

b) Sia $x_0 = a$. Indichiamo con $[x_0, d]$ un intorno destro di x_0, contenuto in $[a, b]$ e tanto piccolo che in esso non cada alcuno dei punti x_i ($i = 1, 2, \ldots, m$), nè alcuno dei punti x'_j ($j = 1, 2, \ldots, n$), fatta al più eccezione del punto x_0

stesso [20]. È possibile costruire una funzione $\varphi(x)$ di E^0, tale che sia

$$\varphi(d) = y(d)\,,\ \varphi'(d) = y'(d)\,,\ \varphi'(x_0) = y'(x_0)$$

e sia $\varphi(x) > y(x)$ in tutto $[x_0\,, d)$ Si ricade manifestamente nella stessa contradizione del caso a) (fig. 4). Analogamente si ragiona, se $x_0 = b$.

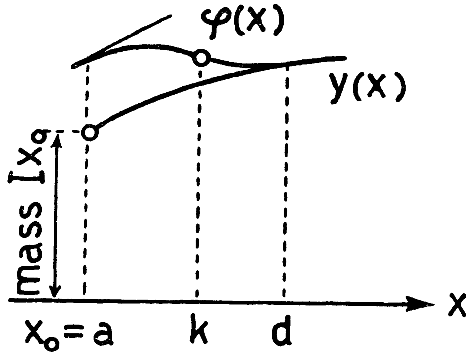

Fig. 4

12. — TEOR. *Se due funzioni* $y_1(x)$, $y_2(x)$ *di* E *sono tali che* $y_1(x_0) = y_2(x_0) =$ *mass* I_{x_0} *in un punto* x_0 *di* $[a\,, b]$ *distinto da* x_1 , $x_2\,, \ldots, x_m$, *esse s'identificano con una stessa funzione* $\varphi(x)$ *di* E^0, *almeno in tutto un intorno unilaterale di* x_0 .

DIM. Conviene ragionare per assurdo, distinguendo vari casi.

a) Supponiamo dapprima $y_1'(x_0) = y_2'(x_0)$. Se la tesi affermata non fosse vera, una qualunque delle funzioni $y_{\alpha\beta}(x)$ definite al n. 9 *a*, non coinciderebbe con alcuna funzione $\varphi(x)$ di E^0, in alcun intorno unilaterale di x_0, pur essendo $y_{\alpha\beta}(x_0) =$ mass I_{x_0}, ciò che sarebbe in contradizione col lemma precedente.

b) Supponiamo invece $y_1'(x_0) \neq y_2'(x_0)$, per es. $y_1'(x_0) > y_2'(x_0)$. Distinguiamo vari sottocasi, come segue.

b α) Le due derivate seconde $y_1''(x)$, $y_2''(x)$ non s'identificano (quasi ovunque) nè in un intorno destro, nè in un intorno sinistro di x_0. In tal caso una qualunque delle funzioni $y_{\alpha\beta}(x)$, non coinciderebbe neppur ora con alcuna funzione $\varphi(x)$ di E^0, in alcun intorno unilaterale di x_0, e perciò si ragionerebbe come nel caso precedente *a*.

*b*β) Le due derivate $y_1''(x)$, $y_2''(x)$ s'identificano (quasi ovunque) in un intorno unilaterale, per es. destro, di x_0, ma non in un intorno bilaterale. Consideriamo il massimo intorno destro di x_0, nel quale ciò accade, sia $(x_0\,, b')$. In $(x_0\,, b']$ è sempre $y_1(x) > y_2(x)$, precisamente è

$$y_1(x) = y_2(x) + [y_1'(x_0) - y_2'(x_0)]\,(x - x_0).$$

La funzione $y_{\alpha\beta}(x)$, comunque si prefissi la coppia d'indici α , β , non soddisfa certo nè all'equazione $y_{\alpha\beta}''(x) = +L(x)$, nè all'equazione $y_{\alpha\beta}''(x) =$

---

(20) Tale eccezione ha luogo se e solo se x_0 è uno dei punti x_j' .

$= -L(x)$, in quasi tutto un intorno sinistro di x_0 (se pure è $x_0 > a$). Inoltre, in ogni punto x_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) che eventualmente cada in $(x_0, b']$, è manifestamente $y_{\alpha\beta}(x_i) < P_i$. Sia c un qualunque numero positivo, che fisseremo a posteriori (sufficientemente piccolo e, in ogni caso), minore o uguale alla più piccola delle differenze $P_i - y_{\alpha\beta}(x_i)$, per ogni x_i che eventualmente cada in $(x_0, b']$. Consideriamo la funzione $y(x)$ che, in tutto $[x_0, b']$, è uguale a $y_{\alpha\beta}(x) + c$ e ancora distinguiamo i seguenti sottocasi.

$b\,\beta_1$) Se $x_0 = a$, $b' = b$, la $y(x)$ appartiene ad E e si ha l'assurdo $y(x_0) > \text{mass}\, I_{x_0}$.

$b\,\beta_2$) Se $x_0 = a$, $b' < b$, si prenda un punto $b'' > b'$ e tanto prossimo a b', che in $(b', b'']$ non cada alcuno dei punti x_i, x_j'. Poniamo $y(x) = y_{\alpha\beta}(x)$ in tutto $[b'', b]$. Infine definiamo $y(x)$ in $[b', b'']$, facendola ivi variare con continuità, insieme con la sua derivata prima, fra i valori che già son stati assegnati, a lei e alla sua derivata prima, rispettivamente in b' e in b'' ([21]). Anche qui tutto ciò vien fatto in modo che $y(x)$ appartenga ad E e si ripete l'assurdo $y(x_0) > \text{mass}\, I_{x_0}$.

$b\,\beta_3$) Se $x_0 > a$, $b' = b$, si prenda un punto $x_0' < x_0$ e tanto prossimo a x_0, che in $[x_0', x_0)$ non cada alcuno dei punti x_i, x_j'. Poniamo $y(x) = y_{\alpha\beta}(x)$ in tutto $[a, x_0']$. Infine definiamo $y(x)$ in $[x_0', x_0]$, facendola ivi variare con continuità, insieme con la sua derivata prima, fra i valori che già sono stati assegnati, a lei e alla sua derivata prima, rispettivamente in x_0' e in x_0 ([22]), ecc.

$b\,\beta_4$) Se $x_0 > a$, $b' < b$, si completi la definizione di $y(x)$, in $[b', b]$ con la regola indicata nel caso $b\,\beta_2$, in $[a, x_0]$ con la regola indicata nel caso $b\,\beta_3$, poi si ragioni al modo solito.

In modo del tutto analogo si ragiona, se le due derivate $y_1''(x), y_2''(x)$ s'identificano in quasi tutto un intorno sinistro di x_0 (ma non in un intorno destro).

$b\,\gamma$) Le due derivate $y_1''(x), y_2''(x)$ s'identificano (quasi ovunque) in un intorno completo di x_0 (ciò implica $a < x_0 < b$). Sia $[b', b'']$ il massimo intorno completo di x_0, in cui ciò accade.

In tutto $[b', b'']$ si avrà ancora

$$y_1(x) = y_2(x) + [y_1'(x_0) - y_2'(x_0)](x - x_0),$$

quindi

$$y_1(x) < y_2(x) \text{ in } [b', x_0), \; y_1(x) > y_2(x) \text{ in } (x_0, b''].$$

([21]) Si riconosce facilmente che ciò è certamente possibile, purchè c sia stato scelto abbastanza piccolo (tanto più piccolo, quanto più piccola è la differenza $b'' - b'$). Precisamente si può fare in modo che $y(x)$ si comporti in $[b', b'']$ come la $\varphi(x)$ della fig. 4 si comporta in $[a, d]$: cioè sia $y''(x) = -L(x)$ in un certo intervallo (b', k), sia $y''(x) = + L(x)$ in (k, b'').

([22]) La costruzione è analoga a quella accennata nella nota precedente.

Distinguendo anche qui vari sottocasi, a seconda che $a \leq b'$. $b'' \leq b$, ponendo però sempre $y(x) = y_{\alpha\beta}(x) + c$ (c costante positiva arbitraria, purchè sufficientemente piccola) in tutto $[b', b'']$, e ragionando in modo analogo ai sottocasi precedenti $b\,\beta_1, \ldots, b\,\beta_4$, si perviene ancora e sempre all'assurdo $y(x_0) > \text{mass}\, I_{x_0}$.

Il teor. è così completamente dimostrato.

13. — Le proposizioni dei nn. 11, 12 trovano riscontro nelle due proposizioni seguenti. Supponiamo ora che il punto x_0, comunque prefissato in $[a, b]$ sia distinto da $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ e cominciamo col dimostrare il

LEMMA. — *Una funzione* y (x) *di* E, *tale che* $y'(x_0) = \text{mass}\, I'_{x_0}$, *coincide necessariamente con una certa funzione* $\varphi(x)$ *di* E^0, *almeno in tutto un intorno unilaterale di* x_0.

DIM. — Anche qui ragioniamo per assurdo, in modo analogo, e distinguiamo due casi.

a) *Sia* $a < x_0 < b$. Rinchiudiamo x_0 in un intervallo $[c, d]$ parziale di $[a, b]$, allo stesso modo che al n. 11 *a*, ed osserviamo che è certo possibile (avendo negata la tesi da dimostrarsi) costruire una funzione $\varphi(x)$ di E^0, tale che sia

$$\varphi(c) = y(c), \quad \varphi'(c) = y'(c), \quad \varphi(d) = y(d), \quad \varphi'(d) = y'(d),$$

e inoltre sia

$$\varphi(x_0) = y(x_0), \quad \varphi'(x_0) > y'(x_0).$$

La fig. 5 (di cui s'affida al lettore la facile spiegazione) indica il modo più semplice per costruire una tale funzione, contradicendo così all'ipotesi $y'(x_0) = \text{mass}\, I'_{x_0}$.

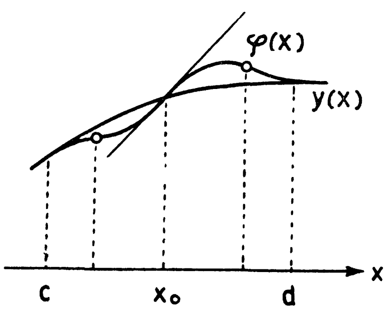

Fig. 5

b) *Sia* $x_0 = a$. Costruiamo un intorno destro $[x_0, d]$ di x_0, così come al n. 11 *b*, ed osserviamo che è certo possibile costruire una funzione $\varphi(x)$ di E^0, tale che sia

$$\varphi(x_0) = y(x_0), \quad \varphi(d) = y(d),$$
$$\varphi'(d) = y'(d), \quad \varphi'(x_0) > y'(x_0).$$

La fig. 6 (di cui s'affida al lettore la facile spiegazione) indica il modo più semplice per costruire una tale funzione, contradicendo ancora all'ipotesi $y'(x_0)$ mass I'_{x_0}.

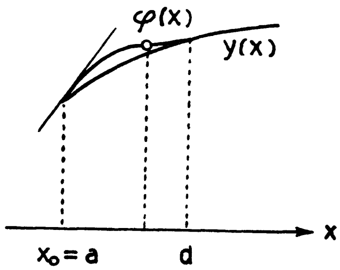

Fig. 6

14. Teor. — *Se due funzioni* $y_1(x)$, $y_2(x$ *di* E *sono tali che*

$$y'_1(x_0) = y'_2(x_0) = \text{mass } I'_{x_0}$$

in un punto x_0 *di* [a , b] *distinto da* $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, *esse differiscono rispettivamente al più per due costanti, da una stessa funzione* $\varphi(x)$ *di* E^0, *almeno in tutto un intorno unilaterale di* x_0.

Dim. — La dimostrazione può farsi, anche qui, per assurdo e, cosa notevole, assai più semplicemente e brevemente che per l'analogo teor. del n. 12.

a) Se è $y_1(x_0) = y_2(x_0)$, il ragionamento è identico a quello del n. 12 *a*, con la sola ovvia variante che riesce $y'_{\alpha\beta}(x_0) = \text{mass } I'_{x_0}$.

b) Se invece è $y_1(x_0) \neq y_2(x_0)$, distinguiamo i seguenti sottocasi.

bα) Non è $y''_1(x) = y''_2(x) = +L(x)$ nè $y''_1(x) = y''_2(x) = -L(x)$, nè in quasi tutto un intorno destro di x_0, nè in quasi tutto un intorno sinistro di x_0. In tal caso il ragionamento è identico a quello del n. 12 *bα*.

bβ) Non resta dunque che supporre $y''_1(x) = y''_2(x) = +L(x)$ oppure $y''_1(x) = y''_2(x) = -L(x)$ in quasi tutto un intorno destro oppure sinistro di x_0 Ma allora il teor. risulta senz'altro dimostrato, bastando osservare che è

$$y_1(x) = y_2(x) + y_1(x_0) - y_2(x_0)$$

in tutto il detto intorno.

Osservaz. — È appena necessario avvertire che, in modo perfettamente analogo, si dimostrano le proposizioni ottenute da quelle dei nn. 11 14, sostituendo in esse i termini mass I_{x_0}, mass I'_{x_0}, rispettivamente coi termini min I_{x_0}, min I'_{x_0}.

15. — Il ragionamento del n. 10 accennava, in sostanza, a un *procedimento costruttivo* del campo E, consistente nel partire da un campo analogo, ma più vasto, definito per $m = n = 1$ o per $m = 2$, $n = 0$, e imponendo successivamente le condizioni restrittive che corrispondono all'aggiunta, uno per volta, dei punti x_i, x'_j. In quell'ordine d'idee, le proposizioni dei nn. 11-14 acquistano un particolare interesse, sul quale (sia pure incidentalmente) val la pena d'intrattenersi.

Mantenendo le notazioni del n. 10, immaginiamo di partire da un certo campo E, perfetto o no (in corrispondenza di ogni intervallo parziale di $[a\,,b]$ ([23])) ([24]). Si riconosce facilmente, in base alle proposizioni precedenti (nn. 11-14), che il *campo indicato con* $\overline{\mathrm{E}}$ *viene a contenere certamente una funzione isolata* (in corrispondenza d'un intorno unilaterale, o addirittura bilaterale, di x_0), se (e solo se) $p_0 = \text{mass}\, I_{x_0}$, oppure $P_0 = \min I_{x_0}$. In tal caso, $\overline{E}$ non è perfetto.

Si ha con ciò un criterio per riconoscere se un campo ristretto contiene funzioni isolate ([25]).

16. — Chiudiamo questa breve analisi del campo ristretto, con alcuni esempi illustrativi.

a) Poniamo: $m = 1$, $n = 2$, $x_1 = x'_1 = a$, $x'_2 = b$; $p_1\,, P_1\,, p'_1\,, P'_1$ arbitrari ($p_1 \leq P_1\,, p'_1 \leq P'_1$). Inoltre

$$P'_2 = p'_1 - \int_a^b L(x)\,d\,x, \qquad p'_2 \text{ arbitrario } \leq P'_2\,.$$

L'insieme E coincide con E^0 ed è formato dalle sole funzioni del tipo

$$y(x) = y(a) + p'_1(x-a) - \int_a^x (x-t)\,L(t)\,d\,t,$$

essendo $y(a)$ una costante arbitraria tale che $p_1 \leq y(a) \leq P_1$. Due funzioni qualunque di E possono essere assunte come $y_1(x)$, $y_2(x)$ nelle considerazioni del n. 14 $b\beta$, essendo x_0 un punto qualunque di $(a\,,b)$. Si ha

$$\min I'_{x_0} = \text{mass}\, I'_{x_0} = p'_1 - \int_a^{x_0} L(t)\,d\,t\,.$$

([23]) Cfr. la nota ([18]).

([24]) Abbiamo già avvertito, al n. 10, che E è certamente perfetto, se $m = n = 1$, oppure se $m = 2$, $n = 0$.

([25]) Un analogo criterio, che si pensasse di poter dedurre dalla legge di formazione, del campo $\overline{E}'$ definito al n. 10, sarebbe errato, come verrà dimostrato col seguente es. *a* n. 16.

Perciò l'insieme $\overline{E}'$ (nn. 10, 15), dedotto da E ponendo $p_0' = \text{mass}\, I'_{x_0}$, coincide con E e non contiene funzioni isolate, se $p_1 < P_1$. Se invece $p_1 = P_1$, E ed $\overline{E}'$ si riducono alla sola funzione

$$y(x) = p_1 + p_1'(x-a) - \int_a^x (x-t)\, L(t)\, dt.$$

b) $m=2$, $n=1$, $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_1' = a$, $p_1 = P_1$ (arb.), $p_1' = P_1'$ (arb.),

$$p_2 = P_2 = p_1 + p_1'(b-a) - \int_a^b (b-x)\, L(x)\, dx.$$

L'unica funzione contenuta in E è

$$y(x) = p_1 + p_1'(x-a) - \int_a^x (x-t)\, L(t)\, dt.$$

c) $m=3$, $n=0$, $x_1 = a$, $x_3 = b$, x_2 arbitrario in (a, b), P_1 e P_3 arbitrari. Inoltre

$$p_2 = \frac{P_1(b-x_2) + P_3(x_2-a)}{b-a} + \\ + \frac{(x_2-a)\int_a^b (b-x)\, L(x)\, dx - (b-a)\int_a^{x_2} (x_2-x)\, L(x)\, dx}{b-a},$$

p_1, p_3, P_2 arbitrari ($p_1 \leq P_1$, $p_3 \leq P_3$, $P_2 \geq p_2$).

L'unica funzione contenuta in E è

$$y(x) = P_1 + \left[P_3 - P_1 + \int_a^b (b-x)\, L(x)\, dx\right] \frac{x-a}{b-a} - \int_a^x (x-t)\, L(t)\, dt.$$

d) $m = n = 1$, $x_1 = x_1' = a$, $p_1 = P_1$ (arbitr.), $p_1 = P_1$ arbitr).

Fissato un punto x_0 qualunque in (a, b), appartengono ad E le due funzioni:

$$y_1(x) = p_1 + p_1(x - a) + \int_a^x (x - t) L(t)\, dt,$$

$$y_2(x) = \begin{cases} p_1 + p_1'(r - a) + \int_a^x (x - t) L(t)\, d\, t & \text{in } [a, x_0], \\ y_2(x_0) + y_2'(x_0)(x - x_0) & \text{in } [x_0, b]. \end{cases}$$

Queste due funzioni soddisfano all'ipotesi del teor. del n. 12 e s'identificano con una stessa funzione di E^0, in tutto $[a, x_0]$ (intorno sinistro di x_0). Invece esse non s'identificano in alcun intorno destro di x_0.

CAPITOLO II.

La teoria analitica

§ 1 - Valutazione della variabilità dell'integrale in forma ordinaria, alla frontiera e in corrispondenza d'ogni intervallo parziale di $[a, b]$.

17. — Cominciamo con lo studiare il modo con cui varia il nostro integrale in forma ordinaria, al variare della funzione indipendente $y(x)$ *entro il solo campo funzionale* A^0 definito al principio del n. 5. Perciò scriveremo tale integrale nella forma

$$J[\varphi] = \int_a^b f(x, \varphi, \varphi')\, d x$$

e supporremo che la funzione integranda $f(x, y, y')$ sia continua, insieme con le sue derivate parziali prime, non soltanto nel dominio di cui s'è parlato al n. 1, ma addirittura in tutto lo *strato* $a \leq x \leq b$, $-\infty < y < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$. Questa restrizione non ha in realtà nulla d'essenziale e vien qui provvisoriamente ammessa soltanto per semplicità e comodità espositiva o per evitare equivoci, e pertanto potrà esser soppressa (e di ciò avvertiremo al momento opportuno) nel seguente paragrafo (Vedi l'osservaz. 1ª al n. 22).

Invece diviene e resterà, d'ora in poi, essenziale qualche condizione restrittiva per la funzione $L(x)$: noi supporremo che essa sia *continua e mai nulla in* $[a, b]$.

18. — Se intendiamo far variare la $\varphi(x)$ e la sua derivata $\varphi'(x)$ con continuità entro A^0, possiamo proporci il problema seguente: prefissato un qualunque intervallo $[c, d]$ parziale di $[a, b]$, è possibile far variare la $\varphi(x)$ entro A^0, *mantenendola inalterata fuori di* $[c, d]$? Sappiamo, in virtù del teor. del n. 5, che ciò non è sempre possibile, onde non è lecito studiare, entro A^0, la variabilità *locale* dell'integrale in forma ordinaria, cioè la variabilità del detto integrale. quando la funzione $\varphi(x)$ (da cui l'integrale dipende) venga alterata con continuità (insieme con la sua derivata prima. in un intorno piccolo a piacere d'un punto qualunque di $[a, b]$ (cfr. n. (4)

Alla domanda ora formulata si risponde affermativamente soltanto se $[c, d]$ è abbastanza grande, tanto grande da contenere nel proprio interno *almeno due* $[P D]_\varphi$. Però, se $[c, d]$ contiene nel proprio interno *soltanto* due $[P D]_\varphi$, è al più possibile far variare la $\varphi(x)$ *soltanto unilateralmente* in $[c, d]$ (sempre mantenendola inalterata fuori di $[c, d]$), cioè è soltanto possibile, in corrispondenza d'ogni x di (c, d), far *decrescere* $\varphi(x)$, oppure è soltanto possibile *farla crescere* (n. 6, osservaz. 5ª).

Noi vogliamo studiare, in questo paragrafo, l'integrale in forma ordinaria, al variare della funzione indipendente (entro A^0) in un *intorno bilaterale* d'una generica funzione $\varphi(x)$ di A^0 e perciò supponiamo che l'intervallo (c, d) prefissato contenga esattamente *tre* $[PD]_\varphi$, siano u, h, k, $(c < u < < h < k < d)$, ma non contenga alcun punto x_i, x'_j. E precisamente, per ridurre il problema alla sua espressione più semplice, ci limitiamo a considerare la variabilità dell'integrale, supponendo che le funzioni di A^0 infinitamente prossime (insieme con le loro derivate prime) alla $\varphi(x)$ presa in esame, corrispondano anch'esse a tre soli $[PD]_\varphi$ in (c, d), siano $u + d u$, $h + d h$, $k + d k$.

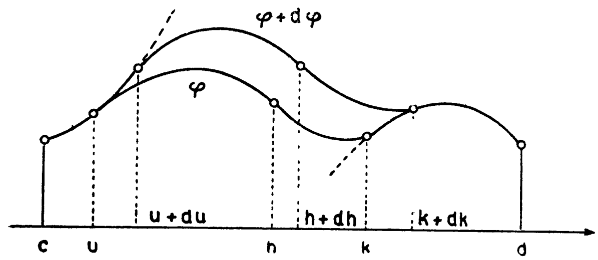

Fig 7

Supponiamo dapprima che sia $\varphi''(x) = + L(x)$ in (c, u) e quindi anche in (h, k), che sia $\varphi''(x) = - L(x)$ in (u, h) e in (k, d). Conseguentemente gli stessi segni valgono, per la derivata seconda della funzione $\varphi + d\varphi$ infinitamente prossima, rispettivamente negli intervalli $(c, u + d u)$, $(h + d h,\ k + d k)$, $(u + d u,\ h + d h)$, $(k + d k,\ d)$. La fig. 7 rappresenta i diagrammi delle due funzioni $\varphi, \varphi + d\varphi$ limitatamente al solo intervallo $[c, d]$ (fuori di tale intervallo le due funzioni, lo ripetiamo ancora, coincidono): nel passaggio dalla φ alla $\varphi + d\varphi$, le sole due « parabole » estreme, quelle uscenti dai punti $(c, \varphi(c))$, $(d, \varphi(d))$, restan fisse, le altre due subiscono uno spostamento infinitesimo. Si ha così un'immagine geometrica del tutto intuitiva e semplice del nostro problema.

Val la pena d'accennare che il titolo del presente paragrafo allude alla possibilità d'invertire il punto di vista nello studio del nostro problema, ciò che corrisponde effettivamente all'interpretazione più profonda del fatto analitico. Il problema può infatti enunciarsi in altro modo, cioè prefissando a piacere (e *comunque piccolo*) un intervallo $[c, d]$ parziale di $[a, b]$ e costruendo poi una funzione $\varphi(x)$ cui corrispondano due soli $[PD]_\varphi$ interni a $[c, d]$. Dopo di che si porrebbe la domanda: come varia l'integrale in forma ordinaria, al variare con continuità della $\varphi(x)$ in $[c, d]$? ecc.

Il nostro integrale vien dunque ad esser studiato, al variare della funzione indipendente entro una schiera *semplicemente infinita* contenuta in A^0. Infatti la dimostrazione del lemma del n. 6 ci assicura che, se si conviene per es. d'assumere la u come parametro indipendente, i punti h e k (almeno in un intorno sufficientemente ristretto della φ considerata) riescono funzioni ben determinate ed univoche della u (cfr. l'osservaz. 1ª al n. 6): anzi, nelle ipotesi fatte, esse riescono derivabili ed hanno derivate continue, come vedremo molto semplicemente.

Le espressioni analitiche della φ e della sua derivata φ' son date, in $[c, d]$, dalla seguente tabella:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi(c) + \varphi'(c)(x-c) + \int_c^x (x-t) L(t)\, dt & \text{in } [c, u], \\ \varphi(c) + \varphi'(c)(x-c) + \int_c^u (x-t) L(t) dt - \int_u^x (x-t) L(t) dt & \text{in } [u, h], \\ \varphi(c) + \varphi'(c)(x-c) + \int_c^u (x-t) L(t) dt - \\ \quad - \int_u^h (x-t) L(t) dt + \int_h^x (x-t) L(t) dt & \text{in } [h, k], \\ \varphi(d) + \varphi'(d)(x-d) - \int_d^x (x-t) L(t) dt & \text{in } [k, d], \end{cases}$$

$$\varphi'(x) = \begin{cases} \varphi'(c) + \int_c^x L(t)\, dt & \text{in } [c, u], \\ \varphi'(c) + \int_c^u L(t)\, dt - \int_u^x L(t)\, dt & \text{in } [u, h], \\ \varphi'(c) + \int_c^u L(t)\, dt - \int_u^h L(t)\, dt + \int_h^x L(t)\, dt & \text{in } [h, k], \\ \varphi'(d) - \int_d^x L(t)\, dt & \text{in } [k, d]. \end{cases}$$

Com'è naturale, nè la φ nè la φ' dipendono dalla u, nè in $[c, u]$, nè in $[k, d]$. Nei rimanenti intervalli $[u, h]$, $[h, k]$, le derivate parziali della φ e della φ' rispetto alla u, sono:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \begin{cases} 2L(u)(x-u) & \text{in } [u, h], \\ 2L(u)(x-u) - 2L(h)h'(u)(x-h) & \text{in } [h, k], \end{cases}$$

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial u} = \begin{cases} 2L(u) & \text{in } [u, h], \\ 2L(u) - 2L(h)h'(u) & \text{in } [h, k]. \end{cases}$$

L'esistenza della derivata $h'(u)$ è assicurata, al pari di quella della derivata $k'(u)$, dalle condizioni ammesse per la funzione $L(x)$. Infatti le due funzioni $h(u)$, $k(u)$ risultano definite dalla coppia di equazioni:

[9]
$$\begin{cases} 2\int_h^k x\,L(x)\,dx = \int_u^d x\,[L(x) + \varphi''(x)]\,dx, \\ 2\int_h^k L(x)\,dx = \int_u^d [L(x) + \varphi''(x)]\,dx, \end{cases}$$

analoghe alle [6] del n. 6. Eseguendo il calcolo dei due integrali:

$$\int_u^d x\,\varphi''(x)\,dx = [x\,\varphi'(x)]_u^d - \int_u^d \varphi'(x)\,dx = [x\,\varphi'(x) - \varphi(x)]_u^d =$$

$$= [d\,\varphi'(d) - \varphi(d)] - [c\,\varphi'(c) - \varphi(c)] - \int_c^u x\,L(x)\,dx,$$

$$\int_u^d \varphi''(x)\,dx = \varphi'(d) - \varphi'(u) = \varphi'(d) - \varphi'(c) - \int_c^u L(x)\,dx,$$

il sistema [9] diventa:

$$\begin{cases} 2\int\limits_h^k x\,L(x)\,dx = [d\,\varphi'(d) - \varphi(d)] - [c\,\varphi'(c) - \varphi(c)] + \\ \qquad + \int\limits_c^d x\,L(x)\,dx - 2\int\limits_c^u x\,L(x)\,dx\,, \\ 2\int\limits_h^k L(x)\,dx = \varphi'(d) - \varphi'(c) + \int\limits_c^d L(x)\,dx - 2\int\limits_c^u L(x)\,dx\,. \end{cases}$$

Di qui, applicando il teor. fondamentale delle funzioni implicite, si trova

$$h'(u) = \frac{L(u)}{L(h)}\,\frac{k-u}{k-h}\,, \qquad k'(u) = \frac{L(u)}{L(k)}\,\frac{h-u}{k-h}\,.$$

Dunque, in definitiva,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \begin{cases} 2\,L(u)\,(x-u) & \text{in } [u\,,h]\,, \\ 2\,L(u)\,\dfrac{h-u}{k-h}\,(k-x) & \text{in } [h\,,k]\,, \end{cases}$$

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial u} = \begin{cases} 2\,L(u) & \text{in } [u\,,h]\,, \\ -\,2\,L(u)\,\dfrac{h-u}{k-h} & \text{in } [h\,,k]\,. \end{cases}$$

19. — Togliendo, dall'integrale assegnato, la costante inessenziale

$$\int\limits_a^c f(x\,,\varphi\,,\varphi')\,dx + \int\limits_d^b f(x\,,\varphi\,,\varphi')\,dx\,,$$

rimane l'integrale

$$J(u) = \int\limits_c^d f(x\,,\varphi\,,\varphi')\,dx\,.$$

È dunque evidente che precisamente lo studio di questa funzione del parametro u, permette di risolvere il particolare problema proposto nel presente paragrafo. Non resta che calcolare la derivata di questa funzione, tenendo conto delle espressioni per $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial \varphi'}{\partial u}$ sopra riportate:

$$J'(u) = \int_c^d \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial \varphi'} \frac{\partial \varphi'}{\partial u} \right) d x =$$

$$= \int_u^h \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial u'} + \frac{\partial f}{\partial \varphi'} \frac{\partial \varphi'}{\partial u} \right) d x + \int_h^k \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial \varphi'} \frac{\partial \varphi'}{\partial u} \right) d x =$$

$$= 2\, L(u) \int_u^h \left[\frac{\partial f}{\partial \varphi'} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} (x - u) \right] d x -$$

$$- 2\, L(u) \frac{h - u}{k - h} \int_h^k \left[\frac{\partial f}{\partial \varphi'} - \frac{\partial f}{\partial \varphi} (k - x) \right] d x =$$

$$[10] \qquad = 2 L(u)(h - u) \left\{ \frac{\int_u^h \left[\frac{\partial f}{\partial \varphi'} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} (x - u) \right] d x}{h - u} - \frac{\int_h^k \left[\frac{\partial f}{\partial \varphi'} - \frac{\partial f}{\partial \varphi} (k - x) \right] d x}{k - h} \right\}.$$

20. — Se facciamo l'ipotesi opposta (a quella fatta al n. 18), cioè che sia $\varphi''(x) = - L(x)$ in (c, u) e quindi anche in (h, k), che sia $\varphi''(x) = + L(x)$ in (u, h) e in (k, d), è chiaro che i calcoli precedenti si ripetono identicamente: basta soltanto, in essi, sostituire $L(x)$ con $- L(x)$ e così $L(u)$, $L(h)$, $L(k)$ rispettivamente con $- L(u)$, $- L(h)$, $- L(k)$. S'arriva perciò all'espressione corrispondente alla [10]:

$$[11] \qquad J'(u) = - 2 L(u)(h - u) \left\{ \frac{\int_u^h \left[\frac{\partial f}{\partial \varphi'} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} (x - u) \right] d x}{h - u} - \frac{\int_h^k \left[\frac{\partial f}{\partial \varphi'} - \frac{\partial f}{\partial \varphi} (k - x) \right] d x}{k - h} \right\}.$$

§ 2. - Variabilità dell'integrale nel campo ristretto. Una condizione sufficiente affinchè l'estremante sia alla frontiera.

21. — Veniamo ora a studiare la variabilità dell'integrale in forma ordinaria, quando la funzione indipendente $y(x)$ descrive il campo ristretto E definito al principio del n. 8. Proponendoci di trovare le estremanti assolute dell'integrale nel campo E (estremanti la cui esistenza è assicurata dal teor. del n. 8, cfr. anche il n. 1), o almeno di trovare una condizione sufficiente affinchè tali estremanti (o l'una oppure l'altra di esse) appartengano all'insieme E^0 (definito al n. 9 c), cominciamo col dimostrare il seguente

TEOR. — *Nelle ipotesi fatte per la funzione* $\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{y}')$ *(n. 1), l'insieme numerico* U^0 *descritto dall'integrale*

$$J[\varphi] = \int_a^b f(x, \varphi, \varphi')\, dx$$

al variare della $\varphi(\mathrm{x})$ *in* E^0, *è denso nell'insieme numerico* U *descritto dall'integrale*

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y')\, dx$$

al variare della $\mathrm{y}(\mathrm{x})$ *in* E, *anzi* U *è l'involucro di* U^0 (26).

DIM. — Dopo aver osservato ovviamente che $U^0 < U$, dimostriamo anzitutto che U è *chiuso*. Indichiamo infatti con c un qualunque punto d'accumulazione di U e con $E(\varepsilon, c)$ l'insieme formato da tutte e sole le funzioni $y(x)$ di E, tali che

$$| J[y] - c | < \varepsilon$$

(essendo ε un numero positivo arbitrario). Diamo ad ε i valori $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ e consideriamo la successione d'insiemi

$$E(1, c) > E\left(\frac{1}{2}, c\right) > E\left(\frac{1}{3}, c\right) > \ldots$$

(26) Cfr. il n. 7 e il n. 9 c. Cfr anche la mia memoria citata, n. 6.

Poichè E è compatto e chiuso (del prim'ordine, v. n. 8), esiste in E almeno una funzione $y_c(x)$ d'accumulazione (del prim'ordine) per questa successione. Ma $J[y]$ è un funzionale continuo del prim'ordine (n. 1), perciò y_c appartiene a tutti gli insiemi della successione ed è $J[y_c] = c$.

Passiamo ora a dimostrare che, se $y(x)$ è una qualunque funzione di $E - E^0$ ed ε è un numero positivo arbitrariamente piccolo, è sempre possibile trovare una funzione $\varphi(x)$ di E^0, tale che

$$[11]^{\text{bis}} \qquad | J[y] - J[\varphi] | < \varepsilon .$$

Poichè l'integrale è un funzionale continuo, è possibile determinare un numero $\sigma > 0$ tale che, per ogni funzione $\varphi(x)$ di E^0 per la quale sia

$$| y(x) - \varphi(x) | < \sigma , \qquad | y'(x) - \varphi'(x) | < \sigma$$

in tutto $[a, b]$, risulti soddisfatta la limitazione $[11]^{\text{bis}}$. Ma E^0 è denso in E (n. 9 c) e ciò assicura appunto l'esistenza di tali funzioni $\varphi(x)$ in E^0, ecc.

COROLL. I. — *Gli estremi superiore ed inferiore dell'integrale* J $[\varphi]$ *al variare della funzione* φ (x) *in* E^0, *coincidono rispettivamente col massimo assoluto e col minimo assoluto dell'integrale* J [y] *al variare della funzione* y (x) *in* E.

COROLL. II. — *Se l'integrale* J $[\varphi]$ *possiede massimo assoluto oppure minimo assoluto al variare della funzione* φ (x) *in* E^0, *questi valori coincidono rispettivamente col massimo assoluto o col minimo assoluto dell'integrale* J [y], *al variare della funzione* y (x) *in* E.

22. — Scegliamo ad arbitrio in $[a, b]$ tre numeri u, h, k tali che $u < h < k$ e tali che, in $[u, k]$, non cadano punti x_i, x'_j. Consideriamo una funzione $\varphi(x)$ di A^0 (n. 5) tale che

$$[12] \qquad \varphi''(x) = \begin{cases} -L(x) & \text{in} \quad (u, h) \\ +L(x) & \text{in} \quad (h, k), \end{cases}$$

oppure tale che

$$[13] \qquad \varphi''(x) = \begin{cases} +L(x) & \text{in} \quad (u, h) \\ -L(x) & \text{in} \quad (h, k) \end{cases}$$

e inoltre i valori $\varphi(u)$, $\varphi'(u)$ siano prefissati anch'essi del tutto a piacere: poniamo, per fissar le idee,

$$\varphi(u) = p , \quad \varphi'(u) = p' .$$

L'espressione che compare tra graffe, sia nella formula [10] che nella [11] (nn. 19, 20),

$$\frac{\int\limits_u^h \left[\frac{\partial f}{\partial \varphi'} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}(x-u)\right] dx}{h-u} - \frac{\int\limits_h^k \left[\frac{\partial f}{\partial \varphi'} - \frac{\partial f}{\partial \varphi}(k-x)\right] dx}{k-h}$$

deve considerarsi, sia nel caso [12] che nel caso [13], come una funzione dei parametri appresso indicati:

$$M = M(u, p, p', h, k) \text{ nel caso } [12],$$
$$N = N(u, p, p', h, k) \text{ » » } [13].$$

Considereremo in quest'espressione, a partire dai valori iniziali prescelti

a) p e p' determinati (in funzione di u e nell'intorno del detto valore iniziale di u) dall'equazione differenziale del second'ordine

$$p''(u) = + L(u) \text{ nel caso } [12], \qquad (27)$$
$$p''(u) = - L(u) \text{ » » } [13];$$

b) h e k determinati (in funzione di u e nell'intorno del detto valore iniziale di u) dalla coppia di equazioni differenziali del prim'ordine (n. 18)

$$h'(u) = \frac{L(u)}{L(h)} \frac{k-u}{k-h}, \qquad k'(u) = \frac{L(u)}{L(k)} \frac{h-u}{k-h}.$$

Con tali convenzioni, le due espressioni sopra indicate con M ed N risultano in definitiva delle funzioni della sola variabile indipendente u (nell'intorno del detto valore iniziale di u):

$$M = M(u), \qquad N = N(u).$$

---

(27) Si abbia cioè, nell'intorno del detto valore iniziale di u,

$$p'(u + \Delta u) = p' \pm \int\limits_u^{u+\Delta u} L(x)\, dx,$$

$$p(u + \Delta u) = p + p' \Delta u \pm \int\limits_u^{u+\Delta u} (u + \Delta u - x)\, L(x)\, dx,$$

valendo i segni superiori o quelli inferiori, a seconda che si è nel caso [12] o nel caso [13].

Ebbene sussiste il seguente

TEOR FONDAMENTALE: *Condizione sufficiente affinchè l'integrale*

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y')\, dx$$

raggiunga il suo massimo assoluto [*il suo minimo assoluto*] *in* E, *in corrispondenza d'una certa funzione* φ(x) *di* E^0, *è che, per ogni scelta di valori* u, p, p′, h, k (u, h, k *tali che* a < u < h < k < b; p, p′, h, k *funzioni di* u *a mezzo del sistema d'equazioni differenziali sopra indicate*) *per i quali la* M(u) *s'annulla, questa funzione* M(u) *risulti crescente* [*decrescente*] *mentre, per ogni scelta di valori per i quali la* N(u) *s'annulla, questa funzione* N(u) *risulti decrescente* [*crescente*].

La dimostrazione che daremo di questo teorema, avrà il pregio di fornire indicazioni precise in merito all'effettiva ricerca delle estremanti $\varphi(x)$: in molti casi essa darà addirittura il *metodo per trovare tali estremanti.*

DIM. — In virtù del cor. II del n. 21, basta dimostrare che, nelle ipotesi fatte, l'integrale $J[\varphi]$ possiede valor massimo [minimo] al variare di $\varphi(x)$ in E^0. All'uopo cominciamo col considerare una generica funzione $\overline{\varphi}(x)$ di E^0 e indichiamo con $E_{\overline{\varphi}}$ l'insieme formato da tutte le funzioni $\varphi(x)$ di E^0 (o, ciò ch'è lo stesso, di A^0), che soddisfano alle condizioni (v. la defin. del n. 8):

$$[14] \qquad \begin{aligned} &\left.\begin{aligned} &\varphi(a) = \overline{\varphi}(a), \quad \varphi'(a) = \overline{\varphi}'(a), \\ &\varphi(b) = \overline{\varphi}(b), \quad \varphi'(b) = \overline{\varphi}'(b), \end{aligned}\right\} \\ &\left.\begin{aligned} &\varphi(x_i) = \overline{\varphi}(x_i), \quad \varphi'(x_i) = \overline{\varphi}'(x_i) \qquad (i = 1, 2, \dots, m) \\ &\varphi(x'_j) = \overline{\varphi}(x'_j), \quad \varphi'(x'_j) = \overline{\varphi}'(x'_j) \qquad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}\right\} \text{[28]}. \end{aligned}$$

I punti x_i, x'_j, nell'ordine in cui si susseguono da sinistra a destra, suddividono $[a, b]$ in un numero finito d'intervalli parziali: sia $[c, d]$ uno generico di questi. Relativamente a $[c, d]$ valgono considerazioni del tutto analoghe a quelle fatte al n. 6 relativamente ad $[a, b]$, in particolare vale l'osservazione analoga alla 4ª di quel n. Qui c'interessa distinguere vari casi, a seconda del *numero* ν *dei* $[\mathrm{P\,D}]_{\overline{\varphi}}$ *che cadono in* (c, d).

$\alpha_{0,1}$) Per $\nu = 0$ e per $\nu = 1$, $E_{\overline{\varphi}}$ si riduce, in $[c, d]$, all'unica funzione $\overline{\varphi}(x)$ (n. 5). Per $\nu > 1$, $E_{\overline{\varphi}}$ comprende infinite funzioni distinte da $\overline{\varphi}(x)$ in $[c,d]$.

---

[28] Il numero di queste condizioni non è inferiore al più grande dei due numeri $2m$ $2n$, e non è superiore a $2m + 2n$. Se E è definito con $n = 0$ ed $m \geq 2$ (cfr. n. 8 osservaz. 1ª), si devono intendere soppresse le condizioni dell'ultima riga.

α_3). Per $\nu = 3$, identifichiamo questi tre punti ordinatamente con u, h, k (v. il principio di questo n.), con che riconosciamo che la $\overline{\varphi}(x)$ si comporta esattamente come la $\varphi(x)$ dei nn. 17-19 (v. fig. 7) e quindi anche come la $\varphi(x)$ delle [12], oppure come la $\varphi(x)$ del n. 20 e quindi anche come la $\varphi(x)$ delle [13]. Posto

$$J(u) = \int_c^d f(x, \overline{\varphi}, \overline{\varphi}')\, dx,$$

varrà nella prima ipotesi la [10], nella seconda la [11]. Nella prima ipotesi $J'(u)$ ha dunque il segno di $M[u, \overline{\varphi}(u), \overline{\varphi}'(u), h, k]$, nella seconda ipotesi ha il segno opposto a quello di $N[u, \overline{\varphi}(u), \overline{\varphi}'(u), h, k]$. Studiamo la variabilità di $J(u)$ nella prima ipotesi (nella seconda essa si studia in modo del tutto analogo). Precisamente supponiamo che u e quindi anche $h = h(u)$, $k = k(u)$ varino in (c, d) in modo che $\varphi(x)$ vari corrispondentemente in $E_{\overline{\varphi}}$, *conservando sempre i caratteri della* φ(x) *dei nn. 17-19.* Indicati con U, V i punti di (c, d) forniti dal sistema (analogo al sistema [8] del n. 6)

$$\begin{cases} \overline{\varphi}(c) + \overline{\varphi}'(c)(d-c) + \displaystyle\int_c^d (d-x)\, L(x)\, dx - 2\int_U^V (d-x)\, L(x)\, dx = \overline{\varphi}(d) \\[2ex] \overline{\varphi}'(c) + \displaystyle\int_c^d L(x)\, dx - 2\int_U^V L(x)\, dx = \overline{\varphi}'(d), \end{cases}$$

si deve considerare $J(u)$ definita nell'intervallo $[c, U]$. Per $u = c$, la $\varphi(x)$ viene a coincidere con la funzione

$$\Phi(x) = \begin{cases} \overline{\varphi}(c) + \overline{\varphi}'(c)(x-c) - \displaystyle\int_c^x (x-t)\, L(t)\, dt & \text{in } [c, h], \\[2ex] \overline{\varphi}(c) + \overline{\varphi}'(c)(x-c) - \displaystyle\int_c^h (x-t) L(t) dt + \int_h^x (x-t)\, L(t)\, dt & \text{in } [h, k], \\[2ex] \overline{\varphi}(c) + \overline{\varphi}'(c)(x-c) - \displaystyle\int_c^h (x-t)\, L(t)\, dt + \\[2ex] \qquad + \displaystyle\int_h^k (x-t)\, L(t)\, dt - \int_k^x (x-t)\, L(t)\, dt & \text{in } [k, d]. \end{cases}$$

Per $u = U$, la $\varphi(x)$ viene a coincidere con la funzione

$$\Phi_1(x) = \begin{cases} \bar{\varphi}(c) + \bar{\varphi}'(c)(x - c) + \int_c^x (x - t) L(t) \, d t & \text{in } [c, U], \\ \bar{\varphi}(c) + \bar{\varphi}'(c)(x - c) + \int_c^U (x - t) L(t) \, d t - \int_U^x (x - t) L(t) \, d t & \text{in } [U, V], \\ \bar{\varphi}(c) + \bar{\varphi}'(c)(x - c) + \int_c^U (x - t) L(t) \, d t - & \\ \quad - \int_U^V (x - t) L(t) \, d t + \int_V^x (x - t) L(t) \, d t & \text{in } [V, d]. \end{cases}$$

In fig. 8 sono rappresentate queste funzioni: la $\Phi_1(x)$ corrisponde alla $\varphi_1(x)$ della fig. 1, la $\Phi(x)$ corrisponde alla $\varphi(x)$ della fig. 1; in essa è rap-

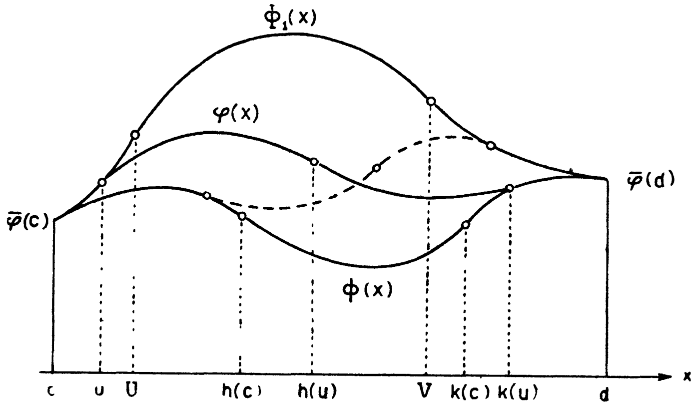

Fig. 8

presentata anche una generica $\varphi(x)$ nella prima ipotesi ([29]) (la curva tratteggiata rappresenta una generica $\varphi(x)$ nella seconda ipotesi).

Se in (c, U) è sempre $J'(u) \neq 0$ e cioè $M(u) \neq 0$, $J(u)$ è monotona e quindi massima e minima negli estremi c (funzione Φ), U (funzione Φ_1) ([30]). Se invece in un punto di (c, U) è $J'(u) = 0$ e cioè $M(u) = 0$, avremo, per

([29]) La $\bar{\varphi}(x)$ è da considerarsi una particolare $\varphi(x)$.

([30]) Questa proprietà darà occasione alla 4a osservazione seguente.

l'ipotesi ammessa nell'enunciato, $M(u)$ ivi crescente [decrescente] e cioè $J(u)$ ivi dotata di minimo assoluto [di massimo assoluto]: conseguentemente $J(u)$ raggiunge il massimo assoluto [il minimo assoluto] in uno dei (o in entrambi i) due estremi c, U. In ogni caso dunque almeno una delle due limitazioni

$$J(u) < J(U), \quad J(u) < J(c) \qquad [J(u) > J(U), \quad J(u) > J(c)]$$

dev'esser verificata in tutto (c, U) e cioè il massimo [il minimo] di $J(u)$ vien raggiunto in corrispondenza d'una funzione $\varphi(x)$ di $E_{\overline{\varphi}}$, per la quale è $\nu = 2$.

α_r) (r intero positivo qualunque > 3). Ragionando per induzione, supponiamo dimostrato quanto segue: per $\nu = r - 1$ e concedendo alla $\varphi(x)$ di variare in $E_{\overline{\varphi}}$ con la condizione restrittiva che i $[P\,D]_{\overline{\varphi}}$ che cadono in (c, d), siano in numero $\leq r - 1$, il massimo [il minimo] di $J[\varphi]$ viene raggiunto in corrispondenza d'una $\varphi(x)$ per la quale detto numero è $= 2$ (ciò è stato or ora dimostrato per $r = 4$). Ora dimostreremo che la stessa proprietà vale anche per $\nu = r$ e con ciò essa risulterà valida in generale (cioè per qualunque $\nu \geq 3$).

Fra i detti r punti che cadono in (c, d), scegliamone a piacere tre consecutivi e indichiamoli ancora con u, h, k. Indichiamo poi con c' il punto di divisione che precede immediatamente u in (c, d), oppure il punto c, nel caso che un tal punto di divisione non esista. Analogamente indichiamo con d' il punto di divisione che segue immediatamente k in (c, d), oppure il punto d, nel caso che un tal punto di divisione non esista. Per l'ipotesi $r > 3$, l'intervallo $[c', d']$ non può coincidere con $[c, d]$. Ragionando analogamente a come poc'anzi s'è ragionato nel caso α_3, e cioè mantenendo la $\varphi(x)$ identicamente coincidente con la $\overline{\varphi}(x)$ fuori di $[c', d']$ (quindi *fissa* fuori di $[c', d']$), ma facendola invece variare in (c', d'), si dimostra che $J[\varphi]$ raggiunge il massimo [il minimo] in corrispondenza d'una funzione $\varphi(x)$ di $E_{\overline{\varphi}}$, che ha due soli punti di divisione in (c', d') e quindi ha $r - 1$ punti di divisione in (c, d). Così, in virtù della proprietà sopra ammessa relativamente al caso $\nu = r - 1$, risulta appunto dimostrato quanto si voleva.

Immaginando di ripetere la dimostrazione relativamente ad ognuno degli intervalli $[c, d]$ in cui $[a, b]$ è suddiviso dai punti x_i, x'_j ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$), è intanto acquisito il seguente risultato: $J[\varphi]$ *possiede massimo* [*minimo*] *al variare di* $\varphi(\mathrm{x})$ *in* $\mathrm{E}_{\overline{\varphi}}$ *e tale massimo* [*minimo*] *viene raggiunto in corrispondenza d'una certa* $\varphi(\mathrm{x})$ *i cui* $[\mathrm{P\,D}]_{\varphi}$, *entro ciascuno degli intervalli parziali indicati con* (c, d), *sono in numero* ≤ 2.

β). A conclusione di quanto precede, rimane ora da dimostrare che $J[\varphi]$ possiede massimo [minimo], al variare di $\varphi(x)$ in una certa parte E^* di E^0, cioè nell'insieme E^* di quelle sole funzioni di E^0 i cui punti di divisione, entro ciascuno degli intervalli parziali indicati con (c, d), sono in numero ≤ 2. All'uopo basta al solito (n. 1) dimostrare che E^* *è compatto e chiuso del prim'ordine.*

La *compattezza* di E^* risulta dalla compattezza dell'insieme E che lo contiene (n. 8). Per dimostrare anche la *chiusura* di E^*, consideriamo una qualunque funzione $y(x)$ che sia d'accumulazione del prim'ordine per l'insieme E^*. Sappiamo già che $y(x)$ appartiene ad E, ma si tratta di provare che appartiene ad E^*.

Sia E_y^* l'insieme di tutte le funzioni $\varphi(x)$ di E^* che soddisfano alle condizioni:

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi(a) = y(a), & \varphi'(a) = y'(a), \\ \varphi(b) = y(b), & \varphi'(b) = y'(b), \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{lll} \varphi(x_i) = y(x_i), & \varphi'(x_i) = y'(x_i) & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ \varphi(x'_j) = y(x'_j), & \varphi'(x'_j) = y'(x'_j) & (j = 1, 2, \ldots, n) \end{array}\right\}.$$

Tali funzioni sono certamente in numero *finito*, potendosi anche precisare che, in ciascuno degli intervalli parziali $[c, d]$, *al più* due di esse sono fra loro distinte (31). Sia ε un numero positivo tanto piccolo che gli intorni (d'ordine zero) d'ampiezza ε delle singole $\varphi(x)$ di E_y^*, siano tutti esterni l'uno all'altro in corrispondenza d'ogni singolo intervallo $[c, d]$ (32). In virtù dell'osservaz. 7ª del n. 6, è possibile determinare un $\delta_{\varepsilon/2} > 0$ tale che, se $\varphi_0(x)$ è una qualunque funzione di E^* soddisfacente alle limitazioni

$$\begin{array}{ll} |\varphi_0(a) - y(a)| < \delta_{\varepsilon/2}, & |\varphi'_0(a) - y'(a)| < \delta_{\varepsilon/2}, \\ |\varphi_0(b) - y(b)| < \delta_{\varepsilon/2}, & |\varphi'_0(b) - y'(b)| < \delta_{\varepsilon/2}, \\ |\varphi_0(x_i) - y(x_i)| < \delta_{\varepsilon/2}, & |\varphi'_0(x_i) - y'(x_i)| < \delta_{\varepsilon/2}, \\ |\varphi_0(x'_j) - y(x'_j)| < \delta_{\varepsilon/2}, & |\varphi'_0(x'_j) - y'(x'_j)| < \delta_{\varepsilon/2}, \end{array}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n),$$

risulti, in tutto $[a, b]$,

$$[15] \qquad |\varphi_0(x) - \varphi(x)| < \varepsilon/2,$$

---

(31) Tutte le $\varphi(x)$ di E_y^* coincidono, in $[c, d]$, o con l'una o con l'altra delle due. Diciamo « *al più* », perchè può anche accadere che *tutte* le $\varphi(x)$ di E_y^* coincidano in un'unica funzione in $[c, d]$: e ciò accade infatti sempre e solo quando $y(x)$ coincide, in (c, d), con una $\varphi(x)$ che ivi possieda al massimo un punto di divisione (n. 5).

(32) Conseguentemente in ogni (c, d), in corrispondenza del quale due funzioni $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ di E_y^* non coincidano, dovrà esistere almeno un punto x (e quindi, per ben note proprietà elementari delle funzioni continue, anche tutto un intervallo parziale) ove risulti

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| > \varepsilon.$$

essendo $\varphi(x)$ una certa ben determinata funzione di E_y^*. Fra tali funzioni $\varphi_0(x)$, ve ne sono certamente di quelle per cui risulta

[16] $$|\varphi_0(x) - y(x)| < \varepsilon/_2 \qquad \text{in tutto } [a\,.\,b].$$

Dalle [15], [16] risulta anche la limitazione

$$|\varphi(x) - y(x)| < \varepsilon \qquad \text{in tutto } [a\,,b].$$

Ma ε è arbitrario, dunque $y(x) = \varphi(x)$ in tutto $[a\,,b]$ e cioè $y(x)$ appartiene ad E_y^* e quindi ad E^* c. d. d.

Il teor. fondamentale è così completamente dimostrato.

OSSERVAZIONI. — 1ª) Abbiamo mantenuta fin qui (a partire dal n. 17) l'ipotesi che la $f(x\,,y\,,y')$ fosse continua, insieme con le sue derivate parziali prime, in tutto lo strato:

$$a \leq x \leq b\,, \quad -\infty < y < +\infty\,, \quad -\infty < y' < +\infty\,.$$

Il lettore può però convincersi, ripercorrendo l'intero capitolo, che tutti i teoremi (in particolare il teor. fondamentale) sussistono nei loro enunciati (senza alcun ritocco), anche se, più generalmente, detta ipotesi è soddisfatta in un qualunque dominio tridimensionale del tipo indicato al n. 1. Soltanto le dimostrazioni variano, per alcune complicazioni formali e del tutto inessenziali sul cui esame non crediamo di doverci trattenere.

2ª) La dimostrazione data fornisce in molti casi (come già s'è avvertito), un metodo completo per l'*effettiva determinazione* del massimo [del minimo] dell'integrale considerato: per es. quando $m = n$, i punti x_i coincidono coi punti x_j', è $a = x_1$, $b = x_m$ e sussistono le m identità

$$p_i = P_i\,, \quad p_i' = P_i' \qquad (i = 1\,,2\,,\ldots.\,m).$$

Le funzioni di E^* che soddisfano alle condizioni definienti E, cioè

$$\varphi(x_i) = p_i\,, \quad \varphi'(x_i) = p_i' \qquad (i = 1\,,2\,,\ldots\,,m)\,,$$

sono, in questo caso, in numero *finito* [33]: perciò $J[\varphi]$ possiede massimo [minimo] in E^* e tale massimo [minimo] può essere effettivamente trovato con un numero *finito* di tentativi (precisamente tanti tentativi quante sono

[33] Cfr. la nota [31].

le funzioni di E^*) [34]. Altri esempi del genere si possono facilmente trovare, nei quali la dimostrazione precedente si semplifica, potendosi senz'altro sopprimere tutta l'ultima parte β.

3ª). Il risultato parziale rilevato alla fine del comma α_r) nella precedente dimostrazione, indica chiaramente una possibile generalizzazione del teor. fondamentale. S'osservi infatti che, nei ragionamenti esposti in $\alpha_{0,1}$, $\alpha_3, \ldots, \alpha_r, \ldots$, non s'è in realtà fatto uso della condizione enunciata, se non in quanto *i punti indicati con* u, h, k *vengon scelti entro ciascuno degli intervalli parziali* $[c, d]$. Nulla vieta poi di ragionare su un subaggregato di $E_{\overline{\varphi}}$ (allo stesso modo di come s'era ragionato su $E_{\overline{\varphi}}$), precisamente su quel subaggregato che s'ottiene aggiungendo alla [14] altre condizioni (sempre però in numero finito) dello stesso tipo:

$$\varphi(\xi_k) = \overline{\varphi}(\xi_k), \quad \varphi'(\xi_k) = \overline{\varphi}'(\xi_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

($\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k \ldots$ punti ulteriormente scelti, a piacere, in $[a, b]$). Tutta la dimostrazione si ripete identicamente, ove s'assumano gli intervalli $[c, d$ come quelli in cui $[a, b]$ vien suddiviso dai punti x_i, x_j', ξ_k (nell'ordine in cui tali punti si susseguono da sinistra a destra). E poichè questi punti si posson scegliere vicini l'uno all'altro quanto si vuole, ne risulta che, per la tesi del teor. fondamentale è sufficiente la condizione enunciata, *nell'ipotesi meno restrittiva che i punti* u, h, k *siano abbastanza vicini l'uno all'altro.*

Per tutta chiarezza, diamo integralmente l'enunciato del *teor. fondamentale generalizzato*, in base all'osservazione ora fatta:

condizione sufficiente affinchè l'integrale

$$\int_a^b f(x, y, y')\, dx$$

raggiunga il suo massimo assoluto [*il suo minimo assoluto*] *in* E, *in corrispondenza d'una certa funzione* φ(x) *di* E^0, *è l'esistenza d'un numero* $\delta > 0$ *tale che, per ogni scelta di valori* u, p, p', h, k (u, h, k *tali che* a $<$ u $<$

---

[34] In realtà, essendo

$$\int_b^a f(x, y, y')\, dx = \sum_{[c,d]} \int_c^d f(x, yy')\ l\ c$$

la sommatoria intendendosi estesa a tutti gli intervalli $[c, d]$ in cui $[a, b]$ è suddivisa dai punti x_i), si riconosce subito che il caso m generico non differisce essenzialmente dal caso particolare $m = 2$.

$< h < k < b$; $k - u < \delta$; p, p′, h, k *funzioni di* u *a mezzo del sistema d'equazioni differenziali indicate in* a), b)) *per i quali la* M(u) *s'annulla, questa funzione* M(u) *risulti crescente* [*decrescente*] *mentre, per ogni scelta di valori per i quali la* N(u) *s'annulla, questa funzione* N(u) *risulti decrescente* [*crescente*].

4ª). Supponiamo che, per ogni scelta di valori u, p, p', h, k (con le condizioni indicate nell'enunciato del teor. fondamentale o, eventualmente, con quelle meno restrittive indicate nell'osservaz. precedente), *le funzioni* M(u), N(u) *non s'annullino mai*. Riprendendo allora il ragionamento precedente (e rilevando particolarmente il punto indicato con la nota ([30])), si riconosce che $J'(u)$ si mantiene sempre $\neq 0$ e quindi che *l'integrale* J[y] *raggiunge tanto il suo massimo quanto il suo minimo in* E, *in corrispondenza di funzioni* φ(x) *di* E^0. A questo proposito, si potrebbe credere di dover distinguere partitamente quattro casi possibili, a seconda del segno che ciascuna delle due funzioni $M(u)$, $N(u)$ conserva in tutto $[a, b]$. Ma facilmente si riconosce che due soli casi particolari sono possibili, in quanto *$M(u)$ ed $N(u)$ non possono conservarsi di segni opposti* in tutto $[a, b]$, anzi neppure in tutto uno stesso intervallo $[c, d]$, parziale di $[a, b]$ e comunque piccolo. Per convincersene, basta ispezionare la fig. 8: se fosse sempre $M(u) > 0$, $N(u) < 0$ in un certo intervallo parziale, si avrebbe

$J[\Phi_1] > J[\Phi]$ raggionando nella 1ª ipotesi,

$J[\Phi_1] < J[\Phi]$ » » 2ª »

ciò ch'è contradittorio. Analoga contradizione s'avrebbe, se fosse sempre $M(u) < 0$, $N(u) > 0$ in $[c, d]$. I due soli casi possibili sono dunque: 1°) $M(u)$ ed $N(u)$ entrambe sempre positive in $[c, d]$, ed allora è $J[\Phi_1] > J[\Phi]$; oppure 2°) sempre negative in $[c, d]$, ed allora è $J[\Phi] > J[\Phi_1]$.

5ª) Nello stesso ordine d'idee dell'osservazione precedente, è interessante analizzare il comportamento dell' integrale $J[y]$, quando *una sola delle funzioni* M(u), N(u) *mantenga segno costante in uno stesso intervallo parziale* [c, d], mentre l'altra si comporti in uno dei modi indicati nell'enunciato. Qui effettivamente sono da distinguersi tutti i casi possibili

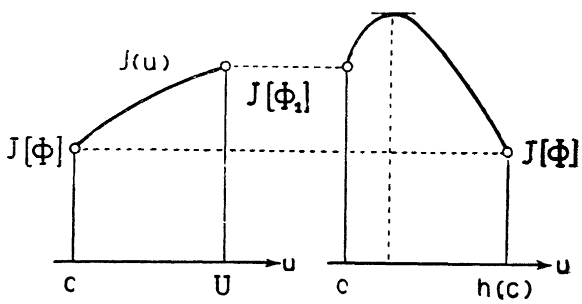

Fig 9

(in numero di 8), a seconda che la funzione che mantiecostane segno nte in $[c, d]$, sia la $M(u)$ o la $N(u)$, e a seconda che rispettivamente la $N(u)$ o la $M(u)$

risulti crescente o decrescente, in ogni punto di $[c, d]$ ov'essa s'annulla. Le conclusioni cui si perviene sono riportate nelle due seguenti tabelle d'evi-

		Comportamento di $N(u)$ in ogni punto di $[c, d]$ ove $N(u) = 0$	
		crescente	decrescente
Segno di $M(u)$ supposto costante in $[c, d]$	$+$	$J[\Phi]$ è il min. di $J[y]$ in $[c, d]$	$J[\Phi_1]$ è il mass. di $J[y]$ in $[c . d]$
	$-$	$J[\Phi_1]$ è il min. di $J[y]$ in $[c, d]$	$J[\Phi]$ è il mass. di $J[y]$ in $[c, d]$

		Comportamento di $M(u)$ in ogni punto di $[c, d]$ ove $M(u) = 0$	
		crescente	decrescente
Segno di $N(u)$ supposto costante in $[c, d]$	$+$	$J[\Phi_1]$ è il mass. di $J[y]$ in $[c, d]$	$J[\Phi]$ è il min. di $J[y]$ in $[c, d]$
	$-$	$J[\Phi]$ è il mass. di $J[y]$ in $[c . d]$	$J[\Phi_1]$ è il min. di $J[y]$ in $[c, d]$

dente interpretazione. Per tutta chiarezza, s'è anche riportata in fig. 9 l'interpretazione geometrica del primo degli 8 casi (cioè del caso che $M(u)$ sia sempre positiva in $[c, d]$ ed $N(u)$ crescente in ogni punto di (c, d) in cui s'annulla): sono ivi conservate le notazioni della fig. 8. Lasciamo al lettore la cura d'interpretare graficamente, in modo del tutto analogo, ciascuno dei rimanenti 7 casi [35] [36].

6ª) Supponiamo ora che siano soddisfatte tanto le condizioni dell'osservaz. 2ª (in virtù delle quali le funzioni di E^* sono in numero finito), quanto le condizioni dell'osservazione 3ª relativamente ad ogni intervallo parziale $[c, d]$ contiguo al gruppo di punti x_i (cioè che le due funzioni $M(u)$ $N(u)$ si mantengano sempre entrambe positive o sempre entrambe negative in ciascun intervallo $[c, d]$). Nella ricerca delle estremanti, ci si potranno allora risparmiare i tentativi di cui s'è detto all'osservazione 2ª. In altre parole, *non sarà necessario l'effettivo calcolo dell'integrale $J[\varphi]$, relativamente ad alcuna funzione di* E* *e ad alcuno degli intervalli parziali* $[c, d]$. Infatti le conclusioni dell'osservaz. 5ª permetteranno di decidere senz'altro quale di queste funzioni rende massimo [minimo] l'integrale, separatamente entro ciascuno dei detti intervalli parziali: sarà possibile quindi costruire direttamente, anche in tutto $[a, b]$, tanto una funzione massimante quanto una funzione minimante. [37]

---

(35) In fig. 9 *a* è rappresentata graficamente la funzione $J(u)$, corrispondente alla prima delle ipotesi ammesse (richiamata dalle equazioni [12]): per essa è $J(c) = J[\Phi]$, $J(U) = J[\Phi_1]$. In fig 9 *b* è rappresentata la funzione $J(u)$, corrispondente alla seconda ipotesi (richiamata dalle [13]): per essa è invece $J(c) = J[\Phi_1]$, $J(h(c)) = J[\Phi]$.

(36) Per tutta chiarezza, crediamo utile di richiamare l'attenzione del lettore sul fatto che ciascuna delle due funzioni $M(u)$, $N(u)$, quando siano prefissati (del resto in modo qualunque) i valori iniziali h, k in $[c, d]$ e di p, p' nel senso sopra indicato (alle lettere a, b), non può annullarsi più d'una volta sotto una delle condizioni dell'enunciato, cioè d'esser sempre crescente (o sempre decrescente) in un punto in cui s'annulli. Il fatto è dimostrato dalla precedente discussione, che esaurisce tutti i casi possibili Naturalmente ciò non implica che le $M(u)$, $N(u)$ non possano annullarsi anche più volte, quando si considerino h, k (entro $[c, d]$) ed anche p, p' come indipendenti da u, talchè le dette funzioni M, N risultino in realta dipendenti da tutte le 5 variabili u, p, p', h, k (come s'affermò originariamente, subito prima delle convenzioni *a*), *b*)).

(37) Mutatis mutandis, analoghe considerazioni scaturiscono dall'associazione delle condizioni dell'osservaz. 2ª con quelle dell'osservaz. 5ª.

CAPITOLO III.

Alcune applicazioni.

23. — Al solo scopo di dare alcuni esempi atti ad orientare sull'effettiva portata pratica della precedente teoria, studieremo in questo capitolo gli integrali del tipo

$$\int_a^b G(y')\, dx\,,$$

nel quale rientrano, oltre all'integrale che esprime la lunghezza d'arco, molti altri integrali ben noti dalle opere d'illustri autori, per es. gli integrali

$$\int_a^b y'^2\, dx\,, \int_a^b y'^4\, dx\,, \int_a^b y'^2 (1 + y')^2\, dx\,, \int_a^b (y'^2 + y'^3)\, dx\,, \text{ ecc.}$$

Otterremo dei risultati che, in certo modo, si possono considerare complementari di noti teoremi classici relativi ai cosidetti *problemi regolari (deboli)*. [38]

§ 1. Gli integrali $\int_a^b G(y')\, dx$ in un campo di funzioni y a derivate prime equiuniformemente lipschitziane.

24. Supporremo la funzione integranda $G(y')$ dotata non soltanto di derivata prima, ma anche (quasi ovunque) di *derivata seconda* e che *tale derivata non cambi mai di segno* [39] *al variare della* y' (almeno entro i limiti consentiti dalla definizione del campo funzionale E).

---

[38] Cfr. M. PICONE, loc. cit. pp. 409, 459 e segg.

[39] Pur non annullandosi identicamente in alcun intervallo di variabilità (sia pur piccolo) della y'.

TEOR. — *In queste ipotesi, secondochè* $G''(y')$ *si mantiene positiva o negativa al variare della* y', *l'integrale proposto raggiunge il proprio massimo assoluto o il proprio minimo assoluto in* E, *in corrispondenza d'una funzione* $y = \varphi(x)$ *di* E^0.

DIM. — La funzione $L(x)$ si riduce a una costante $L > 0$ e perciò le funzioni $\varphi(x)$ di E^0 sono rappresentate da archi di parabole tutte fra loro uguali, volgenti la concavità verso l'alto, relativamente agli intervalli ove $\varphi''(x) = +L$, verso il basso, relativamente agli intervalli ove $\varphi''(x) = -L$. Le prime parabole sono ottenute per traslazione dell'unica parabola $y = \frac{1}{2} L x^2$, le altre per traslazione dell'unica parabola $y = -\frac{1}{2} L x^2$.

Sia $[c, d]$ un qualunque intervallo contiguo al gruppo di punti $\{x_i, x'_j$ (n. 8). Per una qualunque scelta di valori u, h, k (in (c, d)), p, p', nel senso precisato al principio del n. 22, si riconosce che le due parabole d'equazione $y = \varphi(x)$, l'una relativa all'intervallo $[u, h]$, l'altra all'intervallo $[h, k]$, sono simmetriche rispetto al punto di coordinate $[h, \varphi(h)]$. Ne segue che anche la curva d'equazione

$$[17] \qquad Y = \int_u^x G'(\varphi')\,dx$$

è simmetrica rispetto al punto di coordinate

$$\left[h, \int_u^h G'(\varphi')\,dx\right].$$

Se dunque osserviamo che l'espressione di $M(u)$ o di $N(u)$ (rispettivamente nei due casi [12] o [13] (n. 22)) si riduce ora a

$$\frac{\int_u^h G'(\varphi')\,dx}{h - u} - \frac{\int_h^k G'(\varphi')\,dx}{k - h},$$

riconosciamo subito che il suo annullarsi significa semplicemente che i rapporti incrementali della funzione [17], relativamente ai due intervalli $[u, h]$, $[h, k]$, sono uguali. D'altra parte la derivata seconda $Y'' = G''(\varphi')\varphi''$ della [17] assume valori di segni opposti nei due intervalli $[u, h]$, $[h, k]$, non cambiando però mai di segno entro ciascuno di tali intervalli. Ne segue $h - u = k - h$ e perciò anche $h'(u) = 2$, $k'(u) = 1$ (n. 22, *b*).

Per fissar le idee, poniamoci nel caso [12] (Il caso [13] si discute in modo del tutto analogo). Diamo ad u un generico incremento infinitesimo Δu, a partire da un supposto valore u per il quale sia $M(u) = 0$. Poniamo $u_1 = u + \Delta u$, $u' = u - \Delta u$, $h_1 = h(u_1)$, $k_1 = k(u_1)$, $k' = 2k - k_1$ e consideriamo la funzione $\varphi_1(x)$ definita, nell'intervallo $[u_1, k_1]$, come segue:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(u) + \varphi'(u)(x-u) + \dfrac{1}{2} L(x-u)^2 - L(x-u_1)^2 & \text{in } [u_1, h_1] \\ \varphi(u) + \varphi'(u)(x-u) + \dfrac{1}{2} L(x-u)^2 - L(x-u_1)^2 + \\ \qquad + L(x-h_1)^2 & \text{in } [h_1, k_1]. \end{cases}$$

Si trova $\varphi_1'(u_1) = \varphi'(u')$, $\varphi_1'(k_1) = \varphi'(k')$ [40] e perciò, tenendo conto che

$$h_1 = h(u) + (2 + \varepsilon_\Delta)\Delta u \ , \quad k_1 = k(u) + (1 + \eta_\Delta)\Delta u \ ,$$

---

[40] S'è qui assunto $\varphi(x) = \varphi(u) + \varphi'(u)(x-u) - \dfrac{1}{2} L(x-u)^2$ anche a sinistra di u, e $\varphi(x) = \varphi(k) + \varphi'(k)(x-k) + \dfrac{1}{2} L(x-k)^2$ anche a destra di k.

[41] Per $\Delta u > 0$, si trova:

$$\int_{u_1}^{h_1} G'[\varphi_1'(x)]\,dx = \int_{u_1}^{h_1} G'[\varphi'(x - 2\Delta u)]\,dx = \int_{u'}^{h_1-2\Delta u} G'[\varphi'(x)]\,dx =$$

$$= \int_{u'}^{h+\varepsilon_\Delta \Delta u} G'[\varphi'(x)]\,dx = \int_{u'}^{h} G'[\varphi'(x)]\,dx + \int_{h}^{h+\varepsilon_\Delta \Delta u} G'[\varphi'(x)]\,dx =$$

$$= \int_{u'}^{h} G'[\varphi'(x)]\,dx + H \cdot \varepsilon_\Delta \Delta u \, .$$

essendo H un valor medio di G'. Analogo risultato per $\Delta u < 0$. Segue:

$$\frac{\displaystyle\int_{u_1}^{h_1} G'(\varphi_1')\,dx}{h_1 - u_1} = \frac{\displaystyle\int_{u'}^{h} G'[\varphi'(x)]\,dx + H \cdot \varepsilon_\Delta \Delta u}{(h-u') + \varepsilon_\Delta \Delta u} =$$

$$= \frac{\displaystyle\int_{u'}^{h} G'(\varphi')\,dx}{h - u'} + \frac{(h-u')H - \displaystyle\int_{u'}^{h} G'(\varphi')\,dx}{(h-u')(h-u'+\varepsilon_\Delta \Delta u)} \varepsilon_\Delta \Delta u \, .$$

Analogo calcolo relativamente all'intervallo $[h_1, k_1]$.

ove ε_Δ ed η_Δ sono due infinitesimi con Δu, risulta

[18] $$M(u_1) = \frac{\int_{u_1}^{h_1} G'(\varphi_1')\,dx}{h_1 - u_1} - \frac{\int_{h_1}^{k_1} G'(\varphi_1')\,dx}{k_1 - h_1}$$

$$= \frac{\int_{u'}^{h} G'(\varphi')\,dx}{h - u'} - \frac{\int_{h}^{k'} G'(\varphi')\,dx}{k' - h} + \omega_\Delta \Delta u,$$

ove anche ω_Δ è un infinitesimo con Δu (41). La differenza dei due rapporti incrementali scritti all'ultimo membro della [18] è infinitesima del prim'ordine rispetto a Δu e perciò determina, per $\Delta u \to 0$, il segno di $M(u_1)$. Detta differenza è positiva, se G'' è positiva e $\Delta u > 0$ oppure se G'' è negativa e $\Delta u < 0$, è invece negativa, se G'' è negativa e $\Delta u > 0$ oppure se G'' è positiva e $\Delta u < 0$ (42). Dunque, se G'' è positiva, $M(u)$ risulta crescente in u, se invece G'' è negativa, $M(u)$ risulta decrescente in u. La proposizione enunciata è ridotta così ad un corollario del teor. fondamentale del n. 22 (43).

---

(42) Infatti è

$$M(u_1) = \left\{\frac{\int_{u'}^{h} G'(\varphi')\,dx}{h - u'} - \frac{\int_{u}^{h} G'(\varphi')\,dx}{h - u}\right\} + \left\{\frac{\int_{u}^{h} G'(\varphi')\,dx}{h - u} - \frac{\int_{h}^{k'} G'(\varphi')\,dx}{k' - h}\right\} + \omega_\Delta \Delta u =$$

$$= \left\{\frac{\int_{u'}^{h} G'(\varphi')\,dx}{h - u'} - \frac{\int_{u}^{h} G'(\varphi')\,dx}{h - u}\right\} + \left\{\frac{\int_{k}^{h} G'(\varphi')\,dx}{k - h} - \frac{\int_{h}^{k'} G'(\varphi')\,dx}{k' - h}\right\} + \omega_\Delta \Delta u.$$

Le differenze scritte nelle due ultime graffe hanno lo stesso segno e sono entrambe infinitesime del prim'ordine rispetto a Δu.

(43) A proposito dell'effettiva possibilità di *costruire* la massimante assoluta [la minimante assoluta], si rimanda all'osservaz. 2ª del n. 22.

(44) Per. es. a queste condizioni soddisfano sia l'integrando $G(y') = \sqrt{1 + y'^2}$ (che interviene nell'espressione della lunghezza d'arco), sia i due primi integrandi esemplificati al n. 23. Per il terzo integrando, trovandosi $G''(y') = 2(1 + 6y' + 6y'^2)$, occorrerà che la definizione del campo E (n. 8) imponga alla y' di mantenersi sempre nell'intervallo $\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$, o sempre $> -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$, o sempre $> -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$. Per il quarto integrando, trovandosi $G''(y') = 2(1 + 3y')$, si dovrà avere, in E, sempre $y' < -\frac{1}{3}$, oppure sempre $y' > -\frac{1}{3}$, ecc.

§ 2. - Altre limitazioni del campo funzionale per gli integrali $\int_a^b G(y')\,dx$.

25. — Ci porremo ora in condizioni essenzialmente diverse dalle precedenti.

La funzione $L(x)$ sia continua e sempre positiva in $[a, b]$. La funzione integranda $G(y')$ sia dotata di derivata seconda $G''(y')$ continua e di segno costante (mai nulla).

Inoltre sia soddisfatta *almeno una* delle seguenti condizioni:

1ª) $G''(y')$ lipschitziana;

2ª) $G''(y')$ sempre decrescente se positiva, sempre crescente se negativa (44).

In queste ipotesi vale ancora la tesi precedente (n. 24).

DIM. Intercaliamo fra i punti x_i, x'_j (n. 8) altri punti ξ_k in numero finito, in modo che ciascuno degli intervalli $[c, d]$ contigui al gruppo $\{x_i, x'_j, \xi_k\}$ abbia ampiezza minore d'un certo numero $\delta > 0$ sufficientemente piccolo (e che determineremo a posteriori) (cfr. l'osservaz. 3ª del n. 22).

Nel generico intervallo (c, d) scegliamo arbitrariamente i tre soliti punti u, h, k e due valori p, p', nel senso precisato al principio del n. 22. Anche qui consideriamo la funzione

$$Y(x) = \int_u^x G'(\varphi')\,dx,$$

per la quale è

$$Y'(x) = G'(\varphi'),\quad Y''(x) = \begin{cases} \mp G''(\varphi')\,L(x) & \text{in } (u, h), \\ \pm G''(\varphi')\,L(x) & \text{in } (h, k), \end{cases}$$

volendo i segni superiori o quelli inferiori, secondochè ci si pone nel caso [12] o nel caso [13].

Indicando con

$$Y''_-(h) = -\,G''[\varphi'(h)]\,L(h),\qquad Y''_+(h) = +\,G''[\varphi'(h)]\,L(h)$$

rispettivamente la derivata seconda a sinistra e quella a destra, della $Y(x)$ nel punto h, abbiamo:

$$Y(u) = Y(h) - Y'(h)(h-u) + \frac{1}{2}[Y''_-(h) + \alpha'](h-u)^2,$$

$$Y(k) = Y(h) + Y'(h)(k-h) + \frac{1}{2}[Y''_+(h) + \alpha''](k-h)^2.\ (45)$$

---

(45) Con lettere greche prive d'indice rappresenteremo, d'ora innanzi, opportune quantità infinitesime con δ.

Per fissar le idee, poniamoci nel caso [12] (Il caso [13] si discute in modo analogo). Per $G''(y')$ positiva, la curva rappresentativa della $Y(x)$ volge la concavità verso il basso in (u, h), verso l'alto in (h, k); l'opposto accade, se $G''(y')$ è negativa. La condizione

$$M(u) = \frac{\int_u^h G'(\varphi')\,dx}{h-u} - \frac{\int_h^k G'(\varphi')\,dx}{k-h} = 0$$

significa

$$\frac{Y(h) - Y(u)}{h-u} = \frac{Y(k) - Y(h)}{k-h}$$

ed ha quindi per conseguenza

$$-[Y''_-(h) + \alpha'](h-u) = [Y''_+(h) + \alpha''](k-h),$$

da cui

$$\frac{h-u}{k-h} = \frac{G''[\varphi'(h)]\,L(h) + \alpha''}{G''[\varphi'(h)]\,L(h) - \alpha'} = 1 + \beta, \frac{k-u}{k-h} = 2 + \beta$$

e quindi (n. 22, *b*)

$$h'(u) = 2 + \gamma' \quad , \quad k'(u) = 1 + \gamma''.$$

Diamo ad u un generico incremento infinitesimo Δu, poniamo $u_1 = u + \Delta u$, $h_1 = h(u_1)$, $k_1 = k(u_1)$ e consideriamo la funzione

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(u) + \varphi'(u)(x-u) + \int_u^{u_1}(x-t)\,L(t)\,dt - \int_{u_1}^{x}(x-t)\,L(t)\,dt \text{ in } [u_1, h_1], \\ \varphi(u) + \varphi'(u)(x-u) + \int_u^{u_1}(x-t)\,L(t)\,dt - \\ \qquad - \int_{u_1}^{h_1}(x-t)\,L(t)\,dt + \int_{h_1}^{x}(x-t)\,L(t)\,dt \qquad \text{in } [h_1, k_1]. \end{cases}$$

Consideriamo *l'intervallo* $[u, h]$ e definiamo, in tutto $[c, d]$, le due funzioni:

$$\bar{\varphi}(x) = \varphi(u) + \varphi'(u)(x-u) - \int_u^x (x-t)\,L(t)\,dt,$$

$$\bar{\varphi}_1(x) = \varphi_1(u_1) + \varphi_1'(u_1)(x-u_1) - \int_{u_1}^x (x-t)\,L(t)\,dt.$$

La $\overline{\varphi}(x)$ coincide con la $\varphi(x)$ in tutto $[u\,,\,h]$, la $\overline{\varphi}_1(x)$ coincide invece con la $\varphi_1(x)$ in tutto $[u_1\,,\,h_1]$. Consideriamo poi anche, in tutto $[c\,,\,d]$, le due funzioni:

$$\overline{Y}(x)=\int\limits_{u}^{x} G[\overline{\varphi}'(x)]\,d\,x\,,\qquad \overline{Y}_1(x)=\int\limits_{u_1}^{x} G[\overline{\varphi}'_1(x)]\,d\,x\,,$$

la prima delle quali coincide, in tutto $[u\,,\,h]$, con la $Y(x)$, la seconda, in tutto $[u_1\,,\,h_1]$, con la $Y_1(x)=\int\limits_{u_1}^{x} G[\varphi'_1(x)]\,d\,x$.

Poichè è $\varphi'(u)\lesseqgtr\varphi'_1(u_1)$ secondochè $\Delta\,u\gtreqless 0$, si riconosce subito che è anche $\overline{\varphi}'(x)\lesseqgtr\overline{\varphi}'_1(x)$ in tutto $[c\,,\,d]$, rispettivamente nei due casi.

Sia u' il punto (unico e ben determinato) dell'intorno di u, nel quale risulta $\overline{\varphi}'(u')=\varphi'_1(u_1)$. È immediato che la differenza $\Delta'\,u=u-u'$ è infinitesima con $\Delta\,u$ ed è anzi tale che

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta'\,u}{\Delta\,u}=1.$$

Dopo ciò abbiamo:

$$Y_1(h_1)=Y_1(u_1)+Y'_1(u_1)(h_1-u_1)+\int\limits_{u_1}^{h_1}(h_1-t)\,Y''_1(t)\,d\,t\,,$$

$$\frac{\int\limits_{u_1}^{h_1} G'(\varphi'_1)\,d\,x}{h_1-u_1}=\frac{Y_1(h_1)-Y_1(u_1)}{h_1-u_1}=Y'_1(u_1)+\frac{\int\limits_{u_1}^{h_1}(h_1-t)\,Y''_1(t)\,d\,t}{h_1-u_1}$$

e perciò, tenendo presente che

$$Y'_1(u_1)=\overline{Y}'_1(u_1)=G'[\varphi'_1(u_1)]=G'[\overline{\varphi}'(u')]=\overline{Y}'(u'),$$

anche

$$[19]\qquad \frac{\overline{Y}_1(h_1)-\overline{Y}_1(u_1)}{h_1-u_1}-\frac{\overline{Y}(h)-\overline{Y}(u')}{h-u'}=\frac{\int\limits_{u_1}^{h_1}(h_1-t)\,\overline{Y}''_1(t)\,d\,t}{h_1-u_1}-\frac{\int\limits_{u'}^{h}(h-t)\,\overline{Y}''(t)\,d\,t}{h-u'}\,,$$

$$\int\limits_{u_1}^{h_1}(h_1-t)\,\overline{Y}''_1(t)\,d\,t=\int\limits_{u'}^{h}(h-t)\,\overline{Y}''_1(t)\,d\,t+\int\limits_{h}^{h_1}(h_1-t)\,\overline{Y}''_1(t)\,d\,t\,+$$

$$+\int\limits_{u'}^{h}(h_1-h)\,\overline{Y}''_1(t)\,d\,t+\int\limits_{u_1}^{u'}(h_1-t)\,\overline{Y}''_1(t)\,d\,t=$$

[20]

$$= \int_{u'}^{h} (h - t)\, \overline{Y}_1''(t)\, d\,t + \int_{h}^{h_1} (h_1 - t)\, \overline{Y}_1''(t)\, d\,t +$$

$$+ \int_{u'}^{u_1} (t - h)\, \overline{Y}_1(t)\, d\,t + \int_{u_1}^{h} (h_1 - h)\, \overline{Y}_1''(t)\, d\,t.$$

Si trova facilmente: (46)

$$h_1 - u_1 = (h - u') + (\gamma' + \varepsilon_\Delta)\, \Delta\, u,$$

$$\int_{h}^{h_1} (h_1 - t)\, \overline{Y}_1''(t)\, d\,t = H\, \Delta\, u^2 ,$$

essendo H una certa funzione limitata di $\Delta\, u$, inoltre

$$\int_{u'}^{u_1} (t - h)\, \overline{Y}_1''(t)\, d\,t = - K\, [(h - u)(2 + \eta_\Delta)\, \Delta\, u + \eta_\Delta\, \Delta\, u^2],$$

$$\int_{u_1}^{h} (h_1 - h)\, \overline{Y}_1''(t)\, d\,t = (h_1 - h)\, [\overline{Y}_1'(h) - \overline{Y}_1'(u_1)] = K_1 (h - u - \Delta u)(2 + \gamma' + \zeta_\Delta) \Delta u,$$

essendo K e K_1 opportuni valori medi di $\overline{Y}_1''(x)$, rispettivamente in (u', u_1) e in (u_1, h). Dunque

$$\int_{u'}^{u_1} (t - h)\, \overline{Y}_1''(t)\, d\,t + \int_{u_1}^{h} (h_1 - h)\, \overline{Y}_1''(t)\, d\,t = (K_1 - K)(h - u)\, 2\, \Delta\, u +$$

$$+ \vartheta_\Delta\, (h - u)\, \Delta\, u + \lambda\, (h - u)\, \Delta\, u + P\, \Delta\, u^2 + \mu_\Delta\, \Delta\, u^2 .$$

con P funzione limitata. Osserviamo che, per $\Delta\, u \to 0$, la differenza $K_1 - K$ tende a un valore determinato e finito che, per $\delta \to 0$, è poi ancora infinitesimo (47). Conglobando dunque i due termini $(K_1 - K)(h - u)\, 2\, \Delta u + \lambda\, (h - u) \Delta u$

---

(46) Avvertiamo che, con lettere greche dotate dell'indice Δ, indicheremo d'ora innanzi (come del resto già s'è fatto al n. 24) opportune quantità infinitesime con $\Delta\, u$.

(47) Precisamente:

$$\lim_{\Delta u \to 0} (K_1 - K) = \frac{\overline{Y}_1'(h) - \overline{Y}_1'(u)}{h - u} - \overline{Y}_1''(u) .$$

in un unico termine del tipo $\nu(h-u)\Delta u$, così anche i due termini $H\Delta u^2 + P\Delta u^2$ in un unico termine del tipo $Q\Delta u^2$ (essendo Q una funzione limitata), abbiamo in conclusione (ritornando alla formula [20]):

$$\int_{u_1}^{h_1}(h_1-t)\,\overline{Y}_1''(t)\,dt = \int_{u'}^{h}(h-t)\,\overline{Y}_1''(t)\,dt + [(\nu+\vartheta_\Delta)(h-u)+(Q+\mu_\Delta)\Delta u]\,\Delta u$$

e perciò

[21]
$$\frac{\int_{u_1}^{h_1}(h_1-t)\,\overline{Y}_1(t)\,dt}{h_1-u_1} = \frac{\int_{u'}^{h}(h-t)\,\overline{Y}_1''(t)\,dt+[(\nu+\vartheta_\Delta)(h-u)+(Q+\mu_\Delta)\Delta u]\Delta u}{(h-u')+(\gamma'+\varepsilon_\Delta)\Delta u} =$$

$$= \frac{\int_{u'}^{h}(h-t)\,\overline{Y}_1''(t)\,dt}{h-u'} + \frac{(h-u')(h-u)(\nu+\vartheta_\Delta)-(\gamma'+\varepsilon_\Delta)\int_{u'}^{h}(h-t)\,\overline{Y}_1''(t)dt}{(h-u')\,[(h-u')+(\gamma'+\varepsilon_\Delta)\Delta u]}\Delta u +$$

$$+\omega'_\Delta\,\Delta u = \frac{\int_{u'}^{h}(h-t)\,\overline{Y}_1''(t)\,dt}{h-u'} + (\sigma+\omega_\Delta)\Delta u + \omega'_\Delta\,\Delta u .$$

Dopo ciò abbiamo:

[22]
$$\frac{\overline{Y}(h)-\overline{Y}(u')}{h-u'} - \frac{\overline{Y}(h)-\overline{Y}(u)}{h-u} = \left\{\frac{1}{h-u}\left[\overline{Y}'(u)-\frac{\overline{Y}(h)-\overline{Y}(u)}{h-u}\right]+\varrho_\Delta\right\}(1+\tau_\Delta)\Delta u =$$

$$= \left\{-\frac{1}{2}\,[Y''(u)+\sigma']+\varrho_\Delta\right\}(1+\tau_\Delta)\,\Delta u$$

e infine, avvicinando le formule [19], [21] e [22],

$$\frac{Y_1(h_1)-Y_1(u_1)}{h_1-u_1} - \frac{Y(h)-Y(u)}{h-u} = \frac{\overline{Y}_1(h_1)-\overline{Y}_1(u_1)}{h_1-u_1} - \frac{\overline{Y}(h)-\overline{Y}(u)}{h-u} =$$

$$= \left\{\frac{\overline{Y}_1(h_1)-\overline{Y}_1(u_1)}{h_1-u_1} - \frac{\overline{Y}(h)-\overline{Y}(u')}{h-u'}\right\} + \left\{\frac{\overline{Y}(h)-\overline{Y}(u')}{h-u'} - \frac{\overline{Y}(h)-\overline{Y}(u)}{h-u}\right\} =$$

[23]

$$= \frac{\int_{u'}^{h} (h - t)\,[\overline{Y}_1''(t) - \overline{Y}''(t)]\,d\,t}{h - u'} + (\sigma + \omega_\Delta)\,\Delta\,u + \omega'_\Delta\,\Delta u -$$

$$- \left\{ \frac{1}{2}\,[\overline{Y}''(u) + \sigma'] - \varrho_\Delta \right\} (1 + \tau_\Delta)\,\Delta\,u\,.$$

A prescindere dalla frazione scritta al secondo membro di questa uguaglianza, esaminiamo i successivi infinitesimi del prim'ordine rispetto a $\Delta\,u$. Questi si riducono in definitiva al solo termine

$$\left[-\frac{1}{2}\,\overline{Y}''(u) + \sigma - \frac{\sigma'}{2} \right] \Delta\,u\,,$$

il quale ha certamente il segno di $-\overline{Y}''(u)\,\Delta\,u$, purchè si supponga d'aver prefissato δ sufficientemente piccolo (cioè tale che risulti $2\,|\,\sigma\,| + |\,\sigma'\,| < < |\,\overline{Y}''(u)\,|$).

Allo scopo poi di valutare la detta frazione, distinguiamo separatamente le due ipotesi fatte:

1[a]) G″(y′) *lipschitziana.* In tale ipotesi, la frazione si riduce a un infinitesimo del tipo $\sigma''\,\Delta\,u$ e perciò (purchè si supponga ancora δ prefissato sufficientemente piccolo) l'intero ultimo membro della [23] ha certamente il segno di $-\overline{Y}''(u)\,\Delta\,u$ (quando, in secondo luogo, anche $\Delta\,u$ sia sufficientemente piccolo). Se $G''(y')$ è positiva, lo è anche $-\overline{Y}''(u)$ e perciò l'ultimo membro della [23] ha il segno di $\Delta\,u$. Il contrario accade, se $G''(y')$ è negativa.

2[a]). G″ (y′) *sempre decrescente se positiva, sempre crescente se negativa.* In tal caso, se $G''(y')$ è positiva, risulta $\overline{Y}''(x) \lesseqgtr \overline{Y}_1''(x)$ (derivate entrambe negative) in tutto $[c\,,\,d]$, secondochè $\Delta\,u \gtreqless 0$; se invece $G''(y')$ è negativa, risulta rispettivamente $\overline{Y}''(x) \gtreqless \overline{Y}_1''(x)$ (derivate entrambe positive) in tutto $[c\,,\,d]$. Conseguentemente:

se $G''(y')$ è > 0, risulta $\int_{u'}^{h} (h - t)\,[\overline{Y}_1''(t) - \overline{Y}''(t)]\,d\,t \gtreqless 0$, secondochè $\Delta\,u \gtreqless 0$;

» $G''(y')$ » < 0, » $\int_{u'}^{h} (h - t)\,[\overline{Y}_1''(t) - \overline{Y}''(t)]\,d\,t \lesseqgtr 0$, » $\Delta\,u \gtreqless 0$.

Dunque, sia nella prima che nella seconda delle ipotesi fatte, quando si assumano prima δ e poi Δu sufficientemente piccoli, la differenza

$$\frac{Y_1(h_1) - Y_1(u_1)}{h_1 - u_1} - \frac{Y(h) - Y(u)}{h - u}$$

risulta *positiva* se $G''(y')$ e Δu hanno lo stesso segno, risulta *negativa* nel caso contrario.

In modo del tutto analogo si ragiona relativamente all'*intervallo* $[h, k]$, giungendo a provare che, sia nella prima che nella seconda ipotesi, anche la differenza

$$\frac{Y(k) - Y(h)}{k - h} - \frac{Y_1(k_1) - Y_1(h_1)}{k_1 - h_1}$$

risulta *positiva* se $G''(y')$ e Δu hanno lo stesso segno, risulta *negativa* nel caso contrario.

Infine si ha

$$M(u_1) = \frac{Y_1(h_1) - Y_1(u_1)}{h_1 - u_1} - \frac{Y_1(k_1) - Y_1(h_1)}{k_1 - h_1} =$$

$$= \left\{ \frac{Y_1(h_1) - Y_1(u_1)}{h_1 - u_1} - \frac{Y(h) - Y(u)}{h - u} \right\} + \left\{ \frac{Y(k) - Y(h)}{k - h} - \frac{Y_1(k_1) - Y_1(h_1)}{k_1 - h_1} \right\}$$

e cioè $M(u_1)$ è $\gtrless 0$, secondochè $G''(y')$ e Δu hanno lo stesso segno o no. Anche nelle nuove ipotesi, la proposizione enunciata è dunque ridotta a un corollario del teor. fondamentale (precisamente del *teor. fondamentale generalizzato*, com'è stato enunciato all'osservaz. 3ª del n. 22).

[*Pervenuto alla Redazione il 27 Maggio 1949*]