Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

SANDRO FAEDO

Proprietà asintotiche delle estremanti degli integrali a campo di integrazione illimitato

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 11, nº 3-4 (1942), p. 119-131

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1942_2_11_3-4_119_0>

PROPRIETÀ ASINTOTICHE DELLE ESTREMANTI DEGLI INTEGRALI A CAMPO DI INTEGRAZIONE ILLIMITATO

di SANDRO FAEDO (Roma) [1].

Soltanto recentemente si sono avuti dei contributi al Calcolo delle Variazioni degli integrali a campo di integrazione illimitato, nell'indirizzo della Scuola Italiana di L. TONELLI.

Il problema è stato impostato da S. CINQUINI [2], che ha dato inoltre alcuni teoremi di esistenza dell'estremo.

Successivamente, in due lavori [3] dedicati alla sistemazione teorica del metodo variazionale di M. PICONE, sono stato condotto a teoremi di esistenza e unicità per tale tipo di integrali.

In particolare mi sono occupato, fra l'altro, della seguente questione:

Se si cerca l'estremo di

$$I=\int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx$$

nella classe delle funzioni $y(x)$ assolutamente continue in (a, b), per cui I esiste finito ed è

$$y(a)=c \qquad (c \text{ costante assegnata}),$$

sotto note condizioni esso è fornito dalla estremale $\bar{y}(x)$ per cui è

$$\bar{y}(a)=c, \tag{1}$$

$$[f_{y'}(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)]_{x=b}=0 \qquad (\textit{condizione di trasversalità}). \tag{2}$$

Su tale estremale $\bar{y}(x)$ è inoltre nulla la variazione prima δI di I per un incremento $\delta\bar{y}(x)$ arbitrario (con $\delta\bar{y}(0)=0$) dato alla $\bar{y}(x)$, ed è

$$\delta I=[\delta\bar{y}(x)\cdot f_{y'}(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)]_{x=b}=0.$$

---

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

[2] S. CINQUINI: *Una nuova estensione dei moderni metodi del Calcolo delle Variazioni.* Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa, S. II, Vol. IX, 1940, pp. 253-262.

[3] S. FAEDO: *Contributo alla sistemazione teorica del metodo variazionale per l'analisi dei problemi di propagazione.* Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa, S. II, Vol. X, 1941, pp. 139-155; *L'unicità delle successive approssimazioni nel metodo variazionale.* Memorie della R. Accademia d'Italia, Vol. XIII, fasc. 5, 1942, pp. 679-707.

Se invece si considera

$$I_\infty = \int_a^{+\infty} f(x, y(x), y'(x))\, dx$$

e se ne ricerca l'estremo nella classe (K) delle funzioni $y(x)$ assolutamente continue in ogni intervallo finito $(a, a+M)$, con $M>0$, per cui $y(a)=c$ e che rendono integrabile in $(a, +\infty)$ la $f(x, y, y')$, ho dato ([4]) delle condizioni sotto le quali si può ancora asserire che l'estremo è fornito da una estremale $\overline{y}(x)$.

Per la determinazione di tale funzione si presenta ora l'inconveniente che, mentre sussiste ancora la (1), la condizione di trasversalità (2) sembra venga invece a perdere il suo significato.

Si domanda:

Quale condizione, oltre alla (1), *servirà a determinare l'estremale che effettivamente dà il minimo* (*o il massimo*) *ad* I_∞ *nella classe* (K) ?

Si potrebbe pensare che la nuova condizione per l'estremale sia quella di rendere finito l'integrale generalizzato

$$\int_a^{+\infty} f(x, y(x), y'(x))\, dx.$$

Ma, nel secondo dei lavori citati, ho provato con un esempio che tale condizione non è sempre sufficiente a determinare l'estremale.

Invece ho potuto dimostrare ([5]) che, sotto opportune condizioni, su $\overline{y}(x)$ è ancora nulla la variazione prima di I_∞, ossia che, se si dà a $\overline{y}(x)$ l'incremento $\delta\overline{y}(x)$ in guisa che I_∞ rimanga finito e sia $\delta\overline{y}(0)=0$, è

$$\delta I_\infty = \int_a^{+\infty} [f_{\overline{y}}\, \delta\overline{y} + f_{\overline{y}'}\, \delta\overline{y}']\, dx = \lim_{x \to +\infty} [\delta\overline{y} \cdot f_{y'}(x, \overline{y}(x), \overline{y}'(x)] = 0. \tag{3}$$

Ho dimostrato ([6]) inoltre che *l'annullarsi della variazione prima, insieme alla* (1), *determina completamente l'estremale che dà il minimo* (*o massimo*) *di* I_∞ *in* (K).

Poichè l'incremento $\delta\overline{y}(x)$ non è arbitrario, ma tale che la funzione $\overline{y}(x)+\delta\overline{y}(x)$ appartenga ancora a (K), non si può dalla (3) dedurre immediatamente che è sempre

$$\lim_{x \to +\infty} f_{y'}(x, \overline{y}(x), \overline{y}'(x)) = 0,$$

come invece si fa per l'integrale I.

([4]) S. FAEDO: I° lavoro cit. in ([3]), pag. 152; II° lavoro cit. in ([3]), § 2, n. 1.

([5]) S. FAEDO: II° lavoro cit. in ([3]), § 2, nn. 2, 3, 4.

([6]) S. FAEDO: II° lavoro cit. in ([3]), § 2, n. 4.

Se invece si introducono delle ulteriori condizioni [7] si può dimostrare che la $\bar{y}(x)$ verifica la *condizione di trasversalità all'infinito*

$$\lim_{x \to +\infty} f_{y'}(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) = 0. \tag{4}$$

Si presenta quindi la seguente interessante questione:

« *Se* I_∞ *ammette minimo (o massimo) fornito da un' estremale su cui è* $\delta I_\infty \equiv 0$, *si può sempre affermare che di conseguenza sussista la condizione di trasversalità all' infinito, in modo analogo a quanto accade per l' integrale* I? »

A tale domanda si risponde negativamente nel presente lavoro, mettendo così in luce una sostanziale diversità di comportamento fra gli integrali I ed I_∞.

Si vede ciò attraverso un esempio, che è assai significativo anche per ulteriori ricerche di nuove condizioni per l' esistenza dell'estremo di I_∞. Infatti si dimostra l'esistenza del minimo per un integrale che non rientra in alcuno dei teoremi finora noti.

Si fanno infine delle considerazioni che vengono a spiegare la diversità di comportamento delle estremanti degli integrali I ed I_∞.

1. - La funzione

$$f(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n', \ldots, y_1^{(m)}, \ldots, y_n^{(m)})$$

sia definita e continua per ogni $x \geqslant 0$ e per ogni valore finito di

$$y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_1^{(m)}, \ldots, y_n^{(m)}.$$

Supponiamo che esistano e siano continue le derivate

$$f_{y_i^{(r)}, y_j^{(s)}}, \qquad \begin{pmatrix} i, j = 1, 2, \ldots, n \\ r, s = 0, 1, \ldots, m \end{pmatrix}.$$

Consideriamo

$$I = \int_0^X f(x, y_1(x), \ldots, y_n^{(x)}, \ldots, y_1^{(m)}(x), \ldots, y_n^{(m)}(x))\, dx$$

e supponiamo che I possieda una minimante $\bar{C}(\bar{y}_1(x), \ldots, \bar{y}_n(x))$ che sia una estremale nella classe (H) delle curve $C(y_1(x), \ldots, y_n(x))$ di S_{n+1} assolutamente continue con $y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)}$ in $(0, X)$, tali da dare ad I valore finito e per cui è

$$y_i^{(k)}(0) = c_{i,k} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ k = 0, 1, \ldots, m-1 \end{pmatrix},$$

dove $c_{i,k}$ sono numeri assegnati.

Per determinare le condizioni di trasversalità a cui soddisfa la curva $\bar{C}$, si usa procedere nel modo seguente:

---

[7] S. FAEDO: II° lavoro cit. in [3], § 2, n. 5.

Se $\eta(x)$ è una funzione assolutamente continua in $(0, X)$ con $\eta^{(m)}(x)$, esiste finito

$$(5)\quad I(\varepsilon) = \int^{X} f(x, \bar{y}_1 + \varepsilon\eta, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n, \dots, \bar{y}_1^{(m)} + \varepsilon\eta^{(m)}, \bar{y}_2^{(m)}, \dots, \bar{y}_n^{(m)}) =$$

$$= \int_0^X f(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n, \dots, \bar{y}_1^{(m)}, \dots, \bar{y}_n^{(m)})\, dx + \varepsilon \int_0^X [f_{\bar{y}_1}\eta + f_{\bar{y}_1'}\eta' + \dots + f_{\bar{y}_1^{(m)}}\eta^{(m)}]\, dx +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^X \left\{ \sum_{r,s}^{0\dots m} \eta^{(r)}\eta^{(s)} f_{\bar{y}_1^{(r)}, \bar{y}_1^{(s)}} \right\} dx$$

(dove le $f_{\bar{y}_1^{(r)}, \bar{y}_1^{(s)}}$ sono calcolate in un punto conveniente).

Poichè $I(\varepsilon)$ ha un minimo per $\varepsilon = 0$, è

$$\left(\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = 0$$

ossia

$$\int_0^X \left[f_{\bar{y}_1}\eta + f_{\bar{y}'}\eta' + \dots + f_{\bar{y}^{(m)}}\eta^{(m)}\right] dx = 0,$$

qualunque sia la $\eta(x)$; di qui, tenuto conto che $\bar{C}$ è un'estremale e per un fondamentale lemma di P. DU BOIS REYMOND, seguono immediatamente le condizioni di trasversalità per $x = X$.

Consideriamo ora la classe (K) di curve di S_{n+1} $C(y_1(x), \dots, y_n(x))$ tali che:

1°) $y_1(x), \dots, y_n(x)$ siano assolutamente continue con $y_1^{(m-1)}(x), \dots, y_n^{(m-1)}(x)$ in ogni intervallo finito $(0, X)$;

2°) esista finito

$$I_\infty = \int_0^{+\infty} f[x, y_1(x), \dots, y_n(x), \dots, y_1^{(m)}(x), \dots, y_n^{(m)}(x)]\, dx \;;$$

3°) sia, per $x = 0$,

$$y_i^{(k)} = c_{i,k}, \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, n \\ k = 0, 1, \dots, m-1 \end{pmatrix}.$$

Supponiamo che I_∞ abbia in (K) una minimante che sia un estremale ([8]). Se si vogliono ottenere le condizioni di trasversalità all'infinito in modo analogo a come si fa per l'integrale I, ho già dimostrato ([9]) che si presentano le seguenti nuove difficoltà :

([8]) Cfr. nota ([4]).

([9]) S. FAEDO : II° lavoro cit. in ([3]), § 2, n. 3.

a) $I_\infty(\varepsilon)$ può non essere finito per tutti i valori di ε nell'intorno di $\varepsilon=0$.

b) Può darsi che non esista

$$\left(\frac{d\, I_\infty(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}.$$

c) Pur essendo finito $I_\infty(\varepsilon)$, possono non essere finiti

$$\int_0^{+\infty} \left[f_{\bar{y}_1}\, \eta + f_{\bar{y}_1'}\, \eta' + \dots + f_{\bar{y}_1^{(m)}}\, \eta^{(m)} \right] dx$$

e

$$\int_0^{+\infty} \left\{ \sum_{r,s}^{0\dots m} \eta^{(r)}\, \eta^{(s)}\, f_{\bar{y}_1^{(r)},\, \bar{y}_1^{(s)}} \right\} dx,$$

e quindi non sussiste la relazione analoga alla (5).

2. - Supponiamo ora che $f(x, y_1, \dots, y_n, \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)})$ sia un polinomio di secondo grado in $y_1, \dots, y_n, \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}$ con coefficienti funzioni continue di x in ogni intervallo finito $(0, X)$. Inoltre la forma quadratica in

$$y_1, \dots, y_n, \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}$$

che si ottiene dalla $f(x, y_1, \dots, y_n, \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)})$ trascurando i termini di grado inferiore al secondo, sia sempre semidefinita positiva per ogni $x \geqslant 0$.

Supponiamo che (K) sia non vuota e che in essa esista una minimante $\bar{C}(\bar{y}_1(x), \dots, \bar{y}_n(x))$ che sia una estremale.

In tali condizioni ho dimostrato [10] il seguente teorema:

« *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una estremale $\bar{C}$ sia una estremante di I_∞ in (K) è che sia*

$$\text{(6)} \quad \lim_{x \to +\infty} \Big[\eta_i \Big(f_{\bar{y}_i'} - \frac{d}{dx} f_{\bar{y}_i''} + \dots + (-1)^{m-1} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} f_{\bar{y}_i^{(m)}} \Big) +$$

$$+ \eta_i' \Big(f_{\bar{y}_i''} - \frac{d}{dx} f_{\bar{y}_i'''} + \dots + (-1)^{m-2} \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}} f_{\bar{y}_i^{(m)}} \Big) + \dots + \eta_i^{(m-1)} f_{\bar{y}_i^{(m)}} \Big] = 0,$$

$$(i = 1, 2, \dots, n),$$

dove le $\eta_i(x)$ $(i=1, 2, \dots, n)$ sono tali che la curva

$$\bar{C} + \delta\bar{C}(\bar{y}_1 + \eta_1, \bar{y}_2 + \eta_2, \dots, \bar{y}_n + \eta_n)$$

sia ancora una curva di (K) ».

Se $\bar{C}(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$ verifica le (6) *diremo che su essa è identicamente nulla la variazione prima di I_∞.*

---

[10] S. Faedo: II° lav. cit. in [3], § 2, n. 4.

Qualora su $\overline{C}$ sia anche

$$(7)\quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f_{\overline{y}_i'} - \dfrac{d}{dx} f_{\overline{y}_i''} + \dots + (-1)^{m-1}\dfrac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} f_{\overline{y}_i^{(m)}}\right) = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f_{\overline{y}_i''} - \dfrac{d}{dx} f_{\overline{y}_i'''} + \dots + (-1)^{m-2}\dfrac{d^{m-2}}{dx^{m-2}} f_{\overline{y}_i^{(m)}}\right) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f_{\overline{y}_i^{(m)}} = 0 \end{cases} \qquad (i=1, 2, \dots, n)$$

diremo che $\overline{C}$ verifica le condizioni di trasversalità all'infinito.

Se oltre alle ipotesi finora fatte, la $f(x, y_1, \dots, y_n, \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)})$ è tale che sia definita positiva la forma quadratica in $y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}$ che si ottiene dalla $f(x, y_1, \dots, y_n, \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)})$ trascurando i termini di grado inferiore al secondo in $y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}$, ho anche dimostrato ([11]) che *in* (K) *esiste (al più) una sola estremale su cui è nulla la variazione prima di* I_∞.

3. - Per costruire un esempio in cui la minimante non verifica le condizioni di trasversalità all'infinito (7) è utile premettere il seguente

LEMMA. - *Se $y(x)$ è assolutamente continua in ogni intervallo finito* $(0, X)$, *con* $X > 0$, *ed esiste finito*

$$\mathfrak{J} = \int_0^{+\infty} (y^2 + y'^2)\, dx,$$

ne segue che necessariamente è

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0.$$

Se esiste $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$, tale limite è certamente nullo altrimenti $\mathfrak{J}$ non potrebbe essere finito.

Supponiamo, se possibile, che non esista $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$.

Si può allora determinare $\varepsilon > 0$ tale che, comunque grande si prenda X, si trovi sempre qualche x, con $x \geq X$, per cui è

$$|\, y(x)\, | \geq \varepsilon.$$

Indichiamo con $D_1, D_2, \dots, D_m, \dots$ gli intervalli chiusi dell'asse delle x in cui è sempre $|\, y(x)\, | \geq \varepsilon$, ordinati come si susseguono nel verso positivo dell'asse x; tali intervalli (che possono ridursi anche a punti isolati), per quanto si è premesso, esistono certamente e sono infiniti.

([11]) S. FAEDO: II° lavoro citato in ([3]), § 3.

Con $d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots$ indichiamo gli intervalli aperti dell'asse x in cui è

$$\frac{\varepsilon}{2} < |y(x)| < \varepsilon,$$

disposti nell'ordine in cui si susseguono sull'asse x.

Essendo $\mathfrak{I}$ finito i d_n esistono certamente. Inoltre la serie delle lunghezze dei d_n è convergente, avendosi

$$\mathfrak{I} = \int_0^{+\infty} (y^2 + y'^2)\, dx \geqslant \int_0^{+\infty} y^2\, dx > \sum_{n=1}^{\infty} \int_{d_n} y^2\, dx > \frac{\varepsilon^2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} d_n,$$

ossia

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n < \frac{4\mathfrak{I}}{\varepsilon^2}. \tag{8}$$

Fra D_m e D_{m+1} cadono necessariamente dei d_n. Esistono inoltre infinite coppie (D_m, D_{m+1}) fra cui cade più di un d_n.

Infatti, se fra D_m e D_{m+1} cade un solo d_n, questo d_n ricopre tutto l'intervallo compreso fra D_m e D_{m+1} ed in tutto l'intervallo $D_m + D_{m+1} + d_n$ è $|y(x)| > \frac{\varepsilon}{2}$. Se fossero in numero finito le coppie (D_m, D_{m+1}) fra cui cade più di un d_n, soppressi gli intervalli di $(0, +\infty)$ che sono compresi fra tali coppie, rimarrebbe un insieme di intervalli di lunghezza complessiva non finita in cui è sempre $|y(x)| > \frac{\varepsilon}{2}$; ma allora $\mathfrak{I}$ non sarebbe finito.

Indichiamo con

$$(\bar{D}_1, \bar{D}_2), \ldots, (\bar{D}_m, \bar{D}_{m+1}), \ldots$$

le infinite coppie di D_m consecutivi fra cui cade più di un d_n.

Nel secondo estremo di $\bar{D}_m$ $|y(x)|$ ha per valore ε. Sia $d_m \equiv (a_m, b_m)$ il primo dei d_n compresi fra $\bar{D}_m$ e $\bar{D}_{m+1}$.

a_m coincide col secondo estremo di D_m ed è $|y(b_m)| = \frac{\varepsilon}{2}$.

Infatti, per la definizione dei d_m, negli estremi di tali intervalli $|y(x)|$ può assumere soltanto i due valori $\varepsilon, \frac{\varepsilon}{2}$. Ma, se fosse $|y(b_m)| = \varepsilon$, b_m sarebbe il primo estremo di $\bar{D}_{m+1}$ e quindi fra $\bar{D}_m$ e $\bar{D}_{m+1}$ si avrebbe un solo d_n.

Si ha così

$$|y(a_m)| = \varepsilon, \qquad |y(b_m)| = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Consideriamo

$$\int_{a_m}^{b_m} z'^2(x)\, dx.$$

Nella classe delle curve $z=z(x)$ assolutamente continue in (a_m, b_m) per cui è

$$|z(a_m)|=\varepsilon \qquad |z(b_m)|=\frac{\varepsilon}{2},$$

l'integrale

$$\int_{a_m}^{b_m} z'^2(x)\,dx$$

possiede minimo, fornito dal segmento rettilineo passante per i punti $(x=a_m, z=\varepsilon)$, $\left(x=b_m, z=\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Per tale retta è

$$|z'(x)|=\frac{\varepsilon}{2(b_m-a_m)}.$$

Perciò è

$$\int_{a_m}^{b_m} y'^2(x)\,dx \geqslant \int_{a_m}^{b_m} \frac{\varepsilon^2}{4(b_m-a_m)^2}\,dx=\frac{\varepsilon}{4\,d_m}$$

e, per la (8),

$$\int_{a_m}^{b_m} y'^2(x)\,dx \geqslant \frac{\varepsilon^2}{4d_m} > \frac{\varepsilon^2}{4\sum\limits_{m=1}^{\infty} d_m} > \frac{\varepsilon^4}{16\,\mathfrak{I}}.$$

Ne segue quindi

$$\mathfrak{I}=\int_0^{+\infty}(y^2+y'^2)\,dx \geqslant \int_0^{+\infty} y'^2 dx \geqslant \sum_{m=1}^{\infty}\int_{a_m}^{b_m} y'^2\,dx=\infty$$

essendo, qualunque sia m,

$$\int_{a_m}^{b_m} y'^2\,dx > \frac{\varepsilon^4}{16\,\mathfrak{I}}.$$

Quindi dall'ipotesi che non esista $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$ segue che necessariamente $\mathfrak{I}$ non è finito.

Il lemma è così completamente dimostrato.

4. - Consideriamo

$$I_\infty=\int_0^{+\infty}(y^2+y'^2+2y')\,dx.$$

Indichiamo con (K) la classe delle funzioni $y(x)$ assolutamente continue in ogni intervallo $(0, X)$, per cui I_∞ risulta finito e tali che sia

$$y(0)=c, \qquad (c \text{ costante assegnata}).$$

Anzitutto (K) non è vuota perchè ad essa appartiene

$$y=\bar{y}=ce^{-x}. \tag{9}$$

Dimostriamo che in (K) I_∞ *ammette minimo*, fornito appunto dalla (9).

Se $C[(y=y(x)]$ è una curva di (K), si ha

$$(10)\quad \int_0^{+\infty}(y^2+y'^2+2y')\,dx-\int_0^{+\infty}(\bar{y}^2+\bar{y}'^2+2\bar{y}')\,dx=2\int_0^{+\infty}[(y-\bar{y})\,\bar{y}+(y'-\bar{y}')(\bar{y}'+1)]\,dx+ \\ +\int_0^{+\infty}[(y-\bar{y})^2+(y'-\bar{y}')^2]\,dx.$$

Integrando per parti si ottiene

$$2\int_0^{+\infty}(y'-\bar{y}')(\bar{y}'+1)\,dx=2\lim_{x\to+\infty}(y-\bar{y})(\bar{y}+1)-2\int_0^{+\infty}(y-\bar{y})\,\bar{y}''dx$$

e quindi

$$(11)\quad 2\int_0^{+\infty}[(y-\bar{y})\,\bar{y}+(y'-\bar{y}')(\bar{y}'+1)]\,dx=2\lim_{x\to+\infty}(y-\bar{y})(\bar{y}+1)+2\int_0^{+\infty}(y-\bar{y})(\bar{y}-\bar{y}'')\,dx= \\ =2\lim_{x\to+\infty}y(x)\,[\bar{y}(x)+1],$$

perchè $y=\bar{y}(x)$ è un'estremale e verifica l'equazione di EULERO $y-y''=0$ ed è $\lim\limits_{x\to\infty}\bar{y}(x)=0$.

Dalle (10) e (11) si ha

$$(12)\quad \int_0^{+\infty}(y^2+y'^2+2y')\,dx-\int_0^{+\infty}(\bar{y}^2+\bar{y}'^2+2\bar{y}')\,dx=2\lim_{x\to+\infty}y(x)\,[\bar{y}(x)+1]+ \\ +\int_0^{\infty}[(y-\bar{y})^2+(y'-\bar{y}')^2]\,dx.$$

Se $y(x)$ è una funzione di (K) per cui inoltre esiste finito

$$\int_0^{+\infty}[(y-\bar{y})^2+(y'-\bar{y}')^2]\,dx$$

si ha, per il lemma premesso,

$$\lim_{x\to+\infty}(y-\bar{y})=0$$

e quindi segue dalla (12)

$$\int_0^{+\infty}(y^2+y'^2+2y')\,dx-\int_0^{+\infty}(\bar{y}^2+\bar{y}'^2+2\bar{y}')\,dx=\int_0^{+\infty}(y-\bar{y})^2+(y'-\bar{y}')^2)\,dx\geqslant 0.$$

Se di $y(x)$ si sa soltanto che appartiene a (K), segue ancora necessariamente

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)\,[\bar{y}(x)+1]=0.$$

Infatti, in tal caso,

$$\lim_{x \to +\infty} y(x)\,[\bar{y}(x)+1]$$

non può mai essere indeterminato perchè è

$$2 \lim_{x \to +\infty} y(x)[\bar{y}(x)+1] = \int_0^{+\infty} (y^2+y'^2+2y')\,dx -$$

$$-\int_0^{+\infty} (\bar{y}^2+\bar{y}'^2+2\bar{y}')\,dx - \lim_{x \to +\infty} \int_0^x [(y-\bar{y})^2+(y'-\bar{y}')^2]\,dx.$$

Se poi fosse

$$\lim_{x \to +\infty} y(x)\,[\bar{y}(x)+1] = +\infty$$

dalla (12) seguirebbe immediatamente che $y(x)$ non dà valore finito ad I_∞ e quindi non appartiene a (K).

Nemmeno può $y(\bar{y}+1)$ tendere, per $x \to \infty$, a un limite finito non nullo, perchè in tal caso sarebbe finito

$$\int_0^{+\infty} [(y-\bar{y})^2+(y'-\bar{y}')^2]\,dx$$

e quindi, per il lemma, dovrebbe invece essere $\lim_{x \to +\infty} (y-\bar{y}) = 0$.

Infine non può essere

$$\lim_{x \to +\infty} y(x)\,[\bar{y}(x)+1] = -\infty\,.$$

Infatti, preso $M > 0$ ad arbitrio, si potrebbe determinare x_0 tale che per $x \geqslant x_0$ sia sempre

$$y^2(x) > |\,\bar{y}^2+\bar{y}'^2+2\bar{y}'\,| + M + 1$$

e quindi

$$(y^2+y'^2+2y') - (\bar{y}^2+\bar{y}'^2+2\bar{y}') > M+1+y'^2+2y' = M+(1+y')^2 \geqslant M,$$

per $x \geqslant x_0$; ne seguirebbe quindi che I_∞ non è finito e perciò $y=y(x)$ non appartiene a (K).

Si è così dimostrato che se $y(x)$ è una qualunque funzione di (K) è sempre

$$\int_0^{+\infty} (y^2+y'^2+2y')\,dx = \int_0^{+\infty} (\bar{y}^2+\bar{y}'^2+2\bar{y}')\,dx + \int_0^{+\infty} \{(y-\bar{y})^2+(y'-\bar{y}')^2\}\,dx.$$

Questa uguaglianza prova che I_∞ ammette in (K) minimo fornito dalla estremale

$$y = \bar{y} = ce^{-x}.$$

5. - L'esistenza del minimo per l'integrale

$$\int_0^{+\infty} (y^2 + y'^2 + 2y')\, dx$$

non poteva dedursi dai teoremi di esistenza dati da S. CINQUINI e da me nei lavori già citati.

Infatti in tali teoremi si considerano integrali

$$\int_a^{+\infty} f(x,\, y,\, y')\, dx$$

in cui è sempre, qualunque siano y, y' e $a \leqslant x < +\infty$,

$$f(x,\, y,\, y') \geqslant \psi(x),$$

con $\psi(x)$ tale che sia finito

$$\int_a^{+\infty} \psi(x)\, dx.$$

La funzione integranda $y^2 + y'^2 + 2y'$ non soddisfa evidentemente a questa condizione.

6. - Al funzionale

$$I_\infty = \int_0^{+\infty} f(y,\, y')\, dx = \int_0^{+\infty} (y^2 + y'^2 + 2y')\, dx,$$

considerato nel n. 4, si possono applicare i risultati rammentati nel n. 2. Si ha quindi che sulla estremale $y = \overline{y}$ che minimizza I_∞ in (K) è nulla la variazione prima di I_∞.

Andiamo a calcolare tale variazione δI_∞.

Se diamo alla $\overline{y} = c \cdot e^{-x}$ l'incremento $\delta\overline{y}$ in guisa che I_∞ sia ancora finito e sia $\delta\overline{y}(0) = 0$, si ha [cfr. 11]

$$\delta I_\infty = \int_0^{+\infty} \left(\delta\overline{y}\, f_{\overline{y}} + \delta\overline{y}' f_{\overline{y}'}\right) dx = \lim_{x \to +\infty} \left(\delta\overline{y} \cdot f_{\overline{y}'}\right) = 0.$$

Ma è

$$f_{\overline{y}'} = 2(\overline{y}' + 1) = 2(1 - ce^{-x})$$

ed è

$$\lim_{x \to +\infty} f_{\overline{y}'} = 2\,.$$

Sulla estremale che minimizza I_∞ in (K) è bensì nulla la variazione prima di I_∞, ma non è soddisfatta la condizione di trasversalità all'infinito che, per la (7), *in questo caso esigerebbe che fosse*

$$\lim_{x\to\infty} f_{\bar{y}'}=0.$$

Per il funzionale I_∞ sussiste anche il teorema di unicità per le estremali ricordato nel n. 2.

Ciò si può del resto verificare direttamente nel modo seguente:

Le estremali verificanti la condizione iniziale $y(0)=c$ sono date da

$$y=he^x+(c-h)\,e^{-x}.$$

Su tali estremali è

$$f_{y'}=2(y'+1)=2\,[he^x+(h-c)\,e^{-x}+1]\,;$$

quindi

$$\lim_{x\to\infty} f_{y'}=\begin{cases} 2 & \text{se } h=0 \\ \pm\infty & \text{se } h\neq 0. \end{cases}$$

Di qui segue facilmente che l'unica estremale per cui sia

$$\delta I_\infty=\lim_{x\to\infty}(\delta_y\cdot f_{y'})=0,$$

qualunque sia δy in modo che $y+\delta y$ appartenga ancora a (K), è quella per cui è $h=0$.

7. - L'esempio dato nel n. 6 mostra la diversità di comportamento degli integrali I ed I_∞ (definiti nel n. 1), rispetto alle condizioni di trasversalità nel secondo estremo dei rispettivi intervalli di integrazione. Vediamo di renderci ragione di tale apparente discordanza.

S. CINQUINI ([12]) ha osservato che il problema di ricercare l'estremo dell'integrale I_∞ ha senso quando si consideri una classe di curve che non sia soggetta a vincoli all'infinito, come è appunto la classe (K) definita nel n. 1.

Il CINQUINI ha mostrato che non si può in generale porre il problema di ricercare l'estremo di I_∞ nella sottoclasse (K') di (K) le cui curve abbiano un prefissato comportamento all'infinito, perchè generalmente tale estremo non esiste.

Mentre per l'integrale

$$I=\int_a^b f(x,\,y,\,y')\,dx$$

([12]) S. CINQUINI: loc. cit. in ([2]), nota a piè di pagina 253.

si può cercare il minimo nella classe (K_1) di curve piane che congiungono i punti $A \equiv (a, \alpha)$, $B \equiv (b, \beta)$, non ammette in generale minimo l'integrale

$$\int_a^{+\infty} f(x, y, y')\, dx$$

nella classe di curve passanti per A e tali che sia

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = \beta .$$

Per questo si ricerca l'estremo degli integrali I_∞ nella già detta classe (K) di curve, e tale problema si presenta come l'estensione della ricerca dell'estremo di I nella classe delle curve passanti per il solo punto A ; e qui interviene la condizione di trasversalità per $x = b$.

In realtà però la classe (K) è vincolata a dare valore finito all'integrale generalizzato I_∞ ; in taluni casi ciò può portare a obbligare le curve di (K) ad avere tutte uno stesso comportamento all'infinito, ossia che, se $y = y(x)$ e $y = y_1(x)$ sono due qualsiasi curve di (K), debba sempre essere

$$\lim_{x \to +\infty} (y - y_1) = 0.$$

In tali casi la classe (K) può essere pensata come quella delle curve $y = y(x)$ passanti per A e per cui è

$$\lim_{x \to +\infty} (y - y_1) = 0 ;$$

quindi (K) si può pensare anche come estensione della (K_1) di I.

Si comprende così come possa, in questi casi, venire a mancare per l'estremante di I_∞ la condizione di trasversalità all'infinito.

Nell'esempio che abbiamo dato nel n. 4, abbiamo definita la classe (K) relativa all'integrale

$$I_\infty = \int_0^{+\infty} (y^2 + y'^2 + 2y')\, dx$$

come quella delle curve $y = y(x)$, con $y(x)$ assolutamente continua in ogni intervallo finito $(0, X)$, per cui è $y(0) = c$ e che danno valore finito ad I_∞.

Abbiamo poi dimostrato che se $y = y(x)$ è una gualunque curva di (K), è sempre $\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0$.

Quindi la classe (K) si può anche definire come quella delle curve $y = y(x)$, che danno valore finito ad I_∞, sono assolutamente continue su ogni intervallo finito e sono tali che sia

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = c \\ \lim_{x \to +\infty} y(x) = 0. \end{array} \right. \tag{13}$$

Appare così chiaro che la minimante non deve soddisfare a condizioni di trasversalità all'infinito, e che essa è pienamente determinata dalle (13).