

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

SANDRO FAEDO

Sull'estremo assoluto degli integrali estesi a un campo illimitato

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e série, tome 11,
n° 3-4 (1942), p. 223-234

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1942_2_11_3-4_223_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1942, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SULL'ESTREMO ASSOLUTO DEGLI INTEGRALI ESTESI A UN CAMPO ILLIMITATO

di SANDRO FAEDO (Roma) ⁽¹⁾

In un lavoro, di cui ha anche esposto i risultati al II° Congresso dell'Unione Matematica Italiana, S. CINQUINI ⁽²⁾ ha mostrato come i procedimenti diretti del TONELLI si possano estendere alla trattazione degli integrali su un campo illimitato, ad esempio

$$I_{\infty} = \int_a^{+\infty} f(x, y(x), y'(x)) dx$$

ed ha dato per tali integrali vari teoremi di esistenza dell'estremo assoluto.

In questi teoremi, come pure in uno da me successivamente dato ⁽³⁾, si fa sempre l'ipotesi che, per tutti gli $x \geq a$ e ogni valore finito di y e y' sia sempre

$$(1) \quad f(x, y, y') \geq \psi(x)$$

quando si tratti di un minimo, oppure

$$(1') \quad f(x, y, y') \leq \psi(x)$$

se si tratta di un massimo, dove $\psi(x)$ è una funzione per cui esiste finito

$$\int_a^{+\infty} \psi(x) dx.$$

Tale disuguaglianza serve anzitutto per poter affermare che l'insieme dei valori che può assumere I_{∞} , nella classe delle $y(x)$ in esame, è inferiormente (o superiormente) limitato. Inoltre essa permette di condurre lo studio di I_{∞}

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

⁽²⁾ S. CINQUINI: *Una nuova estensione dei moderni metodi del Calcolo delle Variazioni*. Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, S. II, Vol. IX, pp. 253-262. Atti del secondo Congresso dell'Unione Matematica Italiana, ed. Perrella, Roma 1942, pp. 129-132.

⁽³⁾ S. FAEDO: *Contributo alla sistemazione teorica del metodo variazionale per l'analisi dei problemi di propagazione*. Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, S. II, Vol. X, pp. 141-152.

in modo analogo a quanto si fa per gli integrali su intervalli finiti ⁽⁴⁾, potendosi in talune questioni sostituire ad I_∞ l'integrale

$$\int_a^{a'} f(x, y(x), y'(x)) dx,$$

con a' sufficientemente grande.

In questa Nota si dà invece un teorema di esistenza dell'estremo per integrali I_∞ che non soddisfano alla condizione (1) (o (1')).

Mancando tale relazione, si è costretti a seguire un nuovo procedimento per poter ottenere il teorema. Esso viene ricavato da una proposizione, che ho chiamata teorema di confronto, la quale permette di dedurre l'esistenza dell'estremo di I_∞ quando si sappia che l'ammette un secondo integrale, legato a I_∞ da opportune relazioni.

Per stabilire queste proposizioni, mi sono particolarmente utili i risultati di alcuni miei recenti lavori ⁽⁵⁾, nei quali sono stato condotto allo studio degli integrali I_∞ allo scopo di completare la teoria del metodo variazionale di M. PICONE.

1. - In questo numero indicheremo con

$$f(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n', \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)})$$

una funzione soddisfacente alle seguenti condizioni:

a) f è un polinomio di 2° grado in $y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n', \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}$, i cui coefficienti sono funzioni continue di x per ogni $x \geq a$.

b) La forma quadratica in $y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n', \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}$, che si ottiene dalla f sopprimendo i termini di grado inferiore al 2°, è sempre semidefinita positiva per ogni $x \geq a$.

c) La forma quadratica in $y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}$, che si ottiene dalla f sopprimendo i termini di grado inferiore al 2° in $y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}$, è sempre definita positiva per ogni $x \geq a$.

Indichiamo con $K(I_\infty)$ la classe delle curve di S_{n+1} $C(y_1(x), \dots, y_n(x))$, con $y_1(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), \dots, y_n'(x), \dots, y_1^{(m-1)}(x), \dots, y_n^{(m-1)}(x)$ assolutamente continue in ogni intervallo finito $(a, a+M)$, con $M > 0$, tali che sia

$$(2) \quad y_i^{(r)}(a) = b_{i,r} \quad \left(\begin{array}{l} i=1, 2, \dots, n \\ r=0, 1, \dots, m-1 \end{array} \right),$$

⁽⁴⁾ Cfr. S. CINQUINI, I° lavoro cit. in ⁽²⁾, p. 260.

⁽⁵⁾ S. FAEDO: *L'unicità delle successive approssimazioni nel metodo variazionale*. Memorie della R. Accademia d'Italia, Vol. XIII, fasc. 5, pagg. 679-706, 1942. *Proprietà asintotiche delle estremanti degli integrali a campo d'integrazione illimitato*. Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, S. II, Vol. XI, pag. 119.

dove $b_{i,r}$ sono costanti assegnate, e per cui inoltre esista finito

$$I_\infty = \int_a^{+\infty} f[x, y_1(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), \dots, y_n'(x), \dots, y_1^{(m)}(x), \dots, y_n^{(m)}(x)] dx.$$

In alcuni miei recenti lavori ho dimostrato i seguenti teoremi:

TEOREMA A: Se I_∞ possiede in $K(I_\infty)$ una minimante $\bar{C}(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$ che sia una estremale, su \bar{C} è nulla la variazione prima di I_∞ , ossia, se $C(y_1, \dots, y_n)$ è una qualsiasi curva di $K(I_\infty)$, è

$$\delta I_\infty = \int_a^{+\infty} \left\{ (y_1 - \bar{y}_1) f_{\bar{y}_1} + \dots + (y_n - \bar{y}_n) f_{\bar{y}_n} + (y_1' - \bar{y}_1') f_{\bar{y}_1'} + \dots + (y_n' - \bar{y}_n') f_{\bar{y}_n'} + \dots + (y_1^{(m)} - \bar{y}_1^{(m)}) f_{\bar{y}_1^{(m)}} + \dots + (y_n^{(m)} - \bar{y}_n^{(m)}) f_{\bar{y}_n^{(m)}} \right\} dx = 0,$$

dove $f_{\bar{y}_i^{(r)}}$ è la $\frac{\partial f}{\partial y_i^{(r)}}$ calcolata per $y_1 = \bar{y}_1(x), \dots, y_n = \bar{y}_n(x)$ (6).

TEOREMA B: Se è, qualunque siano $y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n', \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}$,

$$(3) \quad f(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n', \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}) \geq \psi(x),$$

con $\psi(x)$ tale che esista finito

$$(4) \quad \int_a^{+\infty} \psi(x) dx,$$

allora I_∞ ammette in $K(I_\infty)$ il minimo assoluto (7).

Potrebbe accadere che la classe $K(I_\infty)$ fosse vuota; in tal caso, per la (4), tutte le curve $C(y_1(x), \dots, y_n(x))$ danno ad I_∞ lo stesso valore $+\infty$.

TEOREMA C: Se $y(x)$ è assolutamente continua in ogni intervallo finito $(a, a+M)$ con $M > 0$, ed esiste finito

$$\int_a^{+\infty} (y^2(x) + y'^2(x)) dx,$$

è necessariamente

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0 \quad (8).$$

(6) S. FAEDO, 1° lavoro cit. in (5), § 2, n. 4, pag. 700.

(7) S. FAEDO, loc. cit. in (3), pagg. 146-148. Il teorema B è ivi dimostrato per $m = 2$ e $\psi = 0$. La dimostrazione sussiste tale e quale per $m > 2$. Inoltre essendo per la (3)

$$f(x, y_1, \dots, y_n^{(m)}) - \psi(x) \geq 0,$$

il teorema sussiste per $\int_a^{+\infty} \{ f(x, y_1, \dots, y_n^{(m)}) - \psi(x) \} dx$ e quindi per $\int_a^{+\infty} f(x, y_1, \dots, y_n^{(m)}) dx$.

(8) S. FAEDO, II° lavoro cit. in (4).

2. - Andiamo a stabilire il

TEOREMA DI CONFRONTO: *Se*

$$I_{\infty} = \int_a^{+\infty} \varphi(x, y_1(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), \dots, y_n'(x), \dots, y_1^{(m)}(x), \dots, y_n^{(m)}(x)) dx$$

ammette in $K(I_{\infty})$ *minimo fornito da un'estremale; se le funzioni*

$$\varphi(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n', \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)})$$

e

$$\{f(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n', \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}) - \varphi(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n', \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)})\}$$

soddisfano alle condizioni a), b), c) del n. 1; se inoltre è

$$(5) \quad f(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n', \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}) \geq \varphi(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n', \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)});$$

allora il funzionale

$$\mathfrak{J}_{\infty} = \int_a^{+\infty} f(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n', \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}) dx$$

possiede minimo nella classe $K(\mathfrak{J}_{\infty})$.

DIMOSTRAZIONE: Il funzionale I_{∞} soddisfa alle ipotesi del Teorema A; perciò, se $C(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$ è l'estremale che minimizza I_{∞} e $C(y_1, \dots, y_n)$ è una qualunque curva di $K(I_{\infty})$, è, per la formula del TAYLOR,

$$(6) \quad \int_a^{+\infty} \varphi(x, y_1, \dots, y_n, \dots, y_n^{(m)}) dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n, \dots, \bar{y}_n^{(m)}) dx + \\ + \int_a^{+\infty} \{ (y_1 - \bar{y}_1) \varphi_{\bar{y}_1} + \dots + (y_n - \bar{y}_n) \varphi_{\bar{y}_n} + \dots + (y_n^{(m)} - \bar{y}_n^{(m)}) \varphi_{\bar{y}_n^{(m)}} \} dx + \\ + \frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \left\{ \sum_{r,s}^{0 \dots m} \sum_{i,j}^{1 \dots n} (y_i^{(r)} - \bar{y}_i^{(r)}) (y_j^{(s)} - \bar{y}_j^{(s)}) \varphi_{\bar{y}_i^{(r)}, \bar{y}_j^{(s)}} \right\} dx = \\ = \int_a^{+\infty} \varphi(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n, \dots, \bar{y}_n^{(m)}) dx + \frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \left\{ \sum_{r,s}^{0 \dots m} \sum_{i,j}^{1 \dots n} (y_i^{(r)} - \bar{y}_i^{(r)}) (y_j^{(s)} - \bar{y}_j^{(s)}) \varphi_{\bar{y}_i^{(r)}, \bar{y}_j^{(s)}} \right\} dx.$$

Se $C(y_1, \dots, y_n)$ è una curva che appartiene a $K(\mathfrak{J}_{\infty})$, per la (5) essa è, anche una curva di $K(I_{\infty})$ e per essa sussiste la (6).

Si ha quindi, per ogni $C(y_1, \dots, y_n)$ di $K(\mathfrak{J}_\infty)$,

$$(7) \quad \mathfrak{J}_\infty = \int_a^{+\infty} f(x, y_1, \dots, y_n^{(m)}) dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x, y_1, \dots, y_n^{(m)}) dx + \\ + \int_a^{+\infty} \left\{ f(x, y_1, \dots, y_n^{(m)}) - \varphi(x, y_1, \dots, y_n^{(m)}) \right\} dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n^{(m)}) dx + \\ + \int_a^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{r,s}^{0\dots m} \sum_{i,j}^{1\dots n} (y_i^{(r)} - \bar{y}_i^{(r)}) (y_j^{(s)} - \bar{y}_j^{(s)}) \varphi_{\bar{y}_i^{(r)}, \bar{y}_j^{(s)}} + f(x, y_1, \dots, y_n^{(m)}) - \varphi(x, y_1, \dots, y_n^{(m)}) \right\} dx.$$

La funzione

$$\frac{1}{2} \sum_{r,s}^{0\dots m} \sum_{i,j}^{1\dots n} (y_i^{(r)} - \bar{y}_i^{(r)}) (y_j^{(s)} - \bar{y}_j^{(s)}) \varphi_{\bar{y}_i^{(r)}, \bar{y}_j^{(s)}} + f(x, y_1, \dots, y_n^{(m)}) - \varphi(x, y_1, \dots, y_n^{(m)})$$

soddisfa alle condizioni *a)*, *b)*, *c)* del n. 1; inoltre, poichè la $\varphi(x, y_1, \dots, y_n^{(m)})$ soddisfa alla *b)* è

$$\sum_{r,s}^{0\dots m} \sum_{i,j}^{1\dots n} (y_i^{(r)} - \bar{y}_i^{(r)}) (y_j^{(s)} - \bar{y}_j^{(s)}) \varphi_{\bar{y}_i^{(r)}, \bar{y}_j^{(s)}} \geq 0.$$

Dalla (5) si ottiene

$$\frac{1}{2} \sum_{r,s}^{0\dots m} \sum_{i,j}^{1\dots n} (y_i^{(r)} - \bar{y}_i^{(r)}) (y_j^{(s)} - \bar{y}_j^{(s)}) \varphi_{\bar{y}_i^{(r)}, \bar{y}_j^{(s)}} + f(x, y_1, \dots, y_n^{(m)}) - \varphi(x, y_1, \dots, y_n^{(m)}) \geq 0;$$

perciò, per il teorema *B*, esiste il minimo in $K(\mathfrak{J}_\infty)$, di

$$\int_a^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{r,s}^{0\dots m} \sum_{i,j}^{1\dots n} (y_i^{(r)} - \bar{y}_i^{(r)}) (y_j^{(s)} - \bar{y}_j^{(s)}) \varphi_{\bar{y}_i^{(r)}, \bar{y}_j^{(s)}} + f(x, y_1, \dots, y_n^{(m)}) - \varphi(x, y_1, \dots, y_n^{(m)}) \right\} dx$$

e quindi, per la (7), \mathfrak{J}_∞ ammette minimo in $K(\mathfrak{J}_\infty)$.

OSSERVAZIONE: Il teorema di confronto contiene, come caso particolare, il teorema *B* quando si faccia $\varphi \equiv \psi(x)$.

3. - Nel seguito, per semplicità di notazioni, considereremo integrali del tipo di

$$\int_a^{+\infty} f(x, y, y') dx.$$

Quanto si dirà sussiste anche per integrali dipendenti da curve di S_n e in cui entrino derivate di ordine superiore.

Dimostriamo il seguente

TEOREMA: (*) Se $\alpha(x)$ è assolutamente continua in ogni intervallo finito $(0, x)$, limitata in $(0, +\infty)$ e tale che esista un λ in modo che $\alpha(x) - \lambda$ sia di quadrato integrabile in $(0, +\infty)$, allora l'integrale

$$I'_{\infty} = \int_0^{+\infty} (y^2 + y'^2 + 2\alpha(x)y') dx$$

ammette minimo nella classe $K(I'_{\infty})$, fornito dall'estremale

$$y = \frac{e^x}{2} \int_x^{+\infty} (\alpha - \lambda) e^{-x} dx - \frac{e^{-x}}{2} \int_0^x (\alpha - \lambda) e^x dx + e^{-x} \left[b - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (\alpha - \lambda) e^{-x} dx \right] \quad (b = y(0)) \quad (9).$$

L'equazione di EULERO relativa all'integrale I'_{∞} è

$$y'' - y + \alpha' = 0$$

ed ammette per integrale generale, come è facile verificare,

$$y = ce^x + ke^{-x} - \frac{1}{2} e^x \int_0^x (\alpha - \lambda) e^{-x} dx - \frac{1}{2} e^{-x} \int_0^x (\alpha - \lambda) e^x dx.$$

Le curve di $K(I'_{\infty})$, per la (2), sono tali che è sempre

$$y(0) = b_{1,0} = b$$

e perciò le estremali che appartengono a $K(I'_{\infty})$ sono del tipo di

$$(8) \quad y = ce^x + (b - c) e^{-x} - \frac{e^x}{2} \int_0^x (\alpha - \lambda) e^{-x} dx - \frac{e^{-x}}{2} \int_0^x (\alpha - \lambda) e^x dx.$$

Per la disuguaglianza di SCHWARZ è

$$\int_0^x |\alpha - \lambda| e^{-x} dx \leq \sqrt{\int_0^x (\alpha - \lambda)^2 dx} \cdot \sqrt{\int_0^x e^{-2x} dx} \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} (\alpha - \lambda)^2 dx} \cdot \sqrt{\int_0^{+\infty} e^{-2x} dx},$$

quindi esiste finito

$$\int_0^{+\infty} (\alpha - \lambda) e^{-x} dx.$$

(*) Nota aggiunta nella correzione delle bozze. In una Memoria attualmente in corso di stampa all'Accademia Pontificia [*Il Calcolo delle Variazioni per gli integrali su un intervallo infinito*], nella quale espongo le linee fondamentali della teoria dell'estremo per l'integrale I_{∞} , è contenuta una estensione di questo teorema; si dimostra infatti il teorema senza supporre che $\alpha(x)$ sia assolutamente continua e limitata.

(9) Nel II° lavoro cit. in (5) avevo dato tale teorema nel caso $\alpha \equiv 1$.

Se si pone, nella (8),

$$c = \bar{c} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (\alpha - \lambda) e^{-x} dx$$

si ottiene la particolare estrema

$$(9) \quad y = \bar{y} = \frac{e^x}{2} \int_x^{+\infty} (\alpha - \lambda) e^{-x} dx - \frac{e^{-x}}{2} \int_0^x (\alpha - \lambda) e^x dx + e^{-x}(b - \bar{c}).$$

Essendo $\alpha - \lambda$ di quadrato integrabile in $(0, +\infty)$, tali sono anche

$$\frac{e^x}{2} \int_x^{+\infty} (\alpha - \lambda) e^{-x} dx$$

e

$$\frac{e^{-x}}{2} \int_0^x (\alpha - \lambda) e^x dx \quad (10);$$

quindi sono integrabili, su $(0, +\infty)$, $\bar{y}^2(x)$ e $\bar{y}'^2(x)$.

Andiamo ora a dimostrare che è anche integrabile, su $(0, +\infty)$, $\alpha(x)\bar{y}'(x)$. È

$$\begin{aligned} \alpha(x)\bar{y}'(x) &= (\alpha - \lambda) \left[\frac{e^x}{2} \int_x^{+\infty} (\alpha - \lambda) e^{-x} dx + \frac{e^{-x}}{2} \int_0^x (\alpha - \lambda) e^x dx \right] - \\ &\quad - (\alpha - \lambda)^2 - (b - \bar{c})(\alpha - \lambda) e^{-x} + \lambda \bar{y}'. \end{aligned}$$

Poichè sono integrabili su $(0, +\infty)$ sia $\bar{y}^2(x)$ che $\bar{y}'^2(x)$, per il teorema *C* è

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{y}(x) = 0,$$

e quindi è integrabile

$$\lambda y'(x).$$

Inoltre, essendo di quadrato integrabile sia $\alpha - \lambda$ che

$$\frac{e^x}{2} \int_x^{+\infty} (\alpha - \lambda) e^{-x} dx + \frac{e^{-x}}{2} \int_0^x (\alpha - \lambda) e^x dx,$$

segue immediatamente dalla disuguaglianza di SCHWARZ che è integrabile il prodotto

$$(\alpha - \lambda) \left[\frac{e^x}{2} \int_x^{+\infty} (\alpha - \lambda) e^{-x} dx + \frac{e^{-x}}{2} \int_0^x (\alpha - \lambda) e^x dx \right].$$

È così provata l'integrabilità, su $(0, +\infty)$ di $\alpha(x)\bar{y}'(x)$.

Perciò l'estrema $y = \bar{y}(x)$ dà valore finito all'integrale I'_∞ .

(10) Cfr. M. PICONE: *Nota aggiunta alla Memoria di S. FAEDO: Contributo alla sistemazione teorica del metodo variazionale* ..., loc. cit. in (3), pag. 155.

Se $y=y(x)$ è una qualunque curva di $K(I'_\infty)$, si ha

$$(10) \quad \int_0^{+\infty} (y^2 + y'^2 + 2\alpha y') dx = \int_0^{+\infty} (\bar{y}^2 + \bar{y}'^2 + 2\alpha \bar{y}') dx + \\ + 2 \int_0^{+\infty} \{ (y - \bar{y}) \bar{y} + (y' - \bar{y}') (\bar{y}' + \alpha) \} dx + \int_0^{+\infty} \{ (y - \bar{y})^2 + (y' - \bar{y}')^2 \} dx,$$

dove, come si vedrà fra breve, i due ultimi integrali al secondo membro sono convergenti.

Integrando per parti si ottiene,

$$2 \int_0^{+\infty} (y' - \bar{y}') (\bar{y}' + \alpha) dx = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - \bar{y}) (\bar{y}' + \alpha) - 2 \int_0^{+\infty} (y - \bar{y}) (\bar{y}'' + \alpha') dx$$

e quindi

$$2 \int_0^x \{ (y - \bar{y}) \bar{y} + (y' - \bar{y}') (\bar{y}' + \alpha) \} dx = 2 (y - \bar{y}) (\bar{y}' + \alpha) - 2 \int_0^x (y - \bar{y}) (\bar{y}'' + \alpha') dx = \\ = 2 (y - \bar{y}) (\bar{y}' + \alpha),$$

perchè, essendo $y = \bar{y}(x)$ una estremale, è

$$\bar{y}'' - \bar{y} + \alpha' = 0.$$

Dalla (10) si ha

$$(11) \quad \int_0^{+\infty} (y^2 + y'^2 + 2\alpha y') dx = \int_0^{+\infty} (\bar{y}^2 + \bar{y}'^2 + 2\alpha \bar{y}') dx + 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - \bar{y}) (\bar{y}' + \alpha) + \\ + \int_0^{+\infty} \{ (y - \bar{y})^2 + (y' - \bar{y}')^2 \} dx.$$

Dimostriamo ora che, qualunque sia la curva $y=y(x)$ di $K(I'_\infty)$ è sempre

$$(12) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - \bar{y}) (\bar{y}' + \alpha) = 0.$$

Si ha

$$\bar{y}' + \alpha = \frac{e^x}{2} \int_x^\infty (\alpha - \lambda) e^{-x} dx + \frac{e^{-x}}{2} \int_0^x (\alpha - \lambda) e^x dx - (b - \bar{c}) e^{-x} + \lambda$$

ed è

$$(13) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\bar{y}' + \alpha) = \lambda.$$

Basta evidentemente provare che è

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{e^x}{2} \int_x^{+\infty} (\alpha - \lambda) e^{-x} dx + \frac{e^{-x}}{2} \int_0^{+\infty} (\alpha - \lambda) e^x dx \right] = 0.$$

Ciò segue immediatamente dal teorema *C*; infatti l'espressione fra parentesi è a quadrato integrabile in $(0, +\infty)$ e così pure la sua derivata

$$\frac{e^x}{2} \int_x^{+\infty} (\alpha - \lambda) e^{-x} dx + \frac{e^{-x}}{2} \int_0^x (\alpha - \lambda) e^x dx.$$

Se $y = y(x)$ oltre ad appartenere a $K(I'_\infty)$ è tale che è anche finito

$$\int_0^{+\infty} \{ (y - \bar{y})^2 + (y' - \bar{y}')^2 \} dx$$

per il teorema *C* è

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (y - \bar{y}) = 0$$

e quindi, tenuto conto della (13), segue la (12).

Il primo membro della (12) non può mai essere indeterminato perchè, nella (11) non è mai indeterminato

$$\int_0^{+\infty} \{ (y - \bar{y})^2 + (y' - \bar{y}')^2 \} dx.$$

Se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - \bar{y})(\bar{y}' + \alpha)$$

fosse finito e non nullo, per la (11) sarebbe finito anche

$$\int_0^{+\infty} \{ (y - \bar{y})^2 + (y' - \bar{y}')^2 \} dx;$$

ma allora deve essere

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (y - \bar{y})(\bar{y}' + \alpha) = 0.$$

Per la (11) non può essere

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - \bar{y})(\bar{y}' + \alpha) = +\infty$$

perchè in tal caso $y(x)$ non apparterebbe a $K(I'_\infty)$.

Rimane quindi da provare che non può nemmeno essere

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - \bar{y})(\bar{y}' + \alpha) = -\infty.$$

Infatti, se così fosse, essendo $\alpha(x)$ limitata, fissato $M > 0$ si potrebbe determinare x_0 tale che per $x \geq x_0$ sia sempre

$$y^2(x) > M + \alpha^2$$

e quindi

$$y^2(x) + y'^2(x) + 2\alpha(x)y'(x) > M + (y'(x) + \alpha)^2 \geq M$$

per $x \geq x_0$.

Ma allora I'_∞ non sarebbe finito e quindi $y(x)$ non apparterebbe a $K(I'_\infty)$. È così dimostrato che se $y(x)$ appartiene a $K(I'_\infty)$ si ha sempre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - \bar{y})(\bar{y}' + \alpha) = 0.$$

Perciò dalla (11) segue

$$\int_0^{+\infty} (y^2 + y'^2 + 2\alpha y') dx = \int_0^{+\infty} (\bar{y}^2 + \bar{y}'^2 + 2\alpha \bar{y}') dx + \int_0^{+\infty} [(y - \bar{y})^2 + (y' - \bar{y}')^2] dx$$

qualunque sia $y(x)$ in $K(I'_\infty)$.

Tale relazione mostra che I'_∞ ammette minimo in $K(I'_\infty)$ e che tale minimo è fornito dalla estrema definita dalla (9).

OSSERVAZIONE I. - Se nel teorema ora dato la $\alpha(x)$ non soddisfa alle ipotesi fatte può accadere che l'integrale I'_∞ non ammetta minimo.

Si consideri ad esempio

$$\int_0^{+\infty} (y^2 + y'^2 + 2e^x y') dx.$$

La funzione $y = -x$ dà a questo integrale il valore $-\infty$.

Se invece si fa $\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, si vede facilmente che in questo caso l'estrema \bar{y} , data dalla (9), non possiede integrali né \bar{y}^2 né \bar{y}'^2 .

OSSERVAZIONE II. - Un teorema analogo a quello dato non sussiste per il funzionale

$$I''_\infty = \int_0^{+\infty} (y^2 + y'^2 + 2\beta(x)y) dx.$$

Si consideri infatti, per $\beta = 1$,

$$\int_0^{+\infty} (y^2 + y'^2 + 2y) dx.$$

La funzione $y = -1$ dà all'integrale il valore $-\infty$.

Per l'integrale I''_{∞} sussiste invece il

TEOREMA. - Se $\beta(x)$ è continua e di quadrato integrabile in $(0, +\infty)$, I'_{∞} ammette minimo in $K(I'_{\infty})$.

Infatti per il teorema *B* ammette minimo l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \{y'^2 + (y + \beta)^2\} dx = I''_{\infty} + \int_0^{+\infty} \beta^2 dx.$$

4. - Da quanto si è dimostrato precedentemente segue il

TEOREMA. - Se $\alpha(x)$ è assolutamente continua in ogni intervallo finito $(a, a+M)$ con $M > 0$, limitata, ed esiste un λ tale che sia integrabile in $(\alpha, +\infty)$ $(\alpha(x) - \lambda)^2$; se $\beta(x)$ è continua ed è integrabile $\beta^2(x)$ in $(\alpha, +\infty)$, allora l'integrale

$$\bar{I}_{\infty} = \int_a^{+\infty} \{y^2 + y'^2 + 2\alpha y' + 2\beta y\} dx$$

ammette minimo in $K(\bar{I}_{\infty})$.

Infatti è

$$\begin{aligned} y^2 + y'^2 + 2\alpha y' + 2\beta y &= \frac{1}{2} (y^2 + y'^2) + 2\alpha y' + \frac{1}{2} y'^2 + \frac{1}{2} (y + 2\beta)^2 - 2\beta^2 \geq \\ &\geq \frac{1}{2} [y^2 + y'^2] + 2\alpha y' - 2\beta^2. \end{aligned}$$

Poichè, per quanto si è dimostrato nel n. 3,

$$\int_a^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2} (y^2 + y'^2) + 2\alpha y' \right\} dx = \frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \{y^2 + y'^2 + 4\alpha y'\} dx$$

ammette una minimante che è una estremale e $2\beta^2$ è integrabile in $(\alpha, +\infty)$, si può applicare il teorema di confronto e la proposizione viene immediatamente dimostrata.

Il ragionamento fatto nel n. 3 mostra che anche in questo caso la minimante è una estremale.

5. - **TEOREMA.** - Le funzioni $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$ siano continue ed $e(x)$ assolutamente continua in ogni intervallo finito $(a, a+M)$, con $M > 0$; esista un $\varepsilon > 0$ per cui si abbia

$$a(x) \geq \varepsilon, \quad b(x) \geq \varepsilon \quad c^2(x) \leq [a(x) - \varepsilon][b(x) - \varepsilon];$$

$e(x)$ sia inoltre limitata e siano integrabili in $(0, +\infty)$ $(e(x) - \lambda)^2$, $d^2(x)$ e $\varphi(x)$, dove λ è una opportuna costante. Allora l'integrale

$$I_\infty = \int_a^{+\infty} \{ a(x)y^2 + b(x)y'^2 + 2c(x)yy' + 2d(x)y + 2e(x)y' + \varphi(x) \} dx$$

ammette minimo in $K(I_\infty)$.

Infatti è

$$(a - \varepsilon)y^2 + (b - \varepsilon)y'^2 + 2cyy' \geq 0$$

e quindi

$$ay^2 + by'^2 + 2cyy' \geq \varepsilon(y^2 + y'^2),$$

$$ay^2 + by'^2 + 2cyy' + 2dy + 2ey' + \varphi \geq \varepsilon \left(y^2 + y'^2 + 2\frac{d}{\varepsilon}y + 2\frac{e}{\varepsilon}y' \right) + \varphi.$$

Poichè, per il teorema del n. 4,

$$\varepsilon \int_0^{+\infty} \left\{ y^2 + y'^2 + 2\frac{d}{\varepsilon}y + 2\frac{e}{\varepsilon}y' \right\} dx$$

ammette minimo fornito da una estremale, si può applicare il teorema di confronto, dal quale segue immediatamente la proposizione enunciata.

OSSERVAZIONE I: Il teorema B esige per l'esistenza del minimo che sia

$$(14) \quad a(x) \geq 0, \quad b(x) > 0.$$

Il teorema ora dato impone invece la condizione più restrittiva che sia

$$(15) \quad a(x) \geq \varepsilon > 0, \quad b(x) \geq \varepsilon > 0.$$

Mostriamo che in quest'ultimo teorema non si possono mettere le condizioni (14) al posto delle (15).

Sia infatti $a(x) > 0$, $b(x) > 0$ e $x^2a(x)$ e $b(x)$ siano integrabili in $(0, +\infty)$. L'integrale

$$\int_0^{+\infty} \{ a(x)y^2 + b(x)y'^2 + 2y' \} dx$$

soddisfa alle (14) ma non alle (15); esso non ammette però minimo, perchè la funzione $y = -x$ gli dà il valore $-\infty$.

OSSERVAZIONE II: Il teorema ora dato comprende quelli dimostrati nei nn. 3, 4.

La funzione integranda $a(x)y^2 + b(x)y'^2 + 2c(x)yy' + 2d(x)y + 2e(x)y' + \varphi(x)$ non soddisfa alla condizione (3) del teorema B , come è facile verificare.