ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LAMBERTO CESARI

Criteri di uguale continuità ed applicazioni alla quadratura delle superficie

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 12, nº 1-2 (1943), p. 61-84

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1943_2_12_1-2_61_0>

CRITERI DI UGUALE CONTINUITÀ ED APPLICAZIONI ALLA QUADRATURA DELLE SUPERFICIE

di LAMBERTO CESARI (Pisa) (¹)

Introduzione.

È noto quale difficoltà rappresenti l'assicurare l'uguale continuità di una data classe di funzioni. Per il caso di funzioni di più variabili H. LEBESGUE, nella sua classica memoria sul problema di DIRICHLET (²), ha inaugurato un procedimento che, in seguito, ha avuto le più brillanti applicazioni. Tale procedimento è stato infatti adoperato da H. COURANT in un problema sulla rappresentazione conforme (³) e da L. TONELLI, che si è servito di esso nella trattazione, con il metodo diretto del Calcolo delle Variazioni, dell'estremo assoluto degli integrali doppi (⁴) e del problema di PLATEAU (⁵).

Recentemente lo stesso procedimento è stato adoperato da C. B. MORREY (⁶) nelle sue ricerche topologiche sulle superficie continue.

Nel § 2 della presente memoria, facendo uso dello stesso procedimento del LEBESGUE, io stabilisco anzitutto alcuni criteri di uguale continuità analoghi a quelli di C. B. MORREY ma assai più comprensivi. Nel § 5, facendo uso del metodo diretto del Calcolo delle Variazioni, e applicando i suddetti criteri, ottengo alcune proposizioni sull'area delle superficie. Tra l'altro ottengo nel modo più immediato una proposizione sulla rappresentabilità delle superficie

---

(¹) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

(²) H. LEBESGUE: *Sur le problème de Dirichlet.* Rend. Circ. Mat. di Palermo, Tom. XXIV (2° sem. 1907), pp. 371-402.

(³) H. COURANT, 1915.

(⁴) L. TONELLI: *L'estremo assoluto degli integrali doppi.* Annali R. Scuola Normale Sup. di Pisa, ser. II, vol. II (1933), pp. 89-130.

(⁵) L. TONELLI: *Sul problema di Plateau.* Rend. R. Accad. Lincei, ser. VI, vol. XXIV, (1936), pp. 333-339, 393-398.

(⁶) C. B. MORREY: IV. *An analytic charactherisation of surfaces of finite Lebesgue area.* Amer. Journ. of Math. vol. LVII (1935); pp. 692-702. Si vedano dello stesso A. anche i seguenti lavori: I. *A class of representations of manifold,* id. id., vol. LV (1933), pp. 683-707; II. id. id. vol. LVII (1934), pp. 275-293; III. *The topology of (path) surfaces,* id. id., vol. LVII (1935), pp. 17-50; V. *An analytic charachterisation of surfaces of finite Lebesgue area,* id. id. vol. LVIII (1936), pp. 313-322.

poliedriche (del tipo topologico del disco circolare), che, pur essendo meno precisa di quella ben nota di H. A. SCHWARZ (7), è, per le attuali applicazioni alla quadratura delle superficie, di uguale utilità. Inoltre ritrovo una proposizione che era già stata data da C. B. MORREY con metodo analogo mediante i più ristretti criteri da lui stabiliti e cognizioni non elementari di topologia.

§ 1. - Generalità sulle superficie continue.

1. - Sia A una regione aperta di JORDAN del piano $\pi \equiv (u, v)$ e sia A^* la curva continua, semplice e chiusa costituente la sua frontiera. Sia $\bar{A} = A + A^*$ la regione chiusa di JORDAN corrispondente. Sia

$$(1) \qquad S: \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \qquad (u, v) \varepsilon \bar{A},$$

una superficie continua.

Ad ogni punto $P \equiv (u, v)$ di $\bar{A}$ corrisponde per le (1) un punto $Q \equiv (x, y, z)$ dello spazio (x, y, z) che dicesi l'immagine $Q = S(P)$ del punto P sulla superficie S. Ogni punto $Q \equiv (x, y, z)$ della superficie S è l'immagine di almeno un punto di $\bar{A}$. Diciamo $S^{-1}(Q)$ l'insieme di tutti i punti di A la cui immagine cade in Q. L'insieme $S^{-1}(Q)$ è chiuso e i suoi componenti sono, come è noto, dei continui. Indicheremo talvolta con $\{g\}_Q$ la collezione dei componenti dell'insieme chiuso $S^{-1}(Q)$.

Sia infine G la collezione di tutti i continui g di $\bar{A}$ che sono componenti di qualche insieme $S^{-1}(Q)$. Come è noto ogni punto di A appartiene ad uno e ad un solo continuo g di G e la collezione G è semicontinua superiormente (8). Inoltre i continui g di G sono i continui massimali di $\bar{A}$ sui quali le funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ sono (tutte e tre) costanti.

Ai punti di A^* corrispondono sulla superficie $\bar{S}$ i punti di una curva continua e chiusa C. Diremo talvolta che la superficie S si appoggia alla curva C.

2. - Sia I un insieme di punti di $\bar{A}$, sia $\bar{I}$ la sua chiusura e I^* la sua frontiera. Sia inoltre $\delta(I)$ il diametro di I.

Per ogni numero $0 < \delta \leqslant \delta(\bar{A})$ diciamo $\omega(\delta)$ il massimo dell'espressione:

$$(2) \quad \{S(P),\ S(P')\} \equiv \{[x(P)-x(P')]^2 + [y(P)-y(P')]^2 + [z(P)-z(P')]^2\}^{1/2}$$

per tutti i punti $P \equiv (u, v) \varepsilon \bar{A}$, $P' \equiv (u', v') \varepsilon \bar{A}$ tali che $\overline{PP'} \leqslant \delta$.

---

(7) H. A. SCHWARZ: *Gesammelte Abhandlungen.* Berlin, 1891.

(8) Cfr. L. CESARI: *Caratterizzazione analitica delle superficie continue di area finita secondo Lebesgue.* Annali R. Scuola Normale Sup. di Pisa, ser. II, vol. X (1942), pp. 253-295, vol. XI, pp. 1-42.

La funzione $\omega(\delta)$, $0<\delta\leqslant\delta(\bar{A})$ è continua e infinitesima con δ. Essa dicesi il *modulo di continuità* della rappresentazione (1) della superficie S.

Se I è un insieme di punti di A, diciamo poi $\eta(I)$ l'estremo superiore della (2) per tutti i punti $P \varepsilon I$, $P' \varepsilon I$. La quantità $\eta(I)$ dicesi l'*oscillazione* della rappresentazione (1) della superficie S nell'insieme I e, manifestamente,

$$\eta(I)\leqslant\eta[\delta(I)].$$

Per ogni insieme I di $\bar{A}$ si ha inoltre

$$\eta(I)=\eta(\bar{I}), \qquad \eta(I)\geqslant\eta(I^*).$$

Se

$$\{S\}\equiv\{S:\quad x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v),\qquad (u,v)\,\varepsilon\,\bar{A}\}$$

(è una classe di infinite superficie e le (infinite) funzioni $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ sono ugualmente continue in $\bar{A}$, diciamo $\omega(\delta)$ l'estremo superiore dell'espressione (2) per tutte le coppie di punti $P\varepsilon\bar{A}$, $P'\varepsilon\bar{A}$ tali che $\overline{PP'}\leqslant\delta$ e per tutte le superficie della classe. Allora la funzione $\omega(\delta)$ è continua ed infinitesima con δ. La funzione $\omega(\delta)$ si dice il comune modulo di continuità della classe $\{S\}$.

3. - Si dice che la superficie S è *di tipo A* se la relativa collezione G gode della seguente proprietà:

α) per ogni continuo g di G l'insieme aperto $\pi-g$ è semplicemente connesso.

Si dice che la superficie S è *non degenere* se la relativa collezione G gode delle seguenti proprietà:

α') per ogni continuo g di G l'insieme aperto $A-Ag$ è semplicemente connesso;

β') nessun continuo g di G contenga interamente A^*.

Si dimostra facilmente che se, per una data rappresentazione di una superficie S, sono soddisfatte le condizioni α (oppure α' e β'), allora ogni altra rappresentazione della stessa superficie verifica le stesse condizioni. In altre parole la proprietà di essere di tipo A, oppure non degenere, è una proprietà della superficie e non della sua rappresentazione.

4. - *Ogni superficie non degenere è una superficie di tipo A* e non viceversa. Vale inoltre la seguente proposizione:

Ogni superficie di tipo A che si appoggia ad una curva di Jordan è non degenere.

Dimostriamo quest'ultima proposizione.

Ragioniamo per assurdo e supponiamo, se possibile, che esista in G un continuo g non contenente interamente A^* e tale che l'insieme aperto $\pi-g$ sia semplicemente connesso mentre $A-Ag$ non sia semplicemente connesso. Siano α e β due componenti distinti di $A-Ag$ e $P_1 \varepsilon \alpha$, $P_2 \varepsilon \beta$ due loro punti.

Anzitutto α e β appartengono a $\pi-g$ e $\pi-g$ contiene punti di A^*. Ne segue che $\pi-g$ contiene i punti P_1 e P_2 e un punto Q esterno ad A.

Esistono perciò due poligonali semplici l_1 e l_2 congiungenti i punti P_1 e P_2 con Q e tutte costituite di punti di $\pi-g$. Siano Q_1 e Q_2 il primo punto in cui l_1 e rispettivamente l_2 incontra A^*. Diciamo l_1 e l_2 i semplici archi P_1Q_1 e P_2Q_2.

Manifestamente gli archi l_1 e l_2 appartengono rispettivamente ad α e β ad eccezione dei punti Q_1 e Q_2 che apppartengono ad α^* e β^*. I punti Q_1 e Q_2 dividono A^* in due archi che diremo γ_1 e γ_2.

Dimostriamo che γ_1 e γ_2 contengono entrambi punti di g. Infatti in caso contrario γ_1 avrebbe da g una distanza $\delta>0$. L'insieme dei punti di A che distano da γ_1 per meno di $\delta/2$ è aperto, non contiene punti di g, è connesso e contiene due punti Q_1' e Q_2' appartenenti ad l_1 e l_2 rispettivamente. Esiste perciò una poligonale λ, congiungente i punti Q_1' e Q_2' e tutta costituita di punti di tale insieme e quindi esiste anche una poligonale contenuta in $\lambda+l_1+l_2$, congiungente P_1 e P_2 e tutta costituita di punti di $A-Ag$, ciò che è impossibile perchè P_1 e P_2 appartengono a componenti distinti di questo insieme. Dunque γ_1 e γ_2 contengono punti di g. Siano R_1 e R_2 punti di $\gamma_1 g$ e $\gamma_2 g$. I punti R_1 e R_2 dividono A^* in due archi sui quali le funzioni x, y, z non sono tutte e tre costanti, altrimenti almeno uno dei punti Q_1 e Q_2 apparterrebbe a g. Ne segue che a R_1 e R_2 corrispondono su S punti distinti, ciò che è impossibile perchè R_1 e R_2 appartengono allo stesso continuo g di G.

§ 2. - Alcuni criteri di uguale continuità.

1. - Dimostreremo nei nn. 2-6 il seguente

TEOREMA I. - (*1° Criterio di uguale continuità*). *Siano*

(1) $S: \quad x=x(u,v), \quad y=y(u,v), \quad z=z(u,v), \qquad (u,v)\,\varepsilon\,\bar{A},$

(2) $S_n: \quad x=x_n(u,v), \quad y=y_n(u,v), \quad z=z_n(u,v), \qquad (u,v)\,\varepsilon\,\bar{A}, \quad n=1,2,\ldots,$

superficie di tipo A tali che, uniformemente in $\bar{A}$, *si abbia*

(3) $$\lim_{n\to\infty} x_n(u,v)=x(u,v), \quad \lim_{n\to\infty} y_n(u,v)=y(u,v), \quad \lim_{n\to\infty} z_n(u,v)=z(u,v).$$

Le superficie S_n *ammettano poi una rappresentazione*

(4) $S_n: \quad x=X_n(u,v), \quad y=Y_n(u,v), \quad z=Z_n(u,v), \quad (u,v)\,\varepsilon\,\bar{\mathfrak{C}}, \quad n=1,2,\ldots,$

nel cerchio unità $\bar{\mathfrak{C}}\equiv(u^2+v^2\leqslant 1)$ *con* $X_n(u,v)$, $Y_n(u,v)$, $Z_n(u,v)$ *funzioni assolutamente continue in* $\bar{\mathfrak{C}}$ *ed esista una costante finita M, indipendente* *da n, tale che*

$$(5)\qquad \iint_{\mathfrak{C}} [(\partial X_n/\partial u)^2 + ... + (\partial Z_n/\partial v)^2]\, du dv < M, \quad n=1, 2,.....$$

Allora le funzioni $X_n(u, v)$, $Y_n(u, v)$, $Z_n(u, v)$, $n=1, 2,....$, *sono ugualmente continue nell'interno di* $\mathfrak{C}$.

2. - Sia

$$\Sigma:\quad x=X(u, v), \quad y=Y(u, v), \quad z=Z(u, v), \qquad (u, v)\,\varepsilon\,\overline{\mathfrak{C}} \equiv (u^2+v^2 \leqslant 1)$$

una superficie qualsiasi di tipo A. Sia π il piano (u, v) e O il punto $(0, 0)$. Indicheremo nel seguito con $\mathfrak{C}$ l'insieme aperto dei punti (u, v) tali che $u^2+v^2<1$. Sia G la collezione dei continui g di $\bar{A}$ sui quali le tre funzioni X, Y, Z sono costanti. Per ogni continuo g di G l'insieme aperto $\pi - g$ è connesso. Siano $\omega(\delta)$ e $\eta(I)$ le quantità introdotte nel n. 2 del § 1.

Indichi $C(P, \varrho)$ il cerchio di centro P e raggio ϱ del piano π, $C^*(P, \varrho)$ la circonferenza di $C(P, \varrho)$ e sia $\bar{C}=C+C^*$. Siano $\lambda>0$, $0<\delta<1$, numeri reali e sia $\{C\}$ la classe di tutti i cerchi $C(P, \varrho)$, $P\,\varepsilon\,\mathfrak{C}$, $0<\varrho<1$, tali che

$$\overline{PO}+\varrho \leqslant 1-\delta, \qquad \eta[\bar{C}(P, \varrho)] \geqslant \lambda.$$

Se la classe $\{C\}$ non è vuota, risulta definita la quantità

$$\eta(\lambda, \delta) = \underset{C(P,\varrho)\subset\{C\}}{\text{extr. inf.}}\ \eta[C^*(P, \sigma)].$$

Dimostriamo che $\eta(\lambda, \delta)$ è un minimo. Infatti, in caso contrario, esisterebbero un punto $P_0\,\varepsilon\,\mathfrak{C}$ e un numero $0 \leqslant \varrho_0 \leqslant 1$ aventi la seguente proprietà: Ad ogni numero $\varepsilon>0$ arbitrario corrispondono infiniti cerchi $C(P, \varrho)$, $P\,\varepsilon\,\mathfrak{C}$, $0<\varrho<1$, per i quali

$$(6)\qquad \overline{PP_0}<\varepsilon, \quad |\varrho-\varrho_0|<\varepsilon, \quad \overline{PO}+\varrho\leqslant 1-\delta, \quad \eta[\bar{C}(P, \varrho)]\geqslant\lambda,$$
$$\eta[C^*(P, \varrho)]<\eta(\lambda, \delta)+\varepsilon.$$

Ogni punto di $\bar{C}(P, \varrho)$ e, rispettivamente, di $C^*(P, \varrho)$ dista da almeno un punto di $\bar{C}(P_0, \varrho_0)$ e $C^*(P_0, \varrho_0)$ per meno di 2ε e viceversa e quindi

$$\eta[\bar{C}(P, \varrho)] \leqslant \eta[\bar{C}(P_0, \varrho_0)]+2\omega(2\varepsilon), \quad \eta[C^*(P_0, \varrho_0)] \leqslant \eta C^*(P, \varrho)]+2\omega(2\varepsilon).$$

Ricordando le (6), e per l'arbitrarietà di ε, segue

$$\overline{P_0O}+\varrho_0 \leqslant 1-\delta, \quad \eta[\bar{C}(P_0, \varrho_0)]\geqslant\lambda, \quad \eta[C^*(P_0, \varrho)]\leqslant\eta(\lambda, \delta)$$

e quindi $C(P_0, \varrho_0)\subset\{C\}$ e infine $\eta(\lambda, \delta)\leqslant\eta[C^*(P_0, \varrho)]$. Si ha dunque in definitiva

$$\eta(\lambda, \delta)=\eta[C^*(P_0, \varrho)]$$

ciò che è assurdo perchè avevamo supposto che $\eta(\lambda, \delta)$ non fosse minimo.

Dimostriamo che $\eta(\lambda, \delta) > 0$. Infatti, in caso contrario, sulla circonferenza $C^*(P_0, \varrho_0)$ le funzioni X, Y, Z sarebbero costanti senza esserlo in tutto $\overline{C}$. Dunque $C^*(P_0, \varrho_0)$ apparterrebbe interamente ad un continuo g di G e l'insieme $\pi - g$, contenendo punti interni e punti esterni a C, non sarebbe connesso.

3. - Consideriamo ora le superficie

(1) S: $x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \qquad (u, v)\, \varepsilon\, \overline{A},$

(2) S_n: $x = x_n(u, v), \quad y = y_n(u, v), \quad z = z_n(u, v), \qquad (u, v)\, \varepsilon\, \overline{A}, \; n = 1, 2, \ldots.$

Poichè le funzioni x_n, y_n, z_n tendono uniformemente in $\overline{A}$ verso le funzioni x, y, z continue in $\overline{A}$, le funzioni $x, y, z, x_n, y_n, z_n, n = 1, 2, \ldots$, sono ugualmente continue in $\overline{A}$ e quindi (n. 2, § 1) risulta definita una unica funzione $\omega(\delta)$, continua e infinitesima con δ, che è comune modulo di continuità delle rappresentazioni (1) e (2) delle superficie S e S_n, $n = 1, 2, \ldots$. Diciamo inoltre $\eta_n(I)$ la quantità definita nel n. 2 del § 1 relativamente alla rappresentazione (2) della superficie S_n.

4. - Ricordiamo che le superficie S_n, $n = 1, 2, \ldots$, ammettono anche la rappresentazione

$$S_n: \quad x = X_n(u, v), \quad y = Y_n(u, v), \quad z = Z_n(u, v), \qquad (u, v)\, \varepsilon\, \overline{\mathfrak{C}}.$$

Sia $\overline{\eta}_n(\mathfrak{J})$ la relativa funzione introdotta nel n. 2 del § 1. Indicheremo infine con $\overline{\eta}_n(\lambda, \delta)$, quando essa risulti definita, la funzione introdotta nel n. 2 del presente paragrafo relativamente alla rappresentazione (4) della superficie S_n.

5. - Supponiamo che, per dati λ e δ, $\lambda > 0$, $0 < \delta < 1$, esistano infiniti valori di n per i quali la funzione $\overline{\eta}_n(\lambda, \delta)$ è definita.

Poniamo

$$\eta_0(\lambda, \delta) = \text{extr. inf. } \overline{\eta}_n(\lambda, \delta)$$

per tutti gli n per i quali $\overline{\eta}_n(\lambda, \delta)$ è definita. Dimostriamo che $\eta_0(\lambda, \delta) > 0$.

Ragioniamo per assurdo e sia, se possibile, $\eta_0(\lambda, \delta) = 0$. Esiste allora una successione di interi, che per semplicità vogliamo supporre coincidere con l'intera successione $n = 1, 2, \ldots$, tali che $\overline{\eta}(\lambda, \delta) < 1/n$. Esistono allora in $\mathfrak{C}$ certi cerchi $C(P_n, \varrho_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, tali che

$$\overline{OP}_n + \varrho_n \leqslant 1 - \delta, \quad \overline{\eta}_n[\overline{C}(P_n, \varrho_n)] \geqslant \lambda, \quad \overline{\eta}_n[C^*(P_n, \varrho_n)] < \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Per ogni n esiste, d'altra parte, una corrispondenza biunivoca e continua T_n tra $\overline{A}$ e $\overline{\mathfrak{C}}$ che trasforma A^* in $\mathfrak{C}^*$ e il verso positivo su A^* nel verso positivo su $\mathfrak{C}^*$ e tale che, se $P\, \varepsilon\, \overline{A}$ e $P'\, \varepsilon\, \overline{\mathfrak{C}}$ si corrispondono in T_n, si ha $\overline{QQ'} < \frac{1}{n}$, ove

$$Q \equiv [x_n(P), y_n(P), z_n(P)], \quad Q' \equiv [X_n(P'), Y_n(P'), Z_n(P')].$$

La trasformazione T_n fa corrispondere a $C^*(P_n, \varrho_n)$ e a $C(P_n, \varrho_n)$ una curva di JORDAN k_n^* di $\bar{A}$ e la relativa regione di JORDAN k_n. Inoltre, posto $\bar{k}_n = k_n + k_n^*$ si ha $\eta_n(\bar{k}_n) \geqslant \lambda - \frac{2}{n}$, $\eta_n(k_n^*) < \frac{1}{n} + \frac{2}{n} = \frac{3}{n}$.

Sia ora γ il più grande numero reale tale che $\omega(\gamma) \leqslant \lambda/8$ e sia $\bar{n}$ il più piccolo intero tale che $1/n \leqslant \lambda/8$. Per ogni $n \geqslant \bar{n}$ si ha $\eta_n(\bar{k}_n) \geqslant 6\lambda/8$, $\eta_n(k_n^*) \leqslant 3\lambda/8$. Siano ora Q_n e Q_n'' punti di $\bar{k}_n$ tali che $\{S_n(Q_n), S_n(Q_n'')\} \geqslant \lambda - 2/n$. Per ogni $n \geqslant \bar{n}$ almeno uno dei due punti Q_n e Q_n'' gode delle seguenti proprietà: per ogni punto Q di k_n^* si ha $\{S_n(Q_n), S_n(Q)\} > \lambda/8$. Infatti, in caso contrario, esisterebbero due punti $M_n \varepsilon k_n^*$ e $M_n'' \varepsilon k_n^*$ tali che $\{S_n(Q_n), S_n(M_n)\} \leqslant \lambda/8$, $\{S_n(Q_n''), S_n(M_n'')\} \leqslant \lambda/8$ e poichè $\{S_n(M_n), S_n(M_n'')\} \leqslant \eta_n(k_n^*) < 3/n$, si avrebbe

$$\frac{6\lambda}{8} \leqslant \lambda - \frac{2}{n} \leqslant \{S_n(Q_n), S_n(Q_n'')\} \leqslant \{S_n(Q_n), S_n(M_n)\} + \{S_n(M_n), S_n(M_n'')\} +$$
$$+ \{S_n(M_n''), S_n(Q_n'')\} < \frac{\lambda}{8} + \frac{\lambda}{8} + \frac{3}{n} \leqslant \frac{\lambda}{8} + \frac{\lambda}{8} + \frac{3\lambda}{8} = \frac{5\lambda}{8},$$

ciò che è assurdo. Diciamo Q_n quello dei punti Q_n e Q_n'' che gode della proprietà detta. Evidentemente il punto Q_n non può appartenere a k_n^* e quindi Q_n appartiene a k_n. Nel cerchio $U(Q_n, \gamma)$ non cadono punti di k_n^* perchè, se esistesse un punto $Q \varepsilon k_n^*$, $Q \varepsilon U(Q_n, \gamma)$, si avrebbe $\lambda/8 < \{S_n(Q_n), S_n(Q)\} \leqslant \omega(\gamma) \leqslant \lambda/8$ ciò che è impossibile. Dunque il cerchio $U(Q_n, \gamma)$ è completamente interno alla regione di JORDAN k_n. Sia ora Q_n' un punto di k_n^*.

Esistono in $\bar{A}$ tre punti Q_0, Q_0', Q_0'' e una successione di interi, che, per semplicità, supporremo coincidere con la intera successione $n = 1, 2, \ldots$, tali che

$$\lim_{n\to\infty} Q_n = Q_0, \quad \lim_{n\to\infty} Q_n' = Q_0', \quad \lim_{n\to\infty} Q_n'' = Q_0''.$$

Poniamo $\delta_n = \max[\overline{Q_n Q_0}, \overline{Q_n' Q_0'}, \overline{Q_n'' Q_0''}]$, $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$. La successione dei continui $\bar{k}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, e k_n^*, $n = 1, 2, \ldots$, soddisfano alle condizioni del teorema di ZORETTI ([9]) e quindi i loro insiemi di accumulazione $\bar{k}_0$ e k_0^* sono continui di $\bar{A}$. Manifestamente il cerchio $U(Q_0, \gamma)$ appartiene interamente a $\bar{k}_0$ e non contiene nel suo interno punti di k_0^*.

Dimostriamo che k_0^* separa i punti di $U(P_0, \gamma)$ dai punti esterni ad $\bar{A}$.

Infatti, in caso contrario, esisterebbe una poligonale semplice l priva di punti di k_0^* congiungente P_0 con un punto esterno ad $\bar{A}$. Ogni continuo k_n^* avrebbe però almeno un punto in comune con l. Sia Q_n^* il primo dei punti di l a partire da P_0 che appartiene a k_n^*. Manifestamente $Q_n^* P_0 \geqslant \gamma - \delta_n$ e $Q_n^* \varepsilon \bar{A}$. Esiste perciò su l almeno un punto di accumulazione Q_∞ dei punti Q_n^* e Q_∞ deve perciò appartenere a k^* contro il supposto.

([9]) Loc. cit. in ([8]), pag. 273.

Indichiamo con $\eta(I)$ la funzione relativa alla superficie S introdotta nel n. 2 del § 1. Poniamo inoltre

$$\varkappa_n = \max_{P \varepsilon \bar{A}} \{ x(P) - x_n(P)]^2 + [y(P) - y_n(P)]^2 + [z(P) - z_n(P)]^2 \}^{1/2}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Evidentemente $\lim_{n \to \infty} \varkappa_n = 0$.

Dimostriamo che $\eta(k_0^*) = 0$. Sia Q un punto di k^* e sia $\varepsilon > 0$ un numero arbitrario. Esistono allora in $U(Q, \varepsilon)$ punti Q_n^* appartenenti a continui k_n^* con n comunque grande. Se Q_n^* è uno di tali punti si ha

$$\begin{aligned} \{ S(Q),\ S(Q_0') \} &\leqslant \{ S(Q),\ S_n(Q) \} + \{ S_n(Q),\ S_n(Q_n^*) \} + \{ S_n(Q_n^*),\ S_n(Q_n') \} + \\ &+ \{ S_n(Q_n'),\ S_n(Q_0') \} + \{ S_n(Q_0'),\ S(Q_0') \} \varkappa \leqslant_n + \omega(\varepsilon) + \frac{3}{n} + \omega(\delta_n) + \varkappa_n . \end{aligned}$$

Ma n può essere scelto comunque grande e poichè $\delta_n \to 0$, $\varkappa_n \to 0$, $\omega(\delta_n) \to 0$, quando $n \to \infty$, si ha $\{ S(Q),\ S(Q_0') \} \leqslant \omega(\varepsilon)$ e, per l'arbitrarietà di ε, $\{ S(Q),\ S(Q_0') \} = 0$. Ma Q è un punto qualunque di k_0^* e quindi $\eta(k_0^*) = 0$.

Dimostriamo che $\eta(\bar{k}_0) \geqslant \lambda$. Si ha infatti, per ogni n,

$$\begin{aligned} \{ S(Q_0),\ S(Q_0'') \} &\geqslant \{ S_n(Q_n),\ S_n(Q_n'') \} - \{ S_n(Q_n) - S_n(Q_0) \} - \{ S_n(Q_0),\ S(Q_0) \} - \\ &- \{ S_n(Q_n''),\ S_n(Q_0'') \} - \{ S_n(Q_0''),\ S(Q_0'') \} \geqslant \lambda - \frac{2}{n} - 2\omega(\delta_n) - 2\varkappa_n , \end{aligned}$$

e quindi, quando $n \to \infty$, $\{ S(Q_0),\ S(Q_0'') \} \geqslant \lambda$ ossia $\eta(\bar{k}_0) \geqslant \lambda$.

Ne segue che k_0^* appartiene interamente ad un continuo g della collezione G relativa alla superficie S e $\pi - g$ contiene punti di $U(Q_0, \gamma)$ e punti esterni ad $\bar{A}$ i quali sono separati da g, ossia $\pi - g$ non è connesso, ciò che è impossibile. È così dimostrato che $\eta_0(\lambda, \delta > 0$.

6. - Dimostriamo ora che le funzioni X_n, Y_n, Z_n, $n = 1, 2, \ldots$, sono ugualmente continue nell'interno di $\mathfrak{C}$.

Infatti in caso contrario esisterebbero un punto P_0 interno a $\mathfrak{C}$, un numero $\lambda > 0$ e due successioni di punti P_{n_m}, P'_{n_m}, $m = 1, 2, \ldots$, tali che

$$\overline{P_0 P_{n_m}}, \quad \overline{P_0 P'_{n_m}} < 1/m, \qquad \{ S_{n_m}(P_{n_m}),\ S_{n_m}(P'_{n_m}) \} \geqslant \lambda .$$

Posto $2\delta = 1 - \overline{P_0 O}$ e indicato con $\bar{m}$ il più piccolo intero tale che $1/\bar{m} < \delta$, per ogni cerchio $C(P_0, \varrho)$ con $1/m \leqslant \varrho \leqslant \delta$, si ha

$$\overline{P_0 O} + \varrho < 1 - \delta, \quad \bar{\eta}_{n_m}[C(P_0, \varrho)] \geqslant \lambda, \qquad m \geqslant \bar{m}.$$

Ne segue che per ogni $m \geqslant \bar{m}$ sono definite le quantità $\bar{\eta}_{n_m}(\lambda, \delta)$. Esiste perciò un numero $\eta_0 > 0$ indipendente da m tale che $\eta_{n_m}(\lambda, \delta) \geqslant \eta_0$ e quindi, per ogni $m \geqslant \bar{m}$, $1/m \leqslant \varrho \leqslant \delta$,

$$\bar{\eta}_{n_m}[C^*(P_0, \varrho)] \geqslant \eta_0 > 0.$$

Introdotte coordinate polari (ϱ, ω) di centro P_0, su ogni circonferenza $C^*(P_0, \varrho)$ esiste un arco $[\omega(\varrho) \leqslant \omega \leqslant \omega_1(\varrho)]$ di ampiezza $\leqslant \varepsilon$, i punti estremi del quale hanno immagini sulla superficie S_{n_m} che distano l'uno dall'altro di almeno η_0.

Ne segue, per ogni m,

$$M \geqslant \iint_{C(P_0, \delta)} \sum \left[\left(\frac{\partial X_{n_m}}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial X_{n_m}}{\partial v} \right)^2 \right] du dv \geqslant$$

$$\geqslant \int_{1/m}^{\delta} \int_0^{2\pi} \left| \sum \left(\frac{\partial X_{n_m}}{\partial \varrho} \right)^2 + \sum \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial X_{n_m}}{\partial \omega} \right)^2 \right| \varrho d\varrho d\omega \geqslant \int_{1/m}^{\delta} \frac{d\varrho}{\varrho} \int_{\omega(\varrho)}^{\omega_1(\varrho)} \sum \left(\frac{\partial X_{n_m}}{\partial \omega} \right)^2 d\omega .$$

Per la disuguaglianza di SCHWARZ si ha

$$\int_{\omega(\varrho)}^{\omega_1(\varrho)} \left| \frac{\partial X_{n_m}}{\partial \omega} \right| d\omega \leqslant \left\{ \int_{\omega(\varrho)}^{\omega_1(\varrho)} \left(\frac{\partial X_{n_m}}{\partial \omega} \right)^2 d\omega \right\}^{1/2} \left\{ \omega_1(\varrho) - \omega_0(\varrho) \right\}^{1/2} \leqslant \pi^{1/2} \left\{ \int_{\omega(\varrho)}^{\omega_2(\varrho)} \left(\frac{\partial X_{n_m}}{\partial \omega} \right)^2 d\omega \right\}^{1/2}$$

e quindi

$$\int_{\omega(\varrho)}^{\omega_1(\varrho)} \sum \left(\frac{\partial X_{n_m}}{\partial \omega} \right)^2 d\omega \geqslant \frac{1}{\pi} \sum \left\{ \int_{\omega(\varrho)}^{\omega_1(\varrho)} \left| \frac{\partial X_{n_m}}{\partial \omega} \right| d\omega \right\}^2 \geqslant \frac{1}{\pi} \sum [X_{n_m}(\varrho, \omega_1(\varrho)) - X_{n_m}(\varrho, \omega(\varrho))]^2 \geqslant \frac{\eta_0^2}{\pi},$$

e infine

$$M \geqslant \frac{\eta_0^2}{\pi} \int_{1/m}^{\delta} \frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{\eta_0^2}{\pi} (\log \delta + \log m),$$

ciò che è impossibile se m è sufficientemente grande. Il teorema I è così dimostrato.

7\. - Dimostreremo nei nn. 8-10 il seguente

TEOREMA II. - (*2° Criterio di uguale continuità*). - *Siano*

(7) $\quad S: \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \qquad (u, v) \varepsilon \bar{A},$

(8) $\quad S: \quad x = x_n(u, v), \quad y = y_n(u, v), \quad z = z_n(u, v), \qquad (u, v) \varepsilon \bar{A}, \ n = 1, 2, \ldots$

superficie non degeneri tali che, uniformemente in $\bar{A}$, *si abbia*

$$\lim_{n \to \infty} x_n(u, v) = x(u, v), \quad \lim_{n \to \infty} y_n(u, v) = y(u, v), \quad \lim_{n \to \infty} z_n(u, v) = z(u, v).$$

Le superficie S_n *ammettano poi una rappresentazione*

(9) $\quad S_n: \quad x = X_n(u, v), \quad y = Y_n(u, v), \quad z = Z_n(u, v), \quad (u, v) \varepsilon \mathfrak{C}, \qquad n = 1, 2, \ldots$

nel cerchio unità $\mathfrak{C} \equiv (u^2 + v^2 \leqslant 1)$ *con* $X_n(u, v)$, $Y_n(u, v)$, $Z_n(u, v)$ *funzioni assolutamente continue in* $\mathfrak{C}$ *ed esista una costante finita* M, *indipendente da* n, *tale che*

$$\iint_{\mathfrak{C}} [(\partial X_n / \partial u)^2 + \ldots + (\partial Z_n / \partial v)^2] \, du dv < M, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Inoltre esistano tre punti P_1, P_2, P_3 *di* $\mathfrak{C}^*$ *le cui immagini* Q_{1n}, Q_{2n}, Q_{3n} *sulla superficie* S_n *tendano per* $n \to \infty$ *a tre punti* Q_1, Q_2, Q_3 **distinti.**

Allora le funzioni $X_n(u, v)$, $Y_n(u, v)$, $Z_n(u, v)$, $n=1, 2, \ldots$, *sono ugualmente continue in* $\mathfrak{C}$.

8. - Procederemo anche qui come per il teorema I. Sia

$$\Sigma: \quad x=X(u, v), \quad y=Y(u, v), \quad z=Z(u, v), \qquad (u, v) \,\varepsilon\, \overline{\mathfrak{C}} \equiv (u^2+v^2 \leqslant 1),$$

una superficie non degenere. Sia G la collezione dei continui g di $\mathfrak{C}$ sui quali le tre funzioni X, Y, Z sono costanti. Per ogni continuo g di G l'insieme aperto $\mathfrak{C}-\mathfrak{C}g$ è connesso e g non contiene interamente A^*. Siano $\omega(\delta)$ e $\eta(I)$ le funzioni introdotte nel n. 2 del § 1. Indichi $L(P, \varrho)$, $0<\varrho<2$, l'arco di cerchio avente il centro P sulla periferia $\mathfrak{C}^*$ di $\mathfrak{C}$ e raggio ϱ. Siano $H_i(P, \varrho)$ le due lunule nelle quali $L(P, \varrho)$ divide $\mathfrak{C}$ e precisamente sia $H_1(P, \varrho)$ quella delle due lunule che contiene P. Sia $\lambda>0$ un numero reale e $\{L\}$ la classe di tutti gli archi $L(P, \varrho)$, $P \,\varepsilon\, \mathfrak{C}^*$, $0<\varrho<2$, tali che

$$\eta(H_1) \geqslant \lambda, \qquad \eta(H_2) \geqslant \lambda.$$

Se la classe $\{L\}$ non è vuota risulta definita la funzione di λ

$$\eta(\lambda) = \underset{L(P,\varrho)\,\varepsilon\,\{L\}}{\text{extr. inf.}}\ \eta\,[L(P, \eta)].$$

Procedendo come nel n. 2 si dimostra anche qui che $\eta(\lambda)$ è un minimo e che $\eta(\lambda)>0$.

9. - Come nel n. 3 sia $\omega(\delta)$ il comune modulo di continuità delle rappresentazioni (7) e (8) delle superficie S e S_n, $n=1, 2, \ldots$. Sia inoltre $\eta_n(I)$ la funzione definita nel n. 2 del § 1 relativamente alla rappresentazione (8) della superficie S_n.

Considerate infine le rappresentazioni

$$(9) \qquad S_n: \quad x=X_n(u, v), \quad y=Y_n(u, v), \quad z=Z_n(u, v), \qquad (u, v) \,\varepsilon\, \overline{\mathfrak{C}},$$

delle superficie S_n, sia $\overline{\eta}_n(I)$ la funzione introdotta nel n. 2 del § 1.

Indicheremo inoltre con $\overline{\eta}_n(\lambda)$, quando risulti definita, la funzione introdotta nel n. 8.

Supponiamo ora che per un dato $\lambda>0$ esistano infiniti valori di n per i quali la funzione $\eta_n(\lambda)$ è definita. Poniamo

$$\eta_0(\lambda) = \text{extr. inf.}\ \overline{\eta}_n(\lambda)$$

per tutti gli n per i quali $\overline{\eta}(\lambda)$ è definita. In modo del tutto analogo a quanto si è fatto nel n. 5 si dimostra che $\eta_0(\lambda)>0$.

10. - Dimostriamo che le funzioni X_n, Y_n, Z_n, $n=1, 2, \ldots$, sono ugualmente continue in tutto $\mathfrak{C}$. Sappiamo già, in forza del teorema I, che le funzioni X_n, Y_n, Z_n, $n=1, 2, \ldots$, sono ugualmente continue nell'interno di $\mathfrak{C}$. Ragioniamo per assurdo e supponiamo che l'asserto non sia vero. Ne segue che debbono esistere un punto P_0 della periferia di $\mathfrak{C}$, un numero $\lambda>0$ e due successioni di punti P_{n_m}, P'_{n_m}, $m=1, 2, \ldots$, tali che

$$\overline{P_0 P_{n_m}}, \quad \overline{P_0 P'_{n_m}} > 1/m, \qquad \{ S_{n_m}(P_{n_m}), \quad S_{n_m}(P'_{n_m}) \} \geqslant \lambda .$$

Il punto P_0 è certamente *interno* ad uno dei due archi $\widehat{P_i P_j}$, $i \neq j$, $i, j=1, 2, 3$, individuati dai punti P_1, P_2, P_3 su $\mathfrak{C}^*$. Per fissare le idee sia P_0 interno all'arco $\widehat{P_1 P_2}$ ed esterno all'arco $P_2\widehat{P_3}P_1$.

Sia $\delta>0$ la distanza di P_0 dai punti P_1 e P_2 e sia $\mu>0$ la minima distanza tra i punti Q_1, Q_2, Q_3. Sia $\overline{m}$ il pù piccolo intero tale che per ogni $m \geqslant \overline{m}$ si abbia $1/m<\delta$, $Q_{rn_m} Q_r < \mu/3$, $r=1, 2, 3$. Per ogni $m \geqslant \overline{m}$ si ha quindi

$$\{ Q_{rn_m}, \quad Q_{r'n_m} \} \geqslant \mu/3, \qquad r \neq r', \qquad r, r'=1, 2, 3.$$

Ne segue che sull'arco $P_2\widehat{P_3}P_1$ la superficie S_{n_m}, $m \geqslant \overline{m}$, ha una oscillazione non minore di $\mu/3$. Sia $\lambda_0=\min[\lambda, \mu/3]$. Per tutti gli $m \geqslant \overline{m}$ è definita la funzione $\overline{\eta}_{n_m}(\lambda_0)$, inquantochè per ogni $1/m \leqslant \varrho \leqslant \delta_0$, l'arco $L(P_0, \varrho)$ divide $\overline{\mathfrak{C}}$ in due lunule H_1 e H_2 per le quali

$$\eta(H_1) \geqslant \lambda \geqslant \lambda_0, \qquad \eta(H_2) \geqslant \mu/3 \geqslant \lambda_0 .$$

Esiste perciò un numero $\eta_0>0$, indipendente da m, tale che, per ogni $m \geqslant \overline{m}$, si ha

$$\overline{\eta}_{n_m}(\lambda_0) \geqslant \eta_0, \qquad m=\overline{m}, \ \overline{m}+1, \ldots$$

e quindi

$$\overline{\eta}_{n_m}[L(P_0, \varrho)] \geqslant \eta_0 > 0, \qquad 1/m \leqslant \varrho \leqslant \delta, \qquad m \geqslant \overline{m} .$$

Introdotte coordinate polari (ϱ, ω) di centro P_0, su ogni arco $L(P_0, \varrho)$, $1/m \geqslant \varrho \geqslant \delta$ esiste un arco $[\omega(\varrho) \leqslant \omega \leqslant \omega_1(\varrho)]$ certamente di ampiezza $<\pi$, i punti estremi del quale hanno immagini sulla superficie S_{n_m} che distano l'una dall'altra di almeno η_0. Non c'è ora che da ripetere il ragionamento del n. 6 sostituendo la lunula $H_1(P_0, \delta)$ al cerchio $C(P_0, \delta)$.

Il teorema II è così completamente dimostrato.

§ 3. - Alcune proposizioni sull'area delle superficie.

TEOREMA I. - *Se*

$$S: \quad x=x(u,v), \quad y=y(u,v), \quad z=z(u,v), \qquad (u,v)\,\varepsilon\,\bar{A},$$

è una superficie continua di area finita secondo Lebesgue, se le funzioni $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$, sono dotate quasi ovunque in $\bar{A}$ di derivate parziali prime, allora

$$L(S)\geqslant G(S)\geqslant I(S), \tag{1}$$

ove

$$I(S)=\iint_{\bar{A}} \sqrt{EG-F^2}\,dudv,$$

$$E=x_u^2+y_u^2+z_u^2, \quad G=x_v^2+y_v^2+z_v^2, \quad F=x_u x_v+y_u y_v+z_u z_v$$

e la funzione $\sqrt{EG-F^2}$ è integrabile secondo Lebesgue.

La disuguaglianza $L(S)\geqslant I(S)$ è stata dimostrata da T. RADÓ ([10]); la disuguaglianza (1) più precisa trovasi dimostrata in un mio precedente lavoro ([11]).

2. - Dimostriamo ora il seguente

TEOREMA II. ([12]). - *Se*

$$S: \quad x=x(u,v), \quad y=y(u,v), \quad z=z(u,v), \qquad (u,v)\,\varepsilon\,\bar{A},$$

è una superficie continua, se le funzioni $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ sono assolutamente continue in $\bar{A}$ e le loro derivate parziali prime sono integrabili L^2 in $\bar{A}$, allora

$$L(S)=G(S)=I(S). \tag{2}$$

Siano A_m, $m=1, 2,\ldots,$ poligoni semplici, l'uno contenuto nel successivo e tutti interni ad A, tali che, detta A_m^* la poligonale semplice costituente il contorno di A_m, si abbia

$$\lim_{m\to\infty} \| A_m^*, A^* \| =0, \qquad \lim_{m\to\infty} | A_m |=| A |.$$

([10]) T. RADÓ: *On the derivative of the Lebesgue area of continuous surfaces.* Fund. Math. Tom. XXX (1938), pp. 34-39.

([11]) L. CESARI: *Sui fondamenti geometrici dell'integrale classico per l'area delle superficie in forma parametrica.* Memorie Reale Accademia d'Italia, vol. XIII, n. 24 (1943), pp. 1323-1483. Vedi § 7, Teor. VI, pag. 1426 e § 8, Teor. V, pag. 1452.

([12]) Questo teorema è dovuto a C. B. MORREY, loc. cit. in ([6]), I.

Siano x_n, y_n, z_n, i polinomi di STIELTJES di ordine n delle funzioni x, y, z. Come sappiamo, uniformemente in ciascun poligono A_m, si ha

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x\,, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y\,, \quad \lim_{n\to\infty} z_n = z,$$

e inoltre, per ogni poligono A_m,

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{A_m} (\partial X_n/\partial u)^2 du dv = \iint_{A_m} (\partial X/\partial u)^2 du dv, \ldots \quad (^{13}).$$

Se poi osserviamo che $\sqrt{EG-F^2} \leqslant \frac{1}{2}(E+G)$, da noti teoremi, segue pure, per ogni poligono A_m,

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{A_m} \sqrt{E_n G_n - F_n^2}\, du dv = \iint_{A_m} \sqrt{EG-F^2}\, du dv \quad (^{14}).$$

Diciamo ora S_{mn} e S_m, $n=1, 2, \ldots$, le superficie continue

$$\begin{array}{llllll} S_{mn}: & x = x_n(u,v), & y = y_n(u,v), & z = z_n(u,v), & (u,v)\,\varepsilon\,\bar{A}_m\,, & n=1,2\ldots \\ S_m: & x = x(u,v)\,, & y = y(u,v)\,, & z = z(u,v)\,, & (u,v)\,\varepsilon\,\bar{A}_m\,. & \end{array}$$

Quanto precede assicura che

$$(3) \qquad \lim_{n\to\infty} I(S_{mn}) = I(S_m), \qquad \lim_{n\to\infty} \| S_{mn}, S_m \| = 0.$$

Sono ora evidenti le seguenti relazioni

$$(4) \qquad \begin{cases} L(S_m) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} L(S_{mn}), \\ L(S_m) \leqslant L(S),\ m=1,2,\ldots,\ \lim_{m\to\infty} \| S_m, S \| = 0, \quad L(S) \leqslant \varliminf_{m\to\infty} L(S_m), \\ I(S_m) \leqslant I(S),\ m=1,2,\ldots,\ \lim_{m\to\infty} I(S_m) = I(S). \end{cases}$$

D'altra parte le superficie S_{mn} sono rappresentate da funzioni x_n, y_n, z_n, dotate in $\bar{A}_m$ di derivate parziali prime continue e quindi, per teoremi elementari,

$$(5) \qquad L(S_{mn}) = I(S_{mn}).$$

Dalla seconda delle (4) segue anzitutto

$$L(S) = \lim_{m\to\infty} L(S_m)$$

---

(13) L. TONELLI : *Sulla rappresentazione analitica delle funzioni di variabili reali.* Rend. Circ. Mat. di Palermo, Tom. XXIX (1910), pp. 1-36. S. CINQUINI : *Sull'approssimazione delle funzioni di due variabili.* Annali di Mat. pura e applicata, S. IV, Tom. XI (1933), pp. 295-323.

(14) S. CINQUINI, loc. cit. in (13).

e, in forza delle (3), (4), (5), si deduce

$$L(S)=\lim_{m\to\infty} L(S_m) \leqslant \varliminf_{m\to\infty} \varliminf_{n\to\infty} L(S_{mn}) = \varliminf_{m\to\infty} \varliminf_{n\to\infty} I(S_{mn}) = \varliminf_{m\to\infty} I(S_m) = I(S),$$

ossia $L(S) \leqslant I(S)$. Ma dal teorema I sappiamo che $I(S) \leqslant G(S) \leqslant L(S)$ e quindi $L(S)=G(S)=I(S)$. Il teorema II è con ciò dimostrato.

3. - *Definizione.* - Diremo che la rappresentazione

$$S: \quad x=x(u, v), \quad y=y(u, v), \quad z=z(u, v), \qquad (u, v)\,\varepsilon\,\bar{A},$$

della superficie continua S è *quasi conforme* se

a) le funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ sono assolutamente continue in $\bar{A}$;

b) le derivate parziali $x_u, x_v, \ldots, z_v$ sono integrabili L^2 in A;

c) quasi ovunque in A si ha $E=G$, $F=0$.

4. - Dimostriamo il seguente

TEOREMA III. ([15]) - *Se*

$$S: \quad x=x(u, v), \quad y=y(u, v), \quad z=z(u, v), \qquad (u, v)\,\varepsilon\,\bar{A},$$
$$S_n: \quad x=x_n(u, v), \quad y=y_n(u, v), \quad z=z_n(u, v), \qquad (u, v)\,\varepsilon\,\bar{A}, \quad n=1, 2, \ldots,$$

sono superficie continue e le considerate rappresentazioni delle superficie S_n, $n=1, 2, \ldots$, *sono quasi conformi, se*

$$\lim_{n\to\infty} x_n(u, v)=x(u, v), \quad \lim_{n\to\infty} y_n(u, v)=y(u, v), \quad \lim_{n\to\infty} z_n(u, v)=z(u, v),$$
$$\lim_{n\to\infty} L(S_n)=L(S), \quad L(S)<+\infty,$$

e i primi tre limiti valgono uniformemente in $\bar{A}$; *allora anche la considerata rappresentazione della superficie* S *è quasi conforme.*

Intanto per ogni n si ha

$$L(S_n)=\iint_A \sqrt{E_n G_n - F_n^2}\, du dv = \frac{1}{2}\iint_A (E_n+G_n)\, du dv.$$

Esiste perciò una costante M tale che, per ogni n,

$$\frac{1}{2}\iint_A (E_n+G_n)\, du dv \leqslant M.$$

Da noti teoremi seguono immediatamente *a*) e *b*) e inoltre

$$\frac{1}{2}\iint_A (E+G)\, du dv \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{2}\iint_A (E_n+G_n)\, du dv \quad (*).$$

([15]) Questo teorema è stato dato da C. B. MORREY, loc. cit. in ([6]), II.

([*]) Vedi L. TONELLI, loc. cit. in ([4]).

Ne segue

$$\frac{1}{2}\iint_A (E+G)\,dudv \leqslant \lim_{n\to\infty} L(S_n) = L(S) = \iint_A \sqrt{EG-F^2}\,dudv$$

e quindi

$$\frac{1}{2}\iint_A (E+G)\,dudv \leqslant L(S) = \iint_A \sqrt{EG-F^2}\,dudv.$$

Ma $\sqrt{EG-F^2} \leqslant \sqrt{EG} \leqslant \frac{1}{2}(E+G)$ e quindi

$$\frac{1}{2}\iint_A (E+G)\,dudv \geqslant \iint_A \sqrt{EG-F^2}\,dudv$$

e infine

$$\frac{1}{2}\iint_A (E+G)\,dudv = \iint_A \sqrt{EG-F^2}\,dudv$$

ossia

$$\iint_A \left\{ \frac{1}{2}(E+G) - \sqrt{EG-F^2} \right\} dudv = 0.$$

Ne segue che, quasi ovunque A, deve essere

$$\frac{1}{2}(E+G) = \sqrt{EG-F^2}$$

e quindi

$$(E-G)^2 + F^2 = 0.$$

È così dimostrato che, quasi ovunque in A, si ha $E=G$, $F=0$.

§ 4. Applicazione del metodo variazionale.

1. - Diremo nel seguito cerchio unità il cerchio $\overline{\mathfrak{C}} \equiv (u^2+v^2 \leqslant 1)$.

Dimostreremo nei nn. 2-5 il seguente

TEOREMA I. - *Ogni superficie poliedrica non degenere ammette una rappresentazione quasi conforme sul cerchio unità* ([16]).

2. - Sia

$$\Sigma: \quad x=X(u,v), \quad y=Y(u,v), \quad z=Z(u,v), \qquad (u,v)\,\varepsilon\,\overline{A},$$

una qualsiasi superficie poliedrica non degenere. Sia

$$C: \quad x=X(u,v), \quad y=Y(u,v), \quad z=Z(u,v), \qquad (u,v)\,\varepsilon\,A^*,$$

([16]) Questa proposizione è contenuta in una nota proposizione di H. A. SCHWARZ, loc. cit. in ([7]). La dimostrazione che noi diamo in questo lavoro del Teorema I è simile a quella di L. TONELLI, loc. cit. in ([5]).

la curva continua e chiusa (poligonale) sulla quale si appoggia la superficie poliedrica Σ.

Consideriamo la classe K di tutte le rappresentazioni

$$S=\Sigma: \quad x=x(u, v), \quad y=y(u, v), \quad z=z(u, v), \qquad (u, v)\,\varepsilon\,\overline{\mathfrak{C}}\equiv(u^2+v^2\leqslant 1)$$

della superficie Σ sul cerchio unità verificanti le seguenti condizioni:

a) le funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ sono assolutamente continue in $\overline{\mathfrak{C}}$;

b) le derivate parziali $x_u, x_v, \ldots, z_v$ sono integrabili L^2 in $\mathfrak{C}$.

La classe K non è vuota poichè Σ è una superficie poliedrica.

Diciamo $\mathfrak{J}_S$ l'integrale

$$\mathfrak{J}_S=\frac{1}{2}\iint_{\mathfrak{C}}(E+G)\,dudv=\frac{1}{2}\iint_{\mathfrak{C}}(x_u^2+x_v^2+y_u^2+y_v^2+z_u^2+z_v^2)\,dudv,$$

e sia I l'estremo inferiore dell'integrale $\mathfrak{J}_S$ nella classe K. Dimostreremo anzitutto che esiste in K almeno una superficie minimante S, cioè almeno una rappresentazione della superficie Σ che verifica le condizioni *a*) e *b*) per la quale $\mathfrak{J}_S$ assume il suo minimo valore I.

Sia $\overline{S}_1, \overline{S}_2, \ldots, \overline{S}_n, \ldots$ una successione minimizzante per $\mathfrak{J}_S$ in K.

Posto

$$\overline{S}_n: \quad x=\overline{x}_n(u, v), \quad y=\overline{y}_n(u, v), \quad z=\overline{z}_n(u, v), \qquad (u, v)\,\varepsilon\,\overline{\mathfrak{C}}, \; n=1, 2, \ldots,$$

possiamo supporre

$$\mathfrak{J}_{\overline{S}_n}\leqslant I+\frac{1}{n}, \qquad n=1, 2, \ldots.$$

Fissiamo su A^* tre punti distinti $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3$ ai quali corrispondono su C tre punti distinti Q_1, Q_2, Q_3. Per ogni rappresentazione $\overline{S}_n$ della superficie Σ possiamo scegliere tre punti P_{1n}, P_{2n}, P_{3n} di $\mathfrak{C}^*$ la cui immagine sulla superficie $\overline{S}_n$ coincide con i punti Q_1, Q_2, Q_3.

Siano P_1^*, P_2^*, P_3^* tre punti distinti di $\mathfrak{C}^*$. Mediante la trasformazione conforme del cerchio $\mathfrak{C}$ in se stesso che conduce i punti P_{1n}, P_{2n}, P_{3n} nei punti P_1^*, P_2^*, P_3^* possiamo trasformare le funzioni $\overline{x}_n, \overline{y}_n, \overline{z}_n$ in altre funzioni x_n, y_n, z_n in modo che le equazioni della superficie

$$S_n: \quad x=x_n(u, v), \quad y=y_n(u, v), \quad z=z_n(u, v), \qquad (u, v)\,\varepsilon\,\overline{\mathfrak{C}},$$

facciano corrispondere ai punti P_1^*, P_2^*, P_3^* della circonferenza $\mathfrak{C}^*$ i tre punti Q_1, Q_2, Q_3 distinti della curva C. Manifestamente

$$S_n=\overline{S}_n=\Sigma, \qquad \mathfrak{J}_{S_n}=\mathfrak{J}_{\overline{S}_n}$$

e quindi anche la successione delle S_n è minimizzante per $\mathfrak{J}_S$ in K.

In forza del teorema II del § 2 le funzioni x_n, y_n, z_n, $u^2+v^2\leqslant 1$, sono uniformemente continue in $\overline{\mathfrak{C}}$. Dalla successione delle S_n si può pertanto estrarre una successione parziale, che, per semplicità di scrittura, supporremo coincidere con quella di tutte le S_n^{**}, convergente uniformemente in tutto $\overline{\mathfrak{C}}$. Detta

$$(1) \qquad S^*: \quad x=x^*(u, v), \quad y=y^*(u, v), \quad z=z^*(u, v), \qquad (u, v)\,\varepsilon\,\overline{\mathfrak{C}},$$

la superficie limite a cui converge la successione delle S_n, le funzioni $x^*(u, v)$, $y^*(u, v)$, $z^*(u, v)$ sono continue in tutto $\overline{\mathfrak{C}}$ e, in forza di noti teoremi, assolutamente continue in $\overline{\mathfrak{C}}$ con derivate parziali prime integrabili L^2 in $\mathfrak{C}$ (*). Inoltre deve essere $\mathfrak{J}_{S^*} \leqslant I$.

Ora osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty} \| S_n, S^* \| = 0, \qquad \| S_n, \Sigma \| = 0,$$

e quindi, essendo, per ogni n,

$$\| S^*, \Sigma \| \leqslant \| S^*, S_n \| + \| S_n, \Sigma \|,$$

anche

$$\| S^*, \Sigma \| = 0.$$

In altre parole le (1) dànno una rappresentazione della superficie Σ che, per quanto si è detto sopra, appartiene alla classe K. Ne segue $I \leqslant \mathfrak{J}_{S^*}$ e quindi, in definitiva,

$$I = \mathfrak{J}_{S^*}.$$

La superficie S^* è dunque minimante per l'integrale $\mathfrak{J}_S$ nella classe K.

3. - Siano $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ funzioni continue e lipschitziane in $\overline{\mathfrak{C}}$. Inoltre φ e ψ siano nulle su $\mathfrak{C}^*$.

Intanto esiste un numero $M>0$ tale che, per ogni coppia di punti (u_1, v_1), (u_2, v_2) di $\overline{\mathfrak{C}}$, si ha

$$| \varphi(u_1, v_1) - \varphi(u_2, v_2) |, \quad | \psi(u_1, v_1) - \psi(u_2, v_2) | \leqslant M [| u_1 - u_2 | + | v_1 - v_2 |].$$

Sia $\varepsilon>0$ un parametro reale e sia T la trasformazione continua

$$(2) \qquad T: \quad \alpha = u + \varepsilon\varphi(u, v), \quad \beta = v + \varepsilon\psi(u, v), \qquad (u, v)\,\varepsilon\,\overline{\mathfrak{C}}.$$

Dimostriamo che, per ogni $|\varepsilon| < \frac{1}{2M}$, la trasformazione T è biunivoca. Ragioniamo per assurdo e supponiamo che, per un dato $|\varepsilon| < \frac{1}{2M}$, esistano in $\overline{\mathfrak{C}}$ due punti (u_1, v_1) e (u_2, v_2) *distinti* ai quali T fa corrispondere il medesimo punto (α, β). Ne segue

$$\alpha = u_1 + \varepsilon\varphi(u_1, v_1) = u_2 + \varepsilon\varphi(u_2, v_2),$$
$$\beta = v_1 + \varepsilon\psi(u_1, v_1) = v_2 + \varepsilon\psi(u_2, v_2)$$

(*) V. L. Tonelli, loc. cit. in (4).

e quindi, successivamente,

$$u_1-u_2=-\varepsilon[\varphi(u_1, v_1)-\varphi(u_2, v_2)], \quad v_1-v_2=-\varepsilon[\psi(u_1, v_1)-\psi(u_2, v_2],$$
$$|u_1-u_2|+|v_1-v_2|\leqslant|\varepsilon||\varphi(u_1, v_1)-\varphi(u_2, v_2)|+|\varepsilon||\psi(u_1, v_1)-\psi(u_2, v_2)|\leqslant$$
$$\leqslant 2M|\varepsilon|[|u_1-u_2|+|v_1-v_2|]<|u_1-u_2|+|v_1-v_2|,$$

ciò che è assurdo. È così dimostrato che T è biunivoca se $|\varepsilon|<1/2M$.

Supponiamo che i piani (α, β) e (u, v) siano sovrapposti e che gli assi u e α nonchè gli assi v e β coincidano. Poichè φ e ψ si annullano su $\mathfrak{C}^*$, la trasformazione T è identica su $\mathfrak{C}^*$. Dimostriamo che per ogni $|\varepsilon|<\frac{1}{2M}$ la trasformazione T trasforma $\overline{\mathfrak{C}}$ in se stesso.

Per ogni punto $Q\equiv(\alpha, \beta)$ di $\mathfrak{C}$ si ha $O(\alpha, \beta; \mathfrak{C}^*)=1$ e quindi ogni punto Q di $\mathfrak{C}$ è l'immagine di almeno un punto di $\mathfrak{C}$ e, per quanto si è visto avanti, di un solo punto di $\mathfrak{C}$. Resta da dimostrare che nessun punto di $\mathfrak{C}$ è trasformato in punti esterni a $\mathfrak{C}$. Esista infatti un punto $Q\equiv(\alpha, \beta)$ esterno a $\mathfrak{C}$ immagine di un punto $P\equiv(u, v)$ di $\overline{\mathfrak{C}}$.

Intanto P è interno a $\mathfrak{C}$ e l'insieme H dei punti di $\mathfrak{C}$ la cui immagine è esterna a $\mathfrak{C}$ è tutto costituito di punti interni a $\mathfrak{C}$, è aperto e contiene P. Sia α il componente di H che contiene P.

La frontiera di α contiene almeno un punto $\overline{P}$ interno a $\mathfrak{C}$ e l'immagine di $\overline{P}$ è un punto $\overline{Q}$ di $\mathfrak{C}^*$. Ne segue che $\overline{P}$ e $\overline{Q}$ hanno la stessa immagine $\overline{Q}$, ciò che è impossibile perchè $\overline{P}$ e $\overline{Q}$ sono certamente distinti.

È così dimostrato che per ogni $|\varepsilon|<1/2M$ la trasformazione T è biunivoca e continua in $\mathfrak{C}$ e identica in $\overline{\mathfrak{C}}^*$.

Dalle (2) ricaviamo

$$u=u(\alpha, \beta, \varepsilon), \qquad v=v(\alpha, \beta, \varepsilon),$$

con $u(\alpha, \beta, \varepsilon)$, $v(\alpha, \beta, \varepsilon)$ funzioni continue in $\overline{\mathfrak{C}}$. Dimostriamo che per ogni $|\varepsilon|<1/3M$ queste funzioni sono lipschitziane in $\overline{\mathfrak{C}}$. Dimostriamo più precisamente che, per ogni $|\varepsilon|<1/3M$ e per ogni coppia di punti (α_1, β_1) e (α_2, β_2) di $\overline{\mathfrak{C}}$, si ha

$$(3) \qquad \begin{cases} |u(\alpha_1, \beta_1, \varepsilon)-u(\alpha_2, \beta_2, \varepsilon)|\leqslant 3[|\alpha_1-\alpha_2|+|\beta_1-\beta_2|], \\ |v(\alpha_1, \beta_1, \varepsilon)-v(\alpha_2, \beta_2, \varepsilon)|\leqslant 3[|\alpha_1-\alpha_2|+|\beta_1-\beta_2|]. \end{cases}$$

Ragioniamo per assurdo e supponiamo che esistano un numero $|\varepsilon|<1/3M$ e due punti (α_1, β_1) e (α_2, β_2) distinti per i quali una delle (3), diciamo la prima, non è verificata. Siano (u_1, v_1) e (u_2, v_2) i punti che corrispondono ad (α_1, β_1) e (α_2, β_2). Si avrà

$$|u_1-u_2|>3[|\alpha_1-\alpha_2|+|\beta_1-\beta_2|],$$

e, dalle (2),

$$|u_1-u_2|>3\{|(u_1-u_2)+\varepsilon[\varphi(u_1, v_1)-\varphi(u_2, v_2)]|+|(v_1-v_2)+\varepsilon[\psi(u_1, v_1)-\psi(u_2, v_2)]|\},$$

e quindi, successivamente,

$$|u_1-u_2|>3\{|u_1-u_2|-|\varepsilon|M[|u_1-u_2|+|v_1-v_2|]+|v_1-v_2|-|\varepsilon|M[|u_1-u_2|+|v_1-v_2|]\},$$

$$|u_1-u_2|>3(1-2|\varepsilon|M)[|u_1-u_2|+|v_1-v_2|],$$

$$|u_1-u_2|>|u_1-u_2|+|v_1-v_2|,$$

ciò che è assurdo. Risulta così dimostrato che le funzioni $u(\alpha, \beta, \varepsilon)$ e $v(\alpha, \beta, \varepsilon)$ sono lipschitziane.

Poniamo ora

$$x^*[u(\alpha, \beta, \varepsilon), v(\alpha, \beta, \varepsilon)]\equiv x(\alpha, \beta, \varepsilon),$$
$$y^*[u(\alpha, \beta, \varepsilon), v(\alpha, \beta, \varepsilon)]\equiv y(\alpha, \beta, \varepsilon),$$
$$z^*[u(\alpha, \beta, \varepsilon), v(\alpha, \beta, \varepsilon)]\equiv z(\alpha, \beta, \varepsilon).$$

Queste funzioni di α e β risultano, per ogni $|\varepsilon|<1/3M$, assolutamente continue in $\overline{\mathfrak{C}}$ e dotate di derivate parziali prime integrabili L^2 in $\mathfrak{C}$.

Ne segue che le equazioni

$$S_\varepsilon: \quad x=x(\alpha, \beta; \varepsilon), \quad y=y(\alpha, \beta; \varepsilon), \quad z=z(\alpha, \beta; \varepsilon), \qquad (\alpha, \beta)\,\varepsilon\,\overline{\mathfrak{C}},$$

definiscono una rappresentazione della superfcie Σ appartenente alla classe K.

4\. - Indicato con $\mathfrak{J}_\varepsilon$ l'integrale $\mathfrak{J}_S$ relativo alla S_ε, si ha che, per $\varepsilon=0$, la S_ε diventa la S^* ed è $\mathfrak{J}_0=1$, e, dovendo essere per ogni ε sufficientemente piccolo $\mathfrak{J}_\varepsilon \geqslant I$, la derivata di $\mathfrak{J}_\varepsilon$ rispetto ad ε dovrà annullarsi per $\varepsilon=0$.

Per calcolare la derivata di $\mathfrak{J}_\varepsilon$ facciamo un cambiamento di variabili passando dalle (α, β) alle (u, v) mediante le (2). Otteniamo, ponendo $D=\frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(u, v)}$,

$$\mathfrak{J}_\varepsilon=\iint_{\mathfrak{C}}[E^*(\alpha_v^2+\beta_v^2)-2F^*(\alpha_u\alpha_v+\beta_u\beta_v)+G^*(\alpha_u^2+\beta_u^2)]\frac{du\,dv}{D} \quad (*).$$

Derivando qui sotto il segno, si ha

$$\left[\frac{d\mathfrak{J}_\varepsilon}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0}=\iint_{\mathfrak{C}}\{[E^*-G^*)\varphi_u+2F^*\varphi_v]+[-(E^*-G^*)\psi_v+2F^*\psi_u]\}\,dudv=0.$$

Per l'arbitrarietà e indipendenza delle funzioni φ e ψ, si deve avere

$$\iint_{\mathfrak{C}}[(E^*-G^*)\varphi_u+2F^*\varphi_v]\,dudv=0, \quad \iint_{\mathfrak{C}}[-(E^*-G^*)\psi_v+2F^*\psi_u]\,dudv=0.$$

Poniamo $f(u, v)=E^*-G^*$, $g(u, v)=2F^*$. Sia $Q\equiv[u_0-\delta<u<u_0+\delta,$ $v_0-\delta<v<v_0+\delta]$ un quadrato tutto costituito di punti di $\mathfrak{C}$, sia Q^* la sua frontiera e $\overline{Q}=Q+Q^*$. Se φ e ψ sono funzioni lipschitziane in $\overline{Q}$ e nulle su Q^*

(*) V. H. Rademacher: *Über partielle und totale Differenzierbarkeit.* Math. Annalen, I e II, Bd. 79 (1919), pp. 340-359, Bd. 81 (1920), pp. 52-63.

le funzioni φ' e ψ', definite in tutto $\overline{\mathfrak{C}}$, uguali a φ e ψ in $\overline{Q}$ e nulle in $\overline{\mathfrak{C}}-\overline{Q}$, sono lipschitziane in $\mathfrak{C}$ e quindi, tralasciando gli apici,

$$\int_{u_0-\delta}^{u_0+\delta}\int_{v_0-\delta}^{v_0+\delta}[f\varphi_u+g\varphi_v]\,dudv=0,\qquad \int_{u_0-\delta}^{u_0+\delta}\int_{v_0-\delta}^{v_0+\delta}[-f\psi_v+g\psi_u]\,dudv=0.$$

Posto $u=u_0+\dfrac{\delta u'}{\pi}$, $v=v_0+\dfrac{\delta v'}{\pi}$, si ha, sempre tralasciando gli apici,

$$(5)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f^*(u,v)\,\varphi_u(u,v)+g^*(u,v)\,\varphi_v(u,v)]\,dudv=0,\\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[-f^*(u,v)\,\psi_v(u,v)+g^*(u,v)\,\psi_u(u,v)]\,dudv=0,\end{cases}$$

ove $f^*(u,v)=f\left(u_0+\dfrac{\delta u}{\pi},\ v_0+\dfrac{\delta v}{\pi}\right)$, $g^*(u,v)=g\left(u_0+\dfrac{\delta u}{\pi},\ v_0+\dfrac{\delta v}{\pi}\right)$ e φ e ψ sono arbitrarie funzioni lipschitziane nel quadrato $Q_0\equiv[-\pi,\ -\pi,\ \pi,\ \pi]$ e nulle sulla periferia Q_0^* di Q_0.

Se la funzione $\varphi(u,v)$ soddisfa alle condizioni dette, altrettanto accade per la funzione $\overline{\varphi}(u,v)=\varphi(-u,v)$ e quindi

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f^*(u,v)\,\overline{\varphi}_u(u,v)+g^*(u,v)\,\overline{\varphi}_v(u,v)]\,dudv=0,$$

e, introducendo la funzione φ,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[-f^*(u,v)\,\varphi_u(-u,v)+g^*(u,v)\,\varphi_v(-u,v)]\,dudv=0.$$

Posto $u=-u'$ si trova, eseguendo il cambiamento di variabili e tralasciando gli apici,

$$(5')\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f^*(-u,v)\,\varphi_u(u,v)+g^*(-u,v)\,\varphi_v(u,v)]\,dudv=0.$$

Analogamente si trova

$$(5'')\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f^*(u,-v)\,\varphi_u(u,v)+g^*(u,-v)\,\varphi_v(u,v)]\,dudv=0.$$

$$(5''')\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f^*(-u,-v)\,\varphi_u(u,v)+g^*(-u,-v)\,\varphi_u(u,v)]\,dudv=0.$$

Posto

$$4F(u,v)=f^*(u,v)+f^*(-u,v)+f^*(u,-v)+f^*(-u,-v)$$
$$4\Phi(u,v)=g^*(u,v)+g^*(-u,v)+g^*(u,-v)+g^*(-u,-v)$$

e sommando membro a membro le relazioni (5), (5'), (5''), (5'''), si trova

$$\pi^2 I_1 \equiv \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [F(u,v)\,\varphi_u(u,v)+\Phi(u,v)\,\varphi_v(u,v)]\,dudv=0,$$

e, analogamente,

$$\pi^2 I_2 \equiv \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [-F(u,v)\,\psi_v(u,v)+\Phi(u,v)\,\psi_u(u,v)]\,dudv=0.$$

Le funzioni F e Φ sono pari e integrabili L in Q e quindi ammettono i seguenti sviluppi in serie di FOURIER

$$F(u,v) \sim \sum_{m,n=0}^{\infty} \lambda_{mn}\, a_{mn} \cos mu \cos nv, \qquad \Phi(u,v) \sim \sum_{m,n=0}^{\infty} \lambda_{mn}\, a'_{mn} \cos mu \cos nv,$$

$$a_{mn}=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(u,v)\cos mu \cos nv\,dudv,$$

$$a'_{mn}=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(u,v)\cos mu \cos nv\,dudv.$$

Se $\varphi(u,v)=\psi(u,v)=(1-(-1)^m\cos mu)\,\mathrm{sen}\,nv$, $m,n=1,2,\ldots$, si ha

$$I_1=n(a'_{0n}-(-1)^m a'_{mn})=0, \qquad I_2=-n(a_{0n}-(-1)^m a_{mn})=0\,;$$

se $\varphi(u,v)=\psi(u,v)=\mathrm{sen}\,mu(1-(-1)^n\cos nv)$, $m,n=1,2,\ldots$, si ha

$$I_1=m(a_{m0}-(-1)^n a_{mn})=0, \qquad I_2=m(a'_{m0}-(-1)^n a'_{mn})=0.$$

Ne segue

$$a_{m0}=(-1)^n a_{mn}, \quad a_{0n}=(-1)^m a_{mn}, \quad a'_{m0}=(-1)^n a'_{mn}, \quad a'_{0n}=(-1)^m a'_{mn}. \tag{6}$$

Ma, per ogni intero m, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{mn}=\lim\limits_{n\to\infty} a'_{mn}=0$ e, per ogni intero n, $\lim\limits_{m\to\infty} a_{mn}=\lim\limits_{m\to\infty} a'_{mn}=0$. Passando al limite nelle (6) si trova

$$a_{m0}=0, \quad a_{0n}=0, \quad a'_{m0}=0, \quad a'_{0n}=0, \qquad m,n=1,2,\ldots$$

e, dalle (6),

$$a_{mn}=0, \quad a'_{mn}=0, \qquad m,n=1,2,\ldots.$$

Ne segue che, quasi ovunque in Q_0, deve essere

$$F(u,v)=\frac{1}{4}\,a_{00}, \qquad \Phi(u,v)=\frac{1}{4}\,a'_{00}. \tag{7}$$

Poniamo

$$4F'(u,v)=f^*(u,v)-f^*(-u,v)+f^*(u,-v)-f^*(-u,-v),$$
$$4\Phi'(u,v)=g^*(u,v)-g^*(-u,v)+g^*(u,-v)-g^*(-u,-v).$$

Sommando e sottraendo le (5), (5′), (5″), (5‴) si trova

$$\pi^2 I_1 \equiv \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [F'(u, v)\,\varphi_u(u, v) + \Phi'(u, v)\,\varphi_v(u, v)]\,dudv = 0,$$

e, analogamente,

$$\pi^2 I_2 \equiv \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [-F'(u, v)\,\psi_v(u, v) + \Phi'(u, v)\,\psi_u(u, v)]\,dudv = 0.$$

Le funzioni F' e Φ' sono dispari rispetto ad u e pari rispetto a v e integrabili L in Q_0 e quindi ammettono i seguenti sviluppi in serie di Fourier

$$F'(u, v) \sim \sum_{m, n=0}^{\infty} \lambda_{mn}\, b_{mn} \operatorname{sen} mu \cos nv, \qquad \Phi'(u, v) \sim \sum_{m, n=0}^{\infty} \lambda_{mn}\, b'_{mn} \operatorname{sen} mu \cos nv,$$

$$b_{mn} = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F'(u, v) \operatorname{sen} mu \cos nv\, dudv,$$

$$b'_{mn} = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi'(u, v) \operatorname{sen} mu \cos nv\, dudv.$$

Se $\varphi(u, v) = \psi(u, v) = (1 - (-1)^m \cos mu)(1 - (-1)^n \cos nv)$, $m, n = 1, 2, \ldots$, si ha

$$I_1 = (-1)^m m (b_{m0} - (-1)^n b_{mn}) = 0, \quad I_2 = (-1)^m m (b'_{m0} - (-1)^n b'_{mn}) = 0;$$

se $\varphi(u, v) = \psi(u, v) = \operatorname{sen} mu \operatorname{sen} nv$, $m, n = 1, 2, \ldots$, si ha

$$I_1 = n b'_{mn} = 0, \qquad I_2 = -n b_{mn} = 0.$$

Ne segue $b_{m0} = (-1)^n b_{mn} = 0$, $b'_{m0} = (-1)^n b'_{mn} = 0$, $m, n = 1, 2, \ldots$ e quindi, quasi ovunque in Q_0,

$$F'(u, v) = 0, \qquad \Phi'(u, v) = 0. \tag{7′}$$

Analogamente, posto

$$4F''(u, v) = f^*(u, v) + f^*(-u, v) - f^*(u, -v) - f^*(-u, -v),$$
$$4\Phi''(u, v) = g^*(u, v) + g^*(-u, v) - g^*(u, -v) - g^*(-u, -v),$$

si trova che, quasi ovunque in Q_0, deve essere

$$F''(u, v) = 0, \qquad \Phi''(u, v) = 0. \tag{7″}$$

Infine, posto

$$4F'''(u, v) = f^*(u, v) - f^*(-u, v) - f^*(u, -v) + f^*(-u, -v),$$
$$4G'''(u, v) = g^*(u, v) - g^*(-u, v) - g^*(u, -v) + g^*(-u, -v),$$

e adoperando di nuovo le funzioni $\varphi(u, v) = \psi(u, v) = (1 - (-1)^m \cos mu) \operatorname{sen} nv$, $\varphi(u, v) = \psi(u, v) = \operatorname{sen} mu (1 - (-1)^n \cos nv)$ si trova che, quasi ovunque in Q_0, deve essere

$$F'''(u, v) = 0, \qquad \Phi'''(u, v) = 0. \tag{7‴}$$

Dalle (7), (7′), (7″), (7‴), segue ora che, quasi ovunque in Q_0, deve essere

$$f^*(u,v)=\frac{1}{4}a_{00}, \qquad g^*(u,v)=\frac{1}{4}a'_{00},$$

ossia, quasi ovunque in Q,

$$f(u,v)=H_1 \qquad g(u,v)=H_2,$$

ove con H_1 e H_2 abbiamo indicato le precedenti costanti. Ma Q è un qualsiasi quadrato a lati paralleli agli assi contenuto in $\mathfrak{C}$ e quindi, quasi ovunque in $\mathfrak{C}$,

$$E^*-G^*=H_1, \qquad F^*=H_2.$$

5. - Sia ora di nuovo ε un parametro reale e $\psi(u,v)$ una funzione continua con derivate parziali del 1° ordine pure continue in $\mathfrak{C}$.

Consideriamo la nuova trasformazione

(4) $\qquad T:\ \alpha=u\cos\varepsilon\psi-v\,\mathrm{sen}\,\varepsilon\psi, \quad \beta=u\,\mathrm{sen}\,\varepsilon\psi+v\cos\varepsilon\psi$ (17).

Se ε è in valore assoluto sufficientemente piccolo e se i piani (u,v) e (α,β) li supponiamo sovrapposti, con gli assi u e α coincidenti, e così pure v e β, le (4) dànno una trasformazione biunivoca e continua del cerchio $\overline{\mathfrak{C}}$ in se stesso, la quale trasforma la circonferenza $\mathfrak{C}^*$ di $\mathfrak{C}$ in se stessa. Ripetendo le precedenti considerazioni troviamo

$$\left[\frac{d\mathfrak{J}_\varepsilon}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0}=\iint_{\mathfrak{C}}\{[v(E^*-G^*)-2uF^*]\psi_u+[u(E^*-G^*)+2vF^*]\psi_v\}\,dudv=0,$$

e quindi anche

$$\iint_{\mathfrak{C}}[(H_1v-H_2u)\psi_u+(H_1u+H_2v)\psi_v]\,dudv=0.$$

Posto $\psi=uv$, oppure $\psi=\frac{1}{2}(v^2-u^2)$, si trova, rispettivamente,

$$H_1=0, \qquad H_2=0,$$

ossia $E^*=G^*$, $F^*=0$ quasi ovunque in $\mathfrak{C}$.

Il teorema I è così completamente dimostrato.

6. - TEOREMA II. (di C. B. MORREY). - *Ogni superficie non degenere di area finita secondo Lebesgue ammette una rappresentazione non degenere sul cerchio unità.*

Sia

$$S:\ x=x(u,v), \quad y=y(u,v), \quad z=z(u,v), \qquad (u,v)\,\varepsilon\,\overline{A},$$

una superficie non degenere di area finita secondo LEBESGUE. Allora esiste una successione di superficie poliedriche Σ_n, $n=1,2,\ldots$, tali che $\lim_{n\to\infty} L(\Sigma_n)=L(S)$

(17) Cfr. per questa posizione, loc. cit. in (5).

(18) Loc. cit. in (6), IV.

e possiamo supporre che anche le superficie Σ_n siano tutte non degeneri. Siano

$$\Sigma_n: \quad x=x_n(u, v), \quad y=y_n(u, v), \quad z=z_n(u, v), \qquad (u, v)\, \varepsilon\, \bar{A}, \ n=1, 2, \ldots.$$

delle rappresentazioni delle superficie Σ_n tali che, uniformemente in $\bar{A}$, si abbia

$$\lim_{n\to\infty} x_n(u, v)=x(u, v), \quad \lim_{n\to\infty} y_n(u, v)=y(u, v), \quad \lim_{n\to\infty} z_n(u, v)=z(u, v).$$

Siano P_1, P_2, P_3 tre punti di A^* ai quali corrispondono su S tre punti *distinti* Q_1, Q_2, Q_3. Siano Q_{1n}, Q_{2n}, Q_{3n}, le immagini dei punti P_1, P_2, P_3 sopra la superficie Σ_n. Manifestamente $\lim Q_{in}=Q_i$, $i=1, 2, 3$.

Sia $\mathfrak{C}$ il cerchio unità del piano (u, v) e siano $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$, tre punti *distinti* di $\mathfrak{C}^*$. In forza del teorema I esiste una rappresentazione quasi conforme

$$\Sigma_n'=\Sigma_n: \quad x=X_n(u, v), \quad y=Y_n(u, v), \quad z=Z_n(u, v), \qquad (u, v)\, \varepsilon\, \bar{\mathfrak{C}},$$

della superficie poliedrica Σ_n sul cerchio unità che ai punti $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$ di $\mathfrak{C}^*$ fa corrispondere i punti Q_{1n}, Q_{2n}, Q_{3n}. Manifestamente esiste una costante M tale che, per ogni n,

$$L(\Sigma_n)<M, \qquad n=1, 2, \ldots,$$

e quindi anche

$$\frac{1}{2}\iint_{\mathfrak{C}} (E_n+G_n)\, du dv=\frac{1}{2}\iint_{\mathfrak{C}} \sqrt{E_n G_n-F_n^2}\, du dv=L(\Sigma_n)<M, \quad n=1, 2, \ldots.$$

In forza del teorema II del § 2 le funzioni $X_n(u, v)$, $Y_n(u, v)$, $Z_n(u, v)$, $n=1, 2, \ldots$, sono ugualmente continue in tutto $\bar{\mathfrak{C}}$ e quindi esiste una superficie continua di accumulazione

$$(5) \qquad S': \quad x=X(u, v), \quad y=Y(u, v), \quad z=Z(u, v), \qquad (u, v)\, \varepsilon\, \bar{\mathfrak{C}}.$$

Esiste inoltre una successione di interi, che per semplicità di notazioni supporremo coincidere con la successione $(1, 2, \ldots)$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} X_n(u, v)=X(u, v), \quad \lim_{n\to\infty} Y_n(u, v)=Y(u, v), \quad \lim_{n\to\infty} Z_n(u, v)=Z(u, v),$$

uniformemente in $\bar{\mathfrak{C}}$.

Osservando che

$$\| \Sigma_n, \Sigma_n' \|=0, \quad \lim_{n\to\infty} \| \Sigma_n, S \|=0, \quad \lim_{n\to\infty} \| \Sigma_n', S \|=0,$$

dalla relazione

$$\| S, S' \| \leqslant \| S, \Sigma_n \| + \| \Sigma_n, \Sigma_n' \| + \| \Sigma_n', S' \|,$$

segue $\| S, S' \|=0$ e quindi $S=S'$. In forza del teorema III del § 4 segue che la rappresentazione (5) della superficie S è quasi conforme. Il teorema II è così dimostrato.