Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Leonida Tonelli

Sull'integrazione delle funzioni

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 11, nº 3-4 (1942), p. 235-240
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1942_2_11_3-4_235_0>

SULL'INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI

di LEONIDA TONELLI (Pisa).

1. - In una recensione [1] da me fatta degli *Appunti di Analisi Superiore* di M. PICONE [2], riferendomi ad un procedimento per l'estensione del concetto di integrale, dal PICONE richiamato nelle pagine 199-200 del suo libro, e consistente nel partire dall'integrale di MENGOLI-CAUCHY per le funzioni continue e nel giungere, a traverso ripetuti passaggi al limite, in numero finito ed anche infinito, all'integrale delle funzioni di BAIRE limitate, osservai che: « tale procedimento non riesce utile nè teoricamente nè didatticamente, perchè, come io ho mostrato quasi vent'anni fa, un unico ed elementarissimo passaggio al limite (molto più semplice di ciascuno dei passaggi al limite ai quali si riferisce il PICONE) permette di salire dall'integrazione delle funzioni continue a quella di una qualsiasi funzione limitata e quasi-continua, la quasi continuità essendo intesa nel senso generale da me indicato nei miei *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni* ».

Questa mia osservazione mi ha procurato il piacere di vederla pienamente accolta dal PICONE, il quale, con giovanile entusiasmo, ha voluto esporre, in una Nota *Sull'integrazione delle funzioni*, da Lui pubblicata recentemente [3], le sue nuove riflessioni sull'argomento per confermare quanto io sostengo da molti anni, e cioè che il definire l'integrale del LEBESGUE mediante un passaggio al limite, partendo dall'integrale di MENGOLI-CAUCHY delle funzioni continue, « consente di dare alla teoria dell'integrazione delle funzioni un assetto della più adamantina trasparenza » ed anche — sempre secondo il suo giudizio — « definitivo ».

Io ringrazio il collega PICONE della calorosa adesione che Egli porta così alle mie ormai vecchie idee, e ritengo di fargli cosa gradita richiamando la sua

---

(1) Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie II, Anno III, n. 5, 1941-XIX.

(2) Napoli, Rondinella, 1940-XVIII.

(3) Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni, Serie V, Vol. 2, fasc. 2-3, Roma, 1942-XX.

attenzione sulla mia Memoria *Sulla nozione di integrale*, da me pubblicata nel 1923 ([4]).

2. - Il PICONE riprende, nella sua primitiva forma, un'idea che risale ad ormai quarant'anni fa, quella cioè di considerare la misura di un insieme misurabile del LEBESGUE come il confine superiore delle misure dei suoi componenti chiusi (vedi: W. H. YOUNG : *The theory of sets of points*, 1906) e l'integrale del LEBESGUE di una funzione discontinua, su un dato campo, come il limite dell'integrale della stessa funzione calcolato su un componente chiuso del campo sul quale la funzione risulti continua, limite ottenuto facendo tendere la misura del componente a quella dell'intero campo.

Nell'introduzione alla mia Memoria sopra indicata, io scrissi: « E. BOREL, in due Note molto suggestive dei *Comptes rendus* del 1910, ha proposto una definizione di integrale che generalizza quella di RIEMANN e che non fa uso del concetto di misura dei gruppi di punti. Questa definizione non è equivalente a quella del LEBESGUE, ma si presta ad esser leggermente modificata, come hanno mostrato P. NALLI e H. HAHN, in modo da raggiungere l'equivalenza indicata e da dare il valore dell'integrale come limite dell'integrale di RIEMANN calcolato su un insieme chiuso di punti. Da questa nuova definizione, con una ulteriore modificazione, si giunge a quella che dò qui, la quale mi sembra, fra l'altro, offrire il vantaggio di evitare gli integrali su insiemi e di muovere invece da integrali di funzioni continue su un intervallo ».

È evidente che la considerazione degli integrali su un intervallo (su un rettangolo, se si tratta di integrale doppio, ecc. ecc.) è assai più semplice di quella degli integrali estesi a insiemi chiusi qualsiasi e rientra nel dominio delle conoscenze di chiunque abbia studiato un corso elementare di calcolo integrale. Sono perciò sicuro che il collega PICONE, dopo aver riflettuto su questo punto, non tarderà a seguirmi completamente anche nell'eliminare l'uso iniziale di integrali su insiemi chiusi qualsiasi.

3. - Nelle prime righe della sua Nota già citata, il PICONE accenna ad una idea di L. AMERIO che non mi è stato possibile di rintracciare nella Nota stessa. Ho anche consultato il Corso litografato delle lezioni del PICONE su la *Teoria dell'integrazione Lebesguiana* ([5]), Corso a cui allude lo stesso PICONE nel suo scritto, ma vi ho trovato una sola citazione dell'AMERIO, là dove (a pag. 25) si attribuisce all'AMERIO la dimostrazione del teorema sul limite dell'integrale esteso al componente chiuso, su cui la funzione che si considera è continua,

([4]) Annali di Matematica pura e applicata, Serie IV, T. I (1923-24).
([5]) Roma, Dispense Universitarie, Anno accademico 1941-42.

quando tale componente tende ad invadere tutto l'insieme che si vuole considerare. Effettivamente, tale dimostrazione non è che l'estensione a più variabili di un noto ragionamento (6); e se, in essa, il PICONE si fosse attenuto più strettamente al ragionamento da me fatto in circostanza analoga (7), avrebbe conseguito una maggiore semplicità ed anche una maggiore generalità. Infatti, per la proposizione da provare, è inutile far intervenire esplicitamente la continuità della funzione sul componente chiuso e basta sfruttare il fatto che su tale componente esiste l'integrale di MENGOLI-CAUCHY: con ciò il ragionamento risulta più semplice e più breve, mentre d'altro lato resta valido anche se sul componente chiuso manca la continuità pur sussistendo l'integrabilità nel senso di MENGOLI-CAUCHY.

4. - Relativamente alla classe delle funzioni integrabili considerate dal PICONE (8) — funzioni che possono esser anche non quasi continue e definite in insiemi anche non misurabili secondo LEBESGUE — una banale osservazione, che lo stesso PICONE riporta (9) dichiarando di essergli stata suggerita dal suo discepolo FICHERA, mostra che ogni funzione integrabile del PICONE è sempre la somma di una funzione quasi continua e di una funzione ad integrale ovunque nullo. Siamo dunque di fronte ad un'estensione della solita classe delle funzioni quasi continue integrabili che porta soltanto ad un'inutile complicazione.

5. - Qualcuno ha voluto vedere delle difficoltà nella costruzione in più variabili delle funzioni che io ho chiamate *associate* di una data funzione quasi continua, vale a dire, nella costruzione delle funzioni continue in tutto un rettangolo (se si tratta, per es. di funzioni di due variabili) che coincidono nei punti di un insieme chiuso, contenuto nel rettangolo, con una data funzione supposta continua su tale insieme. Chi conosce i primi elementi della teoria delle funzioni di variabili reali sa che questa costruzione non presenta alcuna difficoltà e sa pure che vi sono molti modi per eseguirla. Per comodità del lettore, mi permetto di indicare qui una costruzione molto semplice che serve allo scopo.

Sia $f(P)$ una funzione definita e continua sull'insieme chiuso A dello spazio S_m (ad m dimensioni). Per ogni punto P di S_m, indichiamo con $[P, r]$ la sfera di centro P e raggio $r \geqslant 0$, e rappresentiamo con $M[P, r]$ il massimo dei

---

(6) V. P. NALLI: *Esposizione e confronto critico delle diverse definizioni proposte per l'integrale definito di una funzione limitata o no.* Palermo, 1914, pp. 85-86; L. TONELLI, loc. cit. in (4), pp. 115-116.

(7) Loc. cit. in (6).

(8) Sempre in loc. cit. in (3).

(9) Loc. cit. in (3), pag. 129.

valori della funzione f nei punti di A contenuti in $[P, r]$, ponendo $M[P, r]=0$ se in $[P, r]$ non esistono punti di A.

Chiamata ϱ la minima distanza di un punto P di S_m da A, *la funzione*

$$F(P)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{s=0}^{2^n-1}M\left[P,\left(1+\frac{s}{2^n}\right)\varrho\right],$$

che risulta definita in tutto S_m, *è ovunque continua e coincide con la* $f(P)$ *nei punti di* A.

L'esistenza del limite scritto segue dal fatto che l'espressione sotto il segno di limite è funzione non decrescente al crescere di n (perchè $M[P, r]$ è funzione non decrescente di r per $r\geqslant\varrho$).

Se P_0 appartiene ad A, è $\varrho_0=0$, $M\left[P_0,\left(1+\frac{s}{2^n}\right)\varrho_0\right]=M[P_0, 0]=f(P_0)$,

$$F(P_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{s=0}^{2^n-1}f(P_0)=f(P_0);$$

inoltre, per $P\to P_0$ è $\varrho\to 0$, $M\left[P,\left(1+\frac{s}{2^n}\right)\varrho\right]\to f(P_0)$, onde $F(P)\to f(P_0)=F(P_0)$.

Sia ora P_1 un punto di S_m esterno ad A. Scelto un $\delta>0$ e $<\varrho_1$, sia P un punto di S_m distante da P_1 non più di δ. Poichè, qualunque sia $r\geqslant\varrho$, $[P, r]$ è contenuto in $[P_1, r+\delta]$, si ha $M[P, r]\leqslant M[P_1, r+\delta]$; ed essendo $\varrho\leqslant\varrho_1+\delta$ e quindi $\left(1+\frac{s}{2^n}\right)\varrho+\delta<\left(1+\frac{s}{2^n}\right)\varrho_1+3\delta<\left(1+\frac{s+k_n}{2^n}\right)\varrho_1$, ove k_n è il più piccolo numero intero tale che $3\delta\leqslant k_n\frac{\varrho_1}{2^n}$, onde $k_n\frac{\varrho_1}{2^n}<3\delta+\frac{\varrho_1}{2^n}$, detto $\bar{f}$ il massimo di $|f(P)|$ nei punti di A in $[P_1, 10\varrho_1]$ (onde $|M[P_1, r]|\leqslant\bar{f}$, se $r\leqslant 10\varrho_1$), si ha

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^n}\sum_{s=0}^{2^n-1}M\left[P,\left(1+\frac{s}{2^n}\right)\varrho\right]&\leqslant\frac{1}{2^n}\sum_{s=0}^{2^n-1}M\left[P_1,\left(1+\frac{s+k_n}{2^n}\right)\varrho_1\right]\\&\leqslant\frac{1}{2^n}\sum_{s=0}^{2^n-1}M\left[P_1,\left(1+\frac{s}{2^n}\right)\varrho_1\right]+\frac{2k_n}{2^n}\bar{f}\end{aligned}$$

e perciò $F(P)\leqslant F(P_1)+\frac{6\delta}{\varrho_1}\bar{f}$; e analogamente $F(P_1)\leqslant F(P)+\frac{6\delta}{\varrho}\bar{f}$.

Dunque, per $\delta\to 0$, è $F(P)\to F(P_1)$, e la $F(P)$ è continua in P_1.

6. - In una nota a piè delle pagine 128 e 129 del suo scritto più volte citato, il PICONE ritorna esplicitamente sull'osservazione da me fatta a proposito dei suoi *Appunti* e che ho riportato integralmente all'inizio di queste mie considerazioni; e vi ritorna in una forma che è in contrasto con tutto il suo lavoro

e in modo particolare con quanto Egli ha dichiarato nell'introduzione al lavoro stesso. Cosicchè sorge il dubbio che la sua adesione alla teoria dell'integrazione fondata su un solo passaggio al limite, a partire dall'integrale delle funzioni continue, non lo lasci ancora perfettamente tranquillo. Comunque sia, non sarà inopportuno aggiungere qui qualche commento.

È mia ferma opinione che, tanto didatticamente quanto teoricamente, sia molto meglio sostituire un solo passaggio al limite elementare ad infiniti passaggi al limite ciascuno dei quali risulti assai più complicato di quell'unico elementare; e che il vantaggio di tale sostituzione si rafforzi maggiormente per il fatto che, per questa via, si giunge a definire senz'altro l'integrale per *tutte* le funzioni quasi-continue limitate e non soltanto per le funzioni di BAIRE limitate. Il PICONE dichiara, invece, che la sua opinione (naturalmente, nel momento in cui scrive la nota a piè di pagina e non quando scrive le pagine del testo) « è del tutto opposta » alla mia. Ciò, a dire il vero, non mi sorprende, nè mi dispiace. Chiunque abbia per avventura gettato un'occhiata sulle *Lezioni di Analisi infinitesimale* del PICONE sa che non è sempre facile andar d'accordo con Lui. Peraltro, sarà bene chiarire che esistono *anche* delle funzioni di BAIRE *illimitate*, e che all'integrazione di esse non si può giungere mediante il teorema di ARZELÀ sfruttato dal procedimento di cui parla il PICONE nei suoi *Appunti* (pp. 199-200).

Il PICONE aggiunge (sempre nella indicata nota a piè di pagina):.... « *Laddove* va pure notato a questo riguardo come le funzioni che occorrono e bastano, nell'Analisi quantitativa, siano le funzioni di BAIRE definite come risultati di operazioni di limiti (e non come funzioni quasi continue) cioè con la successione delle funzioni di classe minore approssimante, sicchè il procedimento in discorso fornisce una *definizione costruttiva* dell'integrale delle funzioni discontinue che *effettivamente* si presentano, in detta Analisi, parallela alla definizione con cui vengono *effettivamente* introdotte ». Facciamo un esempio. Consideriamo, sull'intervallo (0, 1), la funzione

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty} e^{-(1+x)^n}.$$

Uno studente qualunque dei nostri bienni propedeutici di ingegneria, osservando che tale funzione è nulla in tutti i punti di (0, 1), escluso $x=0$, direbbe subito che l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ è uguale a zero. Il prof. PICONE, invece, calcolerebbe l'integrale $\int_0^1 e^{-(1+x)^n}dx$ e.... e poi farebbe il passaggio al limite per $n\to\infty$!

« Quanto all'uso — prosegue il PICONE — che io ho fatto del procedimento stesso nei recensiti miei *Appunti*, destinati anche ai fisici e agli ingegneri, esso mi ha consentito, grazie al preliminare contenuto di quattro paginette, di potermi valere in quel libro del passaggio al limite sotto il segno di integrale, anche quando non si verifichi la convergenza uniforme dell'integrando, rimanendo così, è vero, nel campo delle funzioni di BAIRE di *classe uno*, ma *sfido chiunque* a dimostrarmi che ciò non possa bastare alle applicazioni fisiche ». Prego il lettore di non sorridere.... e di consentirmi invece di far osservare al PICONE che, per quanto riguarda le applicazioni fisiche, le funzioni di BAIRE di *classe uno, limitate* (il teorema di ARZELÀ, applicato dal PICONE, conduce, lo ripeto, soltanto all'integrale di funzioni *limitate*) costituiscono un campo di funzioni, da un lato, inutilmente vasto e, da un altro, troppo ristretto, perchè tutti sanno che, anche nelle applicazioni fisiche, si presenta l'opportunità di integrare delle funzioni *illimitate*!

LEONIDA TONELLI - *Direttore responsabile*. Finito di stampare il 15 aprile 1943-XXI.