ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

SILVIO CINQUINI

Sopra le condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali dei problemi variazionali in forma parametrica di ordine superiore

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 14, nº 1-4 (1948), p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1948_2_14_1-4_1_0>

SOPRA LE CONDIZIONI NECESSARIE PER LA SEMICONTINUITÀ DEGLI INTEGRALI DEI PROBLEMI VARIAZIONALI IN FORMA PARAMETRICA DI ORDINE SUPERIORE

di SILVIO CINQUINI (Pavia).

In una precedente Memoria ([1]) abbiamo stabilito, mediante il noto metodo diretto del TONELLI basato sul concetto di semicontinuità, alcuni teoremi di esistenza dell'estremo valevoli per i problemi variazionali in forma parametrica dipendenti dagli elementi differenziali di ordine superiore al primo

$$\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}} = \int\limits_{\mathcal{C}^{(2)}} F(x(s), y(s), x'(s), y'(s), \theta'(s))\, ds,$$

ove, indicata con s la lunghezza dell'arco rettificato, si considera la classe delle curve ordinarie $\mathcal{C}^{(2)}$: $x=x(s)$, $y=y(s)$, per le quali le funzioni $x(s)$ e $y(s)$ sono assolutamente continue insieme con le loro derivate del primo ordine ed esiste finito l'integrale $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$, $\theta'(s)$ essendo la curvatura della curva $\mathcal{C}^{(2)}$.

Tale nostra ricerca utilizza condizioni sufficienti per la semicontinuità degli integrali $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$, che vengono rilevate all'inizio della Memoria stessa.

Nel presente lavoro ci occupiamo, brevemente, delle condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali in questione, dalle quali seguono immediatamente le condizioni di LEGENDRE e di WEIERSTRASS, necessarie per l'esistenza dell'estremo.

È ben noto che, qualunque sia il tipo di problema variazionale che si considera, per stabilire le condizioni necessarie per la semicontinuità su un dato elemento del campo funzionale considerato si devono superare per solito notevoli difficoltà di dimostrazione, che traggono origine dal fenomeno di LAVRENTIEFF. Tali difficoltà, mentre possono evitarsi nello studio dei problemi del primo ordine

---

([1]) S. CINQUINI: *Sopra i problemi variazionali in forma parametrica dipendenti dalle derivate di ordine superiore*. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Vol. XIII (1944), pp. 19-49.

in forma parametrica assumendo come parametro la lunghezza dell'arco rettificato, si presentano in pieno nel problema in questione, perchè su ogni curva ordinaria $\mathcal{C}^{(2)}$ la curvatura esiste finita quasi dappertutto, ma risulta limitata soltanto sulle curve di una sottoclasse della classe considerata.

Inoltre, il problema in questione, in confronto a quelli in forma ordinaria, offre un ulteriore ostacolo per il fatto che nell'integrale $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$ le derivate del secondo ordine non compaiono in modo indipendente, ma figurano nella curvatura, la quale non è un funzionale additivo.

Ora noi vogliamo mostrare in qual modo, riprendendo l'idea che ci ha guidati alcuni anni fa nello studio dei problemi in forma ordinaria dipendenti dalle derivate di ordine superiore (2), si possa affilare il procedimento allora seguito per stabilire, in tutta la loro generalità, le condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$. Per brevità e per quanto diremo nelle seguenti righe, noi ci occupiamo senz'altro della condizione necessaria di WEIERSTRASS per la semicontinuità su una data curva ordinaria $\mathcal{C}^{(2)}$; da questa si deducono, come casi particolari, sia la condizione di LEGENDRE, sia la forma che tali condizioni assumono nel caso in cui la curvatura sia, sulla curva considerata, funzione continua di s, sia la condizione necessaria per la semicontinuità in tutto il campo. Quest'ultima condizione può essere stabilita, direttamente, in modo molto semplice, considerando un opportuno arco di circonferenza e costruendo una successione di curve ognuna delle quali sia composta di archi di circonferenza; però, a differenza da quanto avviene sia per i problemi del primo ordine in forma parametrica, sia per quelli in forma ordinaria di ordine qualunque, tale costruzione non può essere riutilizzata nello studio della semicontinuità su una data curva (3): è stata appunto tale novità che ci ha indotti ad allontanarci dall'usanza abituale di studiare inizialmente la semicontinuità in tutto il campo per venire poi gradatamente al caso più difficile della semicontinuità su una data curva.

Diamo infine un esempio per mostrare come su una curva minimante possano esserci effettivamente dei punti in cui sia la derivata $F_{\theta'\theta'}$ sia la funzione $\mathcal{E}$ di WEIERSTRASS sono negative: a tal uopo, giovandoci, nel modo che la

---

(2) S. CINQUINI: *Sopra le condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali dei problemi variazionali di ordine n.* Annali Scuola Normale Superiore di Pisa, Vol. VI (1937), pp. 149-178.

Per illustrare le presenti difficoltà possono ripetersi considerazioni analoghe a quelle sviluppate a pag. 150 del lavoro ora citato: ci limitiamo a far presente che non è possibile costruire un arco di circonferenza passante per due punti in ciascuno dei quali sia prefissata in modo arbitrario la relativa tangente.

(3) Ciò dipende sia da quanto abbiamo rilevato in (2), sia dal fatto che la curvatura non è un funzionale additivo.

questione richiede, dell'idea ora indicata, costruiamo una curva composta di archi di circonferenza.

1. - Generalità.

Per le generalità rimandiamo al nostro lavoro già citato (4) limitandoci a qualche richiamo e a qualche aggiunta.

a) Sia $F(x, y, x', y', \theta')$ una funzione: 1°) definita e continua, insieme con la sua derivata parziale $F_{\theta'}$, in ogni punto (x, y) di un insieme A contenente tutti i suoi punti di accumulazione posti al finito, per ogni coppia di numeri x', y' non entrambi nulli e per ogni valore finito di θ'; 2°) positivamente omogenea di grado 1 rispetto alle variabili x', y'; 3°) tale che sia $F(x, y, 0, 0, \theta') = 0$.

La funzione $\mathcal{E}$ di WEIERSTRASS è definita per ogni quintupla ora indicata e per ogni valore finito di $\widetilde{\theta}'$ nel seguente modo:

$$\mathcal{E}(x, y, x', y', \theta'; \widetilde{\theta}') = F(x, y, x', y', \widetilde{\theta}') - F(x, y, x', y', \theta') - (\widetilde{\theta}' - \theta')F_{\theta'}(x, y, x', y', \theta').$$

β) Dicesi *curva ordinaria* $\mathcal{C}^{(2)}$ ogni curva rettificabile

$$\mathcal{C}^{(2)}: \qquad x = x(s), \quad y = y(s), \qquad (0 \leqslant s \leqslant L),$$

essendo s la lunghezza dell'arco rettificato, per la quale le funzioni $x(s)$, $y(s)$ sono assolutamente continue insieme con le loro derivate del primo ordine, $x'(s)$, $y'(s)$ (5), ogni punto $(x(s), y(s))$ appartiene al campo A, ed esiste finito l'integrale (nel senso del LEBESGUE)

$$\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}} = \int_{\mathcal{C}^{(2)}} F(x(s), y(s), x'(s), y'(s), \theta'(s)) \, ds,$$

ove $\theta'(s)$ è la curvatura della curva $\mathcal{C}^{(2)}$, e quindi

$$\theta'(s) = \frac{d\theta}{ds} = x'(s) \, y''(s) - x''(s) \, y'(s).$$

La curva $\mathcal{C}^{(2)}$ dicesi completamente interna al campo A, se ogni suo punto è interno ad A.

OSSERVAZIONE. - Se

$$x = X_0(t), \quad y = Y_0(t), \qquad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$$

sono le equazioni parametriche di una curva Γ_0 in funzione di un parametro

---

(4) Vedi S. CINQUINI, luogo cit. in (1), § 1.

(5) Ricordiamo che da queste ipotesi segue che l'angolo di direzione $\theta(s)$ è anche esso funzione assolutamente continua di s. (Cfr. S. CINQUINI, luogo cit. in (1), n. 3, *b*)).

qualsiasi, supposto che le funzioni $X_0(t)$, $Y_0(t)$ siano assolutamente continue insieme con le loro derivate del primo ordine $X_0'(t)$, $Y_0'(t)$, che per ogni t di (t_1, t_2) sia $X_0'^2(t)+Y_0'^2(t) \geqslant m>0$ [6], che ogni punto $(X_0(t), Y_0(t))$ appartenga al campo A, e che esista finito l'integrale (nel senso del LEBESGUE)

$$\mathfrak{J}^{(2)}_{\Gamma_0} = \int_{t_1}^{t_2} F\left(X_0(t),\ Y_0(t),\ X_0'(t),\ Y_0'(t),\ \frac{X_0'(t)\, Y_0''(t) - X_0''(t)\, Y_0'(t)}{[X_0'^2(t) + Y_0'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}\right) dt,$$

possiamo affermare che Γ_0 è una curva $\mathcal{C}^{(2)}$.

Infatti, in base alle ipotesi fatte la curva Γ_0 è rettificabile, e indicata con $s(t)$ la lunghezza dell'arco rettificato contata a partire da $t=t_1$, la funzione $s=s(t)$ risulta assolutamente continua insieme con la sua derivata del primo ordine $s'(t)$, ed è $s'(t) \geqslant \sqrt{m}>0$. Quindi, se $t=t(s)$ è la funzione inversa della $s=s(t)$, siccome $\frac{dt}{ds}=\frac{1}{s'(t)}$, $t(s)$ risulta funzione crescente e assolutamente continua e di quest'ultima proprietà gode anche la sua derivata $t'(s)$. Perciò, posto

$$x_0(s)=X_0(t(s)), \qquad y_0(s)=Y_0(t(s)),$$

possiamo concludere che le funzioni $x_0(s)$, $y_0(s)$, sono assolutamente continue insieme con le loro derivate $x_0'(s)=X_0'(t(s))\cdot t'(s)$, $y_0'(s)=Y_0'(t(s))\cdot t'(s)$.

Infine, in virtù dell'omogeneità della funzione F e per un noto teorema di integrazione per sostituzione è

$$\mathfrak{J}^{(2)}_{\Gamma_0} = \mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}_0},$$

e quindi Γ_0 è una curva $\mathcal{C}^{(2)}$.

γ) Data una curva ordinaria $\mathcal{C}^{(2)}_0$ di lunghezza $L_0>0$, si dice che la curva ordinaria $\mathcal{C}^{(2)}$ di lunghezza L *appartiene all'intorno* $(\varrho)^2$ *della* $\mathcal{C}^{(2)}_0$, quando, indicate con s e σ le lunghezze degli archi della $\mathcal{C}^{(2)}_0$ e della $\mathcal{C}^{(2)}$ contate a partire dai loro primi estremi se le curve sono aperte o da punti convenientemente scelti se le curve sono chiuse, è possibile determinare una funzione $\sigma(s)$, $(0 \leqslant s \leqslant L_0)$, con $\sigma(0)=0$, $\sigma(L_0)=L$, la quale sia continua insieme con la propria derivata del primo ordine $\sigma'(s)$ e per la quale valga la doppia disuguaglianza

$$1-\varrho \leqslant \sigma'(s) \leqslant 1+\varrho,$$

---

[6] Questa ipotesi è essenziale: infatti la curva $x=t^2$, $y=t^3$, $(-1 \leqslant t \leqslant 1)$ per la quale è $\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]_{t=0}=0$, non è una curva ordinaria $\mathcal{C}^{(2)}$ perchè è priva di tangente per $t=0$. [Per la definizione di tangente cfr. L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*. Due volumi. N. Zanichelli, Bologna, 1921-23, Vol. I, n. 10, pp. 48-49].

in modo che si abbia per ogni s di $(0,\ L_0)$

$$|x_0(s)-x(\sigma(s))| \leqslant \varrho, \qquad |y_0(s)-y(\sigma(s))| \leqslant \varrho,$$

$$\left|\frac{dx_0(s)}{ds}-\left[\frac{dx(\sigma)}{d\sigma}\right]_{\sigma=\sigma(s)}\right| \leqslant \varrho, \qquad \left|\frac{dy_0(s)}{ds}-\left[\frac{dy(\sigma)}{d\sigma}\right]_{\sigma=\sigma(s)}\right| \leqslant \varrho.$$

δ) L'integrale $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$ è *funzione semicontinua inferiormente* sulla curva ordinaria $\mathcal{C}^{(2)}_0$, se, preso ad arbitrio un numero $\varepsilon>0$, è possibile determinare un $\varrho>0$ in modo che la disuguaglianza

$$\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}} > \mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}_0} - \varepsilon$$

sia verificata per tutte le curve ordinarie $\mathcal{C}^{(2)}$ che appartengono all'intorno $(\varrho)^2$ della $\mathcal{C}^{(2)}_0$.

Se poi $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$ gode della semicontinuità inferiore su ogni curva ordinaria $\mathcal{C}^{(2)}$, diremo che tale integrale è *funzione semicontinua inferiormente.*

Le definizioni di semicontinuità superiore e di continuità si deducono dalla precedente sostituendo alla disuguaglianza che vi figura rispettivamente le seguenti

$$\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}} < \mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}_0} + \varepsilon, \qquad \left|\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}} - \mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}_0}\right| < \varepsilon.$$

ε) Data una classe $K^{(2)}$ di curve ordinarie $\mathcal{C}^{(2)}$ diremo che un punto

$$P_0 \equiv (x_0(s_0),\ y_0(s_0),\ x_0'(s_0),\ y_0'(s_0))$$

di una curva

$$\mathcal{C}^{(2)}_0 \qquad x=x_0(s), \quad y=y_0(s), \qquad (0 \leqslant s \leqslant L_0)$$

appartenente alla classe considerata è *punto di indifferenza rispetto al campo A e alla classe $K^{(2)}$*, se è possibile determinare un numero $\varrho_0>0$ in modo che si ottenga ancora una curva della classe $K^{(2)}$, quando si sostituisca ad un qualunque arco della $\mathcal{C}^{(2)}_0$ definito da $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$, con $s_1 \leqslant s_0 \leqslant s_2$, e tale che per ogni s di $(s_1,\ s_2)$ sia

$$[x_0(s)-x_0(s_0)]^2+[y_0(s)-y_0(s_0)]^2+[x_0'(s)-x_0'(s_0)]^2+[y_0'(s)-y_0'(s_0)]^2 \leqslant \varrho_0^2,$$

un qualunque arco di curva ordinaria $\mathcal{C}^{(2)}$ (appartenente al campo A), in modo che se

$$x=x(\sigma), \quad y=y(\sigma), \qquad (0 \leqslant \sigma \leqslant l)$$

sono le equazioni di tale arco, ove σ è la lunghezza dell'arco rettificato, per ogni σ di $(0,\ l)$ abbia luogo la disuguaglianza

$$[x(\sigma)-x_0(s_0)]^2+[y(\sigma)-y_0(s_0)]^2+[x'(\sigma)-x_0'(s_0)]^2+[y'(\sigma)-y_0'(s_0)]^2 \leqslant \varrho_0^2,$$

e inoltre sia

(I) $\qquad x(0)=x_0(s_1),\ y(0)=y_0(s_1), \qquad x'(0)=x_0'(s_1),\ y'(0)=y_0'(s_1)\,;$

(II) $\qquad x(l)=x_0(s_2),\ y(l)=y_0(s_2), \qquad x'(l)=x_0'(s_2),\ y'(l)=y_0'(s_2),$

intendendosi che sia le (I) che le (II) possano anche non essere verificate, quando sia rispettivamente $s_1=0$, $s_2=L_0$.

ζ) Ci occupiamo soltanto delle condizioni per la semicontinuità inferiore [per il minimo], perchè quelle per la semicontinuità superiore [per il massimo] si deducono dalle prime cambiando il senso delle disuguaglianze che vi figurano.

2. - **Teorema.**

Se

$$\mathcal{C}_0^{(2)}: \qquad x=x_0(s),\ y=y_0(s), \qquad (0\leqslant s\leqslant L)$$

è una curva ordinaria $\mathcal{C}^{(2)}$ *completamente interna al campo* A, *condizione necessaria affinchè l'integrale* $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$ *sia semicontinuo inferiormente sulla curva* $\mathcal{C}_0^{(2)}$ *è che lo pseudoarco dei punti* $(x_0(s), y_0(s))$ *di* $\mathcal{C}_0^{(2)}$, *nei quali esiste finita la curvatura* $\theta_0'(s)$ *e non è verificata, per tutti i valori di* $\breve{\theta}'$, *la disuguaglianza*

$$\mathcal{E}(x_0(s),\ y_0(s),\ x_0'(s),\ y_0'(s),\ \theta_0'(s)\,;\ \breve{\theta}')\geqslant 0, \tag{1}$$

abbia misura nulla.

DIMOSTRAZIONE. - Supposto, invece, che lo pseudoarco E_0 dei punti di $\mathcal{C}_0^{(2)}$ nei quali la $\theta_0'(s)$ è finita ed esiste almeno un numero finito $\breve{\theta}'$, per il quale non è soddisfatta la (1), abbia una misura positiva, è possibile, mediante note considerazioni ([7]), trovare un numero fisso λ_0 diverso dallo zero, un altro numero $\eta>0$ ed un insieme chiuso E, tutto costituito di punti di E_0, di misura $\mu>0$, tale che in ogni suo punto esistano finite anche le derivate seconde $x_0''(s)$, $y_0''(s)$, i moduli di $x_0''(s)$, $y_0''(s)$, $\theta_0'(s)$ abbiano un limite superiore finito che indicheremo con N, e sia verificata la disuguaglianza

$$\mathcal{E}(x_0(s),\ y_0(s),\ x_0'(s),\ y_0'(s),\ \theta_0'(s)\,;\ \theta_0'(s)+\lambda_0)<-\frac{3}{2}\,\eta.$$

Per la continuità della funzione $\mathcal{E}$ si può determinare un numero positivo

---

([7]) Cfr. L. TONELLI, opera cit. in ([6]), Vol. I, n. 91, *a*), p. 256, ed anche S. CINQUINI, luogo cit. in ([2]), n. 6, p. 164.

$\delta \leqslant \frac{1}{4}$, in modo che se $(x_0(\bar{s}),\ y_0(\bar{s}))$ è un punto qualunque di E, $(x,\ y)$ è un punto qualsiasi di A e x', y', θ', λ' sono quattro numeri reali qualunque, soddisfatte le disuguaglianze

$$(2) \quad |x-x_0(\bar{s})| \leqslant 2\delta,\ |y-y_0(\bar{s})| \leqslant 2\delta,\ |x'-x_0'(\bar{s})| \leqslant 2\delta,$$
$$|y'-y_0'(\bar{s})| \leqslant 2\delta,\ |\theta'-\theta_0'(\bar{s})| \leqslant 2\delta,\ |\lambda'-\lambda_0| \leqslant 2\delta,$$

risulti

$$(3) \quad \mathcal{E}(x,\ y,\ x',\ y',\ \theta';\ \theta'+\lambda') < -\eta,$$

δ essendo inoltre scelto in modo che tutti i punti $(x,\ y)$ soddisfacenti alle prime due delle (2) appartengano al campo A.

Inoltre, se Γ è il minimo intero positivo, per il quale risulti $\Gamma\delta : (1+|\lambda_0|) \geqslant 2\pi$, possiamo estrarre da E almeno un altro insieme chiuso E' di misura $\mu' \geqslant \mu : \Gamma$ in modo che i valori dell'angolo di direzione $\theta_0(s)$ nei punti di E' siano tutti congrui rispetto al modulo 2π ai valori di un intervallo di ampiezza non superiore a $\delta :\ (1+|\lambda_0|)$.

Si determini ora un numero ω_0, con $\omega_0\,\lambda_0 > 0$, $|\omega_0| < |\lambda_0|$, in modo che per ogni quadrupla $(x,\ y,\ x',\ y')$ soddisfacente alle prime quattro delle (2), per ogni $|\theta'| \leqslant 13\,N+4$, e per ogni $|\omega| \leqslant 2\,|\omega_0|$ risulti

$$(4) \quad |F_{\theta'}(x,\ y,\ x',\ y',\ \theta'+\omega) - F_{\theta'}(x,\ y,\ x',\ y',\ \theta')| \leqslant \frac{\eta}{4\,|\lambda_0|}.$$

Sia M_0 il massimo modulo di $F(x, y, x', y', \theta')$ per ogni quadrupla (x, y, x', y') soddisfacente alle prime quattro delle (2) e per ogni $|\theta'| \leqslant 13N+4$, e sia M il massimo modulo di $\mathcal{E}(x, y, x', y', \theta';\ \tilde{\theta}')$ per ogni quintupla $(x,\ y,\ x',\ y',\ \theta')$ ora indicata, e per ogni $|\tilde{\theta}'| \leqslant 57\ (N+|\lambda_0|)+15$. Scelto un numero positivo ε_0 tale che sia

$$(5) \quad \varepsilon_0 \leqslant \frac{\mu'\delta}{11(41N+13)}, \qquad \varepsilon_0 \leqslant \frac{\mu'\eta}{56}\left|\frac{\omega_0}{\lambda_0+\omega_0}\right|,$$

si determini $\sigma_0 > 0$ in modo che: 1) in ogni arco di $\mathcal{C}_0^{(2)}$ avente lunghezza non superiore a σ_0 l'oscillazione dell'angolo di direzione $\theta_0(s)$ sia non superiore a $\delta :\ (1+|\lambda_0|)$; 2) per ogni pseudoarco J di $\mathcal{C}_0^{(2)}$ di misura non superiore a σ_0 sia

$$(6) \quad \int_J |F(x_0(s),\ y_0(s),\ x_0'(s),\ y_0'(s),\ \theta_0'(s))|\,ds < \varepsilon_0;$$

3) siano verificate le disuguaglianze

$$(7) \quad \eta\sigma_0 < \varepsilon_0, \qquad M_0\sigma_0 < \varepsilon_0, \qquad M\sigma_0 < \varepsilon_0.$$

Considerato un numero positivo $R \geqslant 1 : \varepsilon_0$, e indicata con $g_1, g_2, g_3, \ldots$ la successione degli archi della curva $\mathcal{C}_0^{(2)}$ contigui all'insieme chiuso E', sia ν_R' il minimo intero positivo tale che il pluriarco J_R, costituito da tutti gli archi $g_{\nu_R'}, g_{\nu_R'+1}, g_{\nu_R'+2}, \ldots$, abbia lunghezza non superiore a σ_0 e verifichi la disuguaglianza

$$\int_{J_R} \{ \mid x_0''(s) \mid + \mid y_0''(s) \mid \} \, ds < \frac{1}{2R} \cdot$$

Mediante considerazioni particolarmente delicate, analoghe a quelle sviluppate in altro nostro lavoro ([8]) e che qui non stiamo a ripetere, possiamo determinare un numero finito di archi $i_1^{(R)}, i_2^{(R)}, \ldots, i_{\nu_R}^{(R)}$ della curva $\mathcal{C}_0^{(2)}$, a due a due distinti e contenenti una porzione $E^{(R)}$ di E', la quale abbia misura complessiva non inferiore a $\mu' : 2$, in modo che, indicato con $E_j^{(R)}$ l'insieme dei punti di $E^{(R)}$ contenuti in $i_j^{(R)}$, e con $C(E_j^{(R)})$ il complementare di $E_j^{(R)}$ rispetto all'arco $i_j^{(R)}$, siano verificate le disuguaglianze

$$\frac{1}{i_j^{(R)}} \int_{C(E_j^{(R)})} \{ \mid x_0''(s) \mid + \mid y_0''(s) \mid \} \, ds < \frac{1}{\mu' R}, \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu_R),$$

ove si è indicata con $i_j^{(R)}$ anche la lunghezza dell'arco stesso, la quale può essere supposta non superiore all'unità e inoltre l'insieme $C(E^{(R)})$ complementare di $E^{(R)}$ rispetto al complesso degli archi $i_j^{(R)}$, $(j = 1, 2, \ldots, \nu_R)$ abbia misura non superiore a σ_0.

Ne segue “a fortiori„

$$(8) \qquad \frac{1}{i_j^{(R)}} \int_{C(E_j^{(R)})} \mid x_0''(s) \mid ds < \frac{1}{\mu' R}, \qquad \frac{1}{i_j^{(R)}} \int_{C(E_j^{(R)})} \mid y_0''(s) \mid ds < \frac{1}{\mu' R}, \quad (j = 1, 2, \ldots, \nu_R),$$

e quindi, posto $i_j^{(R)} \equiv [a_j^{(R)} \leqslant s \leqslant b_j^{(R)}]$, $(j = 1, 2, \ldots, \nu_R)$, tenendo presenti le (8) e ripetendo alcune considerazioni svolte nel nostro lavoro già citato ([9]), è possibile definire su ciascuno degli intervalli $(a_j^{(R)}, b_j^{(R)})$, $(j = 1, 2, \ldots, \nu_R)$ ([10]) due funzioni $x_R(s)$, $y_R(s)$, assolutamente continue insieme con le loro derivate del primo ordine $x_R'(s)$, $y_R'(s)$, in modo che posto

$$\varphi_R(s) = x_R(s) - x_0(s), \qquad \psi_R(s) = y_R(s) - y_0(s),$$

([8]) Vedi S. CINQUINI, luogo cit. in ([2]), n. 9, pp. 169-170.

([9]) Vedi S. CINQUINI, ibidem, pp. 170-173. Si faccia $n = 2$, e si tenga conto delle semplificazioni di calcolo che possono farsi.

([10]) Si intende l'intervallo corrispondente all'arco rettificato.

1°) sia

$$\begin{aligned} &\varphi_R(a_j^{(R)}) = \varphi_R(b_j^{(R)}) = \psi_R(a_j^{(R)}) = \psi_R(b_j^{(R)}) = 0, \\ &\varphi'_R(a_j^{(R)}) = \varphi'_R(b_j^{(R)}) = \psi'_R(a_j^{(R)}) = \psi'_R(b_j^{(R)}) = 0, \end{aligned} \qquad (j=1,2,\dots,\ \nu_R);$$

2°) per ogni s di $(a_j^{(R)}, b_j^{(R)})$, $(j=1, 2,\dots, \nu_R)$ siano verificate le disuguaglianze

$$(9) \qquad |\varphi_R(s)| < \frac{11}{\mu' R} < \delta, \quad |\psi_R(s)| \leq \frac{11}{\mu' R} \leq \delta,$$

$$|\varphi'_R(s)| \leq \frac{11}{\mu' R} \leq \delta, \quad |\psi'_R(s)| < \frac{11}{\mu' R} < \delta,$$

$$(10) \qquad |x''_R(s)| \leq N + \frac{11}{\mu' R} \leq N + \delta, \qquad |y''_R(s)| \leq N + \frac{11}{\mu' R} \leq N + \delta,$$

ed anche [11], posto

$$\theta^*_R(s) = \frac{x'_R(s) y''_R(s) - x''_R(s) y'_R(s)}{[x'^2_R(s) + y'^2_R(s)]^{\frac{3}{2}}},$$

$$(11) \qquad |\theta^*_R(s)| \leq 13N + 4;$$

3°) per ogni s di $E^{(R)}$ risulti

$$|\varphi''_R(s)| < \frac{11}{\mu' R} \leq \delta, \qquad |\psi''_R(s)| < \frac{11}{\mu' R} < \delta,$$

ed anche

$$(12) \qquad |\theta^*_R(s) - \theta'_0(s)| \leq \frac{11}{\mu' R}(41N + 13) \leq \delta.$$

Quindi per la continuità della funzione F si può determinare un intero R_0, che supporremo non inferiore a $1 : \varepsilon_0$, in modo che, se è $R > R_0$, per ogni s appartenente a $E^{(R)}$, sia

$$|F(x_R(s),\ y_R(s),\ x'_R(s),\ y'_R(s),\ \theta^*_R(s)) - F(x_0(s),\ y_0(s),\ x'_0(s),\ y'_0(s),\ \theta'_0(s))| \leq \frac{\varepsilon_0}{\mu'};$$

---

[11] Omettiamo tutti i calcoli, limitandoci a rilevare che, siccome per $R \geq \frac{1}{\varepsilon_0}$ è $\frac{11}{\mu' R} < \delta \leq \frac{1}{4}$, risulta

$$\sqrt{x'^2_R(s) + y'^2_R(s)} \geq 1 - \sqrt{\varphi'^2_R(s) + \psi'^2_R(s)} \geq 1 - \frac{11}{\mu' R}\sqrt{2} \geq 1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

e siccome la misura di $C(E^{(R)})$ non supera σ_0, tenendo conto della seconda delle (7) e della (6) risulta per ogni $R \geqslant R_0$

$$(13) \qquad \left| \sum_{j=1}^{\nu_R} \int_{a_j^{(R)}}^{b_j^{(R)}} F(x_R, y_R, x'_R, y'_R, \theta^*_R)\, ds - \sum_{j=1}^{\nu_R} \int_{a_j^{(R)}}^{b_j^{(R)}} F(x_0, y_0, x'_0, y'_0, \theta'_0)\, ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{E^{(R)}} | F(x_R, y_R, x'_R, y'_R, \theta^*_R) - F(x_0, y_0, x'_0, y'_0, \theta'_0) |\, ds +$$

$$+ \int_{C(E^{(R)})} | F(x_R, y_R, x'_R, y'_R, \theta^*_R) |\, ds + \int_{C(E^{(R)})} | F(x_0, y_0, x'_0, y'_0, \theta'_0) |\, ds < 3\varepsilon_0 .$$

Ciò promesso, supposto $R \geqslant R_0$, si divida ciascuno degli intervalli $i_j^{(R)}$, $(j=1, 2,\ldots, \nu_R)$ in R parti uguali mediante i punti

$$a_{j,0}^{(R)} \equiv a_j^{(R)},\ a_{j,1}^{(R)},\ldots,\ a_{j,R}^{(R)} \equiv b_j^{(R)},$$

e, posto

$$h_{j,1}^{(R)} = \frac{|\omega_0|}{2\,|\lambda_0 + \omega_0|} \frac{i_j^{(R)}}{R}, \qquad h_{j,2}^{(R)} = \frac{|\lambda_0|}{|\lambda_0 + \omega_0|} \frac{i_j^{(R)}}{R},$$

si definisca in ciascuno degli intervalli $i_j^{(R)}$ una funzione $u_R(s)$ assolutamente continua insieme con la propria derivata del primo ordine $u'_R(s)$, prendendo per $\tau = 0, 1, 2,\ldots, R-1$

$$u_R(a_{j,\tau}^{(R)}) = u'_R(a_{j,\tau}^{(R)}) = 0,$$

$$(14) \quad u''_R(s) = \lambda_0, \quad \text{per} \quad a_{j,\tau}^{(R)} \leqslant s < a_{j,\tau}^{(R)} + h_{j,1}^{(R)} \quad \text{e per} \quad a_{j,\tau}^{(R)} + h_{j,1}^{(R)} + h_{j,2}^{(R)} \leqslant s < a_{j,\tau+1}^{(R)},$$

$$(15) \quad u''_R(s) = -\omega_0, \quad \text{per} \quad a_{j,\tau}^{(R)} + h_{j,1}^{(R)} \leqslant s < a_{j,\tau}^{(R)} + h_{j,1}^{(R)} + h_{j,2}^{(R)},$$

ed osservando che è

$$\lim_{s \to a_{j,\tau+1}^{(R)} - 0} u_R(s) = \lim_{s \to a_{j,\tau+1}^{(R)} - 0} u'_R(s) = 0.$$

Pertanto il plurintervallo $\Delta_1^{(R)}$, costituito da quei punti degli intervalli $i_j^{(R)}$, $(j=1, 2,\ldots, \nu_R)$ nei quali ha luogo la (14), ha lunghezza $\left| \frac{\omega_0}{\lambda_0 + \omega_0} \right| \sum_{j=1}^{\nu_R} i_j^{(R)}$, mentre gli altri punti appartenenti agli intervalli ora indicati e nei quali ha luogo la (15) costituiscono un plurintervallo $\Delta_2^{(R)}$ di lunghezza $\left| \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \omega_0} \right| \sum_{j=1}^{\nu_R} i_j^{(R)}$.

Per ogni s di $i_j^{(R)}$, $(j=1, 2,\ldots, \nu_R)$ risulta

$$(16) \qquad | u_R(s) | \leq \frac{1}{8} \left| \frac{\lambda_0 \omega_0}{\lambda_0 + \omega_0} \right| \frac{[i_j^{(R)}]^2}{R^2}, \qquad | u'_R(s) | \leq \frac{1}{2} \left| \frac{\lambda_0 \omega_0}{\lambda_0 + \omega_0} \right| \frac{i_j^{(R)}}{R},$$

e quindi possiamo determinare un intero R_1, che supporremo non inferiore a R_0, in modo che in ciascuno degli intervalli ora indicati sia, per $R \geq R_1$,

$$(17) \qquad | u_R(s) | \leq \delta, \qquad | u'_R(s) | \leq \delta.$$

Rileviamo che, in base al modo in cui sono stati scelti l'insieme E' e il numero σ_0, i valori che $\theta_0(s)$ assume nei punti di $i_j^{(R)}$, $(j=1, 2,\ldots, \nu_R)$ sono tutti congrui rispetto al modulo 2π ai valori di un intervallo di ampiezza non superiore a $2\delta : (1+|\lambda_0|)$.

Se $\bar\theta$ è il centro di tale intervallo, posto

$$(18) \qquad v_1 = -\operatorname{sen} \bar\theta, \qquad v_2 = \cos \bar\theta,$$

per ogni s appartenente ad uno qualunque degli archi $i_j^{(R)}$, $(j=1, 2,\ldots, \nu_R)$ risulta

$$(19) \quad v_2 \cos \theta_0(s) - v_1 \operatorname{sen} \theta_0(s) = \cos(\bar\theta - \theta_0(s)) \geq \cos \frac{\delta}{1+|\lambda_0|} \geq 1 - \frac{\delta}{1+|\lambda_0|}.$$

Si definisca ora una curva ([12])

$$\mathcal{C}_{0,R}^{(2)}: \qquad x = x_{0,R}(s), \qquad y = y_{0,R}(s), \qquad (0 \leq s \leq L),$$

ponendo

$$x_{0,R}(s) = x_R(s) + v_1 u_R(s), \qquad y_{0,R}(s) = y_R(s) + v_2 u_R(s),$$

per ogni s di $i_j^{(R)}$, $(j=1, 2,\ldots, \nu_R)$, e nelle parti rimanenti di $(0, L)$

$$x_{0,R}(s) = x_0(s), \qquad y_{0,R}(s) = y_0(s).$$

Per le (9), (17) e (18) è in tutto $(0, L)$

$$| x_{0,R}(s) - x_0(s) | \leq 2\delta, \qquad | y_{0,R}(s) - y_0(s) | \leq 2\delta,$$
$$| x'_{0,R}(s) - x'_0(s) | \leq 2\delta, \qquad | y'_{0,R}(s) - y'_0(s) | \leq 2\delta,$$

e quindi la curva $\mathcal{C}_{0,R}^{(2)}$ appartiene al campo A, inoltre in virtù delle (10), (14) e (15) le funzioni $x_{0,R}(s)$, $y_{0,R}(s)$ risultano assolutamente continue insieme con

---

([12]) È evidente che, nella rappresentazione della curva $\mathcal{C}_{0,R}^{(2)}$, il parametro s non rappresenta la lunghezza dell'arco rettificato della curva stessa.

le loro derivate del primo ordine ed esiste finito l'integrale $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}_{0,R}}$, e infine, siccome per ogni $R \geqslant R_1$ risulta ([13])

$$\sqrt{x'^2_{0,R}(s) + y'^2_{0,R}(s)} \geqslant \frac{3}{4} - \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

in base all'osservazione fatta al n. 1, β) possiamo concludere che $\mathcal{C}^{(2)}_{0,R}$ è una curva ordinaria $\mathcal{C}^{(2)}$.

Indicato con $\theta^*_{0,R}(s)$ il valore della curvatura lungo la curva $\mathcal{C}^{(2)}_{0,R}$, risulta per ogni s di $i^{(R)}_j$, $(j=1, 2, \dots, \nu_R)$

$$|\,\theta^*_{0,R}(s)\,| \leqslant 57(N + |\,\lambda_0\,|) + 15, \tag{20}$$

mentre per ogni altro s di $(0, L)$ è evidentemente $\theta^*_{0,R}(s) = \theta'_0(s)$.

Infine, chiamata $E^{(\Delta)}$ quella parte di $E^{(R)}$ che è contenuta in $\Delta^{(R)}_1$, e tenuta presente la (19), è possibile determinare un intero positivo R_2, che supporremo non inferiore a R_1, in modo che per $R \geqslant R_2$ sia per ogni s di $E^{(\Delta)}$ ([14])

$$|\,\theta^*_{0,R}(s) - \theta^*_R(s) - \lambda_0\,| \leqslant 2\delta, \tag{21}$$

([13]) Anche qui e nel seguito omettiamo tutti i calcoli, limitandoci a rilevare che, siccome, per $R \geqslant R_1$, è

$$\frac{1}{2}\left|\frac{\lambda_0\omega_0}{\lambda_0+\omega_0}\right|\frac{i^{(R)}_j}{R} \leqslant \delta \leqslant \frac{1}{4},$$

risulta

$$\sqrt{x'^2_{0,R}(s) + y'^2_{0,R}(s)} \geqslant 1 - \sqrt{\left(\varphi'_R + v_1 u'_R\right)^2 + \left(\psi'_R + v_2 u'_R\right)^2} \geqslant 1 - \left(\sqrt{\varphi'^2_R + \psi'^2_R} + |\,u'_R\,|\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\right) \geqslant$$

$$\geqslant 1 - \left(\frac{11}{\mu' R}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\left|\frac{\lambda_0\omega_0}{\lambda_0+\omega_0}\right|\frac{i^{(R)}_j}{R}\right) \geqslant \frac{3}{4} - \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

ed anche

$$\sqrt{x'^2_{0,R}(s) + y'^2_{0,R}(s)} \leqslant 1 + \sqrt{\left(\varphi'_R + v_1 u'_R\right)^2 + \left(\psi'_R + v_2 u'_R\right)^2} \leqslant 1 + \frac{11}{\mu' R}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\left|\frac{\lambda_0\omega_0}{\lambda_0+\omega_0}\right|\frac{i^{(R)}_j}{R}.$$

([14]) Per giungere alla (21) basta osservare che risulta

$$\theta^*_{0,R} - \theta^*_R - \lambda_0 = \frac{\theta^*_R\left\{\left(x'^2_R + y'^2_R\right)^{\frac{3}{2}} - \left(x'^2_{0,R} + y'^2_{0,R}\right)^{\frac{3}{2}}\right\} + \left(v_1 y''_R - v_2 x''_R\right)u'_R}{\left(x'^2_{0,R} + y'^2_{0,R}\right)^{\frac{3}{2}}} +$$

$$+ \frac{\left(v_2 x'_R - v_1 y'_R\right)u''_R}{\left(x'^2_{0,R} + y'^2_{0,R}\right)^{\frac{3}{2}}} - \lambda_0,$$

ove $u''_R = \lambda_0$, e tenere presenti le disuguaglianze rilevate in ([13]) e le seguenti

$$\left|\sqrt{x'^2_R + y'^2_R} - \sqrt{x'^2_{0,R} + y'^2_{0,R}}\right| \leqslant \sqrt{v_1^2 + v_2^2}\,|\,u'_R\,| < \frac{1}{2}\left|\frac{\lambda_0\omega_0}{\lambda_0+\omega_0}\right|\frac{i^{(R)}_j}{R},$$

$$\left|v_2 x'_R - v_1 y'_R - \left(x'^2_{0,R} + y'^2_{0,R}\right)^{\frac{3}{2}}\right| < \left[1 + \frac{11}{\mu' R}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\left|\frac{\lambda_0\omega_0}{\lambda_0+\omega_0}\right|\frac{i^{(R)}_j}{R}\right]^3 - 1 + \frac{\delta}{1 + |\,\lambda_0\,|} + 2\,\frac{11}{\mu' R},$$

nell'ultima delle quali si è usufruito della (19).

ed anche per ogni s di $\Delta_2^{(R)}$,

$$(22) \qquad |\, \theta_{0,R}^*(s) - \theta_R^*(s) \,| \leqslant 2 \,|\, \omega_0 \,| .$$

Sia $R \geqslant R_2$, e si consideri la differenza $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathfrak{C}^{(2)}_{0,R}} - \mathfrak{J}^{(2)}_{\mathfrak{C}^{(2)}_0}$. Indicato con $C(E^{(\Delta)})$ il complementare di $E^{(\Delta)}$ rispetto a $\Delta_1^{(R)}$, abbiamo evidentemente:

$$\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathfrak{C}^{(2)}_{0,R}} - \mathfrak{J}^{(2)}_{\mathfrak{C}^{(2)}_0} = \sum_{j=1}^{\nu_R} \int_{a_j^{(R)}}^{b_j^{(R)}} [F(x_{0,R}, y_{0,R}, x'_{0,R}, y'_{0,R}, \theta^*_{0,R}) - F(x_0, y_0, x'_0, y'_0, \theta'_0)]\, ds =$$

$$= \sum_{j=1}^{\nu_R} \int_{a_j^{(R)}}^{b_j^{(R)}} [F(x_R, y_R, x'_R, y'_R, \theta^*_R) - F(x_0, y_0, x'_0, y'_0, \theta'_0)]\, ds +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\nu_R} \int_{a_j^{(R)}}^{b_j^{(R)}} [F(x_{0,R}, y_{0,R}, x'_{0,R}, y'_{0,R}, \theta^*_{0,R}) - F(x_R, y_R, x'_R, y'_R, \theta^*_{0,R})]\, ds +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\nu_R} \int_{a_j^{(R)}}^{b_j^{(R)}} (\theta^*_{0,R} - \theta^*_R) F_{\theta'}(x_R, y_R, x'_R, y'_R, \theta^*_R)\, ds +$$

$$+ \int_{E^{(\Delta)}} \mathcal{E}(x_R, y_R, x'_R, y'_R, \theta^*_R;\ \theta^*_{0,R})\, ds + \int_{C(E^{(\Delta)})} \mathcal{E}(...)\, ds + \int_{\Delta_2^{(R)}} \mathcal{E}(...)\, ds.$$

Posto

$$B_{R,1}(s) = \frac{x'_R y''_R - x''_R y'_R + (\nu_1 y''_R - \nu_2 x''_R) u'_R}{\{ [x'_R + \nu_1 u'_R]^2 + [y'_R + \nu_2 u'_R]^2 \}^{\frac{3}{2}}} - \frac{x'_R y''_R - x''_R y'_R}{(x'^2_R + y'^2_R)^{\frac{3}{2}}},$$

$$B_{R,2}(s) = \frac{\nu_2 x'_R - \nu_1 y'_R}{[x'^2_{0,R} + y'^2_{0,R}]^{\frac{3}{2}}},$$

abbiamo

$$(23) \quad \sum_{j=1}^{\nu_R} \int_{a_j^{(R)}}^{b_j^{(R)}} (\theta^*_{0,R} - \theta^*_R) F_{\theta'}\, ds = \sum_{j=1}^{\nu_R} \int_{a_j^{(R)}}^{b_j^{(R)}} B_{R,1}(s) F_{\theta'}\, ds + \sum_{j=1}^{\nu_R} \int_{a_j^{(R)}}^{b_j^{(R)}} B_{R,2}(s) u''_R(s) F_{\theta'}\, ds.$$

In virtù della seconda delle (16), tenendo presenti le (10) e (11) ed applicando all'ultima somma della (23) un noto lemma del TONELLI ([15]), è possibile

---

([15]) Vedi L. TONELLI, opera cit. in ([6]), Vol. I, n. 79, pp. 213-217. Si prenda $y(x) \equiv u'_R(s)$; $f(x) \equiv B_{r,2}(s) F_{\theta'}$, tenendo presente quanto abbiamo rilevato in ([13]).

determinare un intero R_3, che supporremo non inferiore a R_2, in modo che, per $R \geqslant R_3$, risulti

$$\left| \sum_{j=1}^{\nu_R} \int_{a_j^{(R)}}^{b_j^{(R)}} (\theta_{0,R}^*(s) - \theta_R^*(s)) F_{\theta'}(x_R, y_R, x_R', y_R', \theta_R^*) \, ds \right| < \varepsilon_0,$$

ed anche per la continuità della funzione F, in virtù delle (16) e tenendo presente la (20),

$$\left| \sum_{j=1}^{\nu_R} \int_{a_j^{(R)}}^{b_j^{(R)}} [F(x_{0,R}, y_{0,R}, x_{0,R}', y_{0,R}', \theta_{0,R}^*) - F(x_R, y_R, x_R', y_R', \theta_{0,R}^*)] \, ds \right| < \varepsilon_0.$$

Tenute presenti le (9), (12) e (21), per la (3) è

$$\int_{E^{(\Delta)}} \mathcal{E}(x_R, y_R, x_R', y_R', \theta_R^*;\ \theta_{0,R}^*) \, ds < -\eta m(E^{(\Delta)}) \leqslant -\eta \left[\left| \frac{\omega_0}{\lambda_0 + \omega_0} \right| \sum_{j=1}^{\nu_R} i_j^{(R)} - \sigma_0 \right],$$

e siccome in ogni punto di $C(E^{(\Delta)})$, la cui misura non supera σ_0, il massimo modulo della $\mathcal{E}$ risulta non superiore a M, in virtù della terza delle (7) abbiamo

$$\left| \int_{C(E^{(\Delta)})} \mathcal{E}(x_R, y_R, x_R', y_R', \theta_R^*;\ \theta_{0,R}^*) \, ds \right| < \varepsilon_0.$$

Infine, tenuto conto della formula di definizione della funzione $\mathcal{E}$, per il teorema del valor medio è

$$\int_{\Delta_2^{(R)}} \mathcal{E}(x_R, y_R, x_R', y_R', \theta_R^*;\ \theta_{0,R}^*) \, ds =$$

$$= \int_{\Delta_2^{(R)}} (\theta_{0,R}^* - \theta_R^*)[F_{\theta'}(x_R, y_R, x_R', y_R', \theta_R^* + \chi(\theta_{0,R}^* - \theta_R^*)) - F_{\theta'}(x_R, y_R, x_R', y_R', \theta_R^*)] \, ds,$$

ove $O < \chi < 1$, e quindi, tenuta presente la (22), per la (4) risulta

$$\int_{\Delta_2^{(R)}} \mathcal{E}(x_R, y_R, x_R', y_R', \theta_R^*;\ \theta_{0,R}^*) \, ds \leqslant 2 \left| \omega_0 \right| \frac{\eta}{4 \left| \lambda_0 \right|} \int_{\Delta_2^{(R)}} ds = \frac{\eta}{2} \left| \frac{\omega_0}{\lambda_0 + \omega_0} \right| \sum_{j=1}^{\nu_R} i_j^{(R)}.$$

Pertanto, in virtù della (13), e tenendo poi conto della prima delle (7), del fatto che gli intervalli $i_j^{(R)}$, $(j = 1, 2, \ldots, \nu_R)$ ricoprono l'insieme $E^{(R)}$ la cui misura è non inferiore a $\frac{1}{2}\mu'$, e infine della seconda delle (5) si conclude che per $R \geqslant R_3$, è

$$\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}_{0,R}} - \mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}_0} < 6\varepsilon_0 - \eta\left[\left|\frac{\omega_0}{\lambda_0+\omega_0}\right|\sum_{j=1}^{\nu_R} i_j^{(R)} - \sigma_0\right] + \frac{\eta}{2}\left|\frac{\omega_0}{\lambda_0+\omega_0}\right|\sum_{j=1}^{\nu_R} i_j^{(R)} <$$

$$< 7\varepsilon_0 - \frac{\eta}{2}\left|\frac{\omega_0}{\lambda_0+\omega_0}\right|\frac{\mu'}{2} \leqslant -\frac{\mu'\eta}{8}\left|\frac{\omega_0}{\lambda_0+\omega_0}\right| .$$

Ma in base al modo in cui è stata definita la curva $\mathcal{C}^{(2)}_{0,R}$, preso $\varrho > 0$ ad arbitrio possiamo determinare un $R' \geqslant R_3$ in modo che, per ogni $R \geqslant R'$, la curva $\mathcal{C}^{(2)}_{0,R}$ appartenga all'intorno $(\varrho)^2$ della $\mathcal{C}^{(2)}_0$, [16], e quindi l'integrale $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$ non risulta semicontinuo inferiormente sulla curva $\mathcal{C}^{(2)}_0$.

Il teorema enunciato è così completamente provato.

OSSERVAZIONE. - È bene tener presente, per il seguito, che ogni curva $\mathcal{C}^{(2)}_{0,R}$ ha gli stessi punti terminali della $\mathcal{C}^{(2)}_0$, e che in ciascuno di tali punti tutte le curve $\mathcal{C}^{(2)}_{0,R}$ sono tangenti alla $\mathcal{C}^{(2)}_0$.

3. - Corollari.

a) Se alle condizioni del n. 1, *a*) si aggiunge, soltanto nel presente capoverso, l'ipotesi che la funzione F ammetta, per tutte le quintuple (x, y, x', y', θ') allora indicate, finita e continua anche la derivata parziale $F_{\theta'\theta'}$, dal teorema del n. 2 segue, come caso particolare, che:

condizione necessaria affinchè l'integrale $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$ sia una funzione semicontinua inferiormente sulla curva ordinaria $\mathcal{C}^{(2)}_0$, supposta completamente interna al campo A, è che l'insieme dei punti $(x_0(s), y_0(s))$ di $\mathcal{C}^{(2)}_0$, nei quali esiste finita la curvatura $\theta_0'(s)$ e non è verificata la disuguaglianza

$$F_{\theta'\theta'}(x_0(s), y_0(s), x_0'(s), y_0'(s), \theta_0'(s)) \geqslant 0 \tag{24}$$

sia uno pseudoarco di misura nulla.

---

[16] Basta tener presente che, indicata con σ_R la lunghezza dell'arco rettificato della curva $\mathcal{C}^{(2)}_{0,R}$, contata a partire dal valore $s=0$, è

$$\sigma_R(s) = \int_0^s \sqrt{x'^2_{0,R}(s) + y'^2_{0,R}(s)}\, ds,$$

e quindi risulta (cfr. nota [13])

$$1 - \left[\frac{11}{\mu' R}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\left|\frac{\lambda_0\omega_0}{\lambda_0+\omega_0}\right|\frac{i_j^{(R)}}{R}\right] \leqslant \frac{d\sigma_R(s)}{ds} \leqslant 1 + \left[\frac{11}{\mu' R}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\left|\frac{\lambda_0\omega_0}{\lambda_0+\omega_0}\right|\frac{i_j^{(R)}}{R}\right].$$

β) Dal teorema del n. 2 e dal n. 1, ζ) segue, in modo noto, che: *condizione necessaria affinchè l'integrale* $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathfrak{C}^{(2)}}$ *sia una funzione continua sulla curva ordinaria* $\mathfrak{C}_0^{(2)}$, *supposta completamente interna al campo* A, *è che, in tutti i punti della curva* $\mathfrak{C}_0^{(2)}$ *e per tutti i valori finiti di* θ', *la funzione* F *abbia la forma*

$$F(x, y, x', y', \theta') = P(x, y, x', y') + \theta' Q(x, y, x', y'),$$

ove ciascuna delle due funzioni P *e* Q *risulta positivamente omogenea di grado* 1 *rispetto alle variabili* x', y'.

γ) *Se la curvatura* $\theta_0'(s)$ *esiste finita e continua lungo tutta la curva* $\mathfrak{C}_0^{(2)}$, *le disuguaglianze* (24) *e* (1) *devono essere verificate in tutti i punti della curva stessa, intendendosi che la* (1) *abbia luogo per tutti i valori finiti di* θ'.

4. - La semicontinuità in tutto il campo.

α) Supposto che la funzione F soddisfi anche all'ipotesi indicata al n. 3, α), dal risultato del n. 2 segue che *condizione necessaria, affinchè l'integrale* $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathfrak{C}^{(2)}}$ *sia una funzione semicontinua inferiormente è che si abbia*

$$F_{\theta'\theta'}(x, y, x', y', \theta') \geqslant 0,$$

per ogni valore finito di θ' *e per ogni coppia normalizzata* x', y', *in tutti i punti* (x, y) *interni al campo* A *e in quelli di accumulazione di tali punti.*

β) Dal risultato del n. 2, in virtù dell'osservazione del n. 1, ζ), si deduce che, *se l'integrale* $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathfrak{C}^{(2)}}$ *è funzione continua, in ogni punto* (x, y) *interno al campo* A *e in quelli di accumulazione di tali punti, per ogni coppia* x', y' *normalizzata e per ogni valore finito di* θ' *la funzione* F *deve avere la forma seguente*

$$F(x, y, x', y', \theta') = P(x, y, x', y') + \theta' Q(x, y, x', y'),$$

ove ciascuna delle due funzioni P, Q *risulta positivamente omogenea di grado* 1 *rispetto alle variabili* x', y'.

5. - Condizioni necessarie per l'esistenza del minimo.

α) LA CONDIZIONE DI LEGENDRE. - Si supponga che la funzione F soddisfi anche all'ipotesi indicata al n. 3, α), e *sia*

$$\mathfrak{C}_0^{(2)}: \qquad x = x_0(s), \quad y = y_0(s), \quad (0 \leqslant s \leqslant L)$$

una curva ordinaria $\mathfrak{C}^{(2)}$ *minimante* $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathfrak{C}^{(2)}}$ *in una classe* $K^{(2)}$ *di curve ordinarie* $\mathfrak{C}^{(2)}$; *allora in quasi tutto ogni suo arco* $\bar{\mathfrak{C}}$, *tale che ogni suo punto, ad eccezione al più di quelli terminali, sia interno al campo* A *e di indifferenza rispetto al campo* A *e alla classe* $K^{(2)}$, *deve essere soddisfatta la disuguaglianza*

$$F_{\theta'\theta'}(x_0(s),\, y_0(s),\, x_0'(s),\, y_0'(s),\, \theta_0'(s)) \geqslant 0. \tag{25}$$

Basta ripetere, per la dimostrazione, un ragionamento del TONELLI [17] tenendo presente l'osservazione che abbiamo fatta alla fine del numero 2.

β) LA CONDIZIONE DI WEIERSTRASS. - Supposto che la funzione F soddisfi soltanto alle ipotesi del n. 1, a) e ferme restando tutte le altre ipotesi fatte al capoverso a) del presente numero, *in quasi tutto l'arco* $\bar{\mathfrak{C}}$ *deve essere soddisfatta, per tutti i valori finiti di* $\breve{\theta}$, *la disuguaglianza*

$$\mathcal{E}(x_0(s),\, y_0(s),\, x_0'(s),\, y_0'(s),\, \theta_0'(s)\,;\, \breve{\theta}') \geqslant 0. \tag{26}$$

γ) OSSERVAZIONE. - *Se lungo tutto l'arco* $\bar{\mathfrak{C}}$ *di cui ai capoversi* a) *e* β) *del presente numero la curvatura esiste finita e continua, le disuguaglianze* (25) *e* (26) *devono essere verificate in tutti i punti dell'arco stesso.*

6. - Esempio.

Vogliamo mostrare con il seguente esempio come sopra una curva, minimante $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathfrak{C}^{(2)}}$ in una classe $K^{(2)}$ di curve ordinarie $\mathfrak{C}^{(2)}$ e tutta costituita di punti interni al campo A e, ad eccezione al più di quelli terminali, di indifferenza rispetto ad A e alla classe $K^{(2)}$, possano esistere effettivamente dei punti in cui non è verificata nè la (25) nè la (26).

Sia A il campo costituito da tutto il piano (x, y), sia

$$F(x, y, x', y', \theta') = \frac{\left(\theta' - \frac{2}{3}\right)^2 (\theta' - 2)^2}{\sqrt{2(\theta'^2 + 1)} - 1} \sqrt{x'^2 + y'^2},$$

e, considerato l'arco di circonferenza

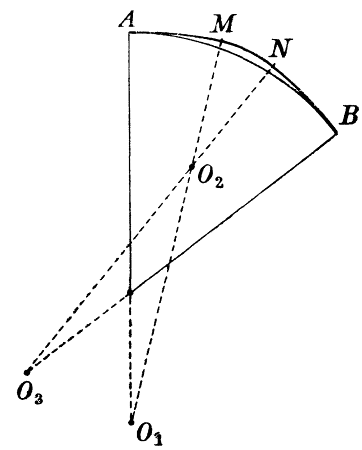
$$\Gamma: \qquad x = \operatorname{sen} t, \qquad y = \cos t, \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1),$$

sia $K^{(2)}$ la classe costituita da tutte le curve ordinarie $\mathfrak{C}^{(2)}$ che hanno gli stessi punti terminali di Γ, e che in ciascuno di essi sono tangenti a Γ.

Suddividiamo l'arco Γ mediante la successione di punti $t = \frac{r-1}{r}$, $(r = 1, 2, \ldots)$,

[17] Vedi L. TONELLI, opera cit. in [6], Vol. II, n. 28, p. 85.

e sostituiamo a ciascuno degli archi $\Gamma_r \equiv \left(\frac{r-1}{r} \leqslant t \leqslant \frac{r}{r+1}\right)$ tre archi di circonferenza $G_{r,1}$, $G_{r,2}$, $G_{r,3}$ di raggi $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ rispettivamente e i cui angoli al centro abbiano ampiezze $\varphi_{r,1}$, $\varphi_{r,2}$, $\varphi_{r,3}$ in modo che (cfr. figura):



1°) i centri delle tre circonferenze cui appartengono gli archi $G_{r,1}$, $G_{r,2}$, $G_{r,3}$ siano interni al cerchio cui appartiene Γ;

2°) la somma $\varphi_{r,1} + \varphi_{r,2} + \varphi_{r,3}$ sia uguale all'angolo al centro di Γ_r;

3°) $G_{r,1}$ e Γ_r siano tangenti nei loro primi punti terminali; $G_{r,3}$ e Γ_r siano tangenti nei loro secondi punti terminali; il primo punto terminale di $G_{r,2}$ coincida con il secondo punto terminale di $G_{r,1}$, e $G_{r,1}$ e $G_{r,2}$ siano ivi tangenti, e infine il secondo punto terminale di $G_{r,2}$ coincida con il primo punto terminale di $G_{r,3}$, e $G_{r,2}$ e $G_{r,3}$ siano ivi tangenti. Risulta

$$\varphi_{r,1} = \varphi_{r,3} = \frac{1}{2r(r+1)} - \text{arc sen} \frac{1}{2} \text{sen} \frac{1}{2r(r+1)}, \qquad \varphi_{r,2} = 2\text{arc sen} \frac{1}{2} \text{sen} \frac{1}{2r(r+1)}.$$

L'insieme di tutti gli archi $G_{r,i}$, $(r=1, 2, \ldots;\ i=1, 2, 3)$ costituisce una curva

$$\mathcal{C}_0^{(2)} \qquad x = x_0(t), \qquad y = y_0(t), \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

di lunghezza finita, la quale risulta una curva ordinaria $\mathcal{C}^{(2)}$, e, tenuto presente che in base alla costruzione fatta $\mathcal{C}_0^{(2)}$ e Γ risultano tangenti anche nei loro secondi punti terminali, possiamo concludere che $\mathcal{C}_0^{(2)}$ appartiene alla classe $K^{(2)}$.

Fatta eccezione per i punti di uno pseudoarco di misura nulla, la curvatura esiste finita su $\mathcal{C}_0^{(2)}$ ed ha valore $\frac{2}{3}$, oppure 2; quindi è $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}_0^{(2)}} = 0$, e siccome F è non negativa si conclude che $\mathcal{C}_0^{(2)}$ è una curva minimante $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$.

Osserviamo che per $t=1$, la curvatura della curva $\mathcal{C}_0^{(2)}$ esiste finita ed è uguale a 1 ([18]). Quindi nel secondo punto terminale della curva minimante $\mathcal{C}^{(2)}$

([18]) Infatti, se t_1 è compreso fra $\frac{n-1}{n}$ e $\frac{n}{n+1}$, e $\frac{1}{R_{t_1,1}}$ è la curvatura media dell'arco che ha come punti terminali $(x_0(t_1), y_0(t_1))$ e $(x_0(1), y_0(1))$, posto

$$P_n = \frac{\sum_{r=n+1}^{\infty} (\varphi_{r,1} + \varphi_{r,2} + \varphi_{r,3})}{\sum_{r=n}^{\infty} \left[\frac{3}{2}(\varphi_{r,1} + \varphi_{r,3}) + \frac{1}{2}\varphi_{r,2}\right]}, \qquad Q_n = \frac{\sum_{r=n}^{\infty} (\varphi_{r,1} + \varphi_{r,2} + \varphi_{r,3})}{\sum_{r=n+1}^{\infty} \left[\frac{3}{2}(\varphi_{r,1} + \varphi_{r,3}) + \frac{1}{2}\varphi_{r,2}\right]},$$

risulta

$$F_{\theta'\theta'} = -\frac{7}{6}, \qquad \mathcal{E} = \frac{\left(\tilde{\theta}' - \frac{2}{3}\right)^2 (\tilde{\theta}' - 2)^2}{\sqrt{2(\tilde{\theta}'^2 + 1)} - 1} - \frac{1}{3}\tilde{\theta}' + \frac{2}{9},$$

vale a dire la derivata parziale seconda $F_{\theta'\theta'}$ è negativa e anche la funzione $\mathcal{E}$ di WEIERSTRASS risulta negativa per opportuni valori di $\tilde{\theta}'$ (per esempio per $\tilde{\theta}' = 2$).

---

abbiamo

(27) $$P_n \leqslant \frac{1}{R_{t_1, 1}} \leqslant Q_n .$$

Per $\alpha \geqslant 0$ è

$$0 \leqslant \alpha - 2 \text{ arc sen } \frac{1}{2} \text{ sen } \alpha < \frac{2}{5}\alpha^3,$$

e quindi risulta

$$P_n = \frac{\displaystyle\sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{1}{r(r+1)}}{\displaystyle\sum_{r=n}^{\infty}\left[\frac{3}{2}\frac{1}{r(r+1)} - 2 \text{ arc sen } \frac{1}{2} \text{ sen } \frac{1}{2r(r+1)}\right]} = \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n} + \displaystyle\sum_{r=n}^{\infty}\left[\frac{1}{2r(r+1)} - 2 \text{ arc sen } \frac{1}{2} \text{ sen } \frac{1}{2r(r+1)}\right]} >$$

$$> \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{5}\displaystyle\sum_{r=n}^{\infty} \frac{1}{8r^3(r+1)^3}} > \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{20}\dfrac{1}{n^2(n+1)^2}\displaystyle\sum_{r=n}^{\infty}\frac{1}{r(r+1)}} = \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{20n^3(n+1)^2}}$$

$$Q_n = \frac{\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n+1} + \displaystyle\sum_{r=n+1}^{\infty}\left[\frac{1}{2r(r+1)} - 2 \text{ arc sen } \frac{1}{2} \text{ sen } \frac{1}{2r(r+1)}\right]} < \frac{n+1}{n},$$

da cui

$$\lim_{n \to \infty} P_n \geqslant 1, \qquad \lim_{n \to \infty} Q_n \leqslant 1.$$

Ma siccome, per $t_1 \to 1$, è $n \to \infty$, dalla (27) si conclude che la curvatura di $\mathcal{C}_0^{(2)}$, per $t = 1$, è uguale a 1.