ERVIN FELDHEIM

Contributi alla teoria delle funzioni ipergeometriche di più variabili

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 12, nº 1-2 (1943), p. 17-59
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1943_2_12_1-2_17_0>

CONTRIBUTI ALLA TEORIA DELLE FUNZIONI IPERGEOMETRICHE DI PIÙ VARIABILI

di ERVIN FELDHEIM (Budapest).

SUNTO. - Il presente lavoro ha lo scopo di stabilire delle relazioni fra le diverse funzioni ipergeometriche di più variabili. Queste relazioni sono di due specie: trasformazioni funzionali contenenti degli integrali definiti e trasformazioni algebriche delle serie che esprimono tali funzioni ipergeometriche e contenenti degli sviluppi in serie semplici o multiple. Tali relazioni integrali sono già state dedotte, per il caso generale, in uno dei nostri lavori precedenti (1). Noi ci limiteremo qui, nella maggior parte dei casi, a due variabili; per certi risultati si può vedere immediatamente la possibilità della generalizzazione a più variabili.
La seconda e terza parte contiene delle applicazioni dei risultati della prima parte ai polinomi di LEGENDRE e di JACOBI a due, e anche a più variabili. La definizione dei polinomi di JACOBI a più variabili data qui si crede nuova e presenta una completa analogia formale con il caso classico di una sola variabile.

PARTE PRIMA

Introduzione.

Cominciamo con indicare brevemente le nozioni principali relative alle funzioni ipergeometriche. La funzione di GAUSS è definita come

$$F(a, b\,;\, c\,;\, x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a)_m\,(b)_m}{(c)_m\, m\,!}\,x^m, \tag{1}$$

ove

$$(a)_m=\frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)}\quad (m=1, 2,....)\,;\qquad (a)_0=1.$$

La serie infinita precedente è assolutamente convergente nel dominio $|x|\leqq 1$ se $R(c-a-b)>0$: essa può essere calcolata, per continuazione analitica, anche nell'esteriore del cerchio di convergenza e costituisce una funzione uniforme di x nel piano intero aperto lungo l'asse reale da $+1$ a ∞.

P. APPELL ha generalizzato questa funzione al caso di due variabili e ha definito (2) le quattro serie doppie ipergeometriche F_1, F_2, F_3 e F_4.

(1) E. FELDHEIM: *Équations intégrales pour les polynomes d'Hermite à une et plusieurs variables, pour les polynomes de Laguerre, et pour les fonctions hypergéométriques les plus générales.* Annali d. R. Sc. Norm. Sup. di Pisa, vol. IX, 1940, pp. 225-252. Vedi il Cap. III, equazioni (9) e (14), e casi particolari.

(2) P. APPELL - J. KAMPÉ DE FÉRIET: *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques Polynomes d'Hermite.* Paris, 1926.

Noi ci occuperemo, in prima linea, delle F_1 e F_2, definite come

$$(2) \qquad F_1(a, b, b'; \; c; \; x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n}(b)_n(b')_n}{(c)_{m+n} \, m! \, n!} x^m y^n,$$

e

$$(3) \qquad F_2(a, b, b'; \; c, c'; \; x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n}(b)_m(b')_n}{(c)_m(c')_n \, m! \, n!} x^m y^n.$$

In queste serie x e y sono le variabili a, b, b', c, c' sono parametri; tutti questi elementi possono essere reali o complesse, per c e c' i valori interi negativi sono esclusi. Per quanto dei domini di convergenza delle serie doppie F_1 e F_2, è noto che F_1 è convergente se $|x|<1$, $|y|<1$, e per F_2 la condizione di convergenza è $|x|+|y|<1$. Se queste condizioni non sono verificate, le serie considerate sono divergenti, ma, per continuazione analitica, esse possono essere definite anche nell'esteriore dei cerchi di convergenza associati, per qualsiasi valori di x e y ([3]).

Secondo la teoria generale, si può dare per queste funzioni ipergeometriche delle espressioni analitiche, valide nel tutto il loro dominio di esistenza e avendo la forma di integrali definiti semplici o multipli.

Per la funzione di GAUSS, questa è la seguente :

$$(4) \qquad F(a, b \,; \, c \,; \, x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}(1-ux)^{-a} du,$$

valida per $R(c) > R(b) > 0$. Le condizioni restrittive, fatte sui parametri b e c possono essere eliminate utilizzando, in luogo della (4), delle rappresentazioni integrali complesse del tipo di BARNES. Quest'osservazione vale anche per le altre funzioni F_1 e F_2. Per questo lavoro è sufficiente di considerare solo la formula (4), con la seguente :

$$(5) \quad F_1(a, b, b'; \; c; \; x, y) = \\ = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(b')\,\Gamma(c-b-b')} \iint_D u^{b-1} \, v^{b'-1}(1-u-v)^{c-b-b'-1}(1-ux-vy)^{-a} \, du dv,$$

valida per $R(b)>0$, $R(b')>0$, $R(c-b-b')>0$, il dominio d'integrazione essendo definito come segue :

$$D: \quad u \geqq 0, \quad v \geqq 0, \qquad 1-u-v \geqq 0.$$

([3]) Vedi loc. cit. ([2]).

Per la funzione F_2, si ha

(6) $F_2(a, b, b'; c, c'; x, y) =$

$$= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c')}{\Gamma(b)\Gamma(b')\Gamma(c-b)\Gamma(c'-b')} \int_0^1\int_0^1 u^{b-1}v^{b'-1}(1-u)^{c-b-1}(1-v)^{c'-b'-1}(1-ux-vy)^{-a}dudv$$

supposto che $R(c) > R(b) > 0$, $R(c') > R(b') > 0$.

Sia menzionata anche una seconda rappresentazione integrale della funzione F_1:

$$(7) \qquad F_1(a, b, b'; c; x, y) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}(1-ux)^{-b}(1-uy)^{-b'}du,$$

valida per $R(c) > R(a) > 0$. Questa formula ha il vantaggio, oltre di sostituire all'integrale doppio un integrale definito semplice, di poter essere applicata anche per valori interi negativi, in casi importanti (la funzione F_1 si riduce allora ad un polinomio).

Tutti questi integrali contengono gli elementi degl'integrali di EULERO, e anche, come funzioni da integrare, delle funzioni ipergeometriche particolarissime: per esempio, è ben noto che

$$(1-ux)^{-a} = F(a, b; b; ux),$$
$$(1-ux-vy)^{-a} = F_2(a, b, b'; b, b'; ux, vy), \text{ ecc.}$$

Per dimostrare questi risultati (4) - (6), basta di osservare che, nell'interiore del cerchio di convergenza associato, gl'integrali delle formule da dimostrare sono sviluppabili in serie convergenti di x e y; effettuando le integrazioni, si ritrovano le espressioni rispettive (1) - (3) delle serie ipergeometriche.

Le due ultime osservazioni indicano già il contenuto del Capitolo I e il metodo di dimostrazione dei risultati che saranno là dati. Se noi sostituiamo negl'integrali (4) - (6) alle funzioni ipergeometriche particolarissime precedenti delle funzioni ipergeometriche ben scelte ossia con un prodotto di due funzioni F di GAUSS, ecc., noi possiamo ricavare delle nuove relazioni integrali fra le diverse funzioni ipergeometriche considerate. E la loro dimostrazione sarà semplicissima: sviluppando queste funzioni in serie del tipo (1) - (3), si integra per termini, come abbiamo già detto per le formule (4) - (6).

Il Capitolo II del presente articolo contiene delle trasformazioni delle serie (1) - (3), dedotte dagli integrali del Cap. I per valori speciali dei parametri o utilizzando delle formule di riduzione note delle funzioni ipergeometriche. Si trova anche formule che possono essere considerate come funzioni generatrici delle serie ipergeometriche.

Casi particolari molto importanti di queste funzioni ipergeometriche sono quelle dette confluenti, dovute al KUMMER e P. HUMBERT, e anche le funzioni di BESSEL.

La funzione di KUMMER è

$$(8) \qquad {}_1F_1(a\,;\,c\,;\,x) = \lim_{\varepsilon\to 0} F(a, \tfrac{1}{\varepsilon}\,;\,c\,;\,\varepsilon x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m}{(c)_m\, m!}\, x^m,$$

e possiede la rappresentazione integrale dedotta da (4) che si scrive sotto forma più generale:

$$(9) \qquad {}_1F_1(a;\,c;\,x) = \frac{\Gamma(1-a)\,\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\cdot 2\pi i} \int_{-1}^{(0+)} e^{-ux}\, u^{a-1}(1+u)^{c-a-1}\, du\,;$$

il contorno d'integrazione, camminando parallelamente all'asse di u, viene dal punto -1 nel senso diretto verso l'origine e ritorna a -1; occorre anche $R(c-a)>0$, $a \neq 1, 2, 3, \ldots$.

La funzione di BESSEL se ne deduce per il passaggio al limite:

$$(10) \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} {}_1F_1\left(\frac{1}{\varepsilon}\,;\,\nu+1\,;\,\varepsilon x\right) = \Gamma(\nu+1)(i\sqrt{x})^{-\nu} J_\nu(2i\sqrt{x}) = \Gamma(\nu+1)\, x^{-\frac{\nu}{2}}\, I_\nu(2\sqrt{x}).$$

Fra le funzioni confluenti di due variabili [4], degenerazioni delle funzioni F_1 e F_2, siano menzionate le seguenti:

$$(11) \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} F_1\left(a, \frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}\,;\,c\,;\,\varepsilon x, \varepsilon y\right) = {}_1F_1(a\,;\,c\,;\,x+y),$$

$$(12) \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} F_2\left(\frac{1}{\varepsilon}, b, b'; c, c'; \varepsilon x, \varepsilon y\right) = {}_1F_1(b\,;\,c\,;\,x)\, {}_1F_1(b';\,c';\,y),$$

$$(13) \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} F_1\left(\frac{1}{\varepsilon}, b, b';\,c;\,\varepsilon x, \varepsilon y\right) = \Phi_2(b, b';\,c;\,x, y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_m (b')_n}{(c)_{m+n}\, m!\, n!}\, x^m y^n.$$

I risultati del presente lavoro si riducono in questi casi confluenti a formule particolari in parte già note, in parte ritenute nuove. I noti risultati, stabiliti per le funzioni di WHITTAKER e loro casi speciali (come, per esempio i polinomi di LAGUERRE) saranno indicati talvolta per mettere in chiara luce la loro comune origine.

Nella seconda parte del lavoro noi ci occuperemo con i polinomi di LAGUERRE generalizzati, la definizione dei quali è dovuta a P. HUMBERT. Come casi particolari di risultati della parte I, noi mostreremo varie proprietà di questi polinomi, in parte già trovate da A. ERDÉLYI.

Nella terza parte, sempre come applicazione dei nostri risultati generali, daremo una nuova definizione dei polinomi di JACOBI a due (e anche a più) variabili, che presentano una completa analogia formale con i polinomi classici di JACOBI ad una sola variabile. Noi ritorneremo ancora su questi polinomi nel quadro delle nostre ricerche sui polinomi di JACOBI.

---

(4) Loc. cit. (2), dove ${}_1F_1(a\,;\,c\,;\,x)$ è designato con $G(a\,;\,c\,;\,x)$. Noi abbiamo utilizzato quest'ultima notazione nel nostro lavoro citato in (1).

Capitolo I.

Relazioni integrali fra le funzioni ipergeometriche a due variabili.

1\. - Equazioni del tipo (4). - Questi sono integrali semplici fra funzioni F_1 e funzioni F_2, e costituiscono casi particolari delle formule generali citate sotto (1):

Per F_1, si ha

$$(14) \qquad F_1(a, b, b'; c; x, y) = \\ = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(c-\gamma)} \int_0^1 u^{\gamma-1}(1-u)^{c-\gamma-1} F_1(a, b, b'; \gamma; ux, uy)\, du,$$

valida per $R(c) > R(\gamma) > 0$, le variabili x e y non essendo simultaneamente uguali all' unità :

Per F_2, si ha analogamente

$$(15) \qquad F_2(a, b, b'; c, c'; x, y) = \\ = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(a)\Gamma(\alpha-a)} \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{\alpha-a-1} F_2(a, b, b'; c, c'; ux, uy)\, du,$$

dove $R(\alpha) > R(a) > 0$ è la stessa ipotesi su x e y. In quanto alla dimostrazione, noi rimandiamo all' indicazione rispettiva dell' Introduzione.

Se si pone $b'=0$ (per esempio), si ritrova le equazioni relative alle funzioni F di Gauss ad una variabile, stabilite già dal Sig. A. Erdélyi (5). Per altri casi particolari e applicazioni, vedi il nostro lavoro citato sotto (1), mentre che altre conseguenze di (15), come abbiamo già detto, saranno esposte nel Capitolo II.

2\. - Equazioni del tipo (5). - Queste contengono integrali doppi di Eulero, estesi sul dominio D, legando da un lato le funzioni F_1 e F_2, da altro lato le funzioni F_2 e un prodotto di due funzioni F. Oltre ai casi particolari ottenuti per confluenza, si può stabilire ancora delle relazioni integrali analoghe contenenti funzioni F_3 di P. Appell.

Cerchiamo prima il valore dell' integrale del « fattore d' integrazione » $u^{\beta-1} v^{\beta'-1}(1-u-v)^{\gamma-\beta-\beta'-1}$ moltiplicato per una funzione F_2 di cui argomenti sono ux e uy. Sviluppando questa funzione secondo la (3), e tenendo conto della relazione

$$\iint_D u^{m+\beta-1} v^{n+\beta'-1}(1-u-v)^{\gamma-\beta-\beta'-1}\, du\, dv = \frac{\Gamma(m+\beta)\Gamma(n+\beta')\Gamma(\gamma-\beta-\beta')}{\Gamma(m+n+\gamma)},$$

(5) Quarterly Journal of Math., vol. 8 (1937), pp. 200-213, 267-277; vol. 10 (1939), pp. 176-189.

valida per $R(\gamma-\beta-\beta')>0$, viene

1) per $\gamma=a$,

$$(16)\qquad F(\beta, b; c; x)\, F(\beta', b'; c'; y)=$$
$$=\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(a-\beta-\beta')}\iint\limits_D u^{\beta-1} v^{\beta'-1}(1-u-v)^{a-\beta-\beta'-1}F_2(a, b, b';\, c, c';\, ux, vy)\, du dv,$$

con le condizioni $R(\beta)>0$, $R(\beta')>0$, $R(a-\beta-\beta')>0$;

2) per $\beta=c$, $\beta'=c'$,

$$(17)\qquad F_1(a, b, b'; \gamma; x, y)=$$
$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(c)\Gamma(c')\Gamma(\gamma-c-c')}\iint\limits_D u^{c-1} v^{c'-1}(1-u-v)^{\gamma-c-c'-1}\, F_2(a, b, b';\, c, c';\, ux, vy)\, du dv,$$

ove $R(c)>0$, $R(c')>0$, $R(\gamma-c-c')>0$. Analogamente alle equazioni (4)-(6), queste ultime relazioni sono anche valide nell'intero dominio d'esistenza delle funzioni ipergeometriche che intervengono in esse.

Nel caso limite corrispondente a (12) e (13), l'equazione (17) dà luogo a

$$(18)\qquad \Phi_2(b, b'; \gamma; x, y)=$$
$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(c)\Gamma(c')\Gamma(\gamma-c-c')}\iint\limits_D u^{c-1}v^{c'-1}(1-u-v)^{\gamma-c-c'-1}{}_1F_1(b; c; ux)\,{}_1F_1(b'; c'; vy)\, du dv$$

che vale sotto le stesse ipotesi. La (18) vale anche per valori interi negativi di b e b', nel qual caso si ottiene una relazione integrale fra polinomi di LAGUERRE a due e ad una variabili, scritta esplicitamente nella Parte II.

Applicando a (16) la relazione (8), si avrà (6)

$${}_1F_1(\beta; c; x)\,{}_1F_1(\beta'; c'; y)=$$
$$=\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(a-\beta-\beta')}\iint\limits_D u^{\beta-1} v^{\beta'-1}(1-u-v)^{a-\beta-\beta'-1}\, \Psi_2(a; c, c'; ux, vy)\, du dv,$$

con $R(\beta)>0$, $R(\beta')>0$, $R(a-\beta-\beta')>0$.

Consideriamo adesso la funzione F_3 definita per

$$(19)\qquad F_3(a, a', b, b'; c; x, y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_m(a')_n(b)_m(b')_n}{(c)_{m+n}\, m!\, n!}x^m y^n,$$

---

(6) A confrontare, per esempio, con le equazioni (12) e (13) della Nota di A. ERDÉLYI: *An integral representation for the product of two Whittaker functions*. Journ. Lond. Math. Soc., vol. 14 (1939), pp. 23-30.

e convergente nello stesso dominio che la F_1. Si dimostra facilmente che

$$(20) \qquad F_3(b, b', \beta, \beta'; c; x, y) =$$
$$= \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(a-\beta-\beta')} \iint\limits_D u^{\beta-1} v^{\beta'-1} (1-u-v)^{a-\beta-\beta'-1} F_1(a, b, b'; c; ux, vy)\, du\, dv,$$

supponendo che $R(\beta) > 0$, $R(\beta') > 0$, $R(a-\beta-\beta') > 0$.

Al limite, (20) diventa

$$\Phi_2(\beta, \beta'; c; x, y) =$$
$$= \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(a-\beta-\beta')} \iint\limits_D u^{\beta-1} v^{\beta'-1} (1-u-v)^{a-\beta-\beta'-1} {}_1F_1(a; c; ux+vy)\, du\, dv,$$

valida sotto le stesse condizioni.

Per le funzioni F_3, noi abbiamo ancora la rappresentazione integrale

$$(21) \qquad F_3(a, a', b, b'; \gamma; x, y) =$$
$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(c)\Gamma(c')\Gamma(\gamma-c-c')} \iint\limits_D u^{c-1} v^{c'-1} (1-u-v)^{\gamma-c-c'-1} F(a, b; c; ux) F(a', b'; c'; vy)\, du\, dv,$$

i parametri essendo sommessi a $R(c) > 0$, $R(c') > 0$, $R(\gamma-c-c') > 0$.

Applicando il passaggio al limite (8), si ritrova l'equazione (18), mentre che (20) dà luogo, dopo qualche trasformazioni, a

$$(20') \qquad F_3(a, a', b, b'; c; x, y) =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(b)\Gamma(b')} \int_0^\infty \int_0^\infty u^{b-1} v^{b'-1} e^{-u-v} \Phi_2(a, a'; c; ux, vy)\, du\, dv,$$

valida per $R(b) > 0$, $R(b') > 0$.

Il passaggio al limite (10) permette di ricavare da tutte le relazioni precedenti, delle equazioni integrali contenenti funzioni di BESSEL.

3. - EQUAZIONI DEL TIPO (6). - Le equazioni che daremo qui sono di stessa natura di quelle del § 1 e contengono integrali doppi analoghi a (6). Mentre che le equazioni (14) e (15) permettono di cambiare il primo parametro a delle funzioni ipergeometriche F_1 e F_2, le formule di questo paragrafo conducono al cambiamento dei parametri b, b' ossia di c, c'. L'equazione relativa a F_1 è

$$(22) \qquad F_1(a, b, b'; c; x, y) =$$
$$= \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')}{\Gamma(b\ \Gamma(b')\Gamma(\beta-b)\Gamma(\beta'-b')} \int_0^1 \int_0^1 u^{b-1} v^{b'-1} (1-u)^{\beta-b-1} (1-v)^{\beta'-b'-1} F_1(a, \beta, \beta'; c; ux, vy)\, du\, dv,$$

dove $R(\beta) > R(b) > 0$, $R(\beta') > R(b') > 0$.

La relazione analoga per F_2 è la seguente:

(23) $$F_2(a, b, b'; c, c'; x, y) =$$

$$= \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')}{\Gamma(b)\Gamma(b')\Gamma(\beta-b)\Gamma(\beta'-b')} \int_0^1\int_0^1 u^{b-1}v^{b'-1}(1-u)^{\beta-b-1}(1-v)^{\beta'-b'-1}F_2(a,\beta,\beta'; c, c'; ux, vy)\, du dv$$

e anche

(24) $$F_2(a, b, b'; c, c'; x, y) =$$

$$= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c')}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')\Gamma(c-\gamma)\Gamma(c'-\gamma')} \int_0^1\int_0^1 u^{\gamma-1} v^{\gamma'-1}(1-u)^{c-\gamma-1}(1-v)^{c'-\gamma'-1}F_2(a, b, b'; \gamma, \gamma'; ux, vy)\, du dv$$

(23) essendo valida nelle stesse condizioni che (22), e per (24), si deve ammettere che $R(c) > R(\gamma) > 0$ e $R(c') > R(\gamma') > 0$. La dimostrazione si fa ancora secondo lo stesso principio generale che quella delle formule fondamentali (4) - (6).

4. - ALTRE EQUAZIONI INTEGRALI FRA F_1 E F_2. - Si può dimostrare anche come le precedenti, le seguenti equazioni:

(25) $$F_1(a, b, b'; c+c'; x, y) =$$

$$= \frac{\Gamma(c+c')}{\Gamma(c)\Gamma(c')} \int_0^1 u^{c-1}(1-u)^{c'-1} F_2(a, b, b'; c, c'; ux, (1-u)\, y)\, du,$$

dove $R(c) > 0$, $R(c') > 0$, e

(26) $$F(a, b; c; x)F(a', b'; c'; y) =$$

$$= \frac{\Gamma(a+a')}{\Gamma(a)\Gamma(a')} \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{a'-1}F_2(a+a', b, b'; c, c'; ux, (1-u)\, y)\, du$$

con $R(a) > 0$, $R(a') > 0$.

I casi particolari sono qui molto interessanti. Dalla (25) si ricava, mediante (12) e (13) e ponendo $u = \sin^2\theta$, la relazione

(27) $$\Phi_2(b, b'; c+c'; x, y) =$$

$$= \frac{2\Gamma(c+c')}{\Gamma(c)\Gamma(c')} \int_0^{\frac{\pi}{2}} {}_1F_1(b; c; x\sin^2\theta)\, {}_1F_1(b'; c'; y\cos^2\theta) \sin^{2c-1}\theta \cos^{2c'-1}\theta d\theta,$$

con $R(c) > 0$, $R(c') > 0$ [7]. Se $b = -m$, $b' = -n$ (m e n interi $\geqq 0$), si ottiene una equazione integrale fra i polinomi di LAGUERRE, per la quale vedi la Parte II.

(7) Se $x = y$, (27) può esser scritta sotto forma di un teorema di addizione delle funzioni di WHITTAKER. Vedi, A. ERDÉLYI: *Monatshefte für Math. und Physik.* Vol. 46 (1937), p. 139.

Effettuando poi, su (27) il passaggio al limite (10), noi ritroviamo, dopo qualche trasformazioni semplici, la seguente generalizzazione di una nota formula di SONINE sulle funzioni di BESSEL ([8]):

$$x^{\mu}y^{\nu}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}(\mu+\nu+1)}J_{\mu+\nu+1}(\sqrt{x^2+y^2})=\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_{\mu}(x\sin\theta)J_{\nu}(y\cos\theta)\sin^{\mu+1}\theta\cos^{\nu+1}\theta\,d\theta,$$

dove $R(\mu)>-1$, $R(\nu)>-1$.

Dalla formula (20′) si ricava, per $y=0$, l'equazione molto importante per le sue applicazioni ([9]) :

$$F(a,b;c;x)=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty} u^{a-1}e^{-u}{}_1F_1(b;c;ux)\,du,$$

sotto l'ipotesi $R(a)>0$, $x\neq 1$. La dimostrazione diretta è anche immediata.

Tutte le equazioni stabilite fra le funzioni ipergeometriche F_1 e F_2 contengono, sotto il segno d'integrazione, la funzione F_2. È indicato dunque di cercare delle equazioni di natura inversa, cioè esprimente la funzione F_2 per una trasformazione funzionale della funzione F_1.

La prima delle equazioni di questo tipo è

$$(28)\qquad F_2(a,b,b';c,c';x,y)=$$
$$=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c')}{\Gamma(c+c'-1)\cdot 2\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)} F_1\left(a,b,b';c+c'-1;\frac{x}{u},\frac{y}{1-u}\right)u^{-c}(1-u)^{-c'}du,$$

valida per $R(c+c')>0$; il contorno d'integrazione è descritto nel senso positivo intorno al punto $u=0$ nel piano della variabile u. Per dimostrare la (28), basta osservare che $\frac{x}{u}$ e $\frac{y}{1-u}$ sono limitati nel dominio d'integrazione (x e y essendo fissati); si può dunque integrare per termini la serie uniformemente convergente che esprime la funzione F_2 da integrare. Per l'integrale della formula (28) viene così

$$\Gamma(c)\Gamma c')\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b)_m(b')_n}{\Gamma(c+c'-1+m+n)}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)} u^{-c-m}(1-u)^{-c'-n}du$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b)_m(b')_n}{\Gamma(c+c'-1+m+n)}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{\Gamma(c+c'-1+m+n)}{(c)_m(c')_n},\qquad \text{q. e. d.}$$

([8]) Vedi, p. es. G. N. WATSON : *A treatise on the Theory of Bessel Functions.* Cambridge, 1922.

([9]) Questa relazione fornisce una importante relazione integrale fra polinomi di JACOBI e di LAGUERRE. Vedi, E. FELDHEIM : *Contributi alla teoria dei polinomi di Jacobi.* I. (In corso di stampa in Matematikai és Fizikai Lapok, in ungherese).

Ponendo $a=\frac{1}{\varepsilon}$, e sostituendo ad x e y rispettivamente εx e εy, si ottiene al limite $\varepsilon \to 0$ la formula

$$(28') \qquad {}_1F_1(b\,;\,c\,;\,x)\,{}_1F_1(b'\,;\,c'\,;\,y)= \\ =\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c')}{2\pi i\,\Gamma(c+c'-1)}\int\limits_{-\infty}^{(0+)}\Phi_2\!\left(b,b'\,;\,c+c'-1\,;\,\frac{x}{u},\,\frac{y}{1-u}\right)u^{-c}(1-u)^{-c'}du,$$

dove $R(c+c')>0$. Questa equazione è valida anche per i valori interi negativi di b e b' (cioè per i polinomi di LAGUERRE); essa è da confrontare con i risultati di A. ERDÉLYI, citati sotto ([6]).

Il prodotto delle due funzioni F che intervengono nella (26) può essere espresso per un integrale analogo a (28):

$$(29) \qquad F(a,b\,;\,c\,;\,x)\,F(a',b'\,;\,c'\,;\,y)= \\ =\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c')}{2\pi i\,\Gamma(c+c'-1)}\int\limits_{-\infty}^{(0+)}F_3\!\left(a,a',b,b'\,;\,c+c'-1\,;\,\frac{x}{u},\,\frac{y}{1-u}\right)u^{-c}(1-u)^{-c'}du,$$

con $R(c+c')>0$. Il passaggio al limite (8) riconduce alla equazione (28'). Sia menzionata anche l'inversione seguente di (29):

$$(29') \qquad F_3(a,a',b,b'\,;\,c+c'\,;\,x,y)= \\ =\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c')}{\Gamma(c+c')}\int\limits_0^1 u^{c-1}(1-u)^{c'-1}F(a,b\,;\,c\,;\,ux)F(a',b'\,;\,c'\,;\,(1-u)\,y)du,\quad R(c)>0,\,R(c')>0$$

che è da confrontare con (21).

Per terminare questo Capitolo, consideriamo la seguente equazione che esprime la funzione F_2 come un integrale definito contenente la funzione F_1:

$$(30) \qquad F_2(a,b,b'\,;\,c,c'\,;\,x,y)= \\ =\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c')}{\Gamma(c+c'-1)}\cdot\frac{2^{c+c'-2}}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}e^{-i(c-c')\theta}\cos^{c+c'-2}\theta\,\cdot \\ \cdot\, F_1(a,b,b'\,;\,c+c'-1\,;\,2x\cos\theta\, e^{-i\theta},\,2y\cos\theta\, e^{i\theta})\,d\theta,$$

con $R(c+c')>1$. La dimostrazione di questa relazione si effettua come tutte quelle precedenti, sviluppando la funzione da integrare F_2 e integrando per termini (che è lecito). Se si tiene conto della formula dovuta al CAUCHY,

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}e^{-(m-n+c-c')i\theta}\cos^{m+n+c-c'-2}\theta d\theta=\frac{\pi}{2^{m+n+c+c'-2}}\,\frac{\Gamma(m+n+c+c'-1)}{\Gamma(m+c)\,\Gamma(n+c')},$$

si trova immediatamente lo sviluppo del primo membro di (30).

Indichiamo ancora che la trasformata di FOURIER della relazione (30) fornisce una generalizzazione di un risultato di RAMANUJAN sulle funzioni di BESSEL:

$$(31)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(a, b, b'; c+\xi, c'-\xi; x, y) \frac{e^{2i\theta\xi}\, d\xi}{\Gamma(c+\xi)\,\Gamma(c'-\xi)} =$$

$$= \frac{2^{c+c'-2}}{\Gamma(c+c'-1)} e^{-i(c-c')\theta} \cos^{c+c'-2}\theta\; F_1(a, b, b'; c+c'-1; 2x\cos\theta\, e^{-i\theta}, 2y\cos\theta\, e^{i\theta}),$$

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Le ultime due formule contengono, come casi limiti, importanti risultati sulle funzioni di BESSEL. Ponendo $a=b=b'=\frac{1}{\varepsilon}$, $c=\alpha+1$, $c'=\beta+1$, $x \sim \varepsilon^2 x$, $y \sim \varepsilon^2 y$ e $\varepsilon \to 0$, si ottiene [10]

$$(30')\qquad J_\alpha(x)\, J_\beta(y) =$$

$$= \frac{x^\alpha y^\beta}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{-(\alpha-\beta)i\theta} \left(\frac{2\cos\theta}{x^2 e^{-i\theta} + y^2 e^{i\theta}}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{2}} J_{\alpha+\beta}\left(\sqrt{2\cos\theta(x^2 e^{-i\theta} + y^2 e^{i\theta})}\right) d\theta,$$

$$R(\alpha+\beta) > -1.$$

Per $x=y$, se ne ricava la nota formula di GEGENBAUER

$$J_\alpha(x)\, J_\beta(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_{\alpha+\beta}(2x\cos\theta) \cos(\alpha-\beta)\,\theta d\theta.$$

(30') è anche valida per $y \to 0$ e per $\beta=0$. Il limite di (31) conduce alla trasformata di FOURIER di (30') che è la formula già accennata di RAMANUJAN [11].

Osserviamo ancora che si può stabilire un gran numero d'altre formule integrali fra le funzioni F_1 e F_2 che generalizzano vari risultati speciali sulle funzioni di BESSEL.

Applicazioni di (30) saranno date nella Parte II.

CAPITOLO II.

Trasformazioni di serie che contengono funzioni ipergeometriche.

1. - RISULTATI AUSILIARI. - Le formule di questo Capitolo saranno dedotte in parte dalle equazioni integrali del Capitolo I per scelta opportuna dei parametri delle funzioni ipergeometriche che figurano sotto il segno d'integrazione.

---

(10) DIXON - FERRAR: *Integrals for the product of two Bessel functions.* Quart. Journ. of Math., vol. 4, 1933, pp. 193-208.

(11) Loc. cit. sotto (8).

Applicando allora le formule di riduzione, l'integrazione diretta conduce ai risultati cercati. Le più importanti di queste *formule di riduzione* sono le seguenti ([12]):

$$F_2(a, b, b'; a, a; x, y) = (1-x)^{-b}(1-y)^{-b'}F\left(b, b'; a; \frac{xy}{(1-x)(1-y)}\right), \tag{32}$$

e

$$F_1(a, b, b'; c; x, x) = F(a, b+b'; c; x), \tag{33}$$

e la relazione confluente

$$\Phi_2(b, b'; c; x, x) = {}_1F_1(b+b'; c; x). \tag{33'}$$

Ricordiamo ancora che F_1 e F_2 si riducono ancora ambedue a F nel caso $b=0$ ossia $b'=0$.

Altri risultati saranno stabiliti direttamente. La loro dimostrazione necessita la conoscenza di certi risultati che inseriamo qui:

a) formula di GAUSS

$$F(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}, \qquad R(c-a-b) > 0, \tag{34}$$

e la relazione corrispondente per F_1, dedotta dalle (33) e (34);

b) formula di SAALSCHÜTZ

$$ {}_3F_2(a, b, c; d, e; 1) = \frac{\Gamma(c-d+1)\,\Gamma(c-e+1)\,\Gamma(d)\,\Gamma(e)}{\Gamma(d-a)\,\Gamma(d-b)\,\Gamma(e-a)\,\Gamma(e-b)}, \tag{35}$$

valida per $d+e=a+b+c+1$, e supponendo che l'elemento *a*) o *b*) sia un intero negativo;

c) le formule

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \tag{36}$$

ove z non deve essere un intero negativo, e

$$\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}}\,\Gamma(2z), \qquad (z \neq 0, -1, -2, \ldots); \tag{37}$$

d) casi particolari della (36) sono

$$(a)_r = (-1)^r(1-a-r)_r, \tag{38}$$

e

$$(-a)_r = \frac{(-1)^r\,\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+1-r)}, \tag{39}$$

dove a non denota un intero negativo o zero.

Dopo queste nozioni preliminari, passiamo ora ai risultati.

([12]) Loc. cit. sotto ([2]), p. 24, equazione (28) e p. 35, equazione (10).

2. - TRASFORMAZIONE DELL' EQUAZIONE (15). - Ponendo qui $c = c' = a$, questa relazione, tenendo conto della (32), prenderà la forma

$$F_2(a, b, b'; c, c'; x, y) =$$
$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)} \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}(1-ux)^{-b}(1-uy)^{-b'} F\left(b, b'; c; \frac{u^2xy}{(1-ux)(1-uy)}\right) du.$$

Sostituendo ora alla funzione F lo sviluppo in serie (1), l'integrazione può effettuarsi nel dominio di convergenza della funzione F. Calcoli semplici conducono finalmente al risultato

$$\text{(40)} \qquad F_2(a, b, b'; c, c; x, y) =$$
$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_{2r}(b)_r(b')_r}{(c)_r(c)_{2r}\,r!} (xy)^r F_1(a+2r, b+r, b'+r; c+2r; x, y).$$

Questa formula ammette dei casi particolari importanti e se ne deducono varie formule confluenti interessanti.

Indichiamo qui soltanto quella ottenuta per $a = \frac{1}{\varepsilon}$, $x \backsim \varepsilon x$, $y \backsim \varepsilon y$, $\varepsilon \to 0$,

$$\text{(40')} \qquad {}_1F_1(b; c; x)\,{}_1F_1(b'; c; y) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(b)_r(b')_r}{(c)_r(c)_{2r}\,r!} (xy)^r \Phi_2(b+r, b'+r; c+2r; x, y)$$

generalizzazione di una formula di A. ERDÉLYI ([13]). Quest' ultima se ne deduce per $x = y$ e, secondo la (33'), si scrive come segue

$$\text{(40'')} \qquad {}_1F_1(b; c; x)\,{}_1F_1(b'; c; x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(b)_r(b')_r}{(c)_r(c)_{2r}\,r!} x^{2r}\,{}_1F_1(b+b'+2r; c+2r; x).$$

Nel caso $b = -m$, $b' = -n$ (40'') dà luogo a uno sviluppo ugualmente noto del prodotto di due polinomi di LAGUERRE in serie di questi stessi polinomi.

Altre formule confluenti possono essere dedotte da (40) senza difficoltà. Una dimostrazione diretta (raggruppamento della serie tripla del secondo membro di (40) si può dare ancora.

3. - INVERSIONE DELLA RELAZIONE (40). - È tutto naturale di pensare che uno sviluppo del tipo inverso deve ancora sussistere fra le funzioni F_1 e F_2. Noi abbiamo trovato

$$\text{(41)} \qquad F_1(a, b, b'; c; x, y) =$$
$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r(a)_{2r}(b)_r(b')_r(c-1)_r}{(c)_{2r}(c-1)_{2r}\,r!} (xy)^r F_2(a+2r, b+r, b'+r; c+2r, c+2r; x, y),$$

([13]) Loc. cit. sotto ([6]), formula (4).

che dimostriamo nel modo indicato alla fine del paragrafo precedente. Il secondo membro della (41) si scrive, secondo la (3) come

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(a)_{2r}(b)_r(b')_r(c-1)_r}{(c)_{2r}(c-1)_{2r}\,r!}\,\frac{(a+2r)_{p+q}(b+r)_p(b'+r)_q}{(c+2r)_p(c+2r)_q\,p!\,q!}\,x^{p+r}y^{q+r}\,;$$

e questa serie tripla essendo assolutamente convergente nel dominio di convergenza precisato nell'Introduzione, può essere raggruppata in modo conveniente. Poniamo

$$p+r=m,\quad q+r=n,\qquad (p=m-r,\ q=n-r)\,;$$

mediante la (39), viene

$$(42)\qquad \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b)_m(b')_n}{(c)_m(c)_n\,m!\,n!}\,x^m y^n\cdot\sum_{r=0}^{\min(m,n)}\frac{(-1)^r(-m)_r(-n)_r(c-1)_r(c)_{2r}}{(c+m)_r(c+n)_r(c-1)_{2r}\,r!},$$

la sommazione essendo estesa nella ultima somma a tutti i valori possibili di r, cioè se $R(c)>-1$, a $r=0, 1, 2,\ldots, \min(m,n)$. Per calcolare questa somma, dimostriamo la relazione ausiliare

$$(43)\qquad \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(\beta)_r(\beta')_r(c-1)_r}{(c-1)_{2r}\,r!}\,z^r F(\beta+r,\beta'+r\,;\,c+2r\,;\,z)=1,$$

certamente valida per $|z|<1$. Sviluppando la funzione F in serie di potenza di z e effettuando le trasformazioni analoghe a quelle fatte sulla serie tripla precedente, il primo membro diventa

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\beta)_m(\beta')_m}{(c)_m\,m!}\,z^m\cdot\sum_{s=0}^{m}\frac{(-m)_s(c-1)_s(c)_{2s}}{(c+m)_s(c-1)_{2s}\,s!},$$

ossia, in virtù della (34),

$$\sum_{s=0}^{m}\frac{(-m)_s(c-1)_s(c)_{2s}}{(c+m)_s(c-1)_{2s}\,s!}=\sum_{s=0}^{m}\frac{(-m)_s[2(c)_s-(c-1)_s]}{(c+m)_s\,s!}=\frac{\Gamma(c+m)}{\Gamma(c+2m)}\left[\frac{2\Gamma(2m)}{\Gamma(m)}-\frac{\Gamma(2m+1)}{\Gamma(m+1)}\right],$$

l'ultima espressione è identicamente nulla se m è differente da 0 e così la dimostrazione di (43) è completa. L'identità (43) essendo valida ancora per $z=1$, se ne ricava la relazione

$$(43')\quad \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(\beta)_r(\beta')_r(c-1)_r(c)_{2r}}{(c-\beta)_r(c-\beta')_r(c-1)_{2r}\,r!}=\frac{1}{F(\beta,\beta';c;1)}=\frac{\Gamma(c-\beta)\,\Gamma(c-\beta')}{\Gamma(c)\,\Gamma(c-\beta-\beta')},\quad R(c-\beta-\beta')>0,$$

La dimostrazione di (42) ne segue immediatamente. Poniamo, nella (43′), $\beta=-m$, $\beta'=-n$ che diventa così la somma figurando nella (42) e il valore di quest'ultima sarà

$$\frac{\Gamma(c+m)\,\Gamma(c+n)}{\Gamma(c)\,\Gamma(c+m+n)}=\frac{(c)_m(c)_m}{(c)_{m+n}}.$$

La somma doppia (42) rappresenta dunque, secondo (2), la funzione F_1.

Al limite, si ricava da (41) l'inversa della relazione (40′):

$$(41')\qquad \Phi_2(b, b'; c; x, y) = \\ = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (b)_r (b')_r (c-1)_r}{(c)_{2r}(c-1)_{2r}\, r!} (xy)^r {}_1F_1(b+r;\ c+2r;\ x)\, {}_1F_1(b'+r;\ c+2r;\ y),$$

e il suo caso particolare relativo a $x=y$.

Ponendo qui $a=b=b'=\frac{1}{\varepsilon}$, $x \backsim \varepsilon^2 x$, $y \backsim \varepsilon^2 y$ e $\varepsilon \to 0$, si ottiene (dopo qualche cambiamento di notazione) la formula

$$(x^2+y^2)^{-\frac{\nu}{2}} J_\nu(\sqrt{x^2+y^2}) = 2^\nu \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s(\nu+2s)\Gamma(\nu+s)}{s!} \frac{J_{\nu+2s}(x)}{x^\nu} \frac{J_{\nu+2s}(y)}{y^\nu},$$

cioè il caso particolare relativo a $\theta=\frac{\pi}{2}$ della formula d'addizione delle funzioni di BESSEL ([14]).

L'applicazione importante della (41′) ai polinomi di LAGUERRE sarà esplicitamente indicata nella parte II con altri casi confluenti. Particolarmente, se $c=a$, si ricava da (32) e (41) (e ponendo $\frac{xy}{(1-x)(1-y)}=z$) la formula ausiliare (43).

4. - TRASFORMAZIONI DELL' EQUAZIONE (24). - La stessa formula di riduzione (32) consente di ricavare da (24), ponendo $c=c'=a$ e effettuando i calcoli analoghi a quelli del § 1, il risultato seguente:

$$(44)\qquad F_2(a, b, b'; \gamma, \gamma'; x, y) = \\ = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_r (b)_r (b')_r}{(\gamma)_r (\gamma')_{2r}\, r!} (xy)^r F(a+r, b+r;\ \gamma+r;\ x)\, F(a+r, b'+r;\ \gamma'+r;\ y).$$

Questa formula, e anche la sua inversa, saranno ritrovate più tardi.

Come una applicazione di (44), noi procediamo al calcolo della funzione F_2 per i valori $x=y=1$ delle variabili. Mediante (34) e (39),

$$F_2(a, b, b'; \gamma, \gamma'; 1, 1) = \\ = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')}{\Gamma(\gamma-a)\Gamma(\gamma-b)\Gamma(\gamma'-a)\Gamma(\gamma'-b')} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_r (b)_r (b')_r \Gamma(\gamma-a-b-r)\Gamma(\gamma'-a-b'-r)}{r!} = \\ = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')\Gamma(\gamma-a-b)\Gamma(\gamma'-a-b')}{\Gamma(\gamma-a)\Gamma(\gamma'-a)\Gamma(\gamma-b)\Gamma(\gamma'-b')} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_r (b)_r (b')_r}{(a+b-\gamma+1)_r (a+b'-\gamma'+1)_r\, r!} = \\ = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')\Gamma(\gamma-a-b)\Gamma(\gamma'-a-b')}{\Gamma(\gamma-a)\Gamma(\gamma'-a)\Gamma(\gamma-b)\Gamma(\gamma'-b')} {}_3F_2(a, b, b';\ a+b-\gamma+1,\ a+b'-\gamma'+1;\ 1).$$

([14]) Loc. cit. sotto ([8]).

Se $\alpha=\gamma+\gamma'-1$ e supposto che b e b' sono interi negativi (o almeno uno di essi, l'altro può essere positivo o non intero), viene

$$F_2(\gamma+\gamma'-1, b, b'; \gamma, \gamma'; 1, 1)=(-1)^{b+b'}\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')}{\Gamma(b'-b+\gamma)\Gamma(b-b'+\gamma')}.$$

e noi abbiamo ritrovato un risultato stabilito per altro metodo in uno dei nostri lavori precedenti ([15]).

5. - TRASFORMAZIONI DELLE EQUAZIONI DEL § 2, CAP. I. - Se poniamo nella (17), $c=c'=a$, la formula di riduzione (32) e qualche calcoli analoghi a quelli precedenti consentiranno di stabilire il risultato che segue:

$$(45)\qquad F_1(a, b, b'; \gamma; x, y)=$$
$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(a)_r(b)_r(b')_r}{(\gamma)_{2r}\, r!}(xy)^r F_3(a+r, a+r, b+r, b'+r; \gamma+2r; x. y),$$

la funzione F_3 avendo la definizione (19).

Il passaggio al limite (11), applicato a (45) conduce alla formula importante:

$$(46)\qquad {}_1F_1(a; \gamma; x+y)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(a)_r}{(\gamma)_{2r}\, r!}\Phi_2(a+r, a+r; \gamma+2r; x, y).$$

In modo analogo, l'equazione (16) fornisce, per $c=c'=a$, la relazione seguente:

$$(47)\qquad F(b, \beta; a; x)\, F(b', \beta'; a; y)=$$
$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(b)_r(b')_r(\beta)_r(\beta')_r}{(a)_r(a)_{2r}\, r!}(xy)^r F_3(b+r, b'+r, \beta+r, \beta'+r; a+2r; x, y).$$

Se si pone qui $b=b'=\frac{1}{\varepsilon}$, $x\backsim\varepsilon x$, $y\backsim\varepsilon y$, $\varepsilon\to 0$, si ritrova la formula (40').

6. - RELAZIONI FRA LE FUNZIONI F E F_1. - L'oggetto di questo paragrafo è di stabilire una relazione analoga a (44) con F_1 in luogo di F_2, e la sua inversa che esprime il prodotto di due funzioni F come una serie contenente una funzione F_1. È più facile di dimostrare prima l'ultima formula che è la seguente:

$$(48)\qquad F(a, b; c; x)\, F(a, b'; c; y)=$$
$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(a)_r(b)_r(b')_r(c-a)_r}{(c)_r(c)_{2r}\, r!}(xy)^r F_1(a+r, b+r, b'+r; c+2r; x, y).$$

([15]) E. FELDHEIM: *Expansions and integral-transforms for products of Laguerre and Hermite polynomials*. Quart. Journ. of Math., vol. 11 (1940), pp. 18-29.

La dimostrazione diretta si fa semplicemente, il secondo membro trasformandosi nella serie tripla

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(a)_r(b)_r(b')_r(c-a)_r(a+r)_{p+q}(b+r)_p(b'+r)_q}{(c)_r(c)_{2r}(c+2r)_{p+q}\,p\,!\,q\,!\,r\,!}x^{r+p}y^{r+q}=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b)_m(b')_n}{(c)_{m+n}\,m\,!\,n\,!}x^m y^n\cdot\sum_r\frac{(-m)_r(-n)_r(c-a)_r}{(c)_r(1-a-m-n)_r\,r\,!}.$$

L' ultima somma è ancora « saalschütziana » e il suo valore è, secondo la (35), uguale a

$$\frac{(a)_m(a)_n(c)_{m+n}}{(c)_m(c)_n(a)_{m+n}}.$$

Si trova dunque al secondo membro il prodotto delle due serie infinite che rappresentano il prodotto che figura in primo membro nella (48).

Prima di passare alla inversione di (48), indichiamo alcuni casi particolari di essa. Se $x=y$, (48) diventa

$$(48')\qquad F(a,b;\,c;\,x)\,F(a,b';\,c;\,x)=$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(a)_r(b)_r(b')_r(c-a)_r}{(c)_r(c)_{2r}\,r\,!}x^{2r}F(a+r,\,b+b'+2r;\,c+2r;\,x)$$

e al limite ($a=\frac{1}{\varepsilon}$, $x\backsim\varepsilon x$, $\varepsilon\to 0$) (48′) si riduce alla formula del Sig. ERDÉLYI (40″).

Se $b=b'=\frac{1}{\varepsilon}$, $x\backsim\varepsilon x$, $y\backsim\varepsilon y$, $\varepsilon\to 0$ se ne ricava ([16])

$$(49)\qquad {}_1F_1(a;\,c;\,x)\,{}_1F_1(a;\,c;\,y)=$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(a)_r(c-a)_r}{(c)_r(c)_{2r}\,r\,!}(xy)^r{}_1F_1(a+r;\,c+2r;\,x+y),$$

e, per $a=\frac{1}{\varepsilon}$, $x\backsim\varepsilon x$, $y\backsim\varepsilon y$, $\varepsilon\to 0$, viene la formula relativa alle funzioni di BESSEL

$$J_\nu(x)\,J_\nu(y)=\left(\frac{1}{2}xy\right)^\nu\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{\nu}{2}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{xy}{2}\right)^{2r}(x^2+y^2)^{-1}}{r\,!\,\Gamma(\nu+r+1)}J_{\nu+2r}(\sqrt{x^2+y^2}).$$

Continuiamo adesso col dimostrare la formula inversa cercata:

$$(50)\qquad F_1(a,b,b';\,c;\,x,y)=$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(a)_r(b)_r(b')_r(c-a)_r(c-1)_r}{(c)_{2r}(c-1)_{2r}\,r\,!}(xy)^rF(a+r,b+r;\,c+2r;\,x)F(a+r,\,b'+r;\,c+2r;\,y).$$

([16]) G. N. WATSON: *The product of two hypergeometric functions.* Proc. Lond. Math. Soc., vol. 20 (1922), pp. 189-195.

Sviluppando il secondo membro di (50), si ottiene la serie tripla assolutamente convergente

$$(50') \quad \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} \frac{(a)_r(b)_r(b')_r(c-a)_r(c-1)_r(a+r)_p(b+r)_p(a+r)_q(b'+r)_q}{(c)_{2r}(c-1)_{2r}(c+2r)_p(c+2r)_q\, p!\, q!\, r!} x^{p+r} y^{q+r} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_m(a)_n(b)_m(b')_n}{(c)_m(c)_n\, m!\, n!} x^m y^n \cdot \sum_r \frac{(-m)_r(-n)_r(c)_{2r}(c-a)_r(c-1)_r}{(a)_r(c+m)_r(c+n)_r(c-1)_{2r}\, r!}.$$

Per calcolare l'ultima somma, noi faremo uso della relazione ausiliare

$$(51) \quad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\beta)_r(\beta')_r(c-a)_r(c-1)_r}{(a)_r(c-1)_{2r}\, r!} z^r F(\beta+r, \beta'+r; c+2r; z) = F(\beta, \beta'; a; z),$$

che si verifica immediatamente per mezzo della (43'). Ponendo qui $z=1$, viene

$$(51') \quad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\beta)_r(\beta')_r(c-a)_r(c-1)_r(c)_{2r}}{(a)_r(c-\beta)_r(c-\beta')_r(c-1)_{2r}\, r!} = \frac{F(\beta, \beta'; a; 1)}{F(\beta, \beta'; c; 1)} =$$

$$= \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-\beta)\Gamma(c-\beta')\Gamma(a-\beta-\beta')}{\Gamma(c)\Gamma(a-\beta)\Gamma(a-\beta')\Gamma(c-\beta-\beta')},$$

e, per $\beta=-m$, $\beta'=-n$, il primo membro sarà identico con l'ultima somma precedente il valore della quale è dunque uguale a

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(c+m)\Gamma(c+n)\Gamma(a+m+n)}{\Gamma(c)\Gamma(a+m)\Gamma(a+n)\Gamma(c+m+n)} = \frac{(a)_{m+n}(c)_m(c_n)}{(c)_{m+n}(a)_m(a)_n}.$$

La somma tripla del secondo membro di (50') è così trasformata in modo di rappresentare precisamente la funzione F_1 che figura in primo membro. La nostra formula è dunque completamente dimostrata.

Se $x=y$, (50) diventa

$$F(a, b+b'; c; x) =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_r(b)_r(b')_r(c-a)_r(c-1)_r}{(c)_{2r}(c-1)_{2r}\, r!} x^{2r} F(a+r, b+r; c+2r; x)\, F(a+r, b'+r; c+2r; x)$$

e se ne deduce l'inversione della (40''), per $a=\frac{1}{\varepsilon}$, $x \backsim \varepsilon x$ e $\varepsilon \to 0$.

Al limite, la formula (50) riconduce alla relazione (41') della quale noi indichiamo qui un'altra applicazione. Scrivendo, nella (41'), $b'=b$ e sostituendo al prodotto delle funzioni di KUMMER l'espressione ricavata dalla (49), viene

$$\Phi_2(b, b; c; x, y) =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r(b)_r(b)_r(c-1)_r}{(c)_{2r}(c-1)_{2r}\, r!} (xy)^r \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s(b+r)_s(c-b+r)_s}{(c+2r)_s(c+2r)_{2s}\, s!}\, {}_1F_1(b+r+s; c+2r+2s; x+y) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(b)_k(c-b)_k}{(c)_{2k}\, k!} (xy)^k\, {}_1F_1(b+k; c+2k; x+y) \cdot \sum_{r=0}^{k} \frac{(b)_r(c-1)_r(c)_{2r}\, k!}{(c-b)_r(c)_{k+r}(c-1)_{2r}\, r!\,(k-r)!}.$$

L'ultima somma, come caso particolare della (43'), è uguale a

$$\frac{1}{(c)_k}\frac{\Gamma(c-b)\Gamma(c+k)}{\Gamma(c)\Gamma(c-b+k)}=\frac{1}{(c-b)_k}\,.$$

Finalmente si trova l'inversione di (46):

$$\Phi_2(b, b\,;\, c\,;\, x, y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(b)_k}{(c)_{2k}\,k\,!}(xy)^k{}_1F_1(b+k\,;\, c+2k\,;\, x+y), \tag{52}$$

che ammette delle applicazioni importanti ai polinomi di LAGUERRE.

7. - RELAZIONI FRA LE FUNZIONI F E F_2. - In questo paragrafo noi stabiliremo relazioni fra la funzione F, d'argomento $x+y$ e le funzioni F_2. Cominciamo col dimostrare la formula

$$\begin{aligned}F(a, b\,;\, c\,;\, x+y)&= \\ &=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(a)_{2r}(b)_r(c-b)_r(c-1)_r}{(c)_{2r}(c-1)_{2r}\,r\,!}(xy)^rF_2(a+2r, b+r, b+r\,;\, c+2r\,, c+2r\,;\, x, y).\end{aligned} \tag{53}$$

Il secondo membro si trasforma in modo seguente:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b)_m(b)_n}{(c)_m(c)_n\,m\,!\,n\,!}x^my^n\cdot\sum_{r=0}^{\min(m,n)}\frac{(-m)_r(-n)_r(c-cb)_r(c)_{2r}(-1)_r}{(c+m)_r(c+n)_r(c-1)_{2r}\,r\,!}\,;$$

il valore dell'ultima somma è data per (51') e la sommazione per l'indice n conduce all'espressione

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a)_m(b)_m}{(c)_m\,m\,!}F(a+m, b+m\,;\, c+m\,;\, y)\,x^m,$$

uguale a $F(a, b\,;\, c\,;\, x+y)$, come è facile di verificarlo.

I passaggi al limite (8) e (12) consentono di trovare la relazione

$$\begin{aligned}{}_1F_1(b\,;\, c\,;\, x+y)&= \\ &=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(b)_r(c-b)_r(c-1)_r}{(c)_{2r}(c-1)_{2r}\,r\,!}(xy)^r{}_1F_1(b+r\,;\, c+2r\,;\, x)\,{}_1F_1(b+r\,;\, c+2r\,;\, y)\end{aligned} \tag{54}$$

che è da confrontare con la (46).

L'inversione della (53) è la seguente

$$\begin{aligned}F_2(a, b, b\,;\, c, c\,;\, x, y)&= \\ &=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(a)_{2r}(b)_r(c-b)_r}{(c)_r(c)_{2r}\,r\,!}(xy)^rF(a+2r, b+r\,;\, c+2r\,;\, x+y)\end{aligned} \tag{55}$$

che si dimostra in modo del tutto analogo che i risultati precedenti.

Per $c=a$, si ritrova la (32).

8. - TRASFORMAZIONE DI SERIE CONTENENTI FUNZIONI F_1. - Le formule (46) e (52) suggeriscono l'idea di cercare il valore della somma infinita

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_{2r}(b)_r}{(c)_{2r}\, r!} z^r F_1(a+2r, b+r, b+r; c+2r; x, y),$$

che è certamente convergente per $|z|<1$. Sostituiamo in questa somma l'espressione integrale della funzione F_1, per seguire un procedimento applicato nel lavoro di APPELL (loc. cit, Cap. II, § 8). La somma precedente diventa così

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}(1-ux)^{-b}(1-uy)^{-b}\left[1-\frac{u^2 z}{(1-ux)(1-uy)}\right]^{-b} du.$$

Supposto ora $|x|<1$, $|y|<1$, $|x+y|<1$, viene

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(b)_r(z-xy)^r}{r!} \int_0^1 u^{2r+a-1}(1-u)^{c-a-1}[1-u(x+y)]^{-b-r} du$$

che, tenendo conto della formula (4), consente finalmente di stabilire la relazione

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_{2r}(b)_r}{(c)_{2r}\, r!} z^r F_1(a+2r, b+r, b+r; c+2r; x, y) = \tag{56}$$
$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_{2r}(b)_r}{(c)_{2r}\, r!} (r-xy)^r F(a+2r, b+r; c+2r; x+y).$$

Si può indicare anche una generalizzazione di questo risultato:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_{2r}(h)_r}{(c)_{2r}\, r!} z^r F_1(a+2r, b+r, b'+r; c+2r; x, y) = \tag{57}$$
$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_{2r}(h)_r}{(c)_{2r}\, r!} (z-xy)^r F_D(a+2r, b-h, b'-h, h+r; c+2r; x, y, x+y),$$

dove F_D è una delle funzioni ipergeometriche di LAURICELLA.

Si deve far menzione di alcuni casi particolari e limiti di (56).

Per $a=\frac{1}{\varepsilon}$, $z \backsim \varepsilon^2 z$, $x \backsim \varepsilon x$, $y \backsim \varepsilon y$ e $\varepsilon \to 0$, la (56) diventa

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(b)_r z^r}{(c)_{2r}\, r!} \Phi_2(b+r, b+r; c+2r; x, y) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (b)_r}{(c)_{2r}\, r!} (xy-z)^r {}_1F_1(b+r; c+2r; x+y)$$

che comprende ambo le due relazioni particolari (46) e (52). Generalizzazioni di queste ultime sono dedotte da (56) ponendo qui $z=0$ ossia $z=xy$:

$$F_1(a, b, b; c; x, y) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (a)_{2r}(b)_r}{(c)_{2r}\, r!} (xy)^r F(a+2r, b+r; c+2r; x+y) \tag{56'}$$

che è da confrontare con (55), e

$$(56'')\qquad F(a,b;c;x+y)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(a)_{2r}(b)_r}{(c)_{2r}\,r!}(xy)^rF_1(a+2r,b+r,b+r;c+2r;x,y)$$

che si deve comparare a (53). I casi particolari relativi a $x=y$ non devono essere scritti qui esplicitamente.

9. - Altre relazioni fra F e F_2. - Tenendo conto delle formule (44) e (6), si può dimostrare in modo analogo la relazione interessante che segue

$$(58)\qquad \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(a)_r(b)_r(b')_r}{(c)_r(c')_r\,r!}z^rF(a+r,b+r;c+r;x)\,F(a+r,b'+r;c'+r;y)=$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(a)_r(b)_r(b')_r}{(c)_r(c')_r\,r!}(xy-z)^rF_2(a+r,b+r,b'+r;c+r,c'+r;x,y).$$

Per $z=xy$ se ne ricava ancor una volta il risultato già dimostrato (44). Ma, se poniamo $z=0$, viene la sua inversa

$$(59)\qquad F(a,b;c;x)\,F(a,b';c';y)=$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(a)_r(b)_r(b')_r}{(c)_r(c')_r\,r!}(xy)^rF_2(a+r,b+r,b'+r;c+r,c'+r;x,y)$$

che è da confrontare con (48).

Passando al limite $b=b'=\frac{1}{\varepsilon}$, $z\backsim\varepsilon^2z$, $x\backsim\varepsilon x$, $y\backsim\varepsilon y$ e $\varepsilon\to0$ si ricava da (58) relazioni inverse fra le funzioni di Whittaker di una e più variabili ([17]). Secondo la definizione

$$M_{k,m}(x)=x^{m+\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\,{}_1F_1\left(\frac{1}{2}-k+m;\,2m+1;\,x\right),$$

e

$$M_{k;\,m,n}(x,y)=x^{m+\frac{1}{2}}y^{n+\frac{1}{2}}e^{-\frac{x+y}{2}}\,\Psi_2(1-k+m+n;\,2m+1,2n+1;\,x,y)$$

dove

$$\Psi_2(a;\,c,c';\,x,y)=\lim_{\varepsilon\to0}F_2\left(a,\frac{1}{\varepsilon},\frac{1}{\varepsilon};\,c,c';\,\varepsilon x,\varepsilon y\right)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(a)_{r+s}x^ry^s}{(c)_r(c')_s\,r!\,s!}\,.$$

Le formule (44) e (59) danno luogo allora alle relazioni

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(1-k+m+n)_r(xy)^{\frac{r}{2}}}{(2m+1)_r(2n+1)_r\,r!}M_{k+m-n-\frac{r+1}{2};\,m+\frac{r}{2}}(x)M_{k-m+n-\frac{r+1}{2};\,n+\frac{r}{2}}(y)=M_{k;\,m,n}(x,y)$$

([17]) Vedi p. es. E. T. Whittaker - G. N. Watson: *A Course of Modern Analysis*. Cambridge, 1927 e anche loc. cit. sotto ([2]).

e

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r(1-k+m+n)_r(xy)^{\frac{r}{2}}}{(2m+1)_r(2n+1)_r\, r!} M_{k+\frac{1}{2};\, m+\frac{r}{2},\, n+\frac{r}{2}}(x, y) = M_{k-n,\, m}(x)\, M_{k-m,\, n}(y),$$

con $m, n \neq -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, -2, \ldots$

10. - Una funzione generatrice per le funzioni F di Gauss. - Consideriamo la rappresentazione integrale (7) della funzione F_1. Si può scrivere in quest'integrale

$$(1-uy)^{-b'} = (1-z)^{-b'}[1-z(1-ux)]^{-b'},$$

con $z = \frac{y}{y-x}$. Se $|z| < 1$, si ha

$$[1-z(1-ux)]^{-b'} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(b')_r}{r!}(1-ux)^r z^r,$$

e quindi

$$\begin{aligned} F_1(a, b, b'; c; x, y) &= \\ &= (1-z)^{-b'} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(b')_r}{r!} z^r \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}(1-ux)^{-b+r} du = \\ &= (1-z)^{-b'} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(b')_r}{r!} z^r F(a, b-r; c; x). \end{aligned}$$

Finalmente, noi abbiamo

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(h)_r}{r!} F(a, b-r; c; x)\, z^r = (1-z)^{-h} F_1\left(a, b, h; c; x, -\frac{xz}{1-z}\right), \qquad |z| > 1. \tag{60}$$

Per $a = \frac{1}{\varepsilon}$, $x \sim \varepsilon x$, $\varepsilon \to 0$, se ne ricava una funzione generatrice della funzione di Kummer:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(h)_r}{r!}\, {}_1F_1(b-r; c; x)\, z^r = (1-z)^{-h}\, \Phi_2\left(b, h; c; x, -\frac{xz}{1-z}\right), \qquad |z| < 1. \tag{61}$$

Le ultime due relazioni hanno delle applicazioni molto importanti nella teoria dei polinomi di Jacobi (loc. cit. sotto ([9])) e di Laguerre (Parte II), nella ricerca delle funzioni generatrici.

11. - Funzioni generatrici per le funzioni F_1. - La formula (60) può essere generalizzata per le funzioni ipergeometriche F_1, cercando e calcolando la somma

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(h)_r}{r!} F_1(a, b-r, b'-r; c; x, y)\, r^r.$$

Se si scrive qui l'espressione integrale (7) della funzione F_1, la somma diventa, per $|z|<1$,

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}(1-ux)^{-b}(1-uy)^{-b'}[1-z(1-ux)(1-uy)]^{-h}\,du.$$

Se anche $|x|<1$, $|y|<1$ e $\left|\frac{xy}{x+y}\right|$, si avrà,

$$[1-z(1-ux)(1-uy)]^{-h}=(1-z)^{-h}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)_r(h)_r}{r!}\left[\frac{z(x+y)}{1-z}\right]^r\left(1-\frac{uxy}{x+y}\right)^r,$$

e l'integrale precedente prende la forma

$$(1-z)^{-h}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(h)_r}{r!}\left[\frac{z(x+y)}{1-z}\right]^r\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 u^{r+a-1}(1-u)^{c-a-1}(1-ux)^{-b}(1-uy)^{-b'}\left(1-u\frac{xy}{x+y}\right)du.$$

L'ultimo integrale rappresenta la funzione F_D di LAURICELLA di tre variabili, e avremo quindi il risultato seguente:

$$(62)\qquad \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(h)_r}{r!}F_1(a,b-r,b'-r;\,c;\,x,y)\,z^r=$$
$$=(1-z)^{-h}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(a)_r(h)_r}{(c)_r\,r!}F_D\left(a+r,b,b',-r;\,c,+r;\,x,y,\frac{xy}{x+y}\right)\left[\frac{z(x+y}{1-z}\right]^r.$$

Consideriamo alcuni casi particolari di (62).

a) Se $y=0$, si ricava la formula

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(h)_r}{r!}F(a,b-r;\,c;\,x)\,z^r=(1-z)^{-h}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(a)_r(h)_r}{(c)_r\,r!}F(a+r,b;\,c+r;\,x)\left[\frac{zx}{1-z}\right]^r,$$

che è da confrontare con (60). Quest'ultima consente di scrivere anche

$$(63)\qquad \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(a)_r(h)_r}{(c)_r\,r!}F(a+r,b;\,c+r;\,x)\,t^r=F_1(a,b,h;\,c;\,x,t),\qquad |t|<1.$$

La formula confluente

$$\sum_{r=0}^{\infty}{}_1F_1(b-r;\,c;\,x)\frac{z^r}{r!}=e^z\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{(c)_r\,r!}\,{}_1F_1(b;\,c+r;\,x)(xz)^r$$

dà, per $b=0$, una funzione generatrice per i polinomi di LAGUERRE.

b) Se $b=b'=0$, (62) diventa

$$(64)\qquad \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(h)_r}{r!}\Phi_2(-r,-r;\,c;\,x,y)\,z^r=$$
$$=(1-z)^{-h}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(h)_r}{(c)_r\,r!}\,{}_1F_1\left(-r;\,c+r;\,\frac{xy}{x+y}\right)\left[\frac{z(x+y)}{1-z}\right]^r,$$

e si può osservare che le funzioni confluenti che intervengono qui sono polinomi (e precisamente polinomi di LAGUERRE).

12. - DUE ALTRE FUNZIONI GENERATRICI PER LE FUNZIONI F_1. - Cominciamo col trasformare la serie doppia infinita

$$A \equiv \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(h)_r (k)_s}{r!\, s!} F_1(a, b-r, b'-s\,;\, c\,;\, x, y)\, u^r v^s,$$

che è certamente convergente per $|u|<1$, $|v|<1$. Sostituendo a F_1 la sua espressione integrale (7), viene

$$A \equiv \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-tx)^{-b}(1-ty)^{b'} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(h)_r (k)_s u^r (1-tx)^r v^s (1-ty)^s}{r!\, s!} dt =$$

$$=(1-u)^{-h}(1-v)^{-k} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-tx)^{-b}(1-ty)^{-b'}\left(1+\frac{tux}{1-u}\right)^{-h}\left(1+\frac{tvy}{1-v}\right)^{-}$$

Noi abbiamo qui ancora una funzione F_D (di quattro variabili), e la prima relazione indicata sarà

$$(65) \qquad \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(h)_r (k)_s}{r!\, s!} F_1(a, b-r, b'-s\,;\, c\,;\, x, y)\, u^r v^s =$$
$$=(1-u)^{-h}(1-v)^{-k} F_D\left(a, b, b', h, k\,;\, c\,;\, x, y, -\frac{ux}{1-u}, -\frac{vy}{1-v}\right), \qquad |u|<1, |v|<1.$$

Se $y=0$, (65) si riduce a (60). Un caso particolare importante di (65), relativo ad $a=\frac{1}{\varepsilon}$, $x \sim \varepsilon x$, $y \sim \varepsilon y$, $\varepsilon \to 0$ e $b=b'=0$, è

$$(66) \qquad \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(h)_r (k)_s}{r!\, s!} \Phi_2(-r, -s\,;\, c\,;\, x, y)\, u^r v^s =$$
$$= (1-u)^{-h}(1-v)^{-k}\, \Phi_2\left(h, k\,;\, c\,;\, -\frac{ux}{1-u}, -\frac{vy}{1-v}\right)$$

dove la funzione Φ_2 del primo membro si esprime per mezzo di un polinomio di LAGUERRE di due variabili (Parte II).

L'altra serie che consideriamo è la seguente

$$B \equiv \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(h)_{r+s}}{r!\, s!} F_1(a, b-r, b'-s\,;\, c\,;\, x, y)\, u^r v^s$$

che trasformiamo in modo di dar finalmente la relazione

$$(67) \qquad \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(h)_{r+s}}{r!\, s!} F_1(a, b-r, b'-s\,;\, c\,;\, x, y)\, u^r v^s =$$
$$=(1-u-v)^{-h} F_D\left(a, b, b', h\,;\, c\,;\, x, y, -\frac{ux+vy}{1-u-v}\right),$$

valida per $|u|+|v|<1$.

Il caso particolare limite di (67) analogo a (66) è qui

$$(68) \quad \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(h)_{r+s}}{r!\,s!} \Phi_2(-r, -s; c; x, y)\, u^r v^s = (1-u-v)^{-h}{}_1F_1\left(h; c; -\frac{ux+vy}{1-u-v}\right),$$

che è ancora uno dei risultati fondamentali della teoria dei polinomi di LAGUERRE di due variabili.

13. - GENERALIZZAZIONE DI UN RISULTATO RELATIVO ALLE FUNZIONI DI WHITTAKER. - Ricordiamo la formula dimostrata da A. ERDÉLYI ([18]) che scriveremo qui sotto forma di funzioni di KUMMER:

$$(69) \quad t^{-2\nu}{}_1F_1\left(\frac{1}{2} - k + m; 2m+1; t\right) =$$
$$= \frac{\Gamma(2m+1)}{\Gamma(2m+2\nu+1)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2\nu)_r}{r!} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} - k + m - r; 2m+2\nu+1; t\right),$$
$$2m+1 > 0,\ 2m+2\nu+1 > 0,\ \nu - m < \frac{1}{4}.$$

Ponendo nella somma A del § 12, $u=v=1$, viene

$$A' \equiv \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(h)_r (k)_s}{r!\,s!} F_1(a, b-r, b'-s; c; x, y) =$$
$$= x^{-h} y^{-k} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 u^{a-h-k-1}(1-u)^{c-a-1}(1-ux)^{-b}(1-uy)^{-b'} du,$$

e quindi

$$(70) \quad x^{-h} y^{-k} F_1(a, b, b'; c; x, y) =$$
$$= \frac{\Gamma(a)\Gamma(c+h+k)}{\Gamma(c)\Gamma(a+h+k)} \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(h)_r (k)_s}{r!\,s!} F_1(a+h+k, b-r, b'-s; c+h+k; x, y)$$

dove $R(a) > 0$, $R(c) > 0$, $R(c+h+k) > 0$, $R(a+h+k) > 0$ e, per condizioni opportune, si deve ancora assicurare la convergenza della serie doppia del secondo membro. Come caso particolare, se ne ricava la formula, prima generalizzazione della (69):

$$(70') \quad x^{-h} F(a, b; c; x) = \frac{\Gamma(b+h)\Gamma(c)}{\Gamma(b)(\Gamma c+h)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(h)_r}{r!} F(a-r, b+h; c+h; x).$$

Per $b = \frac{1}{\varepsilon}$, $x = \varepsilon t$, $\varepsilon \to 0$ e $a = \frac{1}{2} - k + m$, $c = 2m+1$, $h = 2\nu$, (70') si riduce a (69).

([18]) A. ERDÉLYI: *Funktionalrelationen mit konfluenten hypergeometrischen Funktionen.* II. Math. Zeitschrift, vol. 42 (1936), pp. 641-670.

Un'altra generalizzazione di (69) meno importante e più complicata è la seguente

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(h)_r}{r!} F_1(a+h, b-r, b'-r; c+h; x, y) = \\ = \frac{\Gamma(a)\Gamma(c+h)}{\Gamma(c)\Gamma(a+h)}(x+y)^{-h} F_D\left(a, b, b', h; c; x, y, \frac{xy}{x+y}\right).$$

Per $y=0$, quest'ultima relazione si riduce ugualmente a (70').

PARTE SECONDA

Relazioni fra i polinomi di Laguerre di una e più variabili.

1. - DEFINIZIONI. - I polinomi di LAGUERRE sono definiti per

$$L_m^{(\alpha)}(x) = \frac{(\alpha+1)_m}{m!} {}_1F_1(-m; \alpha+1; x) = \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \frac{\Gamma(m+\alpha+1)}{(m-r)!\,\Gamma(r+\alpha+1)} \frac{x^r}{r!}, \tag{71}$$

e un'estensione al caso di due variabili è la seguente

$$L_{m,n}^{(\alpha)}(x, y) = \frac{(\alpha+1)_{m+n}}{m!\,n!} \Phi_2(-m, -n; \alpha+1; x, y) = \\ = \sum_{r=0}^{m} \sum_{s=0}^{n} (-1)^{r+s} \frac{\Gamma(m+n+\alpha+1)}{(m-r)!\,(n-s)!\,\Gamma(r+s+\alpha+1)} \frac{x^r}{r!} \frac{y^s}{s!}. \tag{72}$$

Le principali proprietà dei polinomi (71) sono esposte per esempio nel trattato di G. SZEGÖ: *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., vol. 23, (1939). Per alcuni risultati particolari, si può vedere uno dei nostri lavori ([19]). La definizione dei polinomi di due variabili è dovuta a P. HUMBERT ([20]) che ha anche stabilito, per i polinomi di LAGUERRE modificati (detti polinomi di SONINE) alcuni risultati speciali: funzioni generatrici, formule di riduzione, sviluppo in serie di polinomi di una variabile, ritrovati poi da A. ERDÉLYI ([21]) e

---

([19]) E. FELDHEIM: *Développements en série de polynomes d'Hermite et de Laguerre à l'aide des transformations de Gauss et de Laplace.* Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet. Amsterdam, vol. 43 (1940), pp. 224-248, 379-386.

([20]) P. HUMBERT: *Sur les polynomes de Sonine à une et deux variables.* Journal de l'École Polyt. (2), 1924, pp. 59-75.

([21]) A. ERDÉLYI: *Beitrag zur Theorie der konfluenten hypergeometrischen Funktionen von mehreren Veränderlichen.* Sitzungsber. Akad. Wiss. zu Wien. vol. 146 (1937), pp. 431-467. A quest'Autore è sfuggita la memoria precedentemente citata di P. HUMBERT.

contenuti nei nostri risultati generali. Noi ci limiteremo qui al caso di due variabili; alcune delle formule che vanno esser stabilite possono generalizzarsi a più variabili.

2. - Risultati sui polinomi di Laguerre $L_m^{(\alpha)}(x)$. - Riprendiamo adesso la relazione (61). Ponendo qui $b=0$, noi troviamo la funzione generatrice generale dei polinomi di Laguerre

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(h)_m}{(\alpha+1)_m} L_m^{(\alpha)}(x)\, z^m = (1-z)^{-h}{}_1F_1\Big(h\,;\ \alpha+1\,;\ -\frac{xz}{1-z}\Big), \tag{73}$$

valida per $R(\alpha) > -1$ e $|z| < 1$.

Questa formula contiene, come casi particolari, due funzioni generatrici note di questi polinomi:

a) Se $h=\alpha+1$, (73) diventa

$$\sum_{m=0}^{\infty} L_m^{(\alpha)}(x)\, z^m = (1-z)^{-\alpha-1} e^{-\frac{xz}{1-z}}, \qquad |z| < 1. \tag{73'}$$

b) Se $h=\frac{1}{\varepsilon}$, $z \backsim \varepsilon z$, $\varepsilon \to 0$ si trova, mediante la (10),

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(m+\alpha+1)} L_m^{(\alpha)}(x) = e^z (xz)^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{xz}). \tag{73''}$$

Consideriamo anche la formula (60) e poniamo qui $b=0$, $a=\alpha+\beta+1$, $c=\alpha+1$, $h=\frac{1}{\varepsilon}$, $z \backsim \varepsilon z$, $\varepsilon \to 0$:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^r}{r!} F(-r, \alpha+\beta+1\,;\ \alpha+1\,;\ x) = e^{z(1-x)}{}_1F_1(-\beta\,;\ \alpha+1\,;\ xz).$$

Ma, per una nota formula relativa alle funzioni ipergeometriche,

$$(1+\alpha)_r F(-r, \alpha+\beta+1\,;\ \alpha+1\,;\ x) = \\ = (-1)^r(\beta-r+1)_r F(-r, \alpha+\beta+1\,;\ \beta-r+1\,;\ 1-x)$$

e quindi

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\beta-r+1)_r}{(\alpha+1)_r\, r!} F(-r, \alpha+\beta+1;\ \beta-r+1;\ x)\, z^r = e^{-xz}{}_1F_1(-\beta;\ \alpha+1;\ z(1-x)). \tag{74}$$

Ponendo $\alpha=\frac{1}{\varepsilon}$, $z \backsim \frac{z}{\varepsilon}$, $x \backsim \varepsilon x$, $\varepsilon \to 0$ avremo così una terza funzione generatrice nota dei polinomi di Laguerre:

$$\sum_{r=0}^{\infty} L_r^{(\beta-r)}(x)\, z^r = e^{-xz}(1+z)^\beta, \qquad (|z| < 1). \tag{74'}$$

Ritornando sulla formula (73), vediamo che essa contiene ancora la cosidetta « formula di moltiplicazione » di questi polinomi. Se si pone $h=-n$, (intero negativo), il secondo membro di (73) rappresenta un polinomio di LAGUERRE di grado n, cioè

$$\sum_{m=0}^{n} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{(n-m)!\,\Gamma(m+\alpha+1)} L_m^{(\alpha)}(x)\, z^m = (1+z)^n L_n^{(\alpha)}\left(\frac{xz}{1+z}\right),$$

ossia, sotto una forma più usata

$$\lambda^n L_n^{(\alpha)}\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \sum_{m=0}^{n} (\lambda-1)^{n-m} \binom{n+\alpha}{n-m} L_m^{(\alpha)}(x). \tag{75}$$

La formula (73) può essere considerata come una formula di moltiplicazione delle funzioni di KUMMER:

$${}_1F_1\left(h;\, \alpha+1;\, \frac{x}{\lambda}\right) = \left(1-\frac{1}{\lambda}\right)^{-h} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(h)_m}{(\alpha+1)_m} (1-\lambda)^{-m} L_m^{(\alpha)}(x),$$

donde si ricava la generalizzazione di un risultato relativo ai polinomi di LAGUERRE, cioè

$$\int_0^\infty J_\alpha(2\sqrt{xy})\, e^{-x} x^{\frac{\alpha}{2}}\, {}_1F_1\left(h;\, \alpha+1;\, \frac{x}{\lambda}\right) dx = \left(1-\frac{1}{\lambda}\right)^{-h} e^{-y} y^{\frac{\alpha}{2}}\, {}_1F_1\left(h;\, \alpha+1;\, \frac{y}{1-\lambda}\right), \tag{76}$$

che si riduce per $h=-n$ alla nota formula. Quest' ultima vale anche per $\lambda=0$ e $\lambda=1$ e dà luogo a risultati molto importanti ([22]).

La relazione (76) generalizza anche la classica relazione integrale

$$\int_0^\infty e^{-p^2t^2} J_\alpha(at)\, J_\alpha(bt)\, t\,dt = \frac{1}{2p^2}\, e^{-\frac{a^2+b^2}{4p^2}} I_\alpha\left(\frac{ab}{2p^2}\right),$$

di WEBER ([23]) che si deduce dalla (76) per $x=p^2t^2$, $y=\frac{a^2}{4p^2}$, $\frac{1}{\lambda}=-\frac{\varepsilon b^2}{4p^2}$, $h=\frac{1}{\varepsilon}$, $\varepsilon\to 0$.

Altri casi particolari della (76) sono contenuti in uno dei nostri recenti lavori ([24]). La (76) è ancora equivalente alla seguente formula di moltiplicazione delle funzioni di WHITTAKER

$$e^{-\frac{\alpha x}{2}} \alpha^{-k} M_{k,m}(\alpha x)\, e^{\frac{x}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}-k+m\right)_n}{n!} \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}+k-m-n} M_{m+n+\frac{1}{2},\,m}(x),$$

che è da confrontare con quelle dimostrate da A. ERDÉLYI ([25]).

([22]) Cfr. p. es. loco cit. sotto ([19]).

([23]) Loco cit. sotto ([8]).

([24]) E. FELDHEIM: *Trasformata di Hankel di funzioni di Whittaker*. In corso di stampa negli Annali d. R. Sc. Norm. Sup. di Pisa (§ 3).

([25]) Math. Zeitschrift, vol. 42 (1936), pp. 125-143.

Le funzioni generatrici (73′) e (74′) consentono di dimostrare la nota relazione

$$L_m^{(\alpha+\beta)}(x)=\sum_{r=0}^{m}\binom{m+\alpha}{m-r}L_r^{(\beta-r)}(x),$$

che possiamo generalizzare nel modo seguente:

$${}_1F_1(a\,;\,c+d\,;\,x)=\frac{\Gamma(c+d)\,\Gamma(c-a)}{\Gamma(c+d-a)\,\Gamma(c)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(a)_r(d)_r}{(1+a-c)_r\,r!}\,{}_1F_1(\alpha+r\,;\,c\,;\,x).$$

Indichiamo anche che i risultati generali della Parte I contengono come casi particolari, delle relazioni fra le funzioni di KUMMER ${}_1F_1$ e le funzioni del cilindro parabolico D_ν (e specialmente, i polinomi di HERMITE). Questi risultati costituiscono una parte di quelli dati in un recente lavoro ([26]).

3. - RELAZIONI FRA POLINOMI DI LAGUERRE E DI HERMITE. - Consideriamo la nota formula di GEGENBAUER, relativa alle funzioni di BESSEL

$$J_{\alpha+n}(x)=\frac{(-i)^n\,\Gamma(2\alpha)\,n!}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2\alpha+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha}\int_{-1}^{+1}e^{itx}(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\,C_n^{\alpha}(t)\,dt,\qquad R(\alpha)>-\frac{1}{2},$$

dove $C_n^{\alpha}(t)$ denota il polinomio ultrasferico (o di GEGENBAUER) di grado n. Sostituendo qui alla funzione di BESSEL l'espressione ricavata dalla (73″), e identificando i coefficienti della stessa potenza di z, si ottiene la formula ritenuta nuova:

$$(77)\qquad x^{\frac{n}{2}}\,L_r^{(\alpha+n)}(x)=$$

$$=\frac{(-1)^r\,\Gamma(n+r+\alpha+1)\,\Gamma(2\alpha)\,n!}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2\alpha+n)(2r+n)!}\int_{-1}^{+1}H_{2r+n}(t\sqrt{x})(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\,C_n^{\alpha}(t)\,dt,\quad \left(R(\alpha)>-\frac{1}{2}\right).$$

Se $n=0$, (77) si riduce ad una relazione di USPENSKY ([27]). Un'altra generalizzazione di quest'ultimo risultato è

$${}_1F_1(-\nu\,;\,\alpha+1\,;\,x)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\;\frac{2^{\nu}\,\Gamma(\nu+1)}{\cos\pi\nu\cdot\Gamma(2\nu+1)}\int_{-1}^{+1}e^{\frac{xt^2}{2}}(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\,D_{2\nu}(t\sqrt{2x})\,dt$$

con $\nu \neq \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2},\ldots,\ (\nu>-1)$.

([26]) E. FELDHEIM: *Alcuni risultati su le funzioni di Whittaker e del cilindro parabolico.* In corso di stampa negli Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino.

([27]) Cfr. SZEGÖ, loc. cit.

Una conseguenza della (77) è la relazione

$$(78)\qquad H_m(tx)=$$
$$=m\,!\,\Gamma(\alpha)\sum_{r=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\frac{(-1)^r(\alpha+m-2r)}{\Gamma(m+\alpha-r+1)}x^{m-2r}L_r^{(\alpha+m-2r)}(x^2)\,C_{m-2r}^{\alpha}(t),\qquad R(\alpha)>-\frac{1}{2}$$

e, per $\alpha\to 0$, se ne ricava

$$H_m(x\cos\varphi)=\sum_{r=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\varepsilon_{m-2_r}(-m)_r x^{m-2r}L_r^{(m-2r)}(x^2)\cos(m-2r)\,\varphi.$$

In questa formula, ε_r denota la « costante di NEUMANN »

$$\varepsilon_r=2,\quad (r=1,\,2,\ldots.),\qquad \varepsilon_0=1.$$

D' altro canto, (77) diventa, per $\alpha\to 0$,

$$(79)\qquad x^{\frac{m-r}{2}}L_r^{(m-r)}(x)=\frac{(-1)^r\,m\,!}{\pi(m+r)\,!}\int_0^{\pi}H_{m+r}\left(x^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\varphi}{2}\right)\cos\frac{m-r}{2}\,\varphi d\varphi,$$

e il caso particolare $r=0$ conduce alla formula d' inversione dei polinomi di HERMITE

$$x^m=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}H_m(x\cos\varphi)\cos m\varphi d\varphi.$$

Per $r=m$ e $x=2y^2$, la (79) fornisce

$$(80)\qquad L_m(2y^2)=\frac{(-1)^m\,m\,!}{\pi(2m)\,!}\int_{-1}^{+1}H_{2m}(yt\sqrt{2})\,\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Abbiamo già trovato ([28]) l'altra equazione

$$(81)\qquad H_m^2(x)=\frac{2^m\,m\,!}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(y+ix)^2}L_m(2y^2)\,dy.$$

Sostituendo (80) nella (81), si ritrova la formula ([29])

$$(82)\qquad H_n^2(x)=\frac{(-1)^n}{\pi}\,\frac{2^n(n\,!)^2}{(2n)\,!}\int_0^{\pi}H_{2n}(x\sqrt{1-\sec\varphi})\cos^n\varphi d\varphi.$$

Inversamente, (80) può esser dedotta dalla (82) e dall' inversa della (81).

([28]) Loc. cit. sotto ([15]).

([29]) W. T. HOWELL: *Integral representations for products of Weber's Parabolic Cylinder functions*. Philos. Mag. vol. 7 (25), (1938), pp. 456-458.

Una reciprocità analoga sussiste ancora fra la (79) e la generalizzazione nota ([30]) della (82):

$$(83)\qquad H_m(x)\,H_n(x)=\frac{2^{\frac{m+n}{2}}}{\pi}\frac{m!\,n!}{(m+n)!}\int_0^{\pi}H_{m+n}(x\sqrt{1+\sec\varphi})\cos^{\frac{m+n}{2}}\varphi\cos\frac{m-n}{2}\varphi\,d\varphi,$$

per la quale indichiamo qui una nuova dimostrazione molto semplice. Consideriamo infatti l'n^{esimo} « polinomio di LEGENDRE » associato ai coefficienti $\left\{\frac{H_k(x)}{k!}\right\}$, nel senso del Prof. FEJÉR:

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}(re^{i\theta})^n\right|^2=\left|e^{2xre^{i\theta}-r^2e^{2i\theta}}\right|^2=e^{4xr\cos\theta-2r^2\cos 2\theta},$$

dunque

$$(84)\qquad (2\cos 2\theta)^{\frac{m}{2}}H_m(x\sqrt{1+\sec 2\theta})=\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}H_r(x)H_{m-r}(x)\cos(m-2r)\theta,$$

e questa relazione è equivalente alla (83).

4. - POLINOMI DI LAGUERRE DI DUE VARIABILI. - Secondo la definizione (72), si ricava dalla (66) la seguente funzione generatrice di questi polinomi:

$$(85)\qquad \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(h)_m(k)_n}{(\alpha+1)_{m+n}}L_{m,n}^{(\alpha)}(x,y)\,u^m v^n=$$
$$=(1-u)^{-h}(1-v)^{-k}\,\Phi_2\!\left(h,k,\alpha+1;\,-\frac{ux}{1-u},\,-\frac{vy}{1-v}\right),$$

con $R(\alpha)>-1$ e $|u|<1$, $|v|<1$. Se ne deduce, come nel caso di una variabile, diverse relazioni speciali.

Se $h=k=\frac{1}{\varepsilon}$, $u\backsim\varepsilon u$, $v\backsim\varepsilon v$, $\varepsilon\to 0$, (85) fornisce la nota ([31]) funzione generatrice

$$(85')\qquad \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^m v^n}{\Gamma(\alpha+m+n+1)}L_{m,n}^{(\alpha)}(x,y)=e^{u+v}(ux+vy)^{-\frac{\alpha}{2}}J_\alpha(2\sqrt{ux+vy}).$$

La formula (85) può essere considerata come una formula di moltiplicazione delle funzioni Φ_2:

$$\Phi_2\!\left(h,k;\,\alpha+1;\,\frac{x}{\lambda},\frac{y}{\mu}\right)=\lambda^h\mu^k\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{r+s}\frac{(h)_r(k)_s}{(\alpha+1)_{r+s}}(\lambda-1)^{-h-r}(\mu-1)^{-k-s}L_{r,s}^{(\alpha)}(x,y).$$

([30]) W. N. BAILEY: Journ. Lond. Math. Soc., vol. 13 (1938) pp. 202-203.
([31]) Loco cit. sotto ([20]) e ([21]).

Un' altra funzione generatrice generale si deduce dalla (68) :

$$(86)\qquad \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(h)_{m+n}}{(\alpha+1)_{m+n}}L_{m,n}^{(\alpha)}(x,y)\,u^m v^n = \\ =(1-u-v)^{-\alpha-1}{}_1F_1\left(h\,;\,\alpha+1\,;\,-\frac{ux+vy}{1-u-v}\right),$$

valida per $R(\alpha)>-1$, $|u|+|v|<1$. Per $h=\frac{1}{\varepsilon}$, $u \backsim \varepsilon u$, $v\backsim \varepsilon v$, $\varepsilon\to 0$, essa si riduce a (85′). Per $h=\alpha+1$, se ne ricava l' altra formula ugualmente nota

$$(87)\qquad \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}u^m v^n L_{m,n}^{(\alpha)}(x,y)=(1-u-v)^{-\alpha-1}e^{-\frac{ux+vy}{1-u-v}},\qquad (|u|+|v|<1).$$

Consideriamo poi la formula (67) dove poniamo $h=\beta+1$, $b=b'=0$, $c=\beta+1$, $a=\alpha+\beta+1$:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\beta+1)_{m+n}}{m!\,n!}F_1\left(\alpha+\beta+m+n+1,\,-m,\,-n\,;\,\beta+1\,;\,\frac{1-x}{2},\frac{1-y}{2}\right)u^m v^n = \\ =(1-u-v)^{\alpha}\left(1-\frac{u(1+x)}{2}-\frac{v(1+y)}{2}\right)^{-\alpha-\beta-1},$$

e così viene, al limite,

$$(88)\qquad \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}L_{m,n}^{(\alpha-m-n)}(x,y)\,u^m v^n=(1+u+v)^{\alpha}e^{-ux-vy},\qquad (|u|+|v|<1)$$

generalizzazione della (74′).

La formula (71) mostra che, per $h=-m$, il secondo membro della (86) rappresenta un polinomio di LAGUERRE, cioè

$$\sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{r}\binom{m+\alpha}{m-r-s}L_{r,s}^{(\alpha)}(x,y)\,u^r v^s=(1+u+v)^{\alpha+1}L_m^{(\alpha)}\left(\frac{ux+vy}{1+u+v}\right).$$

Una formula del « gruppo omogeneo » è la seguente

$$(89)\qquad \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}L_{m,n}^{(\alpha)}(x,y)\,u^m v^n=\sum_{k=0}^{\infty}(u+v)^k L_k^{(\alpha)}\left(\frac{ux+vy}{u+v}\right).$$

Un' altra formula analoga è dimostrata da A. ERDÉLYI.

Un metodo utilizzato nel caso di una variabile conduce, mediante la (85′), alla formula di moltiplicazione

$$(90)\qquad \lambda^m\mu^n L_{m,n}^{(\alpha)}\left(\frac{x}{\lambda},\frac{y}{\mu}\right)= \\ =\sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{n}\binom{m+n+\alpha}{m+n-r-s}\binom{m+n-r-s}{m-r}(\lambda-1)^{m-r}(\mu-1)^{n-s}L_{r,s}^{(\alpha)}(x,y).$$

Ponendo qui $\lambda \to \infty$, $\mu \to \infty$ ossia $\lambda \to 0$, $\mu \to 0$, rispettivamente, si ricava lo sviluppo esplicito dei polinomi $L^{(\alpha)}_{m,n}(x, y)$,

$$L^{(\alpha)}_{m,n}(x, y) = \sum_{r=0}^{m} \sum_{s=0}^{n} (-1)^{r+s} \binom{m+n+\alpha}{m+n-r-s} \binom{m+n-r-s}{m-r} \frac{x^r}{r!} \frac{y^s}{s!},$$

e la sua inversa

$$\frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} = \sum_{r=0}^{m} \sum_{s=0}^{n} (-1)^{r+s} \binom{m+n+\alpha}{m+n-r-s} \binom{m+n-r-s}{m-r} L^{(\alpha)}_{r,s}(x, y).$$

Formule di riduzione e relazioni limiti sono

(91) $$L^{(\alpha)}_{m,n}(x, 0) = \frac{\Gamma(m+n+\alpha+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)\, n!} L^{(\alpha)}_{m}(x), \qquad L^{(\alpha)}_{m,n}(x, y) = \frac{(m+n)!}{m!\, n!} L^{(\alpha)}_{m+n}(x),$$

$$L^{(\alpha)}_{m,0}(x, y) = L^{(\alpha)}_{m}(x), \text{ ecc.}$$

e

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda^m L^{(\alpha)}_{m,n}\left(\frac{x}{\lambda}, y\right) = (-1)^m \frac{x^m}{m!} L^{(\alpha+m)}_{n}(y), \qquad \lim_{\mu \to 0} \mu^n L^{(\alpha)}_{m,n}\left(x, \frac{y}{\mu}\right) = (-1)^n \frac{y^n}{n!} L^{(\alpha+n)}_{m}(x).$$

Accanto alle formule ricorrenti dedotte dal Sig. ERDÉLYI, che contengono polinomi di parametri α e $\alpha+1$, indichiamo qui altre relazioni fra polinomi di stesso parametro α:

$$(m+1)\,[L^{(\alpha)}_{m+1,n}(x, y) - 2L^{(\alpha)}_{m+1,n-1}(x, y) + L^{(\alpha)}_{m+1,n-2}(x, y)] -$$
$$-(2m+\alpha+1-x)\,[L^{(\alpha)}_{m,n}(x, y) - L^{(\alpha)}_{m,n-1}(x, y)] + (m+\alpha)\, L^{(\alpha)}_{m-1,n}(x, y) = 0,$$

e la formula analoga per n e y.

Come una applicazione immediata della formula di moltiplicazione (90) indichiamo la proprietà asintotica seguente dei polinomi di LAGUERRE di due variabili ([32]), generalizzazione di una formula analoga per quelli di una sola variabile:

$$\lim_{m \to \infty,\, n \to \infty} \frac{m!\, n!}{(m+n)!} (m+n)^{-\alpha} L^{(\alpha)}_{m,n}\left(\frac{x}{m}, \frac{y}{n}\right) = (x+y)^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{x+y}).$$

5. - RELAZIONI INTEGRALI FRA I POLINOMI (71) E (72). - Cominciamo col caso particolare della formula (18):

$$L^{(\gamma)}_{m,n}(x, y) =$$
$$= \frac{\Gamma(\gamma+m+n+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)\Gamma(\beta+n+1)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta-1)} \iint_D u^\alpha v^\beta (1-u-v)^{\gamma-\alpha-\beta-2} L^{(\alpha)}_{m}(ux)\, L^{(\beta)}_{n}(vy)\, du dv$$

valida per $R(\alpha) > -1$, $R(\beta) > -1$, $R(\gamma-\alpha-\beta) > 1$.

([32]) Loco cit. sotto ([20]).

Ponendo poi, nella (27), $b=-m$, $b'=-n$, $c=\alpha+1$ e $c'=\beta+1$, si ottiene la relazione integrale molto interessante

$$(92)\qquad L_{m,n}^{(\alpha+\beta+1)}(x,y)=$$
$$=\frac{2\Gamma(m+n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(m+\alpha+1\,\Gamma(n+\beta+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} L_m^{(\alpha)}(x\sin^2\theta)\,L_n^{(\beta)}(y\cos^2\theta)\sin^{2\alpha+1}\theta\cos^{2\beta+1}\theta d\theta$$

che diventa per $x=y$

$$(92')\qquad L_{m+n}^{(\alpha+\beta+1)}(x)=$$
$$=\frac{2\Gamma(m+n+\alpha+\beta+2)\,m!\,n!}{\Gamma(m+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)(m+n)!}\int_0^{\frac{\pi}{2}} L_m^{(\alpha)}(x\sin^2\theta)\,L_n^{(\beta)}(x\cos^2\theta)\sin^{2\alpha+1}\theta\cos^{2\beta+1}\theta d\theta.$$

Questa formula è identica col teorema d'addizione trascendente dei polinomi di LAGUERRE stabilito da F. TRICOMI ([33]).

La relazione

$$(93)\qquad L_{m,n}^{(\alpha+\beta+1)}(x,y)=$$
$$=\frac{\Gamma(\alpha+\beta+m+n+2)}{\Gamma(\beta+m+n+1)\Gamma(\alpha+1)}\int_0^1 t^\beta(1-t)^\alpha L_{m,n}^{(\beta)}(tx,ty)\,dt,\qquad R(\alpha)>-1$$

generalizza la formula di KOGBETLIANTZ ([34])

$$(93')\qquad L_m^{(\alpha+\beta+1)}(x)=\frac{\Gamma(m+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(m+\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}\int_0^1 t^\alpha(1-t)^\beta L_m^{(\alpha)}(tx)\,dt,\qquad R(\beta)>-1,$$

che si può dedurre dalla (92') ponendo $n=0$.

Una conseguenza interessante della (92') si ottiene per $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$. I polinomi di LAGUERRE si riducono in questo caso a quelli di HERMITE e si ottiene il risultato interessante

$$(94)\qquad L_{m+n}(x)=(-1)^{m+n}\frac{m!\,n!}{(2m)!\,(2n)!}\,\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} H_{2m}(\sqrt{x}\sin\theta)\,H_{2n}(\sqrt{x}\cos\theta)\,d\theta.$$

Il caso particolare $m=n$ di questa formula risulta anche dalla formula (74) del nostro articolo citato sotto ([19]).

Passiamo adesso all'applicazione della formula (30) ai polinomi di LAGUERRE:

$$(95)\qquad L_m^{(\alpha)}(x)\,L_n^{(\beta)}(y)=$$
$$=\frac{\Gamma(m+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(m+n+\alpha+\beta+1)}\,\frac{2^{\alpha+\beta}}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{-i(\alpha-\beta)\theta}\cos^{\alpha+\beta}\theta\cdot L_{m,n}^{(\alpha+\beta)}(2x\cos\theta\, e^{-i\theta},2y\cos\theta\, e^{i\theta})\,d\theta,$$
$$R(\alpha+\beta)>0,$$

([33]) Cfr. p. es. Annales de l'Inst. HENRI POINCARÉ, vol. 8 (1938), pp. 111-149.

([34]) Annales de l'Éc. Norm. Sup. (3), t. 49 (1932), pp. 137-221.

Questa relazione ha il difetto, che il polinomio di LAGUERRE di due variabili che figura al secondo membro non può essere ridotto a quello di una sola variabile per $x=y$. Ma, se $n=0$, la (95) si riduce a

$$L_m^{(\alpha)}(x)=\frac{\Gamma(m+\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m+\alpha+\beta+1)}\frac{2^{\alpha+\beta}}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{-i(\alpha-\beta)\theta}\cos^{\alpha+\beta}\theta\cdot L_m^{(\alpha+\beta)}(2x\cos\theta\, e^{-i\theta})\,d\theta,\qquad R(\alpha+\beta)>0,$$

e fornisce una inversione della (93'). Se $\alpha=\beta$, se ne ricava la relazione semplice

$$L_m^{(\alpha)}(x)=\frac{\Gamma(m+\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(m+2\alpha+1)}\frac{2^{2\alpha}}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} L_m^{(2\alpha)}(2x\cos\theta\, e^{-i\theta})\cos^{2\alpha}\theta\,d\theta,\qquad R(\alpha)>0.$$

Un'altra conseguenza interessante della (30) è l'equazione

$$(96)\qquad L_{m,n}^{(\alpha)}(x,y)=$$
$$=\frac{\Gamma(m+n+\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m+n+\alpha+\beta+1)}\frac{2^{\alpha+\beta}}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} L_{m,n}^{(\alpha+\beta)}(2x\cos\theta\, e^{-i\theta},2y\cos\theta\, e^{-i\theta})\,e^{-i(\alpha-\beta)\theta}\cos^{\alpha+\beta}\theta\,d\theta.$$

Ponendo qui $\beta=\alpha+1$ e tenendo conto della (92), la relazione (96) diventa

$$L_{m,n}^{(\alpha)}(x,y)=\frac{(m+n+2\alpha+2)\Gamma(m+n+\alpha+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+2)}\cdot\frac{2^{2\alpha+2}}{\pi}\times$$
$$\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} L_m^{(\alpha)}[x\sin^2\theta(1+e^{-2i\varphi}]\,L_n^{(\alpha)}[y\cos^2\theta(1+e^{-2i\varphi})]\,e^{i\varphi}\sin^{2\alpha+1}\theta\cos^{2\alpha+1}\theta\cos^{2\alpha+1}\varphi\,d\theta d\varphi$$

che, per $x=y$, si riduce a

$$L_{m+n}^{(\alpha)}(x)=\frac{m!\,n!}{(m+n)!}\frac{(m+n+2\alpha+2)\Gamma(\alpha+2)\Gamma(m+n+\alpha+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+2)}\frac{2^{2\alpha+2}}{\pi}\times$$
$$\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} L_m^{(\alpha)}(2x\sin^2\theta\cos\varphi\, e^{-i\varphi})\,L_n^{(\alpha)}(2x\cos^2\theta\cos\varphi\, e^{-i\varphi})\,e^{i\varphi}\sin^{2\alpha+1}\theta\cos^{2\alpha+1}\theta\cos^{2\alpha+1}\varphi\,d\theta d\varphi$$

Quest'ultima relazione è da confrontare con risultati analoghi dei Sigg. BAILEY, ERDÉLYI, HOWELL e WATSON.

6. - SVILUPPI IN SERIE. - Gli sviluppi del Capitolo II, relativi alle funzioni F_1 e F_2, per scelta conveniente dei parametri, conducono a vari risultati interessanti sui polinomi di LAGUERRE.

Per cominciare, la (41) fornisce per confluenza, e ponendo b e b' interi negativi, uno sviluppo dedotto già, di tutt'altra maniera, dall'HUMBERT:

$$(97)\qquad L_{m,n}^{(\alpha)}(x, y) = \frac{m!\,n!\,\Gamma(m+n+\alpha+1)}{(m+n)!}\sum_{k=0}^{\min(m,n)}\frac{(-1)^k(\alpha+2k)\,\Gamma(\alpha+k)(xy)^k}{k!\,\Gamma(m+k+n+1)\,\Gamma(n+k+\alpha+1)}\,L_{m-k}^{(\alpha+2k)}(x)\,L_{n-k}^{(\alpha+2k)}(y).$$

Se $y=x$, (95) si riduce mediante la (91) a

$$(97')\qquad L_{m+n}^{(\alpha)}(x) = \frac{m!\,n!\,\Gamma(m+n+\alpha+1)}{(m+n)!}\sum_{k=0}^{\min(m,n)}\frac{(-1)^k(\alpha+2k)\,\Gamma(\alpha+k)\,x^{2k}}{k!\,\Gamma(m+k+\alpha+1)\,\Gamma(n+k+\alpha+1)}\,L_{m-k}^{(\alpha+2k)}(x)\,L_{n-k}^{(\alpha+2k)}(x),$$

che è stata direttamente dimostrata, per il metodo dell'HUMBERT, da L. TOSCANO ([35]).

L'inversa della (97) si ottiene come caso particolare della (40').

$$(98)\qquad L_m^{(\alpha)}(x)\,L_n^{(\alpha)}(y) = \frac{\Gamma(m+\alpha+1)\,\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(m+n+\alpha+1)}\sum_{k=0}^{\min(m,n)}\frac{(xy)^k L_{m-k,\,n-k}^{(\alpha+2k)}(x, y)}{k!\,\Gamma(\alpha+k+1)},$$

e, per $y=x$, questa contiene il risultato di A. ERDÉLYI ([36])

$$(98')\qquad L_m^{(\alpha)}(x)\,L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(m+\alpha+1)\,\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(m+n+\alpha+1)}\sum_{k=0}^{\min(m,n)}\frac{(m+n-2k)!\,x^{2k}\,L_{m+n-2k}^{(\alpha+2k)}(x)}{(m-k)!\,(n-k)!\,k!\,\Gamma(\alpha+k+1)}.$$

Ricordata la formula ([37])

$$L_n^{(\alpha)}(x)\,L_n^{(\alpha)}(y) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(xy)^k L_{n-k}^{(\alpha+2k)}(x+y)}{k!\,\Gamma(\alpha+k+1)},$$

si deduce dalla (97) la relazione

$$(99)\qquad L_{n,n}^{(\alpha)}(x, y) = \frac{\Gamma(\alpha+2n+1)}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(xy)^k L_{n-k}^{(\alpha+2k)}(x+y)}{k!\,\Gamma(\alpha+n+k+1)}.$$

Indichiamo anche i casi particolari delle formule (64) e (69), relativi ai polinomi di LAGUERRE che è facile di scrivere esplicitamente.

Ponendo, nella (28'), $b=-m$, $b'=-n$, $c=\alpha+1$, $c'=\beta+1$ e tenendo conto della (85'), viene

$$(100)\qquad L_m^{(\alpha)}(x)\,L_n^{(\beta)}(y) = \sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{n}\frac{(-m-\alpha)_r(-n-\beta)_s}{r!\,s!}\,L_{m-r,\,n-s}^{(\alpha+\beta)}(x, y),$$

donde, per $y=x$, si ricava un risultato precedentemente trovato ([38])

([35]) Rendic. R. Accad. d'Italia, vol. 1 (1940), pp. 405-411.

([36]) Loco cit. sotto ([6]).

([37]) Loco cit. sotto ([16]) o anche, la ([49]) del presente lavoro.

([38]) Loco cit. sotto ([15]), formula (1. 13).

Altri sviluppi possono essere dedotti dalle formule (92) e (75) fra i quali indichiamo soltanto i seguenti

$$(101) \qquad L_{m,n}^{(\alpha+\beta+1)}(x, y) = \sum_{r=0}^{m} \sum_{s=0}^{n} \frac{(m-r+\alpha+1)_s (n-s+\beta+1)_r}{r!\, s!} L_{m-r}^{(\alpha)}(x)\, L_{n-s}^{(\beta)}(y),$$

e, per $y=x$,

$$L_{m+n}^{(\alpha+\beta+1)}(x) = \frac{m!\, n!}{(m+n)!} \sum_{r=0}^{m} \sum_{s=0}^{n} \frac{(m-r+\alpha+1)_s (n-s+\beta+1)_r}{r!\, s!} L_{m-r}^{(\alpha)}(x)\, L_{n-s}^{(\beta)}(x).$$

La funzione generatrice (88) consente ancora di dimostrare altre formule interessanti. Tenendo conto della trasformazione

$$(1+u+v)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} u^k v^k (1+u)^{\alpha-k} (1+v)^{\alpha-k},$$

e della (74′), viene

$$(102) \qquad L_{m,n}^{(\alpha)}(x, y) = \sum_{k=0}^{\min(m,n)} (-1)^k \binom{m+n+\alpha}{k} L_{m-k}^{(\alpha+n)}(x)\, L_{n-k}^{(\alpha+m)}(y),$$

e, nel caso $y=x$,

$$(102') \qquad L_{m+n}^{(\alpha)}(x) = \frac{m!\, n!}{(m+n)!} \sum_{k=0}^{\min(m,n)} (-1)^k \binom{m+n+\alpha}{k} L_{m-k}^{(\alpha+n)}(x)\, L_{n-k}^{(\alpha+m)}(x),$$

mentre che, per $m=n$, viene

$$L_{2n}^{(\alpha)}(x) = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+\alpha}{k} \left\{ L_{n-k}^{(\alpha+n)}(x) \right\}^2.$$

L'inversione della (102) si deduce dalla (88), essendo

$$(1+u)^{\alpha}(1+v)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} u^k v^k (1+u+v)^{\alpha-k},$$

dunque

$$(103) \qquad L_m^{(\alpha+n)}(x)\, L_n^{(\alpha+m)}(y) = \sum_{k=0}^{\min(m,n)} \binom{m+n+\alpha}{k} L_{m-k,\, n-k}^{(\alpha)}(x, y).$$

Se $y=x$ e $m=n$ rispettivamente, se ne ricava

$$L_m^{(\alpha+n)}(x)\, L_n^{(\alpha+m)}(x) = \sum_{n=0}^{\min(m,n)} \binom{m+n+\alpha}{k} \binom{m+n-2k}{m-k} L_{m+n-2k}^{(\alpha+k)}(x),$$

e

$$\left\{ L_n^{(\alpha)}(x) \right\}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{2k}{k} L_{2k}^{(\alpha-k)}(x).$$

Altri sviluppi di questa natura abbiamo dati in un recente lavoro ([39]).

([39]) E. FELDHEIM: *Sul prodotto di due polinomi di Laguerre.* In corso di stampa nel Bollettino dell' Unione Mat. Italiana.

È ben noto che i polinomi di LAGUERRE di una variabile si riducono per i valori $+\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$ del parametro α ai polinomi di HERMITE. Recentemente, G. PALAMÀ e L. TOSCANO ([40]) hanno indicato un nuovo procedimento per passare dai polinomi di LAGUERRE a quelli di HERMITE, espresso per un passaggio al limite che scriveremo qui sotto la forma modificata

$$H_n(x)=2^n\,n!\lim_{\omega\to\infty}\omega^{-n}L_n^{\left(\frac{\omega^2}{2}+k\right)}\left(\frac{\omega^2}{2}-\omega x\right),\qquad (k \text{ arbitrario}).$$

Se si applica questo procedimento ai polinomi di LAGUERRE di due variabili, non si ottiene la definizione nota dei polinomi di HERMITE di due variabili, ma un'altra relazione

$$(104)\qquad \lim_{\omega\to\infty}\omega^{-m-n}L_{m,n}^{\left(\frac{\omega^2}{2}\right)}\left(\frac{\omega^2}{2}-\omega x,\ \frac{\omega^2}{2}-\omega y\right)=$$
$$=\frac{1}{2^{m+n}\,m!\,n!}\sum_{r=0}^{\min(m,n)}(-1)^r 2^r r!\binom{m}{r}\binom{n}{r}H_{m-r}(x)\,H_{n-r}(y)\,.$$

Per $y=x$ il secondo membro si riduce bene al polinomio di una variabile. Si può confrontare la (104) con la formula (47) del nostro lavoro citato sotto ([19]).

PARTE TERZA

Generalizzazione dei polinomi di Jacobi al caso di più variabili.

1. - DEFINIZIONE E PROPRIETÀ FONDAMENTALI. - Partendo dalla classica definizione

$$(105)\qquad P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{(\alpha+1)_n}{n!}\left(Fn+\alpha+\beta+1,\ -n\,;\ \alpha+1\,;\ \frac{1-x}{2}\right),$$

dei polinomi di JACOBI di una variabile ([41]), P. APPELL ha considerati i polinomi di due variabili ([42])

$$F_{m,n}(\alpha,\gamma,\gamma';\,x,y)=(1-x-y)^{m+n}F_2\left(\gamma+\gamma'-\alpha-m-n,\ -m,n\,;\ \gamma,\gamma';\ \frac{x}{x+y-1},\ \frac{y}{x+y-1}\right),$$

([40]) Cfr. p. es. loco cit. sotto ([35]).

([41]) Per la teoria completa di questi polinomi, cfr. SZEGÖ, loco cit.

([42]) P. APPELL, Mémorial des Sciences Math., fasc. III, pp. 43-45.

e ne ha stabilito varie proprietà (p. es. quella dell'ortogonalità). I risultati generali della Parte I consentono ora di dare un'altra definizione dei polinomi di JACOBI di due (e di più) variabili:

$$(106)\qquad P_{m,n}^{(\alpha,\beta)}(x,y)=\frac{(\alpha+1)_{m+n}}{m!\,n!}F_1\left(m+n+\alpha+\beta+1,\ -m,\ -n;\ \alpha+1;\ \frac{1-x}{2},\ \frac{1-y}{2}\right).$$

Questi polinomi presentano una formale analogia completa col caso di una sola variabile, come si vede sulle formule che intendiamo dare qui. Uno studio più elaborato si trova nel nostro lavoro citato sotto ([9]).

Facendo uso della relazione

$$F_1(a,b,b';c;x,y)=(1-x)^{-b}(1-y)^{-b'}F_1\left(c-a,b,b';c;\frac{x}{x-1},\frac{y}{y-1}\right),$$

si vede che una definizione modificata di questi polinomi è

$$(106')\qquad P_{m,n}^{(\alpha,\beta)}(x,y)=$$
$$=\frac{(\alpha+1)_{m+n}}{m!\,n!}\left(\frac{1+x}{2}\right)^m\left(\frac{1+y}{2}\right)^n F_1\left(-m-n-\beta,\ -m,\ -n;\ \alpha+1;\ \frac{x-1}{x+1},\ \frac{y-1}{y+1}\right),$$

e se ne deduce l'espressione esplicita, analoga a quella dei polinomi (105):

$$(107)\qquad P_{m,n}^{(\alpha,\beta)}(x,y)=$$
$$=\sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{n}\binom{m+n+\alpha}{m+n-r-s}\binom{m+n+\beta}{r+s}\binom{m+n-r-s}{m-r}\binom{r+s}{r}\left(\frac{x-1}{2}\right)^r\left(\frac{y-1}{2}\right)^s\left(\frac{x+1}{2}\right)^{m-r}\left(\frac{y+1}{2}\right)^{n-s}.$$

Per il cambio dei parametri α, β si trova ancora

$$(108)\qquad P_{m,n}^{(\alpha,\beta)}(x,y)=(-1)^{m+n}P_{m,n}^{(\beta,\alpha)}(-x,\ -y),$$

Indichiamo ora le formule di riduzione seguenti:

$$(109)\qquad P_{m,n}^{(\alpha,\beta)}(x,x)=\frac{(m+n)!}{m!\,n!}P_{m+n}^{(\alpha,\beta)}(x),$$
$$P_{m,n}^{(\alpha,\beta)}(x,1)=\frac{\Gamma(m+n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(m+\alpha+1)}P_m^{(\alpha,\beta+n)}(x),\qquad \text{ecc.}$$

I polinomi $P_{m,n}^{(\alpha,\beta)}(x,y)$ soddisfano al sistema di equazioni alle derivate parziali:

$$(1-x^2)\frac{\partial^2P}{\partial x^2}+(1+x)(1-y)\frac{\partial^2P}{\partial x\partial y}+$$
$$+[(n+\beta-\alpha)-(n+\alpha+\beta+2)x]\frac{\partial P}{\partial x}+m(1-y)\frac{\partial P}{\partial y}+m(m+n+\alpha+\beta+1)P=0,$$

$$(1-y^2)\frac{\partial^2P}{\partial y^2}+(1+y)(1-x)\frac{\partial^2P}{\partial x\partial y}+$$
$$+[(m+\beta-\alpha)-(m+\alpha+\beta+2)y]\frac{\partial P}{\partial y}+n(1-x)\frac{\partial P}{\partial x}+n(m+n+\alpha+\beta+1)P=0,$$

e

$$(y-x)\frac{\partial^2P}{\partial x\partial y}+n\frac{\partial P}{\partial x}-m\frac{\partial P}{\partial y}=0,$$

e si ha ancora, come nel caso di una variabile,

$$\frac{\partial}{\partial x} P_{m,n}^{(\alpha,\beta)}(x,y) = \frac{1}{2}(m+n+\alpha+\beta+1)\, P_{m-1,n}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x,y), \quad \text{ecc.}$$

I polinomi di LAGUERRE $L_{m,n}^{(\alpha)}(x,y)$ si deducono da quelli di JACOBI mediante il passaggio al limite

$$\lim_{\beta\to\infty} P_{m,n}^{(\alpha,\beta)}\left(1-\frac{2x}{\beta},\, 1-\frac{2y}{\beta}\right) = L_{m,n}^{(\alpha)}(x,y). \tag{110}$$

Un'altra relazione limite è la generalizzazione seguente della formula nota di MEHLER - HEINE :

$$\lim_{m\to\infty,\, n\to\infty} \frac{m!\, n!}{(m+n)!}(m+n)^{-\alpha} P_{m,n}^{(\alpha,\beta)}\left(\cos\frac{x}{\sqrt{m(m+n)}},\ \cos\frac{y}{\sqrt{m(m+n)}}\right) =$$
$$= \left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right)^{-\alpha} J_\alpha(\sqrt{x^2+y^2}).$$

2\. - FUNZIONI GENERATRICI. - Si può dimostrare, come per i polinomi di LAGUERRE di due variabili, le formule del « gruppo omogeneo »

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} P_{m,n}^{(\alpha,\beta)}(x,y)\, u^m v^m = \sum_{k=0}^{\infty} (u+v)^k P_k^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{ux+vy}{u+v}\right), \tag{111}$$

e

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha+\beta+1)_{m+n}}{(\alpha+1)_{m+n}} u^m v^n P_{m,n}^{(\alpha,\beta)}(x,y) = \tag{112}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha+\beta+1)_k}{(\alpha+1)_k} (u+v)^k P_k^{(\alpha,\beta}\left(\frac{ux+vy}{u+v}\right).$$

Sostituendo, nella (111), la classica funzione generatrice dei polinomi $P_k^{(\alpha,\beta)}(x)$, viene la sua generalizzazione, di stessa forma :

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} P_{m,n}^{(\alpha,\beta)}(x,y)\, u^m v^n = 2^{\alpha+\beta}[1-2(ux+vy)+(u+v)^2]^{-\frac{1}{2}} \times \tag{113}$$
$$\times \left\{1-u-v+[1-2(ux+vy)+(u+v)^2]^{\frac{1}{2}}\right\}^{-\alpha} \left\{1+u+v+[1-2(ux+vy)+(u+v)^2]^{\frac{1}{2}}\right\}^{-\beta}.$$

D'altro canto, per un risultato stabilito nel lavoro citato sotto ([9]), la (112) conduce all'altra funzione generatrice

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha+\beta+1)_{m+n}}{(\alpha+1)_{m+n}} u^m v^n P_{m,n}^{(\alpha,\beta)}(x,y) = \tag{114}$$
$$= (1-u-v)^{-\alpha-\beta-1} F\left(\frac{\alpha+\beta+1}{2},\, \frac{\alpha+\beta+2}{2};\, \alpha+1;\, -\frac{2u(1-x)+2v(1-y)}{(1-u-v)^2}\right).$$

Consideriamo adesso la formula (67) e poniamo qui $b=b'=0$, $h=c=\alpha+1$, $a=\alpha+\beta+1$. Viene così

$$(115)\qquad \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} P_{m,n}^{(\alpha,\beta-m-n)}(x,y)\,u^m v^n=(1-u-v)^{\beta}\left(1-u\frac{1+x}{2}-v\frac{1+y}{2}\right)^{-\alpha-\beta-1},\quad |u|+|v|<1.$$

Similarmente, l'applicazione della (67) fornisce

$$(116)\qquad \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^m v^n}{\Gamma(m+n+\alpha+1)}P_{m,n}^{(\alpha,\beta-m-n)}(x,y)=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}e^{\frac{u(1+x)+v(1+y)}{2}}\,{}_1F_1\left(-\beta;\ \alpha+1;\ \frac{u(1-x)+v(1-y)}{2}\right).$$

Quest'ultimi risultati sono interessanti e, crediamo, nuovi anche nel caso di una variabile:

$$\sum_{m=0}^{\infty}P_m^{(\alpha,\beta-m)}(x)\,u^m=(1-u)^{\beta}\left(1-u\frac{1-x}{2}\right)^{-\alpha-\beta-1},\qquad |u|<1,$$

e

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{u^m}{\Gamma(\alpha+m+1)}P_m^{(\alpha,\beta-m)}(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}e^{u\frac{1+x}{2}}\,{}_1F_1\left(-\beta;\ \alpha+1;\ u\frac{1-x}{2}\right).$$

Se $\beta=-n$, si ottiene la formula interessante

$$\sum_{m=0}^{n}\frac{u^m}{\Gamma(\alpha+m+1)}P_m^{(\alpha,n-m)}(x)=\frac{n!}{\Gamma(\alpha+n+1)}e^{\frac{u(1+x)}{2}}L_n^{(\alpha)}\left(u\frac{1-x}{2}\right),$$

che è da confrontare con formule stabilite in un altro nostro lavoro finora non pubblicato ([43]). Dalla (116) si può dedurre una relazione analoga.

La formula di moltiplicazione dei polinomi (106) si deduce dalla relazione

$$\lambda^{-b}\mu^{-b'}F_1\left(a,b,b';\ c;\ \frac{x}{\lambda},\frac{y}{\mu}\right)=$$
$$=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r+s}(b)_r(b')_s}{r!\,s!}(\lambda-1)^{-b-r}(\mu-1)^{-b'-s}F_1(a,-r,-s;\ c;\ x,y)$$

donde

$$(117)\qquad \lambda^m\mu^n P_{m,n}^{(\alpha,\beta)}\left(1-\frac{1-x}{\lambda},\ 1-\frac{1-y}{\mu}\right)=$$
$$=\sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{n}\frac{(\alpha+1)_{m+n}(\lambda-1)^{m-r}(\mu-1)^{n-s}}{(\alpha+1)_{r+s}(m-r)!\,(n-s)!}P_{r,s}^{(\alpha,\,m+n-r-s+\beta)}(x,y).$$

([43]) E. Feldheim: *On a system of orthogonal polynomials associated with a distribution of Stieltjes type.*

I polinomi ultrasferici possono essere definiti come nel caso di una variabile nel modo seguente :

$$(118) \qquad P_{m,n}^{(\lambda)}(x,y) = \frac{(2\lambda)_{m+n}}{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)_{m+n}} P_{m,n}^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\, \lambda-\frac{1}{2}\right)}(x,y), \qquad \left(\lambda > -\frac{1}{2}\right).$$

La funzione generatrice di questi polinomi si ottiene dalla (114) e ammette la forma del tutto analoga a quella di una variabile :

$$(119) \qquad \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} P_{m,n}^{(\lambda)}(x,y)\, u^m v^n = [1-2(ux+vy)+(u+v)^2]^{-\lambda}.$$

Altre relazioni relative a questi ultimi polinomi sono :

$$P_{m,n}^{(\lambda)}(x,y) = (-1)^{m+n} P_{m,n}^{(\lambda)}(-x,-y),$$

$$(m+1)[P_{n+1,n}^{(\lambda)}(x,y) - 2y\, P_{m+1,n-1}^{(\lambda)}(x,y) + P_{m+1,n-2}^{(\lambda)}(x,y)] =$$
$$= 2x(m+\lambda)\, P_{m,n}^{(\lambda)}(x,y) - (m+2\lambda-1)\, P_{m-1,n}^{(\lambda)}(x,y) - 2(m+\lambda)\, P_{m,n-1}^{(\lambda)}(x,y),$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x} P_{m,n}^{(\lambda)}(x,y) = 2\lambda\, P_{m-1,n}^{(\lambda+1)}(x,y), \qquad \frac{\partial}{\partial y} P_{m,n}^{(\lambda)}(x,y) = 2\lambda\, P_{m,n-1}^{(\lambda+1)}(x,y).$$

Si può far menzione anche della relazione limite

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-\frac{m+n}{2}} P_{m,n}^{(\lambda)}\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}, \frac{y}{\sqrt{\lambda}}\right) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r 2^r r! \binom{m}{r}\binom{n}{r} H_{m-r}(x) H_{n-r}(y),$$

che si deduce facilmente dalla (119) e che è in buona concordanza con la (104).

3. - Sviluppi in serie. - Riprendiamo la formula (48) e sia $a=\alpha+\beta+1$, $b=-m$, $b'=-n$, $c=\alpha+1$. Mediante la (105) e (106) ne ricaviamo

$$(120) \qquad P_m^{(\alpha,\beta-m)}(x)\, P_n^{(\alpha,\beta-n)}(y) =$$
$$= \frac{\Gamma(m+\alpha+1)\,\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(m+n+\alpha+1)\,\Gamma(\alpha+1)} \sum_{r=0}^{\min(m,n)} \frac{(-1)^r(-\beta)_r\,(\alpha+\beta+1)_r}{(\alpha+1)_r\, r!} \times$$
$$\times \left(\frac{1-x}{2}\right)^r \left(\frac{1-y}{2}\right)^r P_{m-r,n-r}^{(\alpha+2r,\,\beta-m-n+r)}(x,y).$$

Per $y=x$, e $m=n$, viene

$$[P_m^{(\alpha,\beta)}(x)]^2 =$$
$$= \frac{[\Gamma(m+\alpha+1)]^2}{\Gamma(2m+\alpha+1)\,\Gamma(\alpha+1)} \sum_{r=0}^{m} \frac{(-1)^r(-\beta-m)_r(m+\alpha+\beta+1)_{m-r}}{(\alpha+1)_{m-r}(m-r)!\,(r!)^2} \left(\frac{1-x}{2}\right)^{2m-2r} P_r^{(\alpha+2m-2r,\,\beta-r)}(x).$$

L'inversa della (120) si deduce dalla (50) dove occorre sostituire

$$a=\alpha+\beta+1,\quad b=-m,\quad b'=-n,\quad c=\alpha+1;\quad x\sim\frac{1-x}{2},\ y\sim\frac{1-y}{2}.$$

Dunque

$$P_{m,n}^{(\alpha,\beta)}(x,y)=\frac{(\alpha+1)_{m+n}(\beta+1)_{m+n}}{(\alpha+1)_m(\alpha+1)_n}\times$$

$$\times\sum_{r=0}^{\min(m,n)}(-1)^r\frac{(\alpha)_r(\alpha+1)_{2r}(m+n+\alpha+\beta+1)_r}{(m+\alpha+1)_r(n+\alpha+1)_r(\alpha)_{2r}(\beta+1)_{m+n-r}}\left(\frac{1-x}{2}\right)^r\left(\frac{1-y}{2}\right)^r P_{m-r}^{(+2r,\beta+n)}(x)P_{n-r}^{(\alpha+2r,\beta+m)}(y).$$

Casi particolari e altre relazioni analoghe possono essere ricavate ancora dalle formule generali. Ci contentiamo qui delle indicazioni che abbiamo date nelle righe precedenti.