ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LUIGI MARCHETTI

Riduzione alla forma canonica delle equazioni del moto di sistemi anolonomi

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 10, nº 3-4 (1941), p. 199-208

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1941_2_10_3-4_199_0>

RIDUZIONE ALLA FORMA CANONICA DELLE EQUAZIONI DEL MOTO DI SISTEMI ANOLONOMI (*)

di LUIGI MARCHETTI (Perugia).

1. - Si abbia un sistema dinamico olonomo S di coordinate lagrangiane q_h $(h=1,...., n)$, (avente perciò n gradi di libertà); imponiamo ad esso uno o più vincoli ulteriori, traducentisi in altrettante equazioni involgenti le q_h e t, del tipo

$$f_\nu(q_1, ..., q_n, t)=0, \qquad (\nu=1,...., k;\ k<n) \tag{1}$$

che supporremo *indipendenti* rispetto alle q_h.

Potremo sempre immaginare di esprimere, per le (1), k delle q mediante le rimanenti. Perciò il nuovo sistema S' che possiamo immaginare ottenuto esprimendo k delle q mediante le altre avrà grado di libertà uguale ad $n-k$.

È ben noto (¹) come l'espressione analitica del più generale spostamento infinitesimo possibile del sistema schematizzato in N punti P_i, nell'istante t, a partire dalla configurazione di coordinate q_h, sia dato dall'equazione

$$dP_i=\sum_1^n{}_r \frac{\partial P_i}{\partial q_r}dq_r+\frac{\partial P_i}{\partial t}dt, \tag{2}$$

dove i dq_r e dt sono affatto indipendenti tra loro e arbitrari. Coll'aggiunta delle (1), questi dq_r e dt non saranno più indipendenti, ma dovranno soddisfare alle seguenti equazioni:

$$\sum_1^n{}_r \frac{\partial f_\nu}{\partial q_r}dq_r+\frac{\partial f_\nu}{\partial t}dt=0, \qquad (\nu=1,...., k) \tag{3}$$

cioè ad equazioni del tipo

$$\sum^n{}_r \frac{\partial f_\nu}{\partial q_r}\dot{q}_r+\frac{\partial f_\nu}{\partial t}=0, \qquad (\nu=1,...., k), \tag{3'}$$

funzioni lineari delle *velocità* $\dot{q}_r$.

(*) Lavoro eseguito nel Seminario di Alta Matematica della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

(¹) Cfr. per es. LEVI-CIVITA e AMALDI: *Lezioni di Meccanica razionale*, Vol. I, pag. 292, Zanichelli, 1927, Bologna.

Il sistema dato viene perciò assoggettato a nuovi vincoli, che assumono, attraverso le (3) o (3′), la forma di *vincoli di mobilità.*

Abbiamo cioè che il più generale spostamento possibile del sistema è dato dalle (2), dove però gli incrementi dq_r, dt si intendono legati dalle (3).

Dati perciò le q_r e t, per ogni dt, restano arbitrari $n-k$ solamente dei dq_r, restando i rimanenti espressi mediante questi attraverso le (3).

Un vincolo di mobilità del tipo

$$\sum_1^n{}_r\, a_{r\nu}\, dq_r + a_\nu\, dt = 0, \tag{4}$$

dove le $a_{r\nu}$, a_ν sono funzioni delle q, ed eventualmente anche di t, sarà detto *anolonomo*, quando non sia deducibile per differenziazione da una relazione in termini finiti involgente le q, ed eventualmente t.

Ed in conseguenza un sistema che possegga qualche vincolo anolonomo sarà detto *sistema anolonomo.*

2. - Ciò premesso potremo pensare il sistema anolonomo come sottostante all'azione di certe forze aggiunte, e precisamente a quelle esercitate dai vincoli analiticamente espressi mediante le (4) del paragrafo precedente (*reazioni vincolari*).

Sia

$$\sum_1^n{}_h\, Q_h^*\, \delta q_h$$

il lavoro fornito al sistema da queste forze aggiunte in uno spostamento virtuale, ad un istante t, a partire dalla configurazione q_h, cioè in uno spostamento atto a far passare il sistema dalla configurazione q_h, ad un'altra *qualsiasi*, infinitamente vicina, e relativa allo stesso istante t; i δq_h saranno soggetti alla restrizione di dover sottostare alle condizioni imposte dai vincoli di mobilità.

E sia

$$\sum_1^n{}_h\, Q_h\, \delta q_h$$

Il lavoro fornito dalle originarie forze applicate (*forze attive*) nello stesso spostamento.

Poichè l'avere introdotto forze aggiunte ha ricondotto il sistema a potersi trattare (nell'impostazione del problema di moto) come olonomo, potremo per esso scrivere le equazioni di LAGRANGE, nella seconda forma,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r + Q_r^*, \qquad (r=1,\ldots, n) \tag{5}$$

dove T è l'energia cinetica appartenente al sistema e Q_r^* dovrà essere considerata come *sollecitazione reattiva secondo la coordinata lagrangiana* q_r.

Le $Q_1^*, \ldots, Q_n^*$ sono incognite; esse hanno la proprietà di *non* fornire *lavoro virtuale* per ogni spostamento *compatibile con i vincoli di mobilità.*

Dovrà perciò essere

$$Q_1^* dq_1 + \ldots + Q_n^* dq_n = 0$$

per tutti i valori dei rapporti

$$dq_1 : dq_2 : \ldots : dq_n$$

soddisfacenti alle k equazioni:

$$a_{1\nu} dq_1 + \ldots + a_{n\nu} dq_n = 0, \qquad (\nu = 1, \ldots, k).$$

Dovrà perciò essere

$$Q_r^* = \lambda_1 a_{r1} + \ldots + \lambda_k a_{rk}, \qquad (r = 1, \ldots, n).$$

Dalle $n+k$ equazioni

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r + \sum_{1}^{k}{}_i \lambda_i a_{ri}, & (r = 1, \ldots, n) \\ \sum_{1}^{n}{}_r a_{r\nu} \dot{q}_r + a_\nu = 0, & (\nu = 1, \ldots, k) \end{cases}$$

indipendenti potranno essere determinate le $n+k$ incognite $q_1, q_2, \ldots, q_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

Il problema è così ricondotto all' integrazione di questo sistema.

3. - Ammettiamo ora che le forze date derivino da una funzione delle forze U. Introdotta la funzione lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$ come

$$L = T + U$$

ed eseguita la ben nota trasformazione di POISSON

$$p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h},$$

le equazioni (5) prenderanno la forma

$$\frac{dp_r}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_r} + Q_r^*, \qquad (r = 1, \ldots, n). \tag{6}$$

Introduciamo ora la funzione hamiltoniana

$$H(p, q, t) = \sum_{1}^{n}{}_r p_r \dot{q}_r - L.$$

Le (6) potranno essere scritte

$$\frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} + Q_r^*, \qquad (r = 1, \ldots, n),$$

oltrechè sussisteranno le altre n relazioni

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \qquad (r = 1, \ldots, n).$$

Siamo così arrivati per sistemi anolonomi ad equazioni del moto in una forma *molto simile* a quella *canonica* dei sistemi olonomi; il sistema delle $2n$ equazioni differenziali del primo ordine

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{dp_r}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_r} + Q_r^* \\[2mm] \dfrac{dq_r}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_r} \end{cases} \qquad (r = 1, \ldots, n)$$

sarà perciò da noi detto: *sistema canonico generalizzato.*

Non è inutile far notare come una volta risolto il problema del moto e determinate le Q^*, nel caso in cui tali forze reattive derivino da una funzione delle forze potremo considerare un' unica funzione delle forze U_1, relativa a $Q + Q^*$, ottenendo in tal caso, invece delle (7), le equazioni

$$(7') \qquad \begin{cases} \dfrac{dp_r}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_r} \\[2mm] \dfrac{dq_r}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_r} \end{cases} \qquad (r = 1, \ldots, n)$$

raggiungendo così per le equazioni del moto la forma canonica classica.

4. - Vediamo ora, prescindendo dalla risoluzione del problema del moto e quindi dalla effettiva struttura delle Q^*, di arrivare alle equazioni canoniche classiche operando, in (7), sulle p, sulle q e su t con una opportuna trasformazione.

Si abbia un generico sistema differenziale del primo ordine

$$(8) \qquad dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_{2n} = X_1 : X_2 : \ldots : X_{2n}$$

dove le $X_1, X_2, \ldots, X_{2n}$ sono assegnate funzioni di $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$, regolari in un certo campo.

Consideriamo ora uno pfaffiano (2)

$$(9) \qquad \psi = \sum_{1}^{2n}{}_i \, Y_i \, dx_i,$$

in cui le Y_i designano $2n$ funzioni finite e continue, insieme alle derivate prime, delle x, regolari entro un dato campo, *tali* che il sistema (8) possa essere

(2) Cfr. per lo sviluppo delle teorie sugli pfaffiani l'opera di E. GOURSAT: *Leçons sur le problème de Pfaff*, Paris, J. Hermann, 1922.

considerato come l'associato allo pfaffiano (9), e questo evidentemente può sempre farsi.

Per le (8), il sistema associato a (9)

$$(8') \qquad \sum_{1}^{2n}{}_i \left(\frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - \frac{\partial Y_j}{\partial x_i}\right) dx_i = 0, \qquad (j=1,...., 2n)$$

potrà scriversi

$$(8'') \qquad \sum_{1}^{2n}{}_i \left(\frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - \frac{\partial Y_j}{\partial x_i}\right) X_i = 0, \qquad (j=1,...., 2n).$$

Abbiamo visto nel paragrafo precedente che le equazioni del moto per un sistema anolonomo prendevano la forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_r}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_r} + Q_r^* \\ \dfrac{dq_r}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_r} \end{cases} \qquad (r=1,...., n)$$

equivalente a

$$(7'') \qquad dp_1 : .... : dp_n : dq_1 : .... : dq_n : dt = \\ = -\frac{\partial H}{\partial q_1} + Q_1^* : .... : -\frac{\partial H}{\partial q_n} Q_n^* : \frac{\partial H}{\partial p_1} : .... : \frac{\partial H}{\partial p_n} : 1.$$

Per quanto abbiamo fatto precedentemente notare possiamo considerarlo come sistema associato ad un certo pfaffiano $\psi(p\,;\,q\,;\,t)$.

Operiamo ora sulle p, sulle q e su t con la trasformazione

$$(10) \qquad \begin{cases} P_r = P_r(p, q, t) \\ Q_r = Q_r(p, q, t) \\ T = T(p, q, t) \end{cases} \qquad (r=1,...., n),$$

invertibile entro un certo campo.

Se tale trasformazione mi fa

$$(11) \qquad \psi = \sum_{1}^{n}{}_r P_r\, dQ_r - K dT + d\Omega,$$

indicando $d\Omega$ il differenziale esatto di una funzione $\Omega(P, Q, T)$, e K, arbitrariamente prefissata, una funzione di $Q_1,...., Q_n, P_1,...., P_n, T$, il sistema trasformato, come è ben noto ([3]), avrà la forma canonica

$$(7''') \qquad \begin{cases} \dfrac{dP_r}{dT} = -\dfrac{\partial K}{\partial Q_r} \\ \dfrac{dQ_r}{dt} = \dfrac{\partial K}{\partial P_r} \end{cases} \qquad (r=1,...., n).$$

([3]) Cfr., per es. Levi-Civita e Amaldi, loco citato, pag. 311, Vol. II, Parte II.

Notiamo che esistendo k equazioni fra le q esprimenti vincoli di mobilità, anche le Q *non saranno indipendenti, ma fra le Q, P, T sussisteranno altrettante relazioni.*

Lo pfaffiano a secondo membro di (11) potrà scriversi, tenendo conto delle (10):

$$\sum_{1}^{n}{}_l P_l \left\{ \sum_{1}^{n}{}_i \left(\frac{\partial Q_l}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial Q_l}{\partial q_i} dq_i \right) + \frac{\partial Q_l}{\partial t} dt \right\} - K \left\{ \sum_{1}^{n}{}_i \left(\frac{\partial T}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} dt \right) + \frac{\partial T}{\partial t} dt \right\} + d\Omega.$$

Indicando per semplicità di notazioni $q_1, \ldots, q_n$, $p_1, \ldots, p_n$, t rispettivamente con $x_1, \ldots, x_{2n+1}$, tale espressione prenderà la forma

$$\sum_{1}^{2n+1}{}_i \left\{ \sum_{1}^{n}{}_l P_l \frac{\partial Q_l}{\partial x_i} - K \frac{\partial T}{\partial x_i} \right\} dx_i + d\Omega,$$

ed il sistema associato a tale pfaffiano, quando al posto di $dx_1, \ldots, dx_{2n+1}$ si sostituiscano le quantità proporzionali

$$-\frac{\partial H}{\partial q_1} + Q_1^*, \ldots, \quad -\frac{\partial H}{\partial q_n} + Q_n^*, \quad \frac{\partial H}{\partial p_1}, \ldots, \quad \frac{\partial H}{\partial p_n}, \quad 1$$

(che verranno momentaneamente indicate rispettivamente con $X_1, \ldots, X_{2n+1}$) si scriverà:

$$\sum_{1}^{2n+1}{}_i \left\{ \sum_{1}^{n}{}_l \left(\frac{\partial P_l}{\partial x_j} \frac{\partial Q_l}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 Q_l}{\partial x_i \partial x_j} P_l \right) - \frac{\partial K}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_i} - K \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} - \right.$$
$$\left. - \sum_{1}^{n}{}_l \left(\frac{\partial P_l}{\partial x_i} \frac{\partial Q_l}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 Q_l}{\partial x_j \partial x_i} P_l \right) + \frac{\partial K}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_j} + K \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_i} \right\} X_i = 0, \qquad (j = 1, \ldots, 2n+1)$$

cioè

$$(12) \quad \sum_{1}^{2n+1}{}_i \left\{ \sum_{1}^{n}{}_l \left(\frac{\partial P_l}{\partial x_j} \frac{\partial Q_l}{\partial x_i} - \frac{\partial P_l}{\partial x_i} \frac{\partial Q_l}{\partial x_j} \right) X_i - \left(\frac{\partial K}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{\partial K}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) X_i \right\} = 0, \quad (j = 1, \ldots, 2n+1).$$

Introducendo le parentesi di LAGRANGE ([4]), tali equazioni prenderanno la forma

$$(12') \quad \sum_{1}^{2n+1}{}_i [x_j, x_i] X_i - \sum_{1}^{2n+1}{}_i \left(\frac{\partial K}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{\partial K}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) X_i = 0, \qquad (j = 1, \ldots, 2n+1).$$

([4]) Si abbiano $2n$ funzioni $u_1, \ldots, u_n$, $v_1, \ldots, v_n$, dei $2n$ argomenti $x_1, \ldots, x_{2n}$. Chiameremo « *Parentesi di Lagrange* » relativa a due argomenti qualunque x_r e x_s, l'espressione

$$\sum_{1}^{n}{}_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_r} \frac{\partial v_i}{\partial x_s} - \frac{\partial u_i}{\partial x_s} \frac{\partial v_i}{\partial x_r} \right)$$

e verrà indicata col simbolo: $[x_r, x_s]$.

E ritornando alle p, q, t:

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sum_1^n{}_i \left\{ [q_s, q_i] \frac{\partial H}{\partial p_i} + [q_s, p_i]\left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i^*\right)\right\} + [q_s, t] - \\
&\quad - \sum_1^n{}_i \left\{ \left(\frac{\partial K}{\partial q_s}\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial K}{\partial q_i}\frac{\partial T}{\partial q_s}\right)\frac{\partial H}{\partial p_i} + \left(\frac{\partial K}{\partial q_s}\frac{\partial T}{\partial p_i} - \frac{\partial K}{\partial p_i}\frac{\partial T}{\partial q_s}\right)\left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i^*\right)\right\} - \\
&\quad - \left(\frac{\partial K}{\partial q_s}\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial K}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial q_s}\right) = 0, \qquad (s=1, 2, \ldots, n) \\
&\sum_1^n{}_i \left\{ [p_s, q_i] \frac{\partial H}{\partial p_i} + [p_s, p_i]\left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i^*\right)\right\} + [p_s, t] - \\
&\quad - \sum_1^n{}_i \left\{ \left(\frac{\partial K}{\partial p_s}\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial K}{\partial q_i}\frac{\partial T}{\partial p_s}\right)\frac{\partial H}{\partial p_i} + \left(\frac{\partial K}{\partial p_s}\frac{\partial T}{\partial p_i} - \frac{\partial K}{\partial p_i}\frac{\partial T}{\partial p_s}\right)\left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i^*\right)\right\} - \\
&\quad - \left(\frac{\partial K}{\partial p_s}\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial K}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial p_s}\right) = 0, \qquad (s=1, 2, \ldots, n) \\
&\sum_1^n{}_i \left\{ [t, q_i] \frac{\partial H}{\partial p_i} + [t, p_i]\left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i^*\right)\right\} - \\
&\quad \sum_1^n{}_i \left\{ \left(\frac{\partial K}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial K}{\partial q_i}\frac{\partial T}{\partial t}\right)\frac{\partial H}{\partial p_i} + \left(\frac{\partial K}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial p_i} - \frac{\partial K}{\partial p_i}\frac{\partial T}{\partial t}\right)\left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i^*\right)\right\} = 0.
\end{aligned}\right.$$

A queste equazioni bisognerà unire le

$$Q_r^* = \sum_1^k{}_s\, a_{rs}\lambda_s, \qquad (r=1, 2, \ldots, n)$$

di pag. 201, mediante le quali le n incognite Q_r^* si esprimono in funzione delle k $(<n)$ incognite λ_s, e le (4) di pag. 200

$$(a) \qquad \sum_1^n{}_r\, a_{rs}\dot{q}_r + a_s = 0$$

le quali (ove le $\dot{q}$ si esprimano mediante le p) costituiscono un ulteriore sistema di k equazioni fra le q, p, t.

In sostanza, a definire la sostituzione si hanno $2n+1+k$ equazioni [le 13 e le (a)] fra altrettante funzioni incognite $[P, Q, T, \lambda]$: intendendosi fissata K.

Abbiamo così che *condizione sufficiente perchè una trasformazione riduca un sistema del tipo* (7) *alla forma canonica* $(7''')$ *è che le P, le Q e T soddisfino alle $2n+1$ equazioni* (13), in cui le Q^* si siano già determinate nel modo sopraddetto.

Ma è noto (5) che condizione *necessaria* perchè un sistema sia in forma canonica è che lo pfaffiano al quale è associato sia del tipo (11); non facendo le (13) che ridurre a questo tipo lo pfaffiano cui era associato il sistema dato, possiamo concludere che le (13) ci dànno anche la condizione *necesssaria.*

Vediamo ora quale forma assumono le (13) *quando nella trasformazione* (10) *si faccia* $T=t$.

Tenendo conto che in tale ipotesi, per qualunque r, è

$$\frac{\partial T}{\partial p_r}=\frac{\partial T}{\partial q_r}=0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial T}{\partial t}=1,$$

avremo:

$$(13') \left\{ \begin{aligned} &\sum_1^n{}_i \left\{ [q_s, q_i]\frac{\partial H}{\partial p_i}+[q_s, p_i]\left(-\frac{\partial H}{\partial q_i}+Q_i^*\right)\right\}+[q_s, t]-\frac{\partial K}{\partial q_s}=0, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (s=1, 2,\ldots, n) \\ &\sum_1^n{}_i \left\{ [p_s, q_i]\frac{\partial H}{\partial p_i}+[p_s, p_i]\left(-\frac{\partial H}{\partial q_i}+Q_i^*\right)\right\}+[p_s, t]-\frac{\partial K}{\partial p_s}=0, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (s=1, 2,\ldots, n) \\ &\sum_1^n{}_i \left\{ [t, q_i]\frac{\partial H}{\partial p_i}+[t, p_i]\left(-\frac{\partial H}{\partial q_i}+Q_i^*\right)\right\}+\sum_1^n{}_i \left\{\frac{\partial K}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}+\frac{\partial K}{\partial p_i}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_i}+Q_i^*\right)\right\}=0. \end{aligned}\right.$$

Unite alle (α), tali equazioni costituiscono un sistema nelle $2n+k$ incognite P, Q, λ.

Per avere un sistema di $2n+k+1$ equazioni in un *ugual* numero di incognite, si potrà assumere K come nuova incognita, al posto di T già prefissata.

Operiamo ora con una trasformazione del tipo

$$(10') \qquad \left\{ \begin{aligned} P_r&=P_r(p, q) \\ Q_r&=Q_r(p, q) \end{aligned}\right. \qquad (r=1, 2,\ldots, n)$$

e facciamo inoltre due ipotesi:

1a) Il sistema sia conservativo, e quindi la funzione H non contenga esplicitamente t e le (α) di pag. 205 si riducano alle

$$(\beta) \qquad \sum_1^n{}_r\, a_{rs}\, \dot{q}_r=0$$

con le a_{rs} indipendenti da t.

2a) La funzione K coincida con H.

(5) Cfr. MORERA: *Sulla trasformazione delle equazioni differenziali di Hamilton,* in Rend. Acc. Lincei, Vol. XII, 1° sem. 1903, pp. 113-122

Le equazioni (13) si ridurranno alle

$$(13'') \quad \begin{cases} \sum_1^n {}_i \left\{ [q_s, q_i] \frac{\partial H}{\partial p_i} + [q_s, p_i] \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i^* \right) \right\} - \frac{\partial H}{\partial q_s} = 0, & (s=1, 2, \ldots, n) \\ \sum_1^n {}_i \left\{ [p_s, q_i] \frac{\partial H}{\partial p_i} + [p_s, p_i] \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i^* \right) \right\} - \frac{\partial H}{\partial p_s} = 0, & (s=1, 2, \ldots, n) \\ \sum_1^n {}_i \frac{\partial H}{\partial p_i} Q_i^* = 0. & \end{cases}$$

Di queste l' ultima si può scrivere

$$\sum_1^n {}_i Q_i^* \dot{q}_i = 0,$$

meccanicamente interpretabile, nel caso attuale, come quella che definisce la proprietà fondamentale delle reazioni vincolari (6); essa è d'altronde conseguenza delle (β) e delle

$$Q_i^* = \sum_1^k {}_\nu a_{i\nu} \lambda_\nu .$$

Le equazioni indipendenti del problema sono dunque le prime $2n$ delle (13″) e le (β), mentre le funzioni incognite sono le P, Q, λ, in numero di $2n+k$, altrettante quante le equazioni.

Supponiamo che le q siano *indipendenti*. Sarà allora

$$Q_i^* \equiv 0, \qquad (i=1, 2, \ldots, n);$$

avremo dunque un sistema nella forma canonica:

$$\begin{cases} \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \\ \frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r} \end{cases} \qquad (r=1, 2, \ldots, n).$$

Si tratterà di determinare una trasformazione che *conservi* tale forma canonica, si tratterà cioè di trovare alcune condizioni che ci assicurino la natura *canonica* della trasformazione.

Le (13″) in tale ipotesi prendono la forma

$$\begin{cases} \sum_1^n {}_i \left\{ [q_s, q_i] \frac{\partial H}{\partial p_i} - [q_s, p_i] \frac{\partial H}{\partial q_i} \right\} - \frac{\partial H}{\partial q_s} = 0, & (s=1, 2, \ldots, n) \\ \sum_1^n {}_i \left\{ [p_s, q_i] \frac{\partial H}{\partial p_i} - [p_s, p_i] \frac{\partial H}{\partial q_i} \right\} - \frac{\partial H}{\partial p_s} = 0, & (s=1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

---

(6) Vedi § 2.

Si vede facilmente che il sistema ammette la soluzione

$$[p_i, p_s] = 0, \quad [p_s, q_i] = \delta_{si}, \quad [q_s, q_i] = 0$$

che non sono altro, come già si sa (7), che le condizioni di *completa canonicità* richieste.

5. - Ora che siamo arrivati alle equazioni del moto in forma canonica per sistemi anolonomi, possiamo applicare a tali equazioni tutti i risultati della teoria delle trasformazioni canoniche, in particolare il classico metodo di integrazione di JACOBI (8), il che manifestamente non era possibile prima della riduzione alla forma canonica di HAMILTON.

(7) Cfr. per es. LEVI-CIVITA e AMALDI, loco citato, Vol. II, Parte II, pag. 321.

(8) Cfr. ibid. pag. 362 e s. o anche JUVET: *Mécanique analytique et théorie des quanta*, Ed. Blanchard, Paris (1926), pag. 26 e s.