

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

LANDOLINO GIULIANO

Alcune proprietà delle trasformazioni assolutamente continue

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e série, tome 14,
n° 1-4 (1948), p. 91-98

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1948_2_14_1-4_91_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1948, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ALCUNE PROPRIETÀ DELLE TRASFORMAZIONI ASSOLUTAMENTE CONTINUE (*)

di LANDOLINO GIULIANO (Pisa).

È noto che ⁽¹⁾, se $y=f(x)$, $a \leq x \leq b$, è una funzione sempre crescente (o sempre decrescente) e assolutamente continua, condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione inversa $x=\varphi(y)$, $c \leq y \leq d$ (dove $c = \min f(x)$, $d = \max f(x)$) sia assolutamente continua, è che si abbia, quasi dappertutto in (a, b) , $f'(x) \neq 0$. Inoltre, se ciò accade, quasi dappertutto in (a, b) e quasi dappertutto in (c, d) , rispettivamente si ha :

$$f'(x) \varphi'[f(x)] = 1, \quad f'[\varphi(y)] \varphi'(y) = 1.$$

In alcuni lavori dedicati al problema della quadratura delle superficie in forma parametrica, L. CESARI ⁽²⁾ ha introdotto i concetti di trasformazione continua piana « a variazione limitata » e « assolutamente continua ».

Scopo di questa Nota è di far vedere che, quando si sostituisca alla nozione di derivata per le funzioni di una variabile quella, dovuta al CESARI, di Jacobiano generalizzato relativo di una trasformazione piana continua, la proprietà sopra ricordata si estende alle trasformazioni piane biunivoche e assolutamente continue.

Sfrutteremo, per questo, alcune importanti proposizioni stabilite da CESARI in una Sua Memoria sul cambiamento di variabili negli integrali doppi ⁽³⁾, e un teorema che proveremo il quale assicura che ogni trasformazione continua e assolutamente continua di una trasformazione continua biunivoca e assoluta-

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della Scuola Normale Superiore di Pisa.

(1) Cfr. C. CARATHÉODORY: *Vorlesungen über reelle Funktionen*. Teubner, Leipzig, 1918, p. 584.

(2) L. CESARI: *Sulla quadratura delle superficie in forma parametrica*. Boll. Un. Mat. It., Serie II, Anno IV (1942), pp. 109-117.

(3) L. CESARI: *Sulla trasformazione degli integrali doppi*. In corso di stampa negli Atti dell'Accademia Pontificia. Ringrazio il Prof. CESARI che mi ha fatto prendere visione del manoscritto.

mente continua è ancora continua e assolutamente continua. Tale teorema estende, in un caso particolare, un teorema analogo per le funzioni di una variabile (4).

1. - Supponiamo che la trasformazione

$$(1) \quad \Phi: \quad x=x(u, v), \quad y=y(u, v), \quad (u, v) \in \bar{A} = A + A^*$$

sia *biunivoca*. Allora esiste la trasformazione *inversa*

$$(2) \quad \Phi^{-1}: \quad u=u(x, y), \quad v=v(x, y), \quad (x, y) \in \bar{B} = \Phi(\bar{A}),$$

dove $\bar{B} = B + B^*$, $B = \Phi(A)$, $B^* = \Phi(A^*)$ e B è una regione di JORDAN la cui frontiera è B^* .

In un mio precedente lavoro ho dimostrato il seguente (5)

TEOREMA α . - *Ogni trasformazione biunivoca e continua è a variazione limitata insieme alla sua inversa.*

D'altra parte, se la trasformazione Φ è assolutamente continua, la trasformazione inversa Φ^{-1} non gode in generale della stessa proprietà. Si presenta perciò la questione di caratterizzare le trasformazioni biunivoche continue e assolutamente continue per cui l'inversa è pure assolutamente continua. Nel mio lavoro ora ricordato ho dimostrato il seguente teorema che applicato alla trasformazione Φ^{-1} dà una prima condizione necessaria e sufficiente perchè questa sia assolutamente continua (6):

TEOREMA β . - *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la trasformazione Φ (biunivoca e continua) sia assolutamente continua, è che essa trasformi ogni insieme di punti (interni) di A di misura nulla in un insieme di punti pure di misura nulla.*

Scopo del presente lavoro è di dimostrare il seguente teorema che risolve completamente il problema che ci siamo proposti:

TEOREMA I. - *Sia (1) una trasformazione biunivoca continua e assolutamente continua assegnata in una regione chiusa \bar{A} , ottenuta aggiungendo a una regione aperta di Jordan A la propria frontiera A^* e si indichi con $H(u, v)$ il suo Jacobiano generalizzato relativo. Condizione necessaria e sufficiente affinchè la trasformazione inversa (2) (che è definita nella regione chiusa $\bar{B} = \Phi(\bar{A})$) sia assolutamente continua è che si abbia quasi dappertutto in A ,*

$$H(u, v) \neq 0.$$

(4) Cfr. L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*. Vol. I, Zanichelli, Bologna, 1922, p. 65 g).

(5) L. GIULIANO: *Sulle trasformazioni assolutamente continue*. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Ser. II, Vol. XII (1943), pp. 161-172, p. 170, n. 5.

(6) Loc. cit. (5), p. 162.

Inoltre, se ciò accade e $H'(u, v)$ è lo Jacobiano generalizzato relativo della (2), si ha quasi dappertutto in A e quasi dappertutto in B , rispettivamente:

$$\begin{aligned} H'[x(u, v), y(u, v)] H(u, v) &= 1, & (u, v) \in A, \\ H[u(x, y), v(x, y)] H'(x, y) &= 1, & (x, y) \in B = \Phi(A). \end{aligned}$$

2. - Premettiamo il seguente

TEOREMA II. - Siano A e B due regioni aperte di Jordan rispettivamente dei piani (u, v) , (u', v') le cui frontiere siano A^* e B^* . Sia:

$$\Phi_1: \quad u' = u'(u, v), \quad v' = v'(u, v), \quad (u, v) \in \bar{A} = A + A^*$$

una trasformazione biunivoca continua e assolutamente continua che trasformi \bar{A} in B e quindi A^* in B^* . Sia:

$$\Phi_2: \quad x = x(u', v'), \quad y = y(u', v'), \quad (u', v') \in B = \bar{B} + B^*$$

una trasformazione continua e assolutamente continua definita in \bar{B} . Allora anche la trasformazione continua

$$\Phi_3 = \Phi_2 \Phi_1: \quad x = x[u'(u, v), v'(u, v)], \quad y = y[u'(u, v), v'(u, v)], \quad (u, v) \in \bar{A}$$

è assolutamente continua e, inoltre, se $H_1(u, v)$, $H_2(u', v')$, $H_3(u, v)$, sono i Jacobiani generalizzati relativi delle trasformazioni Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 , si ha, quasi dappertutto in A :

$$H_3(u, v) = H_2[u'(u, v), v'(u, v)] H_1(u, v)$$

e quindi, quasi dappertutto in B , è:

$$H_3[u(u', v'), v(u', v')] = H_2(u', v') H_1[u(u', v'), v(u', v')]$$

dove le

$$u = u(u', v'), \quad v = v(u', v'), \quad (u', v') \in \bar{B}$$

definiscono la trasformazione Φ_1^{-1} inversa della Φ_1 .

Indichiamo con g_i e G_i ($i=1, 2, 3$) le funzioni g e G relative alla trasformazione Φ_i ($i=1, 2, 3$). Prefissato un numero $\varepsilon > 0$, per l'assoluta continuità della Φ_2 , esiste un numero $\sigma > 0$ tale che per ogni gruppo di un numero finito ($r_i, i=1, 2, \dots, n$) di regioni (aperte) di Jordan di B a due a due senza punti

interni a comune e tali che $\sum_{i=1}^n |r_i| < \sigma$, si ha ⁽⁷⁾:

$$\sum_{i=1}^n g_2(r_i) < \varepsilon.$$

⁽⁷⁾ L. CESARI: *Sui fondamenti geometrici dell'integrale classico per l'area delle superficie in forma parametrica*. Memorie dell'Accademia d'Italia, Vol. XIII (1943), pp. 1323-1481, p. 1347.

Per l'assoluta continuità della Φ_1 esiste un numero $\tau > 0$ tale che per ogni gruppo di un numero finito $(\pi_i, i=1, \dots, n)$ di poligoni semplici aperti di A a due a due senza punti interni a comune e tali che $\sum_{i=1}^n |\pi_i| < \tau$, si ha :

$$\sum_{i=1}^n g(\pi_i) < \sigma.$$

La Φ_1 , essendo biunivoca, trasforma i poligoni π_i di A in regioni di Jordan r_i di B a due a due senza punti interni a comune ed è, com'è noto ⁽⁸⁾ : $g(\pi_i) = |r_i|$ ($i=1, \dots, n$). Poichè, manifestamente è $g_3(\pi_i) = g_2(r_i)$ ($i=1, \dots, n$), ne viene che per ogni gruppo di un numero finito $(\pi_i, i=1, \dots, n)$ di poligoni semplici aperti di A a due a due senza punti interni a comune e tali che $\sum_{i=1}^n |\pi_i| < \tau$, si ha

$$\sum_{i=1}^n g_3(\pi_i) < \varepsilon.$$

È perciò soddisfatta per la Φ_3 una delle due condizioni di cui alla definizione di trasformazione assolutamente continua.

Osserviamo ora che se π è un poligono semplice aperto di A e γ è una poligonale semplice che divide π in due poligoni semplici aperti π_1 e π_2 , posto $\gamma' = \Phi_1(\gamma)$ e dette r, r_1, r_2 le regioni di Jordan nelle quali la Φ_1 trasforma rispettivamente π, π_1, π_2 , la curva continua γ' , per la supposta biunivocità della Φ_1 , è semplice e divide r nelle due regioni r_1 e r_2 . Per il teorema β) è poi $|\gamma'| = 0$. Inoltre si ha ⁽⁹⁾ :

$$G_2(r) = G_2(r_1) + G_2(r_2),$$

e poichè è, come abbiamo sopra notato,

$$G_3(\pi) = G_2(r), \quad G_3(\pi_i) = G_2(r_i), \quad (i=1, 2)$$

si ricava :

$$G_3(\pi) = G_3(\pi_1) + G_3(\pi_2),$$

⁽⁸⁾ Loc. cit. ⁽⁵⁾, p. 170.

⁽⁹⁾ Con considerazioni analoghe a quelle sviluppate da CESARI in : *Sulle trasformazioni continue e sull'area delle superficie*. (Memorie Accad. d'Italia (1941), pp. 1305-1395, p. 1314), si prova infatti : Se Φ è una qualunque trasformazione continua, r una regione di Jordan, appartenente ad A , γ una curva semplice aperta tutta costituita di punti di r , ad eccezione degli estremi che cadono su r^* la quale divida r in due regioni di Jordan r_1 e r_2 , supposto che sia $|\gamma'| = |\Phi(\gamma)| = 0$, allora si ha $G(r) = G(r_1) + G(r_2)$; $g(r) \leq g(r_1) + g(r_2)$.

e perciò, per ogni suddivisione $(\pi_i, i=1, \dots, n)$ di π in poligoni semplici aperti a due a due senza punti interni a comune, si ha

$$G_3(\pi) = \sum_{i=1}^n G_3(\pi_i).$$

Ciò basta per poter concludere che la Φ_3 è assolutamente continua. Dimostriamo ora la seconda parte dell'enunciato del teorema.

Sia: π un poligono semplice di A ; r la regione di Jordan nella quale Φ_1 trasforma π ; π^* e r^* le frontiere di π e di r ; posto $\bar{\pi} = \pi + \pi^*$, $\bar{r} = r + r^*$ e dette $\Phi_1', \Phi_2', \Phi_3'$ le trasformazioni continue definite rispettivamente su $\bar{\pi}, \bar{r}, \bar{\pi}$, si dica ρ l'insieme (appartenente al piano (x, y)) in cui la Φ_2' trasforma r :

$$\rho = \Phi_3'(\pi) = \Phi_2'(r).$$

Si ha, com'è chiaro:

$$\begin{aligned} G_3(\pi) &= G_2(r); & \Psi(x, y; \Phi_3') &= \Psi(x, y; \Phi_2'), \\ n(x, y; \Phi_3') &= n(x, y; \Phi_2'). \end{aligned}$$

Sia $\tau(x, y)$ la funzione caratteristica dell'insieme ρ , sia cioè $\tau(x, y) = 1$ se $(x, y) \in \rho$ e $\tau(x, y) = 0$ se (x, y) non $\in \rho$. Si ha, per un teorema di CESARI⁽¹⁰⁾, essendo le funzioni

$$\begin{aligned} &\tau[x(u', v'), y(u', v')], & H_2(u', v'), \\ &\tau\{x[u'(u, v), v'(u, v)], & y[u'(u, v), v'(u, v)]\}. & H_3(u, v), \end{aligned}$$

⁽¹⁰⁾ Loc. cit. (3), § 7; n. 5. Riportiamo l'enunciato del teorema: Sia

$$\Phi: x = x(u, v), y = y(u, v), \quad (u, v) \in A,$$

una trasformazione piana continua e assolutamente continua, sia $B = \Phi(A)$, se $f(x, y)$ è una funzione definita in tutti i punti di B e comunque finita e $F(u, v)$ è la funzione definita in tutti i punti di A dalla relazione

$$F(u, v) = f[x(u, v), y(u, v)],$$

allora

$$\begin{aligned} \iint_A F(u, v) |H(u, v)| du dv &= \iint_B f(x, y) \Psi(x, y; \Phi) dx dy, \\ \iint_A F(u, v) H(u, v) du dv &= \iint_B f(x, y) n(x, y; \Phi) dx dy, \end{aligned}$$

ogni qualvolta almeno una delle due funzioni $F(u, v) H(u, v)$, $f(x, y) \Psi(x, y; \Phi)$ è quasi continua e integrabile.

quasi continue e integrabili rispettivamente in B e in A , perchè le Φ_2, Φ_3 sono assolutamente continue :

$$\iint_r H_2(u', v') du' dv' = \iint_{\varrho} n(x, y; \Phi_2') dx dy,$$

$$\iint_{\pi} H_3(u, v) du dv = \iint_{\varrho} n(x, y; \Phi_3') dx dy,$$

e perciò

$$(3) \quad \iint_{\pi} H_3(u, v) du dv = \iint_r H_2(u', v') du' dv'.$$

Poichè la Φ_1 è biunivoca, è ⁽¹⁾

$$n(u', v'; \Phi_1') = \Psi(u', v'; \Phi_1') = \begin{cases} 1 & \text{se } (u', v') \in r \\ 0 & \text{se } (u', v') \text{ non } \in r. \end{cases}$$

Da qui si ha che la funzione $H_2(u', v') \Psi(u', v'; \Phi_1')$ è quasi continua e integrabile in B e perciò, per il teorema di CESARI che ora abbiamo applicato, è

$$\iint_r H_2(u', v') du' dv' = \iint_{\pi} H_2[u'(u, v), v'(u, v)] H_1(u, v) du dv,$$

e, per la (3), è :

$$\iint_{\pi} H_3(u, v) du dv = \iint_{\pi} H_2[u'(u, v), v'(u, v)] H_1(u, v) du dv.$$

Essendo π un qualunque poligono di A , si conclude che è quasi dappertutto in A :

$$H_3(u, v) = H_2[u'(u, v), v'(u, v)] H_1(u, v).$$

c. v. d.

3. - Dimostriamo ora il teorema enunciato nel n. 1.

Proviamo che la condizione è necessaria. Supponiamo cioè che la trasformazione Φ sia biunivoca, continua e assolutamente continua e l'inversa Φ^{-1} sia anch'essa assolutamente continua. L'insieme X dei punti di A nei quali è $H(u, v) = 0$, essendo la funzione $H(u, v)$ quasi continua, è misurabile. Dobbiamo provare che è $|X| = 0$. La funzione caratteristica $\tau(u, v)$ di X è, per quanto ora abbiamo detto, quasi continua. Posto $Y = \Phi(X)$, detta $\eta(x, y)$ la funzione caratteristica di Y , si ha, essendo la Φ biunivoca, com'è chiaro :

$$\tau(u, v) = \eta[x(u, v), y(u, v)].$$

⁽¹⁾ Loc. cit. (5), p. 170.

È poi :

$$(4) \quad n(x, y; \Phi) = \Psi(x, y; \Phi) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y) \in B \\ 0 & \text{se } (x, y) \notin B. \end{cases}$$

Ora, poichè la funzione $\tau(u, v) H(u, v)$ è, per l'assoluta continuità della Φ , quasi continua e integrabile in A ed essendo, per un teorema di CESARI più volte applicato ⁽¹²⁾, anche la funzione $\eta(x, y) \Psi(x, y; \Phi)$ quasi continua e integrabile in B , è in B quasi continua e integrabile anche la funzione $\eta(x, y)$. Dunque l'insieme Y è misurabile ed è :

$$|Y| = \iint_B \eta(x, y) dx dy = \iint_A \tau(u, v) |H(u, v)| du dv = \iint_X |H(u, v)| du dv = 0.$$

Ma poichè, è $X = \Phi^{-1}(Y)$, per il teorema β) del n. 1 si deduce che $|X| = 0$.

La condizione è sufficiente. Supponiamo che sia $|X| = 0$ e dimostriamo che la Φ^{-1} è assolutamente continua. Per questo, in base al teorema β) del n. 1 basta provare che se V è un qualunque insieme di punti di B di misura nulla, ad esso corrisponde per la Φ^{-1} un insieme W di punti di A di misura nulla: $W = \Phi^{-1}(V)$. Dette $\tau(u, v)$ e $\eta(x, y)$ le funzioni caratteristiche degli insiemi W e V rispettivamente, si ha, come abbiamo del resto sopra osservato :

$$\tau(u, v) = \eta[x(u, v), y(u, v)],$$

$$\Psi(x, y; \Phi) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y) \in B \\ 0 & \text{se } (x, y) \notin B. \end{cases}$$

Si ha perciò che la funzione $\eta(x, y) \Psi(x, y; \Phi)$ è quasi continua e integrabile in B e tale è dunque in B , per il teorema di CESARI più volte sfruttato, la funzione $\tau(u, v) |H(u, v)|$. Ma poichè è in X , $H(u, v) = 0$ ed è $|X| = 0$, anche la funzione $\tau(u, v)$ è quasi continua e integrabile in A . Perciò l'insieme W è misurabile. È poi, per il solito teorema di CESARI :

$$0 = |V| = \iint_B \eta(x, y) dx dy = \iint_B \eta(x, y) \Psi(x, y; \Phi) dx dy =$$

$$= \iint_A \tau(u, v) |H(u, v)| du dv = \iint_{W-X} \tau(u, v) |H(u, v)| du dv.$$

Ora è in $W-X$, $H(u, v) \neq 0$, $\tau(u, v) = 1$ e perciò deve essere $|W-X| = 0$. È : $|X| = 0$ e perciò si ha : $|W| = 0$.

⁽¹²⁾ Loc. cit. ⁽¹⁰⁾.

Consideriamo ora le trasformazioni :

$$\begin{aligned}\Phi : \quad x &= x(u, v), & y &= y(u, v), & (u, v) &\in \bar{A}, \\ \Phi^{-1} : \quad u &= u(x, y), & v &= v(x, y), & (x, y) &\in \bar{B},\end{aligned}$$

ed essendo la trasformazione $\Phi\Phi^{-1}$ l'identità, cioè essendo

$$\Phi\Phi^{-1} : \quad u = u, \quad v = v, \quad (u, v) \in \bar{A},$$

si ha, per il teorema II dimostrato nel n. 2, quasi dappertutto in A e in B rispettivamente :

$$H(u, v) H'[x(u, v), y(u, v)] = 1,$$

$$H'(x, y) H[u(x, y), v(x, y)] = 1.$$

• c. v. d.