

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

SILVIO CINQUINI

## **L'estremo assoluto degli integrali doppi dipendenti dalle derivate di ordine superiore**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2<sup>e</sup> série*, tome 10,  
n° 3-4 (1941), p. 215-248

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1941\\_2\\_10\\_3-4\\_215\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1941_2_10_3-4_215_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1941, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

# L'ESTREMO ASSOLUTO DEGLI INTEGRALI DOPPI DIPENDENTI DALLE DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE

di SILVIO CINQUINI (Pavia).

Lo studio degli integrali doppi del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria

$$I_D[z] = \iint_D F\left(x, y, z(x, y), \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx dy$$

ha formato oggetto, in questi ultimi anni, di numerose ricerche che traggono la loro origine da due fondamentali Memorie di L. TONELLI. Tale Autore, introdotto un nuovo concetto di funzione di due variabili assolutamente continua, ha stabilito condizioni sufficienti per la semicontinuità degli integrali  $I_D[z]$  <sup>(1)</sup>, e teoremi di esistenza dell'estremo dell'integrale  $I_D[z]$  <sup>(2)</sup>.

Peraltro non è stato ancora considerato il caso in cui la funzione  $F$  dipenda dalle derivate della  $z(x, y)$  di ordine superiore al primo. A tale argomento è dedicata la presente Memoria, nella quale, per semplicità, supponiamo che l'ordine massimo delle derivate da cui dipende, in modo effettivo, la funzione integranda sia il secondo: soggiungiamo però che i procedimenti che sviluppiamo e i risultati raggiunti si estendono immediatamente al caso in cui la funzione  $F$  dipenda dagli elementi differenziali di ordine superiore al secondo.

Occorre innanzi tutto impostare il problema in questione in modo da poter ottenere, mediante l'estensione del metodo diretto del TONELLI, di cui è ben conosciuta la straordinaria efficacia, i risultati più ampi.

È noto che una funzione di due variabili  $z(x, y)$  assolutamente continua (nel senso del TONELLI) non gode sempre della doppia assoluta continuità (vale a dire non è assolutamente continua nel senso di VITALI). Sussiste peraltro la seguente proprietà che, per la prima volta, viene usufruita nel presente lavoro: una funzione  $z(x, y)$  la quale sia assolutamente continua insieme con le sue derivate parziali del primo ordine è anche doppiamente assolutamente continua.

---

<sup>(1)</sup> L. TONELLI: *Sur la semi-continuité des intégrales doubles du Calcul des Variations.* (Acta Mathematica, T. 53 (1929), pp. 325-346).

<sup>(2)</sup> L. TONELLI: *L'estremo assoluto degli integrali doppi.* (Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Vol. II (1933), pp. 89-130).

Questo fatto, che contribuisce a porre in rilievo l'importanza del concetto mirabilmente introdotto dal TONELLI, permette di impostare il nostro problema variazionale nelle condizioni più generali e in forma semplicissima.

Noi consideriamo la classe  $C^{(2)}$  delle funzioni  $z = z(x, y)$ , tali che  $z(x, y)$  sia, nel campo aperto e limitato  $D$ , assolutamente continua insieme con le proprie derivate parziali del primo ordine  $p(x, y)$ ,  $q(x, y)$ , ed esista finito l'integrale (nel senso del LEBESGUE)

$$I_D^{(2)}[z] = \iint_D F(x, y, z(x, y), p(x, y), q(x, y), r(x, y), s(x, y), t(x, y)) dx dy,$$

ove  $r(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ,  $t(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$  esistono finite quasi-dappertutto in  $D$ , mentre si è indicato con  $s(x, y)$  il comune valore delle  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ , le quali, quasi-dappertutto in  $D$ , esistono finite e coincidono.

Chiameremo problema del secondo ordine il problema variazionale relativo all'integrale  $I_D^{(2)}[z]$ , mentre, per brevità, designeremo con problema del primo ordine quello per l'integrale  $I_D[z]$ .

Impostato in tal modo il nostro problema variazionale, vogliamo rilevare, prima di entrare in argomento, che nella redazione del presente lavoro si è presentata, per le funzioni assolutamente continue, anche la questione inversa di quella sopra citata, ossia: una funzione  $z(x, y)$  che goda della doppia assoluta continuità e le cui derivate parziali del primo ordine  $p(x, y)$ ,  $q(x, y)$  siano assolutamente continue, è assolutamente continua? Quando il campo aperto e limitato  $D$ , in cui è definita la funzione  $z(x, y)$ , è affatto generale, la proprietà in questione può anche mancare (cfr. l'Osservazione del n. 11), perchè le  $p(x, y)$ ,  $q(x, y)$  possono non essere superficialmente integrabili in tutto il campo  $D$ ; peraltro tale proprietà è sempre verificata per quei tipi di campi che si considerano più frequentemente (cfr. l'Osservazione del n. 14).

Nella presente Memoria diamo inizialmente una condizione sufficiente per la semicontinuità dell'integrale  $I_D^{(2)}[z]$ , della quale ci gioviamo per stabilire teoremi di esistenza dell'estremo per l'integrale stesso.

Alcune delle nostre proposizioni, per quanto si presentino, a prima vista, come semplici estensioni di quelle già note per gli integrali  $I_D[z]$ , sono particolarmente interessanti per il fatto che le loro condizioni di validità sono leggermente più restrittive delle analoghe per il problema del primo ordine. Ciò dipende dalla natura più complicata del problema in questione, come abbiamo cercato di porre in rilievo con qualche esempio, e non già dalle nostre dimostrazioni, le quali, come è ben naturale, talvolta debbono presentare delle analogie con quelle che si sviluppano per il problema del primo ordine.

Altri nostri teoremi arrecano qualche nuovo contributo anche allo studio degli integrali  $I_D[z]$ , come accenniamo talvolta in nota a piè di pagina: ciò dipende

sia dall'aver usato, con un opportuno accorgimento, la disuguaglianza di JENSEN (non ancora sfruttata nelle ricerche dedicate alle condizioni sufficienti per la semi-continuità e all'esistenza dell'estremo per il problema del primo ordine <sup>(2)</sup>), in luogo di quella di SCHWARZ-HÖLDER, sia da altre considerazioni che il lettore rileverà direttamente.

La Memoria termina con alcuni teoremi di esistenza dell'estremo valevoli nel caso in cui il campo aperto  $D$  non sia limitato.

### § 1. - Generalità.

1. - Funzione assolutamente continua insieme con le proprie derivate parziali del primo ordine.

Se  $z(x, y)$  è una funzione definita nel campo aperto e limitato  $D$  <sup>(3)</sup>, la quale sia assolutamente continua insieme con le proprie derivate parziali del primo ordine  $p(x, y)$ ,  $q(x, y)$ , essa risulta in  $D$  doppiamente assolutamente continua, e quindi quasi-dappertutto in  $D$  vale l'uguaglianza  $\frac{\partial p(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial q(x, y)}{\partial x}$ .

La dimostrazione è immediata. Considerato un qualunque gruppo di rettangoli, non sovrappontentisi e a lati paralleli agli assi coordinati  $R_i \equiv [a_i \leq x \leq a_i + h_i, b_i \leq y \leq b_i + k_i]$ , ( $i=1, 2, \dots, j$ ) ognuno dei quali sia tutto costituito di punti di  $D$ , e posto

$$S_j = \left| \sum_{i=1}^j [z(a_i, b_i) - z(a_i + h_i, b_i) - z(a_i, b_i + k_i) + z(a_i + h_i, b_i + k_i)] \right|,$$

abbiamo evidentemente

$$S_j = \left| \sum_{i=1}^j \int_{a_i}^{a_i+h_i} \{p(x, b_i+k_i) - p(x, b_i)\} dx \right|,$$

<sup>(2)</sup> Non sappiamo se i lavori annunciati da C. B. MORREY [*Existence and differentiability theorems for the solutions of variational problems for multiple integrals* (Bull. of the American Math. Society, Vol. 46 (1940), pp. 439-458); vedi bibliografia, p. 457] siano già pubblicati. In ogni caso tale A., che si occupa esclusivamente del problema del primo ordine, imposta tale problema considerando altre classi di funzioni  $z(x, y)$ , (vedi luogo cit., n. 3 e 13).

<sup>(3)</sup> Per le definizioni di campo aperto e limitato e di funzione assolutamente continua rinviamo al luogo cit. in <sup>(4)</sup>, n. 1 e 2, facendo presente che in tutto il presente lavoro l'assoluta continuità va intesa sempre nel senso del TONELLI.

Vedi anche, L. TONELLI: *Sulla quadratura delle superficie*. Nota III. Rend. R. Accademia dei Lincei, Vol. III (1926), p. 633 e segg.

Ricordiamo che con  $\bar{D}$  si designa il campo chiuso corrispondente a  $D$ , cioè costituito da tutti i punti di  $D$  e della sua frontiera.

e quindi, tenendo presente che  $p(x, y)$  è assolutamente continua, risulta

$$S_j = \left| \sum_{i=1}^j \int_{a_i}^{a_i+h_i} dx \int_{b_i}^{b_i+k_i} \frac{\partial p}{\partial y} dy \right| \leq \sum_{i=1}^j \iint_{R_i} \left| \frac{\partial p}{\partial y} \right| dx dy.$$

Per la proprietà fondamentale dell'integrale di LEBESGUE, preso  $\varepsilon > 0$ , è possibile determinare un  $\delta > 0$  in modo che, se la somma delle aree degli  $R_1, R_2, \dots, R_j$  è minore di  $\delta$ , la somma  $\sum_{i=1}^j \iint_{R_i} \left| \frac{\partial p}{\partial y} \right| dx dy$  e quindi anche  $S_j$  risultino minori di  $\varepsilon$ . Il nostro asserto è così provato.

## 2. - Le funzioni della classe $C^{(2)}$ e l'integrale $I_D^{(2)}[z]$ .

$\alpha$ ) Sia  $F(x, y, z, p, q, r, s, t)$  una funzione finita e continua, nel complesso delle sue variabili, per ogni  $(x, y)$  del campo aperto e limitato  $D$  e per tutti i valori finiti di  $z, p, q, r, s, t$ , e supponiamo che per tali valori esistano finite e continue le sue derivate parziali  $F_r, F_s, F_t$ .

Consideriamo la classe  $C^{(2)}$  delle funzioni  $z(x, y)$  assolutamente continue in  $D$  insieme con le loro derivate parziali del primo ordine  $p(x, y), q(x, y)$  e per le quali esiste finito l'integrale doppio (nel senso del LEBESGUE)

$$I_D^{(2)}[z] = \iint_D F(x, y, z(x, y), p(x, y), q(x, y), r(x, y), s(x, y), t(x, y)) dx dy,$$

ove è  $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$  in ogni punto  $(x, y)$  di  $D$  in cui esistono finite le derivate indicate e vale l'uguaglianza delle derivate miste (cioè quasi-dappertutto in  $D$ ), mentre si conviene che, in ogni altro punto di  $D$ , sia  $r = s = t = 0$ .

$\beta$ ) Introdotta la funzione  $\mathcal{E}$  di WEIERSTRASS

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x, y, z, p, q; r_0, s_0, t_0; r, s, t) = \\ = F(x, y, z, p, q, r, s, t) - F(x, y, z, p, q, r_0, s_0, t_0) - \\ - (r - r_0)F_r(x, y, z, p, q, r_0, s_0, t_0) - (s - s_0)F_s(\dots) - (t - t_0)F_t(\dots), \end{aligned}$$

diremo che l'integrale  $I_D^{(2)}[z]$  è quasi-regolare positivo, se, per ogni  $(x, y)$  di  $D$  e per tutti i valori finiti di  $z, p, q, r_0, s_0, t_0, r, s, t$  è verificata la disuguaglianza

$$\mathcal{E}(x, y, z, p, q; r_0, s_0, t_0; r, s, t) \geq 0.$$

OSSERVAZIONE. - Ricordiamo che, come è ben noto, la definizione di integrale quasi-regolare può darsi in modo indipendente dall'esistenza e continuità delle derivate parziali  $F_r, F_s, F_t$ .  $I_D^{(2)}[z]$  dicesi quasi-regolare positivo, se per ogni quintupla fissata  $x, y, z, p, q$ , con  $(x, y)$  appartenente a  $D$ , la funzione

$u = F(x, y, z, p, q, r, s, t)$  è, come funzione delle tre variabili  $r, s, t$ , convessa secondo JENSEN, tale cioè che, per ogni coppia  $(r_1, s_1, t_1), (r_2, s_2, t_2)$ , sia

$$F\left(x, y, z, p, q, \frac{r_1+r_2}{2}, \frac{s_1+s_2}{2}, \frac{t_1+t_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \{ F(x, y, z, p, q, r_1, s_1, t_1) + F(x, y, z, p, q, r_2, s_2, t_2) \}.$$

## § 2. - La semicontinuità dell'integrale $I_D^{(2)}[z]$ .

### 3. - Definizione.

Diremo che l'integrale  $I_D^{(2)}[z]$  è semicontinuo inferiormente quando, data una qualunque funzione  $z_0(x, y)$  della classe  $C^{(2)}$ , in corrispondenza ad ogni numero  $\varepsilon > 0$ , esiste un numero  $\varrho > 0$  in modo che sia verificata la disuguaglianza

$$I_D^{(2)}[z] > I_D^{(2)}[z_0] - \varepsilon,$$

per tutte le funzioni  $z(x, y)$  della classe  $C^{(2)}$  che verificano, in ogni punto di  $D$ , le tre disuguaglianze

$$(1) \quad \begin{cases} |z(x, y) - z_0(x, y)| < \varrho, \\ |p(x, y) - p_0(x, y)| < \varrho, \\ |q(x, y) - q_0(x, y)| < \varrho. \end{cases}$$

### 4. - Lemma I.

Se  $\Phi(u)$  è una funzione definita per  $u \geq 0$ , continua, non negativa e tale che, per  $u \rightarrow +\infty$ , sia  $\Phi(u) : u \rightarrow +\infty$ , è possibile determinare almeno una funzione  $G(u)$ , ( $0 \leq u < +\infty$ ) continua, non negativa, non decrescente e convessa secondo JENSEN, tale che, per  $u \rightarrow +\infty$ , sia  $G(u) : u \rightarrow +\infty$ , in modo che risulti

$$(2) \quad G(u) \leq \Phi(u).$$

La funzione  $G(u)$  può determinarsi, per esempio, nel seguente modo.

Indichiamo con  $u_1$  il minimo numero, non inferiore all'unità, tale che per ogni  $u \geq u_1$  risulti  $\Phi(u) \geq u$ ; sarà « a fortiori », per  $u \geq u_1$ ,  $\Phi(u) \geq u - u_1$ . Consideriamo nel piano  $(u, v)$  la retta

$$v = u - u_1.$$

Indichiamo con  $u_2$  il minimo numero, non inferiore a  $2u_1$ , tale che per ogni  $u \geq u_2$  risulti  $\Phi(u) \geq 2u$ ; sarà « a fortiori », per  $u \geq u_2$ ,  $\Phi(u) \geq 2u - u_1 - u_2$ . Consideriamo la retta

$$v = 2u - u_1 - u_2.$$

Indicato con  $u_3$  il minimo numero, non inferiore a  $\frac{3}{2}u_2$ , tale che per ogni  $u \geq u_3$  risulti  $\Phi(u) \geq 3u$ , proseguiamo a questo modo indicando con  $u_r$  il minimo numero, non inferiore a  $\frac{r}{r-1}u_{r-1}$ , tale che per ogni  $u \geq u_r$  risulti  $\Phi(u) \geq ru$ ; sarà « a fortiori », per  $u \geq u_r$ ,  $\Phi(u) \geq ru - u_1 - u_2 - \dots - u_r$ . Consideriamo la retta

$$v = ru - u_1 - u_2 - \dots - u_r.$$

Definiamo ora una funzione  $v = G(u)$ , ( $0 \leq u < +\infty$ ) ponendo

$$\begin{aligned} G(u) &= 0, & \text{in } (0, u_1), \\ G(u) &= ru - u_1 - u_2 - \dots - u_r, & \text{in } (u_r, u_{r+1}), \quad (r=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

La funzione  $G(u)$  risulta continua, non negativa, non decrescente e convessa secondo JENSEN, come è evidente per il fatto che la curva  $v = G(u)$  è composta di segmenti rettilinei, ciascuno dei quali ha coefficiente angolare maggiore del precedente.

Inoltre è  $G(u) \leq \Phi(u)$ . Infine, essendo  $u_2 \geq 2u_1$ ,  $u_3 \geq \frac{3}{2}u_2, \dots$ ,  $u_r \geq \frac{r}{r-1}u_{r-1}$ , risulta

$$u_1 + u_2 + \dots + u_r \leq \frac{1}{r}u_r + \frac{2}{r}u_r + \dots + \frac{r-1}{r}u_r + \frac{r}{r}u_r = \frac{r+1}{2}u_r,$$

e quindi, per  $u_r \leq u \leq u_{r+1}$ ,

$$G(u) \geq ru - \frac{r+1}{2}u_r \geq \frac{r-1}{2}u,$$

onde  $G(u) : u \rightarrow +\infty$ , per  $u \rightarrow +\infty$ .

OSSERVAZIONE. - Fissato comunque un numero  $\theta_0 > 0$ , è possibile determinare un numero  $u_0 > 0$ , in modo che la funzione  $G(u)$ , di cui all'enunciato del presente numero, risulti crescente in tutto  $(0, +\infty)$ , la disuguaglianza (2) sia verificata per  $u \geq u_0$ , e per  $0 \leq u < u_0$  si abbia

$$G(u) \leq \Phi(u) + \theta_0.$$

Basta, evidentemente, una lieve modifica nella costruzione della funzione  $G(u)$ .

##### 5. - Lemma II. (4).

Sia  $\Delta$  un quadrato a lati paralleli agli assi  $x$  e  $y$  completamente interno al campo aperto e limitato  $D$  e sia  $\psi(x, y)$  una funzione quasi-continua e limitata nel quadrato  $\Delta$ . Sia  $H$  un numero positivo e sia  $\Phi(u)$  una funzione definita per  $u \geq 0$ , continua, non negativa e tale che, per  $u \rightarrow +\infty$ , sia  $\Phi(u) : u \rightarrow +\infty$ . Allora in corrispondenza a ogni  $\varepsilon > 0$  è pos-

(4) Questa proposizione fornisce una lieve generalizzazione del lemma stabilito dal TONELLI al n. 7 del luogo cit. in (1).

sibile determinare un  $\varrho > 0$  in modo che, per tutte le funzioni  $f(x, y)$  assolutamente continue in  $D$  e che verificano in  $\Delta$  le disuguaglianze

$$|f(x, y)| \leq \varrho, \quad \iint_{\Delta} \Phi\left(\frac{1}{2} \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \right) dx dy \leq H,$$

risulti

$$\left| \iint_{\Delta} \psi(x, y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx dy \right| < \varepsilon.$$

Infatti, in base a quanto abbiamo visto al n. 4, possiamo supporre senz'altro che  $\Phi(u)$  sia oltrechè continua e non negativa, crescente, convessa secondo JENSEN e tale che, per  $u \rightarrow +\infty$ , sia  $\Phi(u) : u \rightarrow +\infty$ .

Ciò premesso, riprendiamo la dimostrazione del TONELLI e, indicato con  $M$  il limite superiore del modulo di  $\psi(x, y)$  in  $\Delta$ , approssimiamo la funzione  $\psi(x, y)$  mediante una successione di polinomi  $\Pi_n(x, y)$ , ( $n=1, 2, \dots$ ) in modo che sia, in tutto  $\Delta$ ,  $|\Pi_n(x, y)| \leq M$ , e, quasi-dappertutto in  $\Delta$ ,  $\Pi_n(x, y) \rightarrow \psi(x, y)$ , per  $n \rightarrow \infty$ .

Tenuta presente la convenzione fatta all'inizio della presente dimostrazione, indichiamo con  $u = \varphi(v)$ , ( $0 \leq v < +\infty$ ) la funzione inversa di  $v = \Phi(u)$ , osservando che  $\varphi(v)$  risulta non negativa, crescente, e tale inoltre che per  $v \rightarrow +\infty$ , è  $\varphi(v) : v \rightarrow 0$ . Pertanto, preso  $\varepsilon > 0$  ad arbitrio, possiamo determinare un  $\bar{v} > 0$  in modo che per  $v > \bar{v}$  risulti

$$(3) \quad \frac{\varphi(v)}{v} < \frac{\varepsilon}{8MH}.$$

Posto  $\omega_n = \iint_{\Delta} |\psi - \Pi_n| dx dy$ , e tenuto presente che, per  $n \rightarrow \infty$ , è  $\omega_n \rightarrow 0$ ,

fissiamo un valore di  $n$ , che chiameremo  $\bar{n}$ , in modo che risulti

$$(3') \quad 2MH > \bar{v}\omega_{\bar{n}}.$$

Supposto  $\omega_{\bar{n}} > 0$ , osserviamo che per la disuguaglianza di JENSEN abbiamo

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{\frac{1}{2} \iint_{\Delta} |\psi - \Pi_{\bar{n}}| \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| dx dy}{\iint_{\Delta} |\psi - \Pi_{\bar{n}}| dx dy}\right) &\leq \frac{\iint_{\Delta} |\psi - \Pi_{\bar{n}}| \Phi\left(\frac{1}{2} \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \right) dx dy}{\iint_{\Delta} |\psi - \Pi_{\bar{n}}| dx dy} \leq \\ &\leq \frac{2M}{\omega_{\bar{n}}} \iint_{\Delta} \Phi\left(\frac{1}{2} \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \right) dx dy \leq \frac{2MH}{\omega_{\bar{n}}}. \end{aligned}$$

Siccome  $\varphi(v)$  è crescente ne segue

$$\iint_{\Delta} |\psi - \Pi_{\bar{n}}| \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| dx dy \leq 2\omega_{\bar{n}} \varphi\left(\frac{2MH}{\omega_{\bar{n}}}\right)$$



ed anche, in virtù della (3) e tenendo presente la (3'),

$$(4) \quad \iint_{\Delta} |\psi - II_n| \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| dx dy < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Se poi è  $\omega_n = 0$ , quasi-dappertutto in  $\Delta$  è  $\psi(x, y) - II_n(x, y) = 0$  e quindi risulta

$$\iint_{\Delta} |\psi - II_n| \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| dx dy = 0,$$

e perciò la (4) ha luogo in ogni caso.

Basta poi ripetere il ragionamento del TONELLI per  $n = \bar{n}$  tenendo conto della (4).

#### 6. - Un teorema di semicontinuità.

*Si supponga che: 1) l'integrale  $I_D^{(2)}[z]$  sia quasi-regolare positivo; 2) esista un numero fisso  $N$  in modo che si abbia per ogni  $(x, y)$  del campo aperto e limitato  $D$  e per tutti i valori finiti di  $z, p, q, r, s, t$*

$$(5) \quad F(x, y, z, p, q, r, s, t) \geq N;$$

*3) in corrispondenza ad ogni numero  $M > 0$  esista un numero  $\Lambda > 0$  e una funzione  $\Phi(u)$  definita per  $u \geq 0$ , continua, non negativa e tale che sia  $\Phi(u) : u \rightarrow +\infty$ , per  $u \rightarrow +\infty$ , in modo che, per ogni  $(x, y)$  di  $D$  e per ogni sestupla  $z, p, q, r, s, t$  con  $|z| \leq M, |p| \leq M, |q| \leq M, |r| + |s| + |t| \geq \Lambda$ , sia verificata la disuguaglianza*

$$(6) \quad F(x, y, z, p, q, r, s, t) \geq \Phi(|r|) + \Phi(|s|) + \Phi(|t|).$$

*Allora l'integrale  $I_D^{(2)}[z]$  è semicontinuo inferiormente <sup>(5)</sup>.*

Basta estendere una dimostrazione del TONELLI per gli integrali  $I_D[z]$  <sup>(6)</sup>. Considerata una qualunque funzione  $z_0(x, y)$  della classe  $C^{(2)}$  e un quadrato  $\Delta$  interno a  $D$  e a lati paralleli agli assi coordinati tutto sta a dimostrare che in corrispondenza ad ogni  $\varepsilon > 0$  è possibile determinare un  $\varrho > 0$  in modo che si abbia  $I_{\Delta}^{(2)}[z] > I_{\Delta}^{(2)}[z_0] - \varepsilon$  per tutte le funzioni  $z(x, y)$  della classe  $C^{(2)}$  per le quali sono verificate le disuguaglianze (1). A tal uopo basta limitarsi a considerare quelle  $z(x, y)$  della classe  $C^{(2)}$ , per le quali è

$$(7) \quad I_{\Delta}^{(2)}[z] < I_{\Delta}^{(2)}[z_0].$$

Si prosegue in modo del tutto analogo al TONELLI, utilizzando il lemma del numero precedente e tenendo presente quanto segue:

<sup>(5)</sup> Ai fini del presente lavoro non interessano altri teoremi di semicontinuità.

<sup>(6)</sup> Vedi L. TONELLI, luogo cit. in (4), n.° 6 e 8.

a) In base a quanto abbiamo visto al n. 4 possiamo senz'altro supporre che  $\Phi(u)$  sia, oltrechè continua e non negativa, non decrescente, convessa secondo JENSEN e tale che sia  $\Phi(u) : u \rightarrow +\infty$ , per  $u \rightarrow +\infty$ .

b) Supposto  $\varrho < 1$ , sia  $M$  un numero positivo tale che in ogni punto di  $\Delta$  sia:

$$|z_0(x, y)| + 1 < M, \quad |p_0(x, y)| + 1 < M, \quad |q_0(x, y)| + 1 < M.$$

Tenuto presente quanto si è convenuto in a) risulta

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} \Phi\left(\frac{1}{2}|r-r_0|\right) dx dy &\leq \iint_{\Delta} \Phi\left(\frac{|r|+|r_0|}{2}\right) dx dy \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left( \iint_{\Delta} \Phi(|r|) dx dy + \iint_{\Delta} \Phi(|r_0|) dx dy \right), \end{aligned}$$

e per le (5) e (6), tenuto conto della (7), ne segue, posto  $H = I_{\Delta}[z_0] + \Delta\{\Phi(\Delta) + |N|\}$ ,

$$\iint_{\Delta} \Phi\left(\frac{1}{2}|r-r_0|\right) dx dy \leq H.$$

c) Fissato comunque un numero  $L > 0$  e determinato  $\bar{u} > 0$  in modo che, per ogni  $u \geq \bar{u}$ , risulti  $\Phi(u) \geq Lu$ , abbiamo

$$\iint_{\Delta} \Phi\left(\frac{1}{2}|r-r_0|\right) dx dy \geq \frac{L}{2} \iint_{\Delta} |r-r_0| dx dy - L\bar{u}\Delta$$

e quindi

$$\iint_{\Delta} |r-r_0| dx dy \leq 2 \left\{ \frac{H}{L} + \bar{u}\Delta \right\}.$$

### 7. - Estensione della semicontinuità.

Si supponga che siano verificate le condizioni 1), 2) e 3) dell'enunciato del numero precedente. Sia  $z_0(x, y)$  una funzione assolutamente continua insieme con le sue derivate parziali del primo ordine nel campo aperto e limitato  $D$  e tale che la funzione

$$F(x, y, z_0(x, y), p_0(x, y), q_0(x, y), r_0(x, y), s_0(x, y), t_0(x, y))$$

non sia integrabile in  $D$ .

Allora, preso ad arbitrio un numero  $H_0 > 0$ , è possibile determinare un  $\varrho > 0$  in modo che, per ogni funzione  $z(x, y)$  della classe  $C^{(2)}$  soddisfacente in tutto  $D$  alle disuguaglianze (1), risulti  $I_D^{(2)}[z] > H_0$ .

Basta estendere in modo evidente una dimostrazione del TONELLI per gli integrali  $I_D[z]$  (\*), tenendo presenti le considerazioni del numero precedente e quelle che si faranno al numero seguente.

(\*) Vedi L. TONELLI, luogo cit. in (\*), n. 15.

## § 3. - Esistenza dell'estremo.

8. - Lemma <sup>(8)</sup>.

Sia  $\{f(x, y)\}$  un insieme di infinite funzioni assolutamente continue in uno stesso campo aperto e limitato  $D$ , ed esistano un numero  $A > 0$  e una funzione  $\Phi(u)$  definita per  $u \geq 0$ , continua, non negativa, e tale che sia  $\Phi(u) : u \rightarrow +\infty$ , per  $u \rightarrow +\infty$ , in modo che per tutte le funzioni dell'insieme sia soddisfatta la disuguaglianza

$$(8) \quad \iint_D \{\Phi(|p|) + \Phi(|q|)\} dx dy \leq A, \quad \left(p = \frac{\partial f}{\partial x}, q = \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Allora tutte le funzioni di accumulazione dell'insieme  $\{f(x, y)\}$  in  $D$ , risultano assolutamente continue in tale campo.

La dimostrazione è identica a quella del TONELLI, avendo l'avvertenza a pag. 93 di ragionare nel seguente modo, invece di applicare la disuguaglianza di SCHWARZ-HÖLDER.

Preso  $\sigma > 0$  ad arbitrio e subordinato ad esso un  $\bar{u} > 0$  in modo che per  $u > \bar{u}$  risulti  $\Phi(u) > 2Au : \sigma$ , consideriamo un qualunque gruppo di rettangoli  $R_1, R_2, \dots, R_j$  non sovrappontensi, appartenenti a  $q_m$ , a lati paralleli agli assi coordinati e di area complessiva minore di  $\sigma : 2\bar{u}$ . Sia  $f(x, y)$  una qualunque funzione dell'insieme e si consideri la somma  $\sum_{i=1}^j \iint_{R_i} |q| dx dy$ . Indicato con  $E_i$

l'insieme dei punti di  $R_i$  in cui  $q(x, y)$  esiste finita ed è  $|q| \leq \bar{u}$ , e con  $C(E_i)$  il complementare di  $E_i$  rispetto a  $R_i$ , tenendo conto della (8) abbiamo

$$\sum_{i=1}^j \iint_{C(E_i)} |q| dx dy \leq \sum_{i=1}^j \frac{\sigma}{2A} \iint_{C(E_i)} \Phi(|q|) dx dy \leq \frac{\sigma}{2A} \iint_D \Phi(|q|) dx dy \leq \frac{\sigma}{2}.$$

D'altra parte risulta

$$\sum_{i=1}^j \iint_{E_i} |q| dx dy \leq \sum_{i=1}^j \iint_{E_i} \bar{u} dx dy \leq \bar{u} \sum_{i=1}^j \iint_{R_i} dx dy < \frac{\sigma}{2},$$

e quindi

$$\sum_{i=1}^j \iint_{R_i} |q| dx dy < \sigma.$$

A pag. 95, in luogo di applicare la disuguaglianza di SCHWARZ-HÖLDER, si ragionerà in modo analogo a quello ora indicato.

<sup>(8)</sup> Questa proposizione generalizza il criterio dato dal TONELLI al n. 5 del luogo cit. in <sup>(2)</sup>.

9. - Definizioni <sup>(9)</sup>.

a) Sia  $J$  un insieme di funzioni  $\{f(x, y)\}$  della classe  $C^{(2)}$ , definite nel campo aperto e limitato  $D$ . Diremo che  $\varphi(x, y)$  è una *funzione di accumulazione di ordine 2 in  $D$*  per l'insieme  $J$ , quando, preso ad arbitrio un numero  $\varepsilon > 0$ , esiste sempre almeno una funzione  $f(x, y)$  dell'insieme  $J$ , (distinta dalla  $\varphi(x, y)$ ), per la quale sono soddisfatte in tutto  $D$  le disuguaglianze

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} |f(x, y) - \varphi(x, y)| < \varepsilon, \\ \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \right| < \varepsilon, \\ \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \right| < \varepsilon. \end{array} \right.$$

Diremo poi che una funzione  $\varphi(x, y)$ , definita in  $D$ , è *funzione di accumulazione di ordine 2 nell'interno di  $D$*  per l'insieme  $J$ , quando, considerato un qualsiasi insieme di punti  $E$ , chiuso e tutto costituito di punti di  $D$ , e preso ad arbitrio un  $\varepsilon > 0$ , esiste sempre almeno una funzione  $f(x, y)$  dell'insieme  $J$ , (distinta dalla  $\varphi(x, y)$ ), per la quale sono soddisfatte in tutto  $E$  le disuguaglianze (9).

$\beta$ ) Un insieme  $J$  di funzioni della classe  $C^{(2)}$  costituisce una *classe completa di ordine 2 in  $D$  rispetto a  $I_D^{(2)}[z]$* , quando ogni sua funzione di accumulazione di ordine 2 in  $D$ , se risulta della classe  $C^{(2)}$ , appartiene pure a  $J$ .

Un insieme  $J$  di funzioni della classe  $C^{(2)}$  costituisce una *classe completa di ordine 2 nell'interno di  $D$  rispetto a  $I_D^{(2)}[z]$* , quando ogni sua funzione di accumulazione di ordine 2 nell'interno di  $D$ , se risulta della classe  $C^{(2)}$ , appartiene pure a  $J$ .

Per esempio: se la frontiera del campo  $D$  è costituita da una curva di JORDAN chiusa, priva di punti multipli e dotata in ogni punto di tangente, l'insieme di tutte le funzioni della classe  $C^{(2)}$ , che sono continue insieme con le loro derivate parziali del primo ordine in tutto il campo chiuso  $\bar{D}$  costituito da tutti i punti di  $D$  e da quelli della sua frontiera, e tali che esse e le loro derivate normali assumano sulla frontiera di  $D$  rispettivamente gli stessi valori, costituisce una classe completa di ordine 2 in  $D$  rispetto a  $I_D^{(2)}[z]$ .

10. - Teorema I.

Si supponga che: 1)  $I_D^{(2)}[z]$  sia un integrale quasi-regolare positivo; 2) esistano due numeri  $\mu_1 > 0$ ,  $N$  e una funzione  $\Phi(u)$  definita per  $u \geq 0$ , non negativa, continua e tale che sia  $\Phi(u) : u \rightarrow +\infty$ , per  $u \rightarrow +\infty$ , in modo che in ogni punto  $(x, y)$  di  $D$  e per tutti i valori finiti di  $z, p, q, r, s, t$  risulti

$$(10) \quad F(x, y, z, p, q, r, s, t) \geq \Phi(|r|) + \Phi(|s|) + \Phi(|t|) + \mu_1\{|p| + |q|\} + N.$$

<sup>(9)</sup> Per queste definizioni cfr. L. TONELLI, luogo cit. in <sup>(2)</sup>, n. 16 e 17.

Allora in ogni classe  $K$ , completa di ordine 2 nell'interno di  $D$  rispetto a  $I_D^{(2)}[z]$ , di funzioni  $z(x, y)$  appartenenti alla classe  $C^{(2)}$ , ugualmente limitate nell'interno di  $D$ , e tali che le loro derivate parziali del primo ordine siano ugualmente continue nell'interno di  $D$ , esiste il minimo assoluto di  $I_D^{(2)}[z]$  <sup>(10)</sup>.

Infatti, osserviamo innanzi tutto che, in base a quanto abbiamo visto al n. 4, possiamo senz'altro supporre che  $\Phi(u)$  sia, oltrechè continua e non negativa, non decrescente, convessa secondo JENSEN, e tale che, per  $u \rightarrow +\infty$ , sia  $\Phi(u) : u \rightarrow +\infty$ .

Sia  $Q$  un quadrato a lati paralleli agli assi  $x, y$  nel quale è contenuto il campo  $D$ . Mediante parallele agli assi coordinati suddividiamo, in modo ben noto,  $Q$  in  $4^n$  quadrati uguali, e indichiamo con  $\bar{D}_n$  il campo (chiuso) costituito da quelli fra i quadrati in cui abbiamo suddiviso  $Q$ , i cui punti appartengono tutti a  $D$ .

Sia  $j+1$  il minimo intero positivo per il quale l'insieme dei punti appartenenti a  $\bar{D}_{j+1}$  non è vuoto.

Se  $K$  è una classe di funzioni  $z(x, y)$  soddisfacenti alle condizioni del nostro enunciato, per la (10) il limite inferiore  $i$  di  $I_D^{(2)}[z]$  in  $K$  è finito.

Consideriamo una successione

$$(11) \quad z_1(x, y), \quad z_2(x, y), \dots, \quad z_m(x, y), \dots$$

estratta dalla classe considerata e minimizzante  $I_D^{(2)}[z]$ , tale cioè che sia

$$(12) \quad I_D^{(2)}[z_m] \leq i + \frac{1}{m}.$$

Il campo chiuso  $\bar{D}_{j+n}$ , ( $n \geq 1$ ) è composto di un numero finito di quadrati; sia  $\delta_{j+n}$  il minimo lato di tali quadrati e  $H_{j+n}$  il massimo modulo delle funzioni della successione (11) in  $\bar{D}_{j+n}$ . In ognuno dei quadrati di cui è costituito  $\bar{D}_{j+n}$  ci sono almeno due punti (distinti o no)  $(x'_{j+n, m}, y'_{j+n, m})$ ,  $(x''_{j+n, m}, y''_{j+n, m})$  nei quali risulta

$$\begin{aligned} |p_m(x'_{j+n, m}, y'_{j+n, m})| &\leq \frac{2H_{j+n}}{\delta_{j+n}}, & |q_m(x''_{j+n, m}, y''_{j+n, m})| &\leq \frac{2H_{j+n}}{\delta_{j+n}}, \\ (m=1, 2, \dots), \end{aligned}$$

e pertanto, in virtù delle ipotesi fatte, le derivate  $p_m(x, y)$ ,  $q_m(x, y)$ , ( $m=1, 2, \dots$ ) risultano, oltrechè ugualmente continue, anche ugualmente limitate in  $\bar{D}_{j+n}$ .

<sup>(10)</sup> Dalla dimostrazione del presente teorema si deduce che esso può enunciarsi anche per il problema del primo ordine, supponendo che la funzione  $F$  verifichi la disuguaglianza

$$F(x, y, z, p, q) \geq \Phi(|p|) + \Phi(|q|) + N.$$

Si ha così una generalizzazione di un recente teorema di L. AMERIO: *Studi sugli integrali doppi del Calcolo delle Variazioni*. (Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Vol. X (1941), pp. 57-89), n. 10.

Ne segue che in tale campo le funzioni della successione (11) sono ugualmente continue.

Ciò premesso, dalla (11) estragghiamo una successione parziale

$$(13) \quad \bar{z}_{1,1}(x, y), \bar{z}_{1,2}(x, y), \dots, \bar{z}_{1,m}(x, y), \dots$$

uniformemente convergente in tutto  $\bar{D}_{j+1}$  verso una funzione  $z_{v_1}(x, y)$  continua in  $\bar{D}_{j+1}$ .

Tenuto presente che le  $p_m(x, y)$ ,  $q_m(x, y)$ , ( $m=1, 2, \dots$ ) sono ugualmente limitate in  $\bar{D}_{j+1}$ , ne segue immediatamente (n. 8) che  $z_{v_1}(x, y)$  è assolutamente continua in  $D_{j+1}$ .

Dalla (13) estragghiamo una successione parziale

$$(14) \quad \bar{\bar{z}}_{1,1}(x, y), \bar{\bar{z}}_{1,2}(x, y), \dots, \bar{\bar{z}}_{1,m}(x, y), \dots$$

in modo che la successione delle loro derivate parziali del primo ordine rispetto a  $x$  converga uniformemente in tutto  $\bar{D}_{j+1}$  verso una funzione continua  $p_{v_1}(x, y)$ , la quale, essendo per le (10) e (12)

$$\iint_{\bar{D}_{j+1}} \{ \Phi(|r_m|) + \Phi(|s_m|) \} dx dy < i + 1 + D |N| \equiv H, \quad (m=1, 2, \dots),$$

in virtù del lemma del n. 8 risulta assolutamente continua in  $D_{j+1}$ .

Inoltre in tutto  $\bar{D}_{j+1}$  è

$$(15) \quad p_{v_1}(x, y) = \frac{\partial z_{v_1}(x, y)}{\partial x}.$$

Dalla successione (14) estragghiamo una successione parziale

$$(16) \quad z_{1,1}(x, y), z_{1,2}(x, y), \dots, z_{1,m}(x, y), \dots$$

in modo che la successione delle loro derivate parziali del primo ordine rispetto a  $y$  converga uniformemente in tutto  $\bar{D}_{j+1}$  verso una funzione continua  $q_{v_1}(x, y)$ . Analogamente a quanto si è visto sopra  $q_{v_1}(x, y)$  risulta assolutamente continua in  $D_{j+1}$ , e in tutto  $\bar{D}_{j+1}$  è

$$(17) \quad q_{v_1}(x, y) = \frac{\partial z_{v_1}(x, y)}{\partial y}.$$

Concludiamo che dalla (11) abbiamo dedotto la successione (16), in modo che questa successione e quelle delle loro derivate parziali del primo ordine rispetto a  $x$  e a  $y$  convergono uniformemente in tutto  $\bar{D}_{j+1}$  verso tre funzioni continue  $z_{v_1}(x, y)$ ,  $p_{v_1}(x, y)$ ,  $q_{v_1}(x, y)$ , per le quali hanno luogo le (15) e (17), e che risultano assolutamente continue in  $D_{j+1}$ .

Considerato ora il campo  $\bar{D}_{j+2}$ , possiamo estrarre dalla successione (16), in modo analogo a quello ora seguito, una successione parziale

$$z_{2,1}(x, y), z_{2,2}(x, y), \dots, z_{2,m}(x, y), \dots,$$

la quale, insieme con le successioni delle loro derivate parziali del primo ordine rispetto a  $x$  e a  $y$ , converga uniformemente in tutto  $\bar{D}_{j+2}$  rispettivamente verso tre funzioni continue  $z_{v_2}(x, y)$ ,  $p_{v_2}(x, y)$ ,  $q_{v_2}(x, y)$ , le quali risultano assolutamente continue in  $D_{j+2}$  e tali che in  $\bar{D}_{j+2}$  è

$$p_{v_2}(x, y) = \frac{\partial z_{v_2}(x, y)}{\partial x}, \quad q_{v_2}(x, y) = \frac{\partial z_{v_2}(x, y)}{\partial y}.$$

Inoltre in tutto  $\bar{D}_{j+1}$  abbiamo

$$z_{v_2}(x, y) \equiv z_{v_1}(x, y), \quad p_{v_2}(x, y) \equiv p_{v_1}(x, y), \quad q_{v_2}(x, y) \equiv q_{v_1}(x, y).$$

Proseguendo a questo modo e applicando poi il ben noto procedimento della diagonale otteniamo una successione

$$z_{1,1}(x, y), \quad z_{2,2}(x, y), \dots, \quad z_{m,m}(x, y), \dots,$$

la quale risulta anche essa estratta dalla (11), e che, insieme con quelle delle loro derivate parziali del primo ordine rispetto a  $x$  e a  $y$ , converge uniformemente, in ogni singolo campo  $\bar{D}_{j+n}$ , ( $n=1, 2, \dots$ ), rispettivamente verso tre funzioni  $z_\infty(x, y)$ ,  $p_\infty(x, y)$ ,  $q_\infty(x, y)$ , che risultano continue in tutto  $D$ . Inoltre, per ogni intero positivo  $n$ , è in tutto  $\bar{D}_{j+n}$

$$z_\infty(x, y) \equiv z_{v_n}(x, y), \quad p_\infty(x, y) \equiv p_{v_n}(x, y), \quad q_\infty(x, y) \equiv q_{v_n}(x, y),$$

e quindi  $z_\infty$ ,  $p_\infty$ ,  $q_\infty$  sono assolutamente continue in ogni campo  $D_{j+n}$ .

Inoltre in ogni campo  $\bar{D}_{j+n}$  e quindi anche in tutto  $D$  risulta

$$p_\infty(x, y) = \frac{\partial z_\infty(x, y)}{\partial x}, \quad q_\infty(x, y) = \frac{\partial z_\infty(x, y)}{\partial y}.$$

Si tratta ora di provare che  $z_\infty(x, y)$ ,  $p_\infty(x, y)$ ,  $q_\infty(x, y)$  sono assolutamente continue in tutto  $D$ .

Essendo per ogni coppia di numeri interi positivi  $m, n$

$$\iint_{\bar{D}_{j+n}} \{ \Phi(|r_{m,m}|) + \Phi(|s_{m,m}|) + \Phi(|t_{m,m}|) \} dx dy < H,$$

e tenendo presente che, per la convenzione fatta all'inizio della presente dimostrazione, l'integrale  $\iint_{\bar{D}_{j+n}} \{ \Phi(|r|) + \Phi(|s|) + \Phi(|t|) \} dx dy$  è quasi-regolare positivo, dai teoremi dei n. 7 e 6 ne segue che la somma  $\Phi(|r_\infty|) + \Phi(|s_\infty|) + \Phi(|t_\infty|)$

è integrabile in  $\bar{D}_{j+n}$  e risulta

$$\iint_{\bar{D}_{j+n}} \{ \Phi(|r_\infty|) + \Phi(|s_\infty|) + \Phi(|t_\infty|) \} dx dy \leq H.$$

Pertanto determinato  $u_1 > 0$  in modo che, per  $u > u_1$ , sia  $\Phi(u) > u$  e posto  $H_1 = 3u_1 D$ , risulta per qualunque  $n$

$$\iint_{\bar{D}_{j+n}} \{ |r_\infty| + |s_\infty| + |t_\infty| \} dx dy \leq H + H_1$$

e quindi si conclude immediatamente che  $p_\infty(x, y)$  e  $q_\infty(x, y)$  sono assolutamente continue in tutto  $D$ .

Osserviamo ora che, tenuto conto della (12), dalla (10) risulta per ogni coppia  $m, n$

$$(18) \quad \iint_{\bar{D}_{j+n}} |p_{m,m}| dx dy < \frac{H}{\mu_1}, \quad \iint_{\bar{D}_{j+n}} |q_{m,m}| dx dy < \frac{H}{\mu_1},$$

e pertanto  $p_\infty$  e  $q_\infty$  risultano superficialmente integrabili in tutto  $D$ . Infatti supponiamo, se è possibile, che l'integrale  $\iint_D |p_\infty| dx dy$  non sia finito. In tal

caso potremmo determinare un intero  $n' > 0$  tale che sia  $\iint_{\bar{D}_{j+n'}} |p_\infty| dx dy > \frac{H}{\mu_1} + 1$ ,

ma ciò è in contrasto con la prima delle (18), perchè in tutto  $\bar{D}_{j+n'}$   $p_{m,m}(x, y)$  converge uniformemente a  $p_\infty(x, y)$ .

Resta così provato che  $z_\infty(x, y)$  è assolutamente continua in tutto  $D$ , e in modo perfettamente analogo al TONELLI (41), tenendo conto dei n. 7 e 6 del presente lavoro, si conclude che  $z_\infty(x, y)$  appartiene alla classe  $C^{(2)}$  e quindi anche a  $K$  e rende minimo l'integrale  $I_D^{(2)}[z]$  in  $K$ .

### 11. - Esempio.

Vogliamo mettere in rilievo che se nell'enunciato del teorema del numero precedente si sostituisce alla (10) la disuguaglianza

$$(10') \quad F(x, y, z, p, q, r, s, t) \geq \Phi(|r|) + \Phi(|s|) + \Phi(|t|) + N,$$

il teorema stesso non è più valido. Ciò risulta dal seguente esempio.

Sia  $D$  il campo aperto e limitato costituito dai punti appartenenti ai seguenti insiemi

$$A_\nu \equiv \left[ \frac{2^{\nu-1}-1}{2^{\nu-1}} < x < \frac{2^{\nu-1}-1}{2^{\nu-1}} + \frac{1}{2^{\nu+1}}; 0 < y < 1 \right], \quad (\nu = 1, 2, \dots),$$

e sia

$$I_D^{(2)}[z] = \iint_D \left[ \sqrt{r^2 + s^2 + t^2} \lg(1 + \sqrt{r^2 + s^2 + t^2}) + \frac{1}{1+p^2} \right] dx dy.$$

(41) Vedi luogo cit. in (2), n. 18.



Tale integrale soddisfa a tutte le condizioni del teorema del numero precedente ad eccezione della (10), in luogo della quale è verificata la (10') nella forma seguente

$$\begin{aligned} & \sqrt{r^2 + s^2 + t^2} \lg (1 + \sqrt{r^2 + s^2 + t^2}) + \frac{1}{1+p^2} \geq \\ & \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \{ |r| + |s| + |t| \} \lg (1 + \sqrt{r^2 + s^2 + t^2}) \geq \\ & \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \{ |r| \lg (1 + |r|) + |s| \lg (1 + |s|) + |t| \lg (1 + |t|) \}. \end{aligned}$$

Si consideri la successione di funzioni  $z_m(x, y)$ , ( $m=1, 2, \dots$ ) con  $z_m(x, y)$  definita in  $D$  nel seguente modo

$$\begin{aligned} z_m(x, y) & \equiv 2^{v-1} x, & \text{in } \Delta_v, & \quad (v=1, 2, \dots, m) \\ z_m(x, y) & \equiv 0, & \text{in } \Delta_v, & \quad (v > m). \end{aligned}$$

Ogni funzione  $z_m(x, y)$  è, in  $D$ , assolutamente continua insieme con le proprie derivate parziali del primo ordine  $p_m(x, y)$ ,  $q_m(x, y)$  <sup>(12)</sup>. Inoltre le funzioni delle tre successioni  $z_m(x, y)$ ,  $p_m(x, y)$ ,  $q_m(x, y)$ , ( $m=1, 2, \dots$ ) sono ugualmente limitate e ugualmente continue nell'interno di  $D$ . Ciò si verifica immediatamente tenendo presente che, considerato un qualsiasi insieme  $E$ , chiuso e tutto costituito di punti di  $D$ , tutti i suoi punti necessariamente appartengono ad un numero finito degli insiemi  $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ . Siano  $\Delta_{j_1}, \Delta_{j_2}, \dots, \Delta_{j_n}$  (ove possiamo supporre  $j_1 < j_2 < \dots < j_n$ ) quelli fra gli insiemi della successione ora indicata nei quali sono contenuti tutti i punti di  $E$ . Qualunque sia l'intero  $m$  risulta in tutti i punti di  $E$

$$|z_m(x, y)| \leq 2^{j_n-1}, \quad |p_m(x, y)| \leq 2^{j_n-1}, \quad q_m(x, y) = 0.$$

Inoltre, preso ad arbitrio un  $\varepsilon$  positivo e non superiore all'unità, se  $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ ,  $P_2 \equiv (x_2, y_2)$  sono due punti qualunque di  $E$  tali che sia  $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \leq \frac{\varepsilon}{2^{j_n+1}}$ , i due punti  $P_1$  e  $P_2$  appartengono entrambi necessariamente ad uno stesso degli insiemi  $\Delta_{j_1}, \Delta_{j_2}, \dots, \Delta_{j_n}$ ; e quindi, qualunque sia  $m$ , risulta

$$\begin{aligned} |z_m(x_1, y_1) - z_m(x_2, y_2)| & \leq 2^{j_n-1} \frac{\varepsilon}{2^{j_n+1}} < \varepsilon, \\ |p_m(x_1, y_1) - p_m(x_2, y_2)| & = 0, \quad |q_m(x_1, y_1) - q_m(x_2, y_2)| = 0, \end{aligned}$$

e con ciò il nostro asserto è provato.

---

<sup>(12)</sup> Si tenga presente la definizione del TONELLI nella forma data al n. 2 del luogo cit. in (4).

Risulta

$$I_D^{(2)}[z_m] = \sum_{\nu=1}^m \iint_{\Delta_\nu} \frac{1}{1+2^{2(\nu-1)}} dx dy + \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \iint_{\Delta_\nu} dx dy = \sum_{\nu=1}^m \frac{1}{2^{\nu+1}} \frac{1}{1+2^{2(\nu-1)}} + \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu+1}},$$

e quindi, per ogni  $m$ , è  $I_D^{(2)}[z_{m+1}] < I_D^{(2)}[z_m] \leq \frac{1}{2}$ .

Osserviamo ora che la successione  $z_m(x, y)$ , ( $m=1, 2, \dots$ ) ammette, come unica funzione di accumulazione di ordine 2 nell'interno di  $D$ ,  $z = z_\infty(x, y)$  con

$$z_\infty(x, y) \equiv 2^{\nu-1}x, \quad \text{in } \Delta_\nu, \quad (\nu=1, 2, \dots).$$

Questa funzione non appartiene alla successione considerata, ma non è nemmeno una funzione della classe  $C^{(2)}$ . Infatti, per quanto le sue derivate parziali del primo ordine  $p_\infty(x, y)$ ,  $q_\infty(x, y)$  siano assolutamente continue in  $D$ , essa non gode di tale proprietà, perchè  $p_\infty(x, y)$  non è superficialmente integrabile in  $D$  essendo

$$\iint_D p_\infty(x, y) dx dy = \sum_{\nu=1}^{\infty} \iint_{\Delta_\nu} 2^{\nu-1} dx dy = \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{\nu-1} \frac{1}{2^{\nu+1}} = +\infty.$$

Quindi le funzioni  $z_m(x, y)$ , ( $m=1, 2, \dots$ ) costituiscono una classe completa di ordine 2 nell'interno di  $D$  rispetto a  $I_D^{(2)}[z]$ , ma in tale classe non esiste il minimo assoluto di  $I_D^{(2)}[z]$ , essendo per ogni  $m$   $I_D^{(2)}[z_{m+1}] < I_D^{(2)}[z_m]$ .

OSSERVAZIONE. - Mettiamo in rilievo che la funzione  $z_\infty(x, y)$ , ( $(x, y)$  in  $D$ ) ora indicata fornisce un esempio di funzione doppiamente assolutamente continua, con derivate parziali del primo ordine assolutamente continue, ma che non è assolutamente continua.

### 12. - Teorema II.

Si supponga che: 1)  $I_D^{(2)}[z]$  sia un integrale quasi-regolare positivo; 2) esistano quattro numeri  $\alpha > 0$ ,  $\mu_0 > 0$ ,  $\mu_1 > 0$ ,  $N$  tali che, in ogni punto  $(x, y)$  del campo aperto e limitato  $D$  e per tutti i valori finiti di  $z, p, q, r, s, t$  risulti

$$(19) \quad F(x, y, z, p, q, r, s, t) \geq \mu_0 \{ |r|^{2+\alpha} + |s|^{2+\alpha} + |t|^{2+\alpha} \} + \mu_1 \{ |p| + |q| \} + N.$$

Allora in ogni classe  $K$ , completa di ordine 2 nell'interno di  $D$  rispetto a  $I_D^{(2)}[z]$ , di funzioni  $z(x, y)$  appartenenti alla classe  $C^{(2)}$  e ugualmente limitate nell'interno di  $D$ , esiste il minimo assoluto di  $I_D^{(2)}[z]$  <sup>(13)</sup>.

(13) La presente proposizione estende agli integrali  $I_D^{(2)}[z]$  il teorema dato dal TONELLI per gli integrali  $I_D[z]$  al n. 18 del luogo cit. in (2). È da rilevare che, se è  $\mu_1 = 0$ , il nostro teorema cade in difetto, come risulta da una lieve modificazione dell'esempio del n. 11, ottenuta considerando l'integrale

$$I_D^{(2)}[z] = \iint_D \left\{ \sqrt{r^6 + s^6 + t^6} + \frac{1}{1+p^2} \right\} dx dy.$$

Infatti considerata una successione  $z_m(x, y)$ , ( $m=1, 2, \dots$ ) estratta dalla classe  $K$  e minimizzante  $I_D^{(2)}[z]$ , in virtù della (19) e per un noto criterio di TONELLI <sup>(14)</sup>, le derivate parziali  $p_m(x, y)$ ,  $q_m(x, y)$  risultano ugualmente continue nell'interno di  $D$ , e siamo così ricondotti al teorema del n. 10.

### 13. - Un complemento ai teoremi I e II.

Se il campo  $D$  è strettamente connesso <sup>(15)</sup>, allora nelle proposizioni dei n. i 10 e 12 all'ipotesi che le funzioni  $z(x, y)$  siano ugualmente limitate nell'interno di  $D$ , si può sostituire quella che esistano in  $D$  tre punti fissi (distinti o no)  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  e un numero fisso  $M > 0$ , in modo che, per tutte le funzioni  $z(x, y)$  della classe  $K$  considerata, risulti

$$|z(x_0, y_0)| \leq M, \quad |p(x_1, y_1)| \leq M, \quad |q(x_2, y_2)| \leq M.$$

Ciò è conseguenza immediata dell'osservazione fatta dal TONELLI al luogo citato.

### 14. - La condizione [R].

$\alpha$ ) PREMESSA. - Dall'esempio indicato al n. 11 (vedi anche nota <sup>(13)</sup>) risulta che, se è  $\mu_1=0$ , i teoremi I e II non sono più validi. Peraltro, quando il campo  $D$  è di forma particolarmente semplice (quali sono i campi che più frequentemente si presentano) i teoremi ora citati continuano ad essere validi anche quando sia  $\mu_1=0$ , come si vedrà nei numeri seguenti. Convien premettere le seguenti definizioni.

$\beta$ ) DEFINIZIONI. - Chiameremo *rettangoloide* un insieme aperto  $I$  di punti del piano che goda delle seguenti proprietà: 1°) ogni punto di  $I$  è interno ad un rettangolo di cui  $A$  e  $B$  sono due vertici consecutivi; 2°) se  $P$  è un punto qualunque di  $I$  e  $P_0$  è la sua proiezione ortogonale su  $AB$ , tutti i punti di  $PP_0$ , ad eccezione di  $P_0$ , appartengono a  $I$ ; 3°) se  $P'$  è un punto qualunque interno ad  $AB$  e  $P'P''$  è il massimo segmento, perpendicolare ad  $AB$  e tale che tutti i suoi punti interni facciano parte di  $I$ , il limite inferiore delle lunghezze dei segmenti  $P'P''$  al variare di  $P'$  nell'interno di  $AB$  è positivo.

Avvertiamo che nel seguito chiameremo vertici del rettangoloide i punti  $A$  e  $B$ .

Ciò premesso, diremo che *il campo aperto e limitato  $D$  soddisfa alla condizione [R], se esiste un numero finito di rettangoloidi (che possono anche in parte ricoprirsi), ognuno dei quali sia tutto costituito di punti di  $D$ , in modo che ogni punto di  $D$  appartenga ad uno almeno di tali rettangoloidi.*

Evidentemente ogni campo aperto costituito dai punti interni ad un triangolo,

<sup>(14)</sup> Vedi L. TONELLI, luogo cit. in <sup>(2)</sup>, n. 8.

<sup>(15)</sup> Vedi L. TONELLI, luogo cit. in <sup>(2)</sup>, n. 18, pp. 120-121.

o ad un'ellisse, o a un settore circolare, o ad un segmento parabolico, o ad una lemniscata di BERNOULLI, o a due ovali, ecc. soddisfa alla condizione  $[R]$  <sup>(16)</sup>.

Rileviamo ancora che se è soddisfatta la condizione  $[R]$ , il campo  $D$  risulta costituito di un numero finito di campi ognuno dei quali è strettamente connesso.

OSSERVAZIONE. - Dalla dimostrazione del numero seguente si vede che se il campo aperto e limitato  $D$  soddisfa alla condizione  $[R]$ , ogni funzione  $z(x, y)$  la quale sia doppiamente assolutamente continua in  $D$  e tale che ivi le sue derivate parziali del primo ordine siano assolutamente continue, risulta assolutamente continua in  $D$ .

### 15. - Teorema III.

Se il campo aperto e limitato  $D$  soddisfa alla condizione  $[R]$ , alla condizione 2) del teorema I può sostituirsi la seguente:

2') esistano un numero fisso  $N$  e una funzione  $\Phi(u)$  definita per  $u \geq 0$ , continua, non negativa, e tale che sia  $\Phi(u) : u \rightarrow +\infty$ , per  $u \rightarrow +\infty$ , in modo che in ogni punto  $(x, y)$  di  $D$  e per tutti i valori finiti di  $z, p, q, r, s, t$  risulti

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) \geq \Phi(|r|) + \Phi(|s|) + \Phi(|t|) + N.$$

La dimostrazione procede in modo identico al n. 10 e tutto si riduce a mostrare che, anche nelle presenti ipotesi,  $p_\infty(x, y)$  e  $q_\infty(x, y)$  sono superficialmente integrabili in  $D$ . Siccome il campo  $D$  soddisfa alla condizione  $[R]$  basta dimostrare che tale proprietà ha luogo in ogni rettangoloide tutto costituito di punti di  $D$ .

Sia  $R^*$  uno qualunque di tali rettangoloidi, e, per fissare le idee, dimostriamo che in esso è superficialmente integrabile  $p_\infty(x, y)$ .

Avendo già provato (n. 10) che  $p_\infty(x, y)$  è assolutamente continua in  $D$ , e siccome tale proprietà è indipendente dalla direzione degli assi coordinati (ortogonali) potremo sempre supporre che il segmento congiungente i vertici  $A^*B^*$  del rettangoloide  $R^*$  [vedi n. 14  $\beta$ ] sia parallelo ad uno degli assi coordinati; per esempio all'asse delle  $x$ .

Indicate con  $(a, c)$ ,  $(b, c)$ , ( $a < b$ ) le coordinate cartesiane ortogonali di  $A^*$  e  $B^*$  rispettivamente, si fissi un valore  $y_1$  di  $y$ , in modo che l'intersezione del rettangoloide  $R^*$  con la retta  $y = y_1$  sia un segmento di lunghezza  $b - a$ , i cui punti

<sup>(16)</sup> I punti  $(x, y)$  tali che

$$0 < x < 1, \quad 0 < y < 1;$$

$$\frac{2^{j-1} - 1}{2^{j-1}} < x < \frac{2^{j-1} - 1}{2^{j-1}} + \frac{1}{2^{j+1}}, \quad 1 \leq y < 2, \quad (j = 1, 2, \dots),$$

costituiscono un campo aperto limitato soddisfacente alla condizione  $[R]$ , che è precisamente un rettangoloide di vertici  $(0, 0)$  e  $(1, 0)$ .

interni appartengano tutti a  $R^*$  e tale che esista finito l'integrale  $\int_a^b |r_\infty(x, y_1)| dx$ .  
 Ciò è sempre possibile, perchè, per l'assoluta continuità di  $p_\infty(x, y)$ , l'integrale  $\int |r_\infty(x, y_0)| dx$ , esteso all'intersezione del campo  $D$  con la retta  $y=y_0$ , esiste finito per quasi tutti i valori di  $y_0$ .

Ciò premesso, fissato un  $x_1$  con  $a < x_1 < b$ , se  $(x, y)$  è un punto qualunque di  $R^*$ , per quasi tutti gli  $x$  di  $(a, b)$  abbiamo

$$p_\infty(x, y) = p_\infty(x_1, y_1) + \int_{x_1}^x r_\infty(x, y_1) dx + \int_{y_1}^y s_\infty(x, y) dy$$

e basta provare che in  $R^*$  sono superficialmente integrabili le funzioni  $\int_{x_1}^x r_\infty(x, y_1) dx$ , e  $\int_{y_1}^y s_\infty(x, y) dy$ .

Infatti, indicata con  $\gamma(x')$  l'intersezione di  $R^*$  con la retta  $x=x'$ , ( $a < x' < b$ ), e con  $\Gamma$  il limite superiore delle lunghezze di tali intersezioni al variare di  $x'$  in  $(a, b)$ , abbiamo

$$\int_{\gamma(x)} dy \left| \int_{x_1}^x r_\infty(x, y_1) dx \right| \leq \Gamma \int_a^b |r_\infty(x, y_1)| dx,$$

e quindi esiste finito l'integrale

$$\int_a^b dx \int_{\gamma(x)} dy \left| \int_{x_1}^x r_\infty(x, y_1) dx \right|.$$

Per il noto teorema di FUBINI-TONELLI sugli integrali multipli si conclude che la funzione  $\int_{x_1}^x r_\infty(x, y_1) dx$  è superficialmente integrabile in  $R^*$ .

Ricordiamo ora che per quasi-tutti gli  $x$  di  $(a, b)$  esiste finito l'integrale  $\int_{\gamma(x)} |s_\infty(x, y)| dy$ , e che la funzione della sola  $x$   $\int_{\gamma(x)} |s_\infty(x, y)| dy$  è integrabile sull'intervallo  $(a, b)$ . Essendo, per quasi-tutti gli  $x$  di  $(a, b)$ ,

$$\int_{\gamma(x)} dy \left| \int_{y_1}^y s_\infty(x, y) dy \right| \leq \int_{\gamma(x)} dy \int_{\gamma(x)} |s_\infty(x, y)| dy \leq \Gamma \int_{\gamma(x)} |s_\infty(x, y)| dy,$$

ne segue che esiste finito anche l'integrale  $\int_a^b dx \int_{\gamma(x)} dy \left| \int_{y_1}^y s_\infty(x, y) dy \right|$ , e quindi

per il teorema ora citato la funzione  $\int_{y_1}^y s_\infty(x, y) dy$  risulta superficialmente integrabile in  $R^*$ , e il nostro asserto è così provato.

**16. - Teorema IV.**

Se il campo aperto e limitato  $D$  soddisfa alla condizione  $[R]$ , alla condizione 2) del teorema II può sostituirsi la seguente:

2') esistano tre numeri  $\alpha > 0$ ,  $\mu_0 > 0$ ,  $N$ , tali che in ogni punto  $(x, y)$  del campo aperto e limitato  $D$  e per tutti i valori finiti di  $z, p, q, r, s, t$  risulti

$$(20) \quad F(x, y, z, p, q, r, s, t) \geq \mu_0 \{ |r|^{2+\alpha} + |s|^{2+\alpha} + |t|^{2+\alpha} \} + N.$$

Ciò è conseguenza immediata di quanto si è detto al numero precedente.

**17. - Teorema V.**

Si supponga che: 1) il campo aperto e limitato  $D$  soddisfi alla condizione  $[R]$ ; 2)  $I_D^{(2)}[z]$  sia un integrale quasi-regolare positivo; 3) esistano due numeri  $\alpha > 0$ ,  $\mu_0 > 0$ , e una funzione  $g(u)$ , definita per  $u \geq 0$ , inferiormente limitata e tale che sia  $g(u) \rightarrow +\infty$ , per  $u \rightarrow +\infty$ , in modo che in ogni punto  $(x, y)$  di  $D$  e per tutti i valori finiti di  $z, p, q, r, s, t$  risulti

$$(21) \quad F(x, y, z, p, q, r, s, t) \geq \mu_0 \{ |r|^{2+\alpha} + |s|^{2+\alpha} + |t|^{2+\alpha} \} + g(|z|).$$

Allora in ogni classe  $K$ , completa di ordine 2 nell'interno di  $D$  rispetto a  $I_D^{(2)}[z]$ , di funzioni  $z(x, y)$  appartenenti alla classe  $C^{(2)}$ , esiste il minimo assoluto di  $I_D^{(2)}[z]$  <sup>(17)</sup>.

Infatti, se  $K$  è una classe di funzioni  $z(x, y)$  soddisfacente alle condizioni del nostro enunciato, per la (21) il limite inferiore  $i$  di  $I_D^{(2)}[z]$  in  $K$  è finito e possiamo estrarre da  $K$  una successione  $z_m(x, y)$ , ( $m=1, 2, \dots$ ) minimizzante  $I_D^{(2)}[z]$ , tale cioè che sia

$$I_D^{(2)}[z] \leq i + \frac{1}{m}.$$

Indicato con  $N$  il limite inferiore di  $g(u)$  risulta

$$\iint_D \{ |r_m|^{2+\alpha} + |s_m|^{2+\alpha} + |t_m|^{2+\alpha} \} dx dy \leq \frac{1}{\mu_0} \{ i + 1 + |N| D \},$$

---

<sup>(17)</sup> La presente proposizione si può enunciare anche per gli integrali  $I_D[z]$ : in tal caso basta supporre che il campo  $D$  sia costituito di un numero finito di campi ognuno dei quali sia strettamente connesso. Si ottiene così un nuovo contributo allo studio del problema del primo ordine.

e pertanto, per un noto criterio di TONELLI, le derivate parziali  $p_m(x, y)$ ,  $q_m(x, y)$ , ( $m=1, 2, \dots$ ) sono ugualmente continue nell'interno di  $D$ , e quindi, in particolare, in ogni singolo campo  $\bar{D}_{j+n}$ , ( $n=1, 2, \dots$ ), (cfr. n. 10).

Si tratta ora di provare che tali derivate risultano ivi ugualmente limitate.

Tenuto presente che  $\bar{D}_{j+n}$  si compone di un numero finito di quadrati, basta mostrare che tale proprietà è verificata in ognuno di questi quadrati. Sia  $\Delta_0$  uno di tali quadrati e indichiamo con  $3\delta_0$  la lunghezza del suo lato e con  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_0 + 3\delta_0, y_0 + 3\delta_0)$  i suoi vertici opposti.

Mediante parallele agli assi coordinati suddividiamo  $\Delta_0$  in 9 quadrati uguali, e di questi consideriamo i tre che hanno un vertice rispettivamente nei punti  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_0 + 3\delta_0, y_0)$ ,  $(x_0, y_0 + 3\delta_0)$  e indichiamoli rispettivamente con  $\Delta_{0,1}$ ,  $\Delta_{0,2}$ ,  $\Delta_{0,3}$ .

Osserviamo che per la (21) risulta per ogni  $m$

$$(22) \quad \iint_D g(|z_m|) dx dy \leq i + 1.$$

Fissato un numero positivo  $M$  tale che sia

$$M \frac{\delta_0^2}{2} > i + 1 + |N| D,$$

per l'ipotesi fatta su  $g(u)$  possiamo determinare un  $L > 0$  in modo che per  $u > L$  risulti  $g(u) > M$ . Allora l'insieme superficiale  $E_{m,i}$ , ( $i=1, 2, 3$ ) dei punti di  $\Delta_{0,i}$ , in cui è  $|z_m(x, y)| > L$  deve avere misura superficiale minore di  $\delta_0^2 : 2$ : infatti, in caso contrario, risulterebbe

$$\iint_{E_{m,i}} g(|z_m|) dx dy \geq M \frac{\delta_0^2}{2} > i + 1 + |N| D,$$

e quindi

$$\iint_D g(|z_m|) dx dy > i + 1,$$

contrariamente alla (22).

Pertanto in corrispondenza ad ogni intero  $m$  esiste almeno una coppia di punti di uguale ordinata  $(x_{m,1}, y_{m,1})$ ,  $(x_{m,2}, y_{m,1})$  appartenenti rispettivamente a  $\Delta_{0,1}$  e a  $\Delta_{0,2}$ , nei quali risulta

$$(23) \quad |z_m(x_{m,1}, y_{m,1})| \leq L, \quad |z_m(x_{m,2}, y_{m,1})| \leq L.$$

Ne segue che esiste almeno un punto  $(x'_m, y'_m)$ , (con  $y'_m = y_{m,1}$ ) appartenente a  $\Delta_0$  e nel quale risulta

$$|p_m(x'_m, y'_m)| \leq \frac{2L}{\delta_0}.$$

Siccome al variare di  $m$  il punto  $(x'_m, y'_m)$  è sempre contenuto in  $\Delta_0$ , dalla uguale continuità delle  $p_m(x, y)$ , ( $m=1, 2, \dots$ ) in tale quadrato, ne segue che tali derivate sono ivi ugualmente limitate.

Alla stessa conclusione si perviene anche per le  $q_m(x, y)$ , ( $m=1, 2, \dots$ ), considerando i quadrati  $\Delta_{0,1}$  e  $\Delta_{0,3}$ .

Per quanto abbiamo sopra osservato ciò basta a provare che le successioni ora indicate sono ugualmente limitate in  $\bar{D}_{j+n}$ , e quindi le  $z_m(x, y)$ , ( $m=1, 2, \dots$ ) risultano ugualmente continue in tale campo, e per le (23) ne segue immediatamente che ivi esse sono anche ugualmente limitate.

Siamo così ricondotti alle condizioni del teorema IV e il nostro asserto è provato

ESEMPIO. - Alle condizioni del teorema del presente numero soddisfa la funzione

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) \equiv \sqrt{r^6 + s^6 + t^6} + \lg [1 + \lg (1 + z^2)].$$

### 18. - Teorema VI.

*Si supponga che siano verificate la condizione 1) del n. 10 e la condizione 2') del n. 15. Sia  $K$  una classe, completa di ordine 2 in  $D$  rispetto a  $I_D^{(2)}[z]$ , di funzioni  $z(x, y)$ , appartenenti alla classe  $C^{(2)}$ , definite e continue in tutto il campo chiuso  $\bar{D}$  corrispondente a  $D$ , ugualmente limitate sulla frontiera di  $D$  e tali che le loro derivate parziali del primo ordine siano ugualmente continue in tutto il campo chiuso  $\bar{D}$  e ugualmente limitate sulla frontiera di  $D$ . Allora nella classe  $K$  esiste il minimo assoluto di  $I_D^{(2)}[z]$ .*

Infatti, ripresa la dimostrazione del n. 10, e considerata la successione minimizzante (11), in base ad un ragionamento del TONELLI <sup>(48)</sup> le  $p_m(x, y)$ ,  $q_m(x, y)$ , ( $m=1, 2, \dots$ ) risultano ugualmente limitate in  $\bar{D}$ . Quindi le  $z_m(x, y)$ , ( $m=1, 2, \dots$ ) sono ugualmente continue in  $\bar{D}$  e anche, per il ragionamento ora citato, ugualmente limitate.

Si procede poi in modo ben noto, tenendo presente che siccome le  $p_m(x, y)$ ,  $q_m(x, y)$ , ( $m=1, 2, \dots$ ) sono ugualmente limitate in  $\bar{D}$ , le  $p_\infty(x, y)$ ,  $q_\infty(x, y)$  risultano ivi limitate e quindi superficialmente integrabili.

OSSERVAZIONE. - *Se il campo  $D$  è composto di un numero finito di parti ognuna delle quali sia strettamente connessa, all'ipotesi che le derivate parziali del primo ordine delle  $z(x, y)$  siano ugualmente limitate sulla frontiera di  $D$ , si può sostituire quella che le  $z(x, y)$  siano ugualmente limitate in  $\bar{D}$ .*

Infatti, in tal caso, esiste un numero fisso  $H > 0$  in modo che in ognuna

---

<sup>(48)</sup> Vedi L. TONELLI, luogo cit. in <sup>(2)</sup>, n. 19.



delle parti strettamente connesse di cui è composto  $D$  ci sono almeno due punti (distinti o no)  $(x'_m, y'_m)$ ,  $(x''_m, y''_m)$  nei quali risulta

$$|p_m(x'_m, y'_m)| \leq H, \quad |q_m(x''_m, y''_m)| \leq H, \quad (m=1, 2, \dots).$$

Quindi dall'uguale continuità, in  $\bar{D}$ , delle  $p_m(x, y)$ ,  $q_m(x, y)$ , ( $m=1, 2, \dots$ ), ne segue facilmente l'uguale limitazione.

#### 19. - Teorema VII.

$\alpha$ ) Si supponga che siano verificate la condizione 1) del n. 12 e la condizione 2') del n. 16. Sia  $K$  una classe, completa di ordine 2 in  $D$  rispetto a  $I_D^{(2)}[z]$ , di funzioni  $z(x, y)$ , appartenenti alla classe  $C^{(2)}$ , definite e continue in tutto il campo chiuso  $\bar{D}$  corrispondente a  $D$ , ugualmente limitate sulla frontiera di  $D$ , e tali che le loro derivate parziali del primo ordine siano ugualmente limitate e ugualmente continue sulla frontiera di  $D$ . Allora nella classe  $K$  esiste il minimo assoluto di  $I_D^{(2)}[z]$ .

Basta ripetere quanto si è detto al n. 12, tenendo conto di un altro criterio di TONELLI <sup>(19)</sup>, per concludere che le  $p_m(x, y)$ ,  $q_m(x, y)$ , ( $m=1, 2, \dots$ ) risultano ugualmente continue in  $\bar{D}$ . Siamo così ricondotti al teorema del n. 18.

$\beta$ ) Si supponga che siano verificate la condizione 1) del n. 12 e la condizione 2') del n. 16. Sia  $K$  una classe, completa di ordine 2 in  $D$  rispetto a  $I_D^{(2)}[z]$ , di funzioni  $z(x, y)$  appartenenti alla classe  $C^{(2)}$ , definite e continue in tutto  $\bar{D}$ , le quali sulla frontiera di  $D$  siano ugualmente limitate insieme con le loro derivate parziali del primo ordine. Allora, se il campo  $D$  soddisfa alla condizione  $[C, \alpha]$  di TONELLI <sup>(20)</sup>, nella classe  $K$  esiste il minimo assoluto di  $I_D^{(2)}[z]$ .

Non c'è che da ripetere quanto abbiamo detto nel capoverso  $\alpha$ ) del presente numero tenendo conto di un ulteriore criterio di TONELLI <sup>(21)</sup>.

OSSERVAZIONE. - Per entrambe le proposizioni del presente numero può ripetersi l'osservazione fatta alla fine del n. 18.

#### 20. - Teorema VIII.

Siano verificate le condizioni 2) e 3) del n. 17, e si supponga inoltre che il campo aperto e limitato  $D$  soddisfi alla condizione  $[C, \alpha]$  di TONELLI,

<sup>(19)</sup> Vedi L. TONELLI, luogo cit. in <sup>(2)</sup>, n. 10, b).

<sup>(20)</sup> Vedi L. TONELLI, luogo cit. in <sup>(2)</sup>, n. 2, b). Facciamo presente che il campo  $D$  da noi indicato in <sup>(16)</sup> non soddisfa alla condizione  $[C, \alpha]$ , perchè questa non è verificata in quei punti della sua frontiera, che appartengono al segmento  $x=1$ ,  $1 < y \leq 2$ . D'altra parte esistono campi  $D$  che per un certo  $\alpha$  soddisfano alla condizione  $[C, \alpha]$ , ma non soddisfano alla condizione  $[R]$ .

<sup>(21)</sup> Vedi L. TONELLI, luogo cit. in <sup>(2)</sup>, n. 10, a).

e che sia composto di un numero finito di parti ognuna delle quali sia strettamente connessa.

Allora in ogni classe  $K$ , completa di ordine 2 in  $D$  rispetto a  $I_D^{(2)}[z]$ , di funzioni  $z(x, y)$  appartenenti alla classe  $C^{(2)}$  e definite e continue in tutto  $\bar{D}$  esiste il minimo assoluto di  $I_D^{(2)}[z]$ .

Basta ripetere la dimostrazione del n. 17 con le modificazioni suggerite da quanto abbiamo detto ai n.<sup>i</sup> 18 e 19,  $\beta$ ).

**21. - Teorema IX.**

Si supponga che: 1) il campo aperto e limitato  $D$  soddisfi alla condizione  $[R]$ ; 2)  $I_D^{(2)}[z]$  sia un integrale quasi-regolare positivo; 3) esistano un numero  $\mu_0 > 0$  e una funzione  $g(u)$  definita per  $u \geq 0$  inferiormente limitata e tale che sia  $g(u) \rightarrow +\infty$ , per  $u \rightarrow +\infty$ , in modo che in ogni punto  $(x, y)$  di  $D$  e per tutti i valori finiti di  $z, p, q, r, s, t$  risulti

$$(24) \quad F(x, y, z, p, q, r, s, t) \geq \mu_0 \{r^2 + s^2 + t^2\} + g(|z|);$$

4)  $K$  sia una classe, completa di ordine 2 nell'interno di  $D$  rispetto a  $I_D^{(2)}[z]$ , di funzioni  $z(x, y)$  appartenenti alla classe  $C^{(2)}$  e tali che le loro derivate parziali del primo ordine siano in  $D$  monotone (nel senso di LEBESGUE) <sup>(22)</sup>.

Allora nella classe  $K$  esiste il minimo assoluto di  $I_D^{(2)}[z]$ .

Riprendiamo il ragionamento del n. 17 osservando che, siccome per la (24) risulta

$$\iint_D \{r_m^2 + s_m^2 + t_m^2\} dx dy \leq \frac{1}{\mu_0} \{i + 1 + |N| D\},$$

per un risultato del TONELLI <sup>(23)</sup> le  $p_m(x, y), q_m(x, y), (m=1, 2, \dots)$  sono ugualmente continue nell'interno di  $D$ . Tutto il resto procede in modo identico al n. 17.

OSSERVAZIONE. - Ferme restando tutte le altre ipotesi dell'enunciato del presente numero, se si sostituisce alla (24) la disuguaglianza

$$(25) \quad F(x, y, z, p, q, r, s, t) \geq \mu_0 \{r^2 + s^2 + t^2\} + N$$

il teorema del presente numero è valido per ogni classe  $K$  di funzioni  $z(x, y)$  appartenenti alla classe  $C^{(2)}$  e ugualmente limitate nell'interno di  $D$ .

Ciò è conseguenza immediata di alcune considerazioni fatte al n. 10.

**22. - Teorema X.**

Si supponga che: 1) il campo aperto e limitato  $D$  soddisfi alla condizione  $[R]$ ; 2)  $I_D^{(2)}[z]$  sia un integrale quasi-regolare positivo; 3) esistano

<sup>(22)</sup> Per la definizione di funzione monotona secondo LEBESGUE, vedi per esempio L. TONELLI, luogo cit. in <sup>(2)</sup>, n. 11, b).

<sup>(23)</sup> Vedi luogo cit. in <sup>(22)</sup>.

due funzioni  $\Phi(u)$ ,  $g(u)$  definite per  $u \geq 0$ , con  $\Phi(u)$  continua e non negativa,  $g(u)$  inferiormente limitata, e tali che, per  $u \rightarrow +\infty$ , sia  $\Phi(u) : u \rightarrow +\infty$ ,  $g(u) \rightarrow +\infty$ , in modo che per ogni  $(x, y)$  di  $D$  e per tutti i valori finiti di  $z, p, q, r, s, t$  risulti

$$(26) \quad F(x, y, z, p, q, r, s, t) \geq \Phi(|r|) + \Phi(|s|) + \Phi(|t|) + g(|z|);$$

4) in corrispondenza ad ogni numero positivo  $\varrho$  con  $\varrho \leq \varrho_0$  esistano tre numeri  $\mu_\varrho > 0$ ,  $\alpha_\varrho > 0$ ,  $N_\varrho$ , in modo che le disuguaglianze

$$(27) \quad F(x, y, z, p, q, r, s, t) \geq \mu_\varrho \{ |r|^{2+\alpha_\varrho} + |s|^{2+\alpha_\varrho} \} + N_\varrho,$$

$$(28) \quad F(x, y, z, p, q, r, s, t) \geq \mu_\varrho \{ |s|^{2+\alpha_\varrho} + |t|^{2+\alpha_\varrho} \} + N_\varrho,$$

siano verificate per ogni  $(x, y)$  di  $D$  e per tutti i valori finiti di  $z, p, q, r, s, t$ , ad eccezione rispettivamente: per la (27) dei punti  $(x, y, z, p, q)$  tali  $(x, y, p)$  sia interno al cubo  $A'_\varrho \equiv [x' - \varrho \leq x \leq x' + \varrho, y' - \varrho \leq y \leq y' + \varrho, p' - \varrho \leq p \leq p' + \varrho]$ , ove il quadrato  $S'_\varrho \equiv [x' - \varrho \leq x \leq x' + \varrho, y' - \varrho \leq y \leq y' + \varrho]$  appartiene a  $D$ ; per la (28) dei punti  $(x, y, z, p, q)$  tali che  $(x, y, q)$  sia interno al cubo  $A''_\varrho \equiv [x'' - \varrho \leq x \leq x'' + \varrho, y'' - \varrho \leq y \leq y'' + \varrho, q'' - \varrho \leq q \leq q'' + \varrho]$ , ove il quadrato  $S''_\varrho \equiv [x'' - \varrho \leq x \leq x'' + \varrho, y'' - \varrho \leq y \leq y'' + \varrho]$  appartiene a  $D$ . Allora in ogni classe  $K$ , completa di ordine 2 nell'interno di  $D$  rispetto a  $I_D^{(2)}[z]$ , di funzioni  $z(x, y)$  appartenenti alla classe  $C^{(2)}$  esiste il minimo assoluto di  $I_D^{(2)}[z]$  <sup>(24)</sup>.

Infatti per la (26) il limite inferiore  $i$  di  $I_D^{(2)}[z]$  in una classe  $K$  soddisfacente alle condizioni del nostro enunciato è finito e si può estrarre da  $K$  una successione  $z_m(x, y)$ , ( $m=1, 2, \dots$ ) minimizzante  $I_D^{(2)}[z]$ , tale cioè che sia

$$I_D^{(2)}[z_m] \leq i + \frac{1}{m}.$$

Considerata la successione delle loro derivate parziali  $p_m(x, y)$ , ( $m=1, 2, \dots$ ), osserviamo che possono presentarsi due casi <sup>(25)</sup>: I) Esiste un numero positivo  $\varrho_1 \leq \varrho_0$ , in modo che dalla successione considerata è possibile estrarre una successione parziale  $p_{m_\nu}(x, y)$ , ( $\nu=1, 2, \dots$ ), tale che ciascuna delle funzioni  $p = p_{m_\nu}(x, y)$  non ha alcun punto  $(x, y, p)$  interno al cubo  $A'_{\varrho_1}$ . II) Comunque piccolo si prenda  $\varrho$  esiste sempre un intero  $m_\varrho'$  tale che, per ogni  $m > m_\varrho'$ , ogni funzione  $p = p_m(x, y)$  ha punti  $(x, y, p)$  interni a  $A'_\varrho$ . Supposto che il

<sup>(24)</sup> Tenendo conto anche delle osservazioni fatte alla fine del presente numero, da questa proposizione possono dedursi, in forma opportunamente semplificata, alcuni risultati per gli integrali  $I_D[z]$ , i quali o contengono come caso particolare il teorema del n. 11 del lavoro dell'AMERIO citato in <sup>(10)</sup>, oppure arrecano qualche complemento a tale teorema.

<sup>(25)</sup> Cfr. L. AMERIO, luogo cit. in <sup>(10)</sup>, n. 11. Non ci indugiamo su alcuni particolari della dimostrazione che il lettore può dedurre immediatamente dal luogo citato.

campo  $D_{j+n}$ , di cui al n. 10, contenga per ogni  $n \geq 1$  il quadrato  $S'_e$  e che la funzione  $p = p_m(x, y)$  abbia punti  $(x, y, p)$  interni a  $A'_{\frac{\rho}{m}}$ , e preso un intero positivo  $h$ , indichiamo rispettivamente con  $D'_{\frac{\rho}{h}}$ ,  $D'_{j+n, \frac{\rho}{h}}$ , i campi che si ottengono da  $D$  e  $D_{j+n}$  sopprimendo in essi i punti del quadrato  $S'_{\frac{\rho}{h}}$ .

Ripetendo per la successione  $p_m(x, y)$ , ( $m=1, 2, \dots$ ) le considerazioni svolte dall'AMERIO, si conclude che tali derivate sono ugualmente continue in ogni campo  $\bar{D}'_{j+n, \frac{\rho}{h}}$ . Inoltre, in corrispondenza ad  $h$  è possibile determinare un intero  $h_1 > h$  in modo che, per  $m \geq h_1$ , ogni punto  $(x, y, p = p_m(x, y))$ , con  $(x, y)$  appartenente a  $S'_{\frac{\rho}{h_1}}$ , sia interno ad  $A'_{\frac{\rho}{h}}$ . Pertanto, in virtù di quanto abbiamo visto al n 17, e del fatto che nei punti  $(x, y, p = p_m(x, y))$  interni al cubo  $A'_{\frac{\rho}{h}}$  è  $|p_m(x, y)| \leq |p'| + \rho$ , si conclude facilmente che le  $p_m(x, y)$ , ( $m=1, 2, \dots$ ) sono ugualmente limitate in  $\bar{D}_{j+n}$ .

Passiamo ora alla successione delle  $q_m(x, y)$ , e precisamente, secondochè per quella delle  $p_m(x, y)$  è verificato il I) caso o il II), consideriamo rispettivamente la successione parziale  $q_{m, \nu}(x, y)$ , ( $\nu=1, 2, \dots$ ), oppure la  $q_m(x, y)$ , ( $m=1, 2, \dots$ ). La successione in questione può presentare due casi analoghi a quelli visti sopra. Se entrambe le volte si verifica il I) caso, il nostro teorema è già dimostrato, perchè, in ultima analisi, non viene a differire da quello del n. 17.

Proseguiamo, quindi, la nostra dimostrazione nell'ipotesi che entrambe le volte si presenti il II) caso: le altre eventualità sono contenute, come caso particolare, in quella che andiamo a considerare

Osserviamo innanzi tutto che, in base a quanto abbiamo già detto e a quanto si è visto al n. 17, le funzioni

$$(29) \quad z_1(x, y), \quad z_2(x, y), \dots, \quad z_m(x, y), \dots$$

risultano, in ogni singolo campo  $\bar{D}_{j+n}$ , ugualmente continue e ugualmente limitate.

Allora dalla (29) estragghiamo una successione parziale

$$(30) \quad \bar{z}_{1, 1}(x, y), \quad \bar{z}_{1, 2}(x, y), \dots, \quad \bar{z}_{1, m}(x, y), \dots$$

convergente uniformemente in  $\bar{D}'_{j+1}$  verso una funzione  $z_{[1]}(x, y)$ , assolutamente continua in  $D_{j+1}$ . Dalla (30) estragghiamo una successione parziale

$$(31) \quad \bar{\bar{z}}_{1, 1}(x, y), \quad \bar{\bar{z}}_{1, 2}(x, y), \dots, \quad \bar{\bar{z}}_{1, m}(x, y), \dots$$

in modo che la successione delle loro derivate parziali del primo ordine rispetto a  $x$  converga uniformemente in tutto  $\bar{D}'_{j+1, \rho}$  verso una funzione  $p_{[1]}(x, y)$ , assolutamente continua in  $D'_{j+1, \rho}$ , con  $p_{[1]}(x, y) = \frac{\partial z_{[1]}(x, y)}{\partial x}$ .

Dalla (31) estragghiamo una successione parziale

$$(32) \quad z_{1,1}(x, y), \quad z_{1,2}(x, y), \dots, \quad z_{1,m}(x, y), \dots$$

in modo che la successione delle loro derivate parziali del primo ordine rispetto a  $y$  converga uniformemente in tutto  $\bar{D}'_{j+1,e}$  <sup>(25')</sup> verso una funzione  $q_{[1]}(x, y)$ , assolutamente continua in  $D''_{j+1,e}$ , con  $q_{[1]}(x, y) = \frac{\partial z_{[1]}(x, y)}{\partial y}$ .

Si conclude che la (32) converge uniformemente in tutto  $\bar{D}_{j+1}$  verso la funzione  $z_{[1]}(x, y)$ , assolutamente continua in  $D_{j+1}$ , mentre la successione  $p_{1,m}(x, y)$ ,  $[q_{1,m}(x, y)]$ , ( $m=1, 2, \dots$ ) converge uniformemente in tutto  $\bar{D}'_{j+1,e}$ ,  $[\bar{D}'_{j+1,e}]$  verso  $p_{[1]}(x, y)$ ,  $[q_{[1]}(x, y)]$ , la quale è assolutamente continua in  $D'_{j+1,e}$ ,  $[D'_{j+1,e}]$  ed in tutto  $\bar{D}'_{j+1,e}$ ,  $[\bar{D}''_{j+1,e}]$  è  $p_{[1]} = \frac{\partial z_{[1]}}{\partial x}$ ,  $[q_{[1]} = \frac{\partial z_{[1]}}{\partial y}]$ .

Consideriamo ora in luogo della (29) e dei campi  $\bar{D}_{j+1}$ ,  $\bar{D}'_{j+1,e}$ ,  $\bar{D}''_{j+1,e}$ , la successione (32) e i campi  $\bar{D}_{j+2}$ ,  $\bar{D}'_{j+2,\frac{e}{2}}$ ,  $\bar{D}''_{j+2,\frac{e}{2}}$ , e ripetiamo tutte le considerazioni sopra svolte fino a determinare una successione

$$(33) \quad z_{2,1}(x, y), \quad z_{2,2}(x, y), \dots, \quad z_{2,m}(x, y), \dots$$

la quale converga uniformemente in tutto  $\bar{D}_{j+2}$  verso una funzione  $z_{[2]}(x, y)$  assolutamente continua in  $D_{j+2}$ , mentre la successione delle  $p_{2,m}(x, y)$ ,  $[q_{2,m}(x, y)]$ , converge uniformemente in  $\bar{D}'_{j+2,\frac{e}{2}}$ ,  $[\bar{D}''_{j+2,\frac{e}{2}}]$  verso una funzione  $p_{[2]}(x, y)$ ,  $[q_{[2]}(x, y)]$ , assolutamente continua in  $D'_{j+2,\frac{e}{2}}$ ,  $[D'_{j+2,\frac{e}{2}}]$ , con  $p_{[2]} = \frac{\partial z_{[2]}}{\partial x}$ ,  $[q_{[2]} = \frac{\partial z_{[2]}}{\partial y}]$  in  $\bar{D}'_{j+2,\frac{e}{2}}$ ,  $[\bar{D}''_{j+2,\frac{e}{2}}]$ . Inoltre in  $\bar{D}_{j+1}$  è  $z_{[2]}(x, y) \equiv z_{[1]}(x, y)$ , e quindi anche  $p_{[2]}(x, y) \equiv p_{[1]}(x, y)$  in  $\bar{D}'_{j+1,e}$ ,  $q_{[2]}(x, y) \equiv q_{[1]}(x, y)$  in  $\bar{D}''_{j+1,e}$ .

Proseguiamo a questo modo e poi dalle (32), (33) e successive estragghiamo in modo ben noto la successione

$$z_{1,1}(x, y), \quad z_{2,2}(x, y), \dots, \quad z_{m,m}(x, y), \dots,$$

la quale, per ogni intero positivo  $n$ , converge uniformemente in  $\bar{D}_{j+n}$  verso la funzione  $z_{[n]}(x, y)$ , assolutamente continua in  $D_{j+n}$ , mentre la successione  $p_{n,m}(x, y)$ ,  $[q_{n,m}(x, y)]$ , ( $m=1, 2, \dots$ ) converge uniformemente in  $\bar{D}'_{j+n,\frac{e}{n}}$ ,  $[\bar{D}''_{j+n,\frac{e}{n}}]$  verso una funzione  $p_{[n]}(x, y)$ ,  $[q_{[n]}(x, y)]$ , assolutamente continua in  $D'_{j+n,\frac{e}{n}}$ ,  $[D'_{j+n,\frac{e}{n}}]$ , con  $p_{[n]} = \frac{\partial z_{[n]}}{\partial x}$ , in  $\bar{D}'_{j+n,\frac{e}{n}}$ ,  $[q_{[n]} = \frac{\partial z_{[n]}}{\partial y}$ , in  $\bar{D}''_{j+n,\frac{e}{n}}$ .

<sup>(25')</sup>  $D'_{j+n,\frac{e}{n}}$  è il campo che si ottiene da  $D_{j+n}$ , sopprimendovi i punti del quadrato  $S''_{\frac{e}{n}}$ .

Definiamo ora in tutto  $D$  le funzioni  $z_\infty(x, y)$ ,  $p_\infty(x, y)$ ,  $q_\infty(x, y)$ , ponendo

$$\begin{aligned} z_\infty(x, y) &\equiv z_{[n]}(x, y), & \text{in } \bar{D}_{j+n}, \\ p_\infty(x, y) &\equiv p_{[n]}(x, y), & \text{in } \bar{D}'_{j+n, \frac{e}{n}}, \text{ con } p_\infty(x', y') = p', \\ q_\infty(x, y) &\equiv q_{[n]}(x, y), & \text{in } \bar{D}''_{j+n, \frac{e}{n}}, \text{ con } q_\infty(x'', y'') = p'', \end{aligned}$$

ed osserviamo che è in  $\bar{D}'_{j+n, \frac{e}{n}}$

$$(34) \quad p_\infty(x, y) = \frac{\partial z_\infty(x, y)}{\partial x},$$

e in  $\bar{D}''_{j+n, \frac{e}{n}}$

$$(35) \quad q_\infty(x, y) = \frac{\partial z_\infty(x, y)}{\partial y}.$$

In modo del tutto analogo all'AMERIO si prova che le successioni  $p_{m, m}(x, y)$ ,  $q_{m, m}(x, y)$ , ( $m=1, 2, \dots$ ) convergono uniformemente in  $\bar{D}_{j+n}$  verso  $p_\infty(x, y)$  e  $q_\infty(x, y)$  rispettivamente, e si conclude che le  $p_\infty(x, y)$  e  $q_\infty(x, y)$  sono assolutamente continue in  $D_{j+n}$ , e che le (34) e (35) sono verificate in tutto  $\bar{D}_{j+n}$ .

Dopo di che, in base alle ipotesi 1), 2) e 3), la dimostrazione prosegue in modo noto.

OSSERVAZIONE I. - *Può farsi un'osservazione analoga a quella fatta alla fine del n. 21, intendendosi che alla (26) si sostituisca la disuguaglianza*

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) \geq \Phi(|r|) + \Phi(|s|) + \Phi(|t|) + N.$$

OSSERVAZIONE II. - *Tenendo presente l'osservazione fatta dall'Amerio alla fine del n. 11 del luogo citato in <sup>(10)</sup> e i risultati conseguiti da tale Autore ai nn. 12 e 13, possono enunciarsi alcune estensioni della proposizione del presente numero.*

ESEMPIO. - Per  $\alpha > 0$  la funzione

$$\begin{aligned} F(x, y, z, p, q, r, s, t) &= (x^2 + y^2 + p^2)(|r|^{2+\alpha} + |s|^{2+\alpha}) + (x^2 + y^2 + q^2)(|s|^{2+\alpha} + |t|^{2+\alpha}) + \\ &+ \sqrt{r^2 + s^2 + t^2} \lg(1 + r^2 + s^2 + t^2) + \lg \lg(e + z^2), \end{aligned}$$

soddisfa alle condizioni del presente numero, con  $x' = y' = p' = 0$ ,  $x'' = y'' = q'' = 0$ .

### 23. - Il campo $D$ illimitato. La condizione $[R_\infty]$ .

Abbandoniamo d'ora innanzi l'ipotesi che il campo  $D$  sia limitato: la sua misura superficiale potrà essere finita o no.

In ogni caso consideriamo la classe  $C_\infty^{(2)}$  delle funzioni  $z(x, y)$ , definite nel campo aperto  $D$ , assolutamente continue, insieme con le loro derivate parziali del primo ordine  $p(x, y)$ ,  $q(x, y)$ , in ogni campo aperto limitato  $D_L$  tutto costituito di punti di  $D$ , tali che ivi sia superficialmente integrabile (nel senso del

LEBESGUE) la funzione  $F(x, y, z(x, y), p(x, y), q(x, y), r(x, y), s(x, y), t(x, y))$  e per le quali esiste finito l'integrale generalizzato <sup>(26)</sup>

$$I_D^{(2)}[z] = \iint_D F(x, y, z(x, y), p(x, y), q(x, y), r(x, y), s(x, y), t(x, y)) dx dy.$$

Diremo che il campo aperto  $D$  soddisfa alla *condizione*  $[R_\infty]$ , se ogni campo aperto e limitato, costituito da tutti i punti di  $D$  interni a un qualunque quadrato a lati paralleli agli assi coordinati, soddisfa alla *condizione*  $[R]$ .

#### 24. - Teorema XI.

*Si supponga che: 1)  $D$  sia un campo aperto soddisfacente alla condizione  $[R_\infty]$ ; 2)  $I_D^{(2)}[z]$  sia un integrale quasi-regolare positivo; 3) esistano due numeri  $\alpha > 0$ ,  $\mu_0 > 0$  e una funzione  $\psi(x, y)$  definita per ogni  $(x, y)$  di  $D$  e tale che esista finito l'integrale generalizzato  $\iint_D \psi(x, y) dx dy$ , in modo che per ogni punto  $(x, y)$  di  $D$  e per tutti i valori finiti di  $z, p, q, r, s, t$  risulti*

$$(36) \quad F(x, y, z, p, q, r, s, t) \geq \mu_0 \{ |r|^{2+\alpha} + |s|^{2+\alpha} + |t|^{2+\alpha} \} + \psi(x, y).$$

*Allora in ogni classe  $K$ , completa di ordine 2 nell'interno di  $D$  rispetto a  $I_D^{(2)}[z]$ , di funzioni  $z(x, y)$ , appartenenti alla classe  $C_\infty^{(2)}$  ed ugualmente limitate nell'interno di  $D$ , esiste il minimo assoluto di  $I_D^{(2)}[z]$ .*

Infatti, considerata la successione di quadrati  $Q_\nu \equiv [-2^\nu \leq x \leq 2^\nu, -2^\nu \leq y \leq 2^\nu]$ , ( $\nu = 1, 2, \dots$ ), dividiamo  $Q_\nu$  in  $16^\nu$  quadrati uguali. Fra questi ultimi quadrati consideriamo quelli i cui punti appartengono a  $D$  e indichiamo con  $\bar{D}_\nu$  l'insieme costituito dai loro punti.  $\bar{D}_\nu$  è un insieme chiuso e limitato; ogni punto di  $\bar{D}_\nu$  appartiene a  $\bar{D}_{\nu+1}$ , e inoltre considerato un punto qualunque di  $D$  esiste un intero  $\nu_0$ , tale che il punto considerato appartiene a tutti i  $\bar{D}_\nu$  con  $\nu > \nu_0$ .

Sia  $j+1$  il minimo intero per il quale  $\bar{D}_{j+1}$  non è vuoto.

Ciò premesso, osserviamo innanzi tutto che possiamo supporre  $\psi(x, y) \equiv 0$ , vale a dire che la funzione  $F(x, y, z, p, q, r, s, t)$  sia non negativa, perchè in caso contrario basterebbe considerare, in luogo della  $F$ , la  $F - \psi$ .

La (36) assume pertanto la forma

$$(36') \quad F \geq \mu_0 \{ |r|^{2+\alpha} + |s|^{2+\alpha} + |t|^{2+\alpha} \}.$$

<sup>(26)</sup> La funzione  $F(x, y, z(x, y), p(x, y), q(x, y), r(x, y), s(x, y), t(x, y))$  è dunque assolutamente integrabile in ogni campo aperto e limitato  $D_L$  tutto costituito di punti di  $D$ , ma può non esserlo in tutto  $D$ .

Il limite inferiore  $i$  di  $I_D^{(2)}[z]$  in ogni classe  $K$  soddisfacente alle condizioni del nostro enunciato è finito e possiamo estrarre da  $K$  una successione

$$(37) \quad z_1(x, y), \quad z_2(x, y), \dots, \quad z_m(x, y), \dots$$

minimizzante  $I_D^{(2)}[z]$ , tale cioè che sia

$$(38) \quad I_D^{(2)}[z_m] \leq i + \frac{1}{m}.$$

Considerato il campo  $\bar{D}_{j+n}$ , ( $n \geq 1$ ), per un noto criterio del TONELLI le funzioni

$$(39) \quad p_1(x, y), \quad p_2(x, y), \dots, \quad p_m(x, y), \dots,$$

$$(40) \quad q_1(x, y), \quad q_2(x, y), \dots, \quad q_m(x, y), \dots,$$

sono ugualmente continue in  $\bar{D}_{j+n}$ . Inoltre siccome le (37) sono, per ipotesi, ugualmente limitate in  $\bar{D}_{j+n}$ , e siccome tale campo è costituito di un numero finito di quadrati le (39) e (40) risultano (cfr. n. 10) ugualmente limitate in  $\bar{D}_{j+n}$ .

Quindi le (37) sono ivi ugualmente continue, e si prosegue in modo del tutto analogo ai n. 10 e 15 determinando la successione

$$z_{1,1}(x, y), \quad z_{2,2}(x, y), \dots, \quad z_{m,m}(x, y), \dots$$

Tenuto presente che, in corrispondenza a ogni campo aperto e limitato  $D_L$  tutto costituito di punti di  $D$ , esiste almeno un quadrato  $Q_v$  che contiene nel suo interno tutti i punti di  $D_L$ , in virtù della condizione  $[R_\infty]$ , si conclude che le funzioni  $p_\infty(x, y)$ ,  $q_\infty(x, y)$  e  $z_\infty(x, y)$  risultano assolutamente continue in  $D_L$ .

In base ai teoremi dei n. 7 e 6 la funzione

$$F(x, y, z_\infty(x, y), p_\infty(x, y), q_\infty(x, y), r_\infty(x, y), s_\infty(x, y), t_\infty(x, y))$$

è assolutamente integrabile in ogni campo  $D_L$ .

Si tratta ora di dimostrare che esiste finito anche l'integrale  $I_D^{(2)}[z_\infty]$ .

A tal uopo ricordiamo, che, in virtù della (36') e per il teorema del n. 6, per ogni campo  $D_L$ , l'integrale  $I_{D_L}^{(2)}[z]$  è semicontinuo inferiormente sulla superficie  $z = z_\infty(x, y)$ . Prendiamo comunque un numero  $v > j + 1$ , consideriamo il quadrato  $Q_v \equiv [-2^v \leq x \leq 2^v, -2^v \leq y \leq 2^v]$ , e chiamiamo  $D_v'$  l'insieme di tutti i punti di  $D$  contenuti in  $Q_v$ . Preso ad arbitrio un  $\varepsilon > 0$  e non superiore all'unità, possiamo determinare un  $\bar{m}_v$  tale che per  $m > \bar{m}_v$  risulti

$$(41) \quad I_{D_v'}^{(2)}[z_{m,m}] > I_{D_v'}^{(2)}[z_\infty] - \varepsilon,$$

e siccome per la convenzione fatta all'inizio della dimostrazione  $F$  è non negativa, per la (38) ne segue

$$i + 1 > I_{D_v'}^{(2)}[z_\infty] - \varepsilon,$$

ed anche

$$i + 2 > I_{D_v'}^{(2)}[z_\infty].$$



Quindi, siccome  $F \geq 0$ , l'integrale  $I_D^{(2)}[z_\infty]$  esiste finito, e la funzione  $z_\infty(x, y)$  appartiene alla classe  $K$ .

Preso  $\varepsilon > 0$  ad arbitrio, determiniamo  $\bar{v}$  in modo che, per  $v > \bar{v}$ , sia  $I_{D-D_v}^{(2)}[z_\infty] < \varepsilon$ ; poi, fissato  $v > \bar{v}$ , determiniamo  $\bar{m}_v$  in modo che per  $m > \bar{m}_v$  abbia luogo la (41).

Essendo  $F \geq 0$  risulta

$$I_D^{(2)}[z_{m,v}] > I_D^{(2)}[z_\infty] - 2\varepsilon,$$

e per la (38), siccome  $\varepsilon$  è ad arbitrio, si conclude immediatamente che è  $I_D^{(2)}[z_\infty] = i$ , e il nostro asserto è con ciò provato.

ESEMPIO. - Sia  $D \equiv [0 \leq x < +\infty, 0 \leq y < +\infty]$ ; la funzione

$$F(x, y, z, p, q, r, t) \equiv \sqrt{r^6 + s^6 + t^6} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$$

soddisfa alle condizioni del teorema del presente numero. Infatti è

$$F \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \{ |r|^3 + |s|^3 + |t|^3 \} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \operatorname{sen}(x^2 + y^2),$$

ove l'integrale generalizzato  $\iint_D \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$  esiste finito.

## 25. - Teorema XII.

Si supponga che: 1)  $D$  sia un campo aperto di misura superficiale infinita, soddisfacente alla condizione  $[R_\infty]$  e strettamente connesso; 2)  $I_D^{(2)}[z]$  sia un integrale quasi-regolare positivo; 3) esistano due numeri  $\alpha > 0$ ,  $\mu_0 > 0$ , e tre funzioni  $G_0(u)$ ,  $G_1(u)$ ,  $\psi(x, y)$ , con  $G_0(u)$ ,  $G_1(u)$  definite per  $u \geq 0$ , non negative e tali che, per  $u \rightarrow +\infty$ , sia  $\underline{\lim} G_0(u) = l_0 > 0$ ,  $\underline{\lim} G_1(u) = l_1 > 0$ ,  $\psi(x, y)$  definita per ogni coppia  $(x, y)$  di  $D$  e tale che esista finito l'integrale generalizzato  $\iint_D \psi(x, y) dx dy$ , in modo che in ogni punto  $(x, y)$  di  $D$  e per tutti i valori finiti di  $z, p, q, r, s, t$  risulti

$$(42) \quad F(x, y, z, p, q, r, s, t) \geq \mu_0 \{ |r|^{2+\alpha} + |s|^{2+\alpha} + |t|^{2+\alpha} \} + \\ + G_0(|z|) + G_1(|p|) + G_1(|q|) + \psi(x, y).$$

Allora in ogni classe  $K$ , completa di ordine 2 nell'interno di  $D$  rispetto a  $I_D^{(2)}[z]$ , di funzioni  $z(x, y)$  appartenenti alla classe  $C_\infty^{(2)}$  esiste il minimo assoluto di  $I_D^{(2)}[z]$  <sup>(27)</sup>.

<sup>(27)</sup> Dalla proposizione del presente numero si deduce facilmente un nuovo teorema per gli integrali  $I_D^{(2)}[z]$ , sopprimendo l'ipotesi che il campo  $D$  soddisfi alla condizione  $[R_\infty]$ , e sostituendo alla (42) la disuguaglianza

$$F(x, y, z, p, q) \geq \mu_0 \{ |p|^{2+\alpha} + |q|^{2+\alpha} \} + G_0(|z|) + \psi(x, y).$$

Riprendiamo la dimostrazione del n. 24 fino a concludere che le funzioni delle successioni (39) e (40) sono ugualmente continue in  $\bar{D}_{j+n}$ . Si tratta poi, innanzi tutto, di provare che ivi esse sono anche ugualmente limitate. A tal uopo, tenuto presente che la misura superficiale di  $\bar{D}_{j+n}$  tende all'infinito per  $n \rightarrow +\infty$ , determiniamo un  $\bar{n} > 0$  tale che, per ogni  $n > \bar{n}$ , risulti  $m(\bar{D}_{j+n}) > \frac{2(i+1)}{l_1}$ .

Siccome per l'ipotesi fatta su  $G_1(u)$  esiste un numero  $\xi > 0$  tale che per ogni  $u > \xi$  risulta  $G_1(u) \geq \frac{1}{2} l_1$ , ne segue, in virtù della (42), che in ogni campo  $\bar{D}_{j+n}$ , con  $n > \bar{n}$ , esiste almeno un punto  $(x'_{m,n}, y'_{m,n})$  tale che per qualunque  $m$  è

$$|p_m(x'_{m,n}, y'_{m,n})| \leq \xi.$$

Infatti in caso contrario, (tenuta presente la convenzione  $\psi(x, y) \equiv 0$  fatta al n. 24), risulterebbe

$$I_D^{(2)}[z_n] \geq \iint_{\bar{D}_{j+n}} G_1(|p_m|) dx dy \geq \frac{1}{2} l_1 m(\bar{D}_{j+n}) > i + 1,$$

contrariamente alla (38).

Scegliamo ora un qualunque  $n > \bar{n}$  e tenuto presente che  $\bar{D}_{j+n}$  risulta costituito di un numero finito di quadrati, fissiamo in ciascuno di essi un punto. Siccome  $D$  è strettamente connesso, esiste almeno un insieme  $E_{j+n}$ , chiuso, connesso e tutto costituito di punti di  $D$ , del quale fanno parte tali punti. I punti che appartengono ad uno almeno dei due insiemi  $\bar{D}_{j+n}$ ,  $E_{j+n}$  costituiscono quindi un insieme chiuso tutto costituito di punti di  $D$  e del quale fanno parte tutti i punti  $(x'_{m,n}, y'_{m,n})$ , ( $m=1, 2, \dots$ ). Allora dall'uguale continuità delle  $p_m(x, y)$ , ( $m=1, 2, \dots$ ) in ogni insieme chiuso e tutto costituito di punti di  $D$ , si deduce che tali derivate sono ugualmente limitate in  $\bar{D}_{j+n}$ . Questo risultato è così dimostrato per  $n > \bar{n}$ , ed è quindi valido per  $n$  qualunque.

Alla stessa conclusione si perviene per le  $q_m(x, y)$ , ( $m=1, 2, \dots$ ).

Ne segue che le  $z_m(x, y)$ , ( $m=1, 2, \dots$ ) sono ugualmente continue in  $\bar{D}_{j+n}$ , e quindi anche ugualmente limitate, come si prova con un ragionamento identico a quello ora sviluppato. Siamo così ricondotti al teorema del n. 24.

OSSERVAZIONE. - Se esistono due numeri  $\mu_1 > 0$ ,  $N$ , tali che per ogni  $u \geq 0$  sia

$$G_1(u) \geq \mu_1 |u| + N,$$

l'ipotesi che il campo  $D$  soddisfi alla condizione  $[R_\infty]$  può essere soppressa.

Infatti in tal caso l'assoluta integrabilità delle  $p_\infty(x, y)$ ,  $q_\infty(x, y)$  in ogni campo  $D_L$  (vedi n. 24) segue dalla (42) in modo analogo a quanto si è visto al n. 10.

ESEMPIO. - Sia  $D \equiv [0 < x < +\infty, 0 < y < 1]$ . La funzione

$$(43) \quad F(x, y, z, p, q, r, s, t) \equiv |r|^{\frac{5}{2}} + |s|^{\frac{5}{2}} + |t|^{\frac{5}{2}} + \frac{z^2}{1+z^2}$$

non soddisfa a tutte le condizioni del teorema del presente numero, perchè ha luogo la (42) con  $G_1(u) \equiv 0$ . Tuttavia possiamo mostrare che, considerata una classe  $K$  di funzioni  $z(x, y)$  soddisfacenti alle condizioni del teorema in questione, in tale classe esiste il minimo assoluto di  $I_D^{(2)}[z]$ . Indicato con  $i$  ( $\geq 0$ ) il limite inferiore di  $I_D^{(2)}[z]$  nella classe  $K$ , consideriamo una successione minimizzante  $z_m(x, y)$ , ( $m=1, 2, \dots$ ), tale cioè che sia

$$(44) \quad I_D^{(2)}[z_m] \leq i + \frac{1}{m}.$$

Per quanto si è visto nella dimostrazione del presente numero, tutto sta a provare che le  $p_m(x, y)$ ,  $q_m(x, y)$ , ( $m=1, 2, \dots$ ) sono ugualmente limitate in ogni campo  $\bar{D}_{j+n}$ . A tal uopo consideriamo il rettangolo  $R_0 \equiv \left[1 \leq x \leq \tau + 1, \frac{1}{3} \leq y \leq \frac{2}{3}\right]$ , con  $\tau > 36$  ( $i+1$ ), che è tutto costituito di punti di  $D$ . Tenuto presente che per  $|z| > 1$  è  $F' > \frac{1}{2}$ , osserviamo (cfr. n. 17) che, in virtù delle (43) e (44), l'insieme dei punti di ciascuno dei rettangoli  $\left[1 \leq x \leq \tau + 1, \frac{1}{3} \leq y \leq \frac{4}{9}\right]$ ,  $\left[1 \leq x \leq \tau + 1, \frac{5}{9} \leq y \leq \frac{2}{3}\right]$  nei quali è  $|z_m(x, y)| > 1$  deve avere misura superficiale minore della metà dell'area di uno di tali rettangoli. Quindi c'è almeno un punto  $(x_m'', y_m'')$  di  $R_0$ , tale che  $|q_m(x_m'', y_m'')| \leq 18$ , ( $m=1, 2, \dots$ ). Allo stesso modo esiste almeno un punto  $(x'_m, y'_m)$  di  $R_0$  con  $|p_m(x'_m, y'_m)| \leq \frac{1}{6}$ . Ne segue immediatamente, in modo ben noto, che in ogni campo  $\bar{D}_{j+n}$  contenente il rettangolo  $R_0$  le  $p_m(x, y)$ ,  $q_m(x, y)$ , ( $m=1, 2, \dots$ ) sono ugualmente limitate, ecc. ecc.