ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LEONIDA TONELLI

Su un nuovo tipo di problemi di calcolo delle variazioni

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 10, nº 3-4 (1941), p. 167-189

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1941_2_10_3-4_167_0>

SU UN NUOVO TIPO DI PROBLEMI DI CALCOLO DELLE VARIAZIONI

di LEONIDA TONELLI (Roma).

Una questione di alta tecnica, sottoposta all'esame dell' Istituto per le Applicazioni del Calcolo, del nostro Consiglio Nazionale delle Ricerche, si è tradotta nella dimostrazione dell'esistenza del minimo di un certo integrale curvilineo, sotto particolari condizioni. Questo problema di minimo non rientra in nessuno dei tipi considerati sino ad ora nel Calcolo delle Variazioni; perciò il direttore dell'indicato Istituto, prof. MAURO PICONE, mi ha invitato a studiarlo. Ed io ho potuto risolverlo completamente con un'analisi la quale mi ha condotto a stabilire un teorema generale, che forma l'oggetto della presente Memoria.

* * *

Nel piano (x, y), che immaginiamo riferito ad un sistema cartesiano ortogonale di assi x e y, consideriamo il rettangolo R costituito da tutti i punti (x, y) soddisfacenti alle disuguaglianze

$$X_0 \leqslant x \leqslant X_1, \qquad Y_0 \leqslant y \leqslant Y_1,$$

essendo X_0, X_1, Y_0, Y_1 costanti date, soddisfacenti alle disuguaglianze $X_0 < X_1$, $Y_0 < Y_1$. Consideriamo, inoltre, definite sull'intervallo (Y_0, Y_1), due funzioni continue $\varphi(y)$ e $\psi(y)$, delle quali la prima ammetta finite e continue le due derivate $\varphi'(y)$ e $\varphi''(y)$ e soddisfi alle condizioni

$$\varphi(Y_1)=0, \quad \varphi(y)>0 \quad \text{per} \quad Y_0 \leqslant y < Y_1, \tag{1}$$

e la seconda sia tale che

$$\psi(Y_1)<0. \tag{2}$$

Fissato un valore Y_i, in modo che risulti

$$Y_0 \leqslant Y_i < Y_1, \tag{3}$$

e detta a una costante positiva (>0), il problema di Calcolo delle Variazioni, a cui sopra abbiamo accennato, è quello del minimo dell' integrale

$$\int_{X_0}^{X_1} \frac{ay'(x)+\sqrt{a^2y'^2(x)+\varphi(y(x))}}{\varphi(y(x))}\,dx, \tag{4}$$

nella classe di tutte le funzioni $y(x)$, definite sull'intervallo (X_0, X_1), assolutamente continue, tali che $y(X_0) = Y_i$, $Y_0 \leqslant y(x) \leqslant Y_1$ in tutto (X_0, X_1), $y'(x) \geqslant \psi(y(x))$ in quasi tutto (X_0, X_1), e tali, infine, che l'espressione sotto il segno dell'integrale (4) risulti integrabile (nel senso del LEBESGUE) sull'intervallo (X_0, X_1).

* * *

L'integrale (4) possiamo considerarlo come appartenente al tipo generale che ora preciseremo.

Sia $F(y, x', y')$ una funzione reale ad un valore, delle tre variabili reali y, x', y', definita per ogni y dell'intervallo (Y_0, Y_1) e per ogni coppia x', y' di numeri reali non ambedue nulli, la quale, per tutti gli y tali che $Y_0 \leqslant y < Y$, e per tutte le coppie x', y' dette, risulti continua, insieme con le sue derivate parziali dei primi due ordini, e, escluse al più le coppie $x' = 0$, $y' = r$ con $r < 0$, soddisfacente alla disuguaglianza

$$(5) \qquad F(y, x', y') > 0.$$

Inoltre, sempre per tutti gli y tali che $Y_0 \leqslant y < Y_1$ e per tutte le coppie (x', y') di numeri non ambedue nulli, la $F(y, x', y')$ sia positivamente omogenea di grado 1 rispetto ad x' e y' (cioè tale che, per ogni $k > 0$, risulti $F(y, kx', ky') = kF(y, x', y')$), abbia l'invariante di WEIERSTRASS $F_1 \equiv \frac{F_{x'x'}}{y'^2} \equiv -\frac{F_{x'y'}}{x'y'} \equiv \frac{F_{y'y'}}{x'^2}$ maggiore di zero, vale a dire

$$(6) \qquad F_1(y, x', y') > 0,$$

ed abbia la derivata parziale $F_{x'}$, nulla per $x' = 0$, e cioè

$$(7) \qquad F_{x'}(y, 0, y') = 0,$$

per $Y_0 \leqslant y < Y_1$, $y' \neq 0$.

Infine, esista una costante $\gamma > 0$ in modo che, per tutti gli y tali che $Y_0 \leqslant y < Y_1$ e per tutte le coppie (x', y') soddisfacenti alle disuguaglianze $x'^2 + y'^2 \neq 0$, $x' \geqslant 0$, risulti

$$(8) \qquad F(y, x', y') > \gamma y'.$$

Posto

$$(9) \qquad F(y, 1, y') \equiv f(y, y'),$$

l'integrale

$$\int_{X_0}^{X_1} \frac{f(y(x), y'(x))}{\varphi(y(x))}\, dx$$

comprende, come caso particolare, l'integrale (4) quando si scelga per funzione $F(y, x', y')$ la $ay' + \sqrt{a^2y'^2 + \varphi(y)x'^2}$. Per questa particolare funzione F, l'invariante di WEIERSTRASS F_1 è

$$\frac{a^2\varphi(y)}{(a^2y'^2 + \varphi(y)x'^2)^{3/2}}$$

e la disuguaglianza (8) risulta verificata prendendo $\gamma = a$.

* * *

In ciò che segue, dimostreremo il seguente teorema:

Nella classe K di tutte le funzioni $y(x)$ definite in (X_0, X_1), assolutamente continue, tali che

$$y(X_0) = Y_1, \tag{10}$$

$$Y_0 \leqslant y(x) \leqslant Y_1, \qquad \text{in tutto} \quad (X_0, X_1), \tag{11}$$

$$y'(x) \geqslant \psi(y(x)), \qquad \text{in quasi tutto} \quad (X_0, X_1), \tag{12}$$

e tali, inoltre, che la funzione $\frac{1}{\varphi(y(x))} f(y(x), y'(x))$ [1] *risulti integrabile (nel senso del Lebesgue) sull'intervallo* (X_0, X_1), *l'integrale*

$$I[y(x)] \equiv \int_{X_0}^{X_1} \frac{f(y(x), y'(x))}{\varphi(y(x))}\, dx \tag{13}$$

ammette il minimo assoluto.

* * *

1. - Osserviamo, in primo luogo, che, in virtù della (9) e delle proprietà ammesse per la funzione $F(y, x', y')$, la $f(y, y')$ risulta, per ogni y tale che $Y_0 \leqslant y < Y_1$ e per ogni y' finito, finita, sempre > 0, continua, con derivate parziali dei primi due ordini, finite e continue.

Inoltre, avendosi da (9)

$$f_{y'}(y, y') = F_{y'}(y, 1, y'), \qquad f_{y'y'}(y, y') = F_{y'y'}(y, 1, y'),$$

e, per la (6),

$$F_{y'y'}(y, 1, y') = F_1(y, 1, y') > 0,$$

si ha

$$f_{y'y'}(y, y') > 0, \tag{14}$$

la quale disuguaglianza vale per ogni y tale che $Y_0 \leqslant y < Y_1$ e per ogni y' finito.

---

[1] Ove è $y(x) = Y_1$, e quindi $\varphi(y(x)) = \varphi(Y_1) = 0$, si porrà $\frac{1}{\varphi(y(x))} f(y(x), y'(x)) = 0$.

2. - Proviamo che *la classe K non è vuota.*

Diciamo Ψ un numero maggiore di zero e maggiore anche del massimo della funzione $\psi(y)$ in tutto l'intervallo (Y_0, Y_1). Allora, per ogni y dell'intervallo (Y_0, Y_1), risulta

$$\psi(y) < \Psi. \tag{15}$$

Inoltre, per la continuità della $\psi(y)$ e per essere, secondo la (2), $\psi(Y_1) < 0$, possiamo determinare un Y' tale che $Y_0 < Y' < Y_1$ e in modo che, per ogni y soddisfacente alle disuguaglianze $Y' \leqslant y \leqslant Y_0$, sia

$$\psi(y) < 0. \tag{16}$$

Ciò posto, indicato con η il maggiore dei due numeri Y' e Y_i, e detto ξ il numero $(\geqslant X_0)$ definito dall'uguaglianza

$$\xi = X_0 + \frac{\eta - Y_i}{\Psi},$$

consideriamo la funzione $y(x)$ definita da

$$y(x) = Y_i + (x - X_0)\,\Psi$$

nella parte comune ai due intervalli (X_0, X_1) e (X_0, ξ), e da

$$y(x) = \eta$$

nella parte di (X_0, X_1) eventualmente esterna a (X_0, ξ).

La $y = y(x)$, così definita su tutto (X_0, X_1), è assolutamente continua, verifica la (10) e, in tutto (X_0, X_1), le disuguaglianze

$$Y_0 \leqslant y(x) < Y_1.$$

Inoltre, poichè nella parte di (X_0, X_1) contenuta in (X_0, ξ) è $y'(x) = \Psi$, onde, per la (15),

$$y'(x) = \Psi > \psi(y(x)),$$

mentre in quella eventualmente esterna a (X_0, ξ) è $y'(x) = 0$ con $y(x) = y$, onde, per la (16),

$$y'(x) = 0 > \psi(\eta) = \psi(y(x)),$$

la $y(x)$ qui considerata verifica anche la (12). Essa poi rende integrabile la funzione $\frac{1}{\varphi(y(x))} f(y(x), y'(x))$; e pertanto appartiene alla classe K, e questa classe *non è vuota.*

3. - Dimostriamo che *nessuna funzione $y(x)$ della classe K può raggiungere il valore Y_1.*

Sia $y = y(x)$ una funzione assolutamente continua, definita su tutto l'intervallo (X_0, X_1) e tale che $y(X_0) = Y_i$ e $Y_0 \leqslant y(x) \leqslant Y_1$ in tutto l'intervallo detto

Inoltre, per almeno un valore di x di (X_0, X_1) sia $y(x) = Y_1$. Affermiamo che la funzione $\frac{1}{\varphi(y(x))} f(y(x), y'(x))$ *non è integrabile* su (X_0, X_1).

Indichiamo con $\bar{x}$ il minimo valore di x di (X_0, X_1) in cui è $y(x) = Y_1$. Risulta $X_0 < \bar{x} \leqslant X_1$, $y(\bar{x}) = Y_1$ e $Y_0 \leqslant y(x) < Y_1$ per $X_0 \leqslant x < \bar{x}$.

Detto x_1 un qualunque valore maggiore di X_0 e minore di $\bar{x}$, è, per $X_0 \leqslant x \leqslant x_1$, e indicando con φ_1 il minimo valore (certamente >0) di $\varphi(y(x))$ nell' intervallo $(0, x_1)$,

$$0 < \frac{1}{\varphi(y(x))} f(y(x), y'(x)) \leqslant \frac{1}{\varphi_1} f(y(x), y'(x)), \tag{17}$$

dove intendiamo di non considerare quei punti x in cui la $y'(x)$ non esiste finita.

Chiamato m_1 il massimo della $y(x)$ in tutto (X_0, x_1), è $Y_0 \leqslant m_1 < Y_1$, e la funzione $F(y, x', y')$, per tutti gli y tali che $Y_0 \leqslant y \leqslant m_1$ e per tutte le coppie (x', y') soddisfacenti all' uguaglianza $x'^2 + y'^2 = 1$, ammette un massimo M_1 (>0). Pertanto, per essere la $F(y, x', y')$ positivamente omogenea di grado 1 rispetto ad x' e y', sarà, per tutti gli y tali che $Y_0 \leqslant y \leqslant m_1$ e per tutte le coppie (x', y') di numeri non ambedue nulli,

$$\begin{aligned} F(y, x', y') &= \sqrt{x'^2 + y'^2}\, F\left(y, \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right) \\ &\leqslant M_1 \sqrt{x'^2 + y'^2}. \end{aligned}$$

Di qui e dalle (9) e (17) segue allora, per quasi tutti gli x dell' intervallo (X_0, x_1),

$$\begin{aligned} 0 < \frac{1}{\varphi(y(x))} f(y(x), y'(x)) \leqslant \frac{1}{\varphi_1} F(y(x), 1, y'(x)) &\leqslant \frac{M_1}{\varphi_1} \sqrt{1 + y'^2(x)} \\ &\leqslant \frac{M_1}{\varphi_1} (1 + |y'(x)|). \end{aligned} \tag{18}$$

Per essere la $y(x)$ assolutamente continua in (X_0, X_1), $|y'(x)|$ risulta integrabile su tutto (X_0, X_1); perciò è tale anche $\frac{M_1}{\varphi_1}(1 + (y'(x))$ e la (18) mostra che in (X_0, x_1) è integrabile $\frac{1}{\varphi(y(x))} f(y(x), y'(x))$ e che l' integrale

$$\int_{X_0}^{x_1} \frac{f(y(x), y'(x))}{\varphi(y(x))}\, dx$$

esiste finito ed ha un valore positivo.

L' integrale ora scritto è, per la (17), funzione crescente di x_1 ed ammette limite per $x_1 \to \bar{x} - 0$. Proviamo che tale limite è $+\infty$.

Poichè la derivata $\varphi'(y)$ ha valore finito per $y = Y_1$, preso un numero *positivo* $\lambda > |\varphi'(Y_1)|$, potremo determinare un intervallo per la y, $(Y_1-\delta, Y_1)$, in modo che su di esso, escluso Y_1, sia sempre

$$\varphi(y) < -\lambda(y-Y_1).$$

Allora, per ogni y tale che $Y_1-\delta \leqslant y < Y_1$, risulterà

$$\frac{1}{\varphi(y)} > \frac{1}{-\lambda(y-Y_1)}.$$

Essendo poi $y(\bar{x}) = Y_1$, potremo determinare un $\delta' > 0$ in modo che, per ogni x dell'intervallo $(\bar{x}-\delta', \bar{x})$, escluso $x=\bar{x}$, risulti

$$Y_1 - \delta \leqslant y(x) < Y_1,$$

e quindi

$$\frac{1}{\varphi(y(x))} > \frac{1}{-\lambda[y(x)-Y_1]}.$$

Se ora supponiamo $\bar{x}-\delta' \leqslant x' < x_1 < \bar{x}$, abbiamo, tenuto conto di (8) e (9),

$$\int_{x'}^{x_1} \frac{1}{\varphi(y(x))} f(y(x), y'(x))\,dx > \int_{x'}^{x_1} \frac{1}{-\lambda[y(x)-Y_1]} f(y(x), y'(x))\,dx$$
$$> \int_{x'}^{x_1} \frac{\gamma\, y'(x)}{-\lambda[y(x)-Y_1]}\,dx = -\frac{\gamma}{\lambda}\int_{x'}^{x_1} \frac{y'(x)}{y(x)-Y_1}\,dx$$
$$= -\frac{\gamma}{\lambda}\int_{C[x',\,x_1]} \frac{dy}{y-Y_1},$$

dove abbiamo indicato con $C[x', x_1]$ la curva (rettificabile) di equazione $y=y(x)$, per $x' \leqslant x \leqslant x_1$. Applicando all'ultimo integrale scritto il teorema di GAUSS-GREEN, otteniamo

$$\int_{x'}^{x_1} \frac{1}{\varphi(y(x))} f(y(x), y'(x))\,dx > -\frac{\gamma}{\lambda}\int_{y(x')}^{y(x_1)} \frac{dy}{y-Y_1} \tag{19}$$
$$= -\frac{\gamma}{\lambda}\Big[\log|y-Y_1|\Big]_{y(x')}^{y(x_1)} = -\frac{\gamma}{\lambda}\log\left|\frac{y(x_1)-Y_1}{y(x')-Y_1}\right|,$$

e di qui segue che, per $x_1 \to \bar{x}-0$, è

$$\int_{x'}^{x_1} \frac{1}{\varphi(y(x))} f(y(x), y'(x))\,dx \to +\infty.$$

Ciò prova che $\frac{1}{\varphi(y(x))} f(y(x), y'(x))$ *non è integrabile* su (X_0, X_1) e quindi che nessuna funzione $y(x)$ della classe K può raggiungere il valore Y_1.

4. - Riprendiamo il numero λ considerato nel n.° 3, e supponiamo che il δ, pure ivi considerato, sia tale da rendere $Y_1-\delta > Y_i$. Indichiamo poi con Y^* un numero che verifichi le disuguaglianze

$$Y_1-\delta < Y^* < Y_1 \tag{20}$$

$$-\frac{\gamma}{\lambda}\log\left|\frac{Y^*-Y_1}{\delta}\right| > I_0+1, \tag{21}$$

dove I_0 rappresenta il valore dell'integrale $I[y]$ relativo alla funzione della classe K costruita nel n.° 2. Ciò posto, affermiamo che, per ogni funzione $y(x)$ della classe K soddisfacente alla disuguaglianza

$$I[y(x)] < I_0+1, \tag{22}$$

è sempre, in tutto (X_0, X_1),

$$y(x) < Y^*. \tag{23}$$

Supponiamo, infatti, che, per una particolare funzione $\bar{y}(x)$ di K verificante la (22), si abbia, in qualche punto di (X_0, X_1), $\bar{y}(x)=Y^*$.

Diciamo x^* il minimo valore di x di (X_0, X_1) in cui vale l'uguaglianza ora scritta; e poi indichiamo con x_* il massimo valore degli x minori di x^* e tali che $\bar{y}(x)=Y_1-\delta$. Poichè è $\bar{y}(X_0)=Y_i < Y_1-\delta$, tale x_* esisterà sicuramente. Allora, in tutto l'intervallo (x_*, x^*), sarà $Y_1-\delta \leqslant \bar{y}(x) \leqslant Y^* < Y_1$ e varrà perciò, per questa $\bar{y}(x)$, la (19), vale a dire la

$$\int_{x_*}^{x^*}\frac{1}{\varphi(\bar{y}(x))}f(\bar{y}(x), \bar{y}'(x))\,dx > -\frac{\gamma}{\lambda}\log\left|\frac{\bar{y}(x^*)-Y_1}{\bar{y}(x_*)-Y_1}\right| = -\frac{\gamma}{\lambda}\log\left|\frac{Y^*-Y_1}{\delta}\right|$$

onde risulterà, per la (21),

$$\int_{x_*}^{x^*}\frac{1}{\varphi(\bar{y}(x))}f(\bar{y}(x), \bar{y}(x))\,dx > I_0+1,$$

e quindi anche, essendo sempre, ove la $\bar{y}'(x)$ esiste finita, $f(\bar{y}(x), \bar{y}'(x)) > 0$, $\varphi(\bar{y}(x)) > 0$,

$$I[\bar{y}(x)] > \int_{x_*}^{x^*}\frac{1}{\varphi(\bar{y}(x))}f(\bar{y}(x), \bar{y}'(x))\,dx > I_0+1,$$

ciò che contraddice alla (22).

Dunque è provato che, *per ogni funzione $y(x)$ della classe K verificante la* (22) *e per ogni x di (X_0, X_1), vale la $y(x) < Y^*$.*

5. - Indichiamo con R^* il rettangolo del piano (x, y) definito dalle disuguaglianze $X_0 \leqslant x \leqslant X_1$, $Y_0 \leqslant y \leqslant Y^*$. Questo rettangolo è una parte del rettangolo R.

La (14) vale in tutto il rettangolo R^* e per ogni y' finito; perciò in R^* l'integrale $I[y]$ risulta *regolare positivo*.

Per quanto abbiamo dimostrato nel n.° 4, le curve che rappresentano le funzioni $y(x)$ della classe K, verificanti la (22), giacciono interamente in R^* e non hanno alcun punto sulla retta $y=Y^*$.

6. - Conviene, per il seguito, passare dalla forma ordinaria dell'integrale $I[y]$ alla forma parametrica.

Considerata una funzione $y(x)$ della classe K e chiamata C la curva di equazione $y=y(x)$, $X_0 \leqslant x \leqslant X_1$, tale curva risulta rettificabile (per essere la $y(x)$ assolutamente continua) e, per quanto abbiamo dimostrato nel n.° 3, essa non ha punti sulla retta $y=Y_1$. Su questa curva la funzione $\varphi(y)$ risulta perciò sempre continua e $\neq 0$, e dette L la sua lunghezza totale e s la lunghezza del suo arco generico avente il primo estremo nel punto (X_0, Y_i), esiste finito l'integrale

$$J_C=\int_C \frac{F(y, x', y')}{\varphi(y)}\, ds, \tag{24}$$

dove è inteso che al posto di y, x', y' vanno messe $y(s)$, $x'(s)$, $y'(s)$, essendo

$$x=x(s), \qquad y=y(s), \qquad 0 \leqslant s \leqslant L,$$

la rappresentazione della curva C in funzione di s.

Per la (9) e per cose note, è poi

$$J_C=I[y(x)];$$

e rammentiamo che, se la $y(x)$ soddisfa alla (22), la C non ha punti sulla retta $y=Y^*$, e giace tutta nel rettangolo R^*.

Osserviamo ora che l'integrale J_C esiste finito su ogni curva continua e rettificabile contenuta nel rettangolo R^*, anche se tale curva non è rappresentabile in forma ordinaria ($y=y(x)$). Inoltre, nel campo R^*, l'integrale J_C risulta, in virtù della (6), *regolare positivo* e, in virtù della (5), *semidefinito positivo*.

Considerando anche l'integrale ausiliare $\bar{J}_C$, definito da

$$\bar{J}_C=\int_C \left\{ \frac{F(y, x', y')}{\varphi(y)} - \frac{\gamma y'}{\varphi(y)} \right\} ds = J_C - \gamma \int_C \frac{y'}{\varphi(y)}\, ds, \tag{25}$$

osserveremo che, in virtù della (8), la funzione $\frac{1}{\varphi(y)}\{F(y, x', y')-\gamma y'\}$, per tutti gli y dell'intervallo (Y_0, Y^*) e per tutte le coppie (x', y') di numeri soddisfacenti alle condizioni $x'^2+y'^2=1$, $x' \geqslant 0$, risulta continua e sempre maggiore di zero, e pertanto sempre maggiore di un numero *positivo* m_0, opportunamente scelto. Inoltre, l'integrale $\int_C \frac{y'}{\varphi(y)}\, ds$, qualunque sia la curva continua e rettificabile C di R^*, risulta uguale all'integrale della funzione della y, $\frac{1}{\varphi(y)}$, calcolato tra l'ordinata del primo estremo della C e quella del secondo estremo della curva, onde si ha sempre

$$\left| \int_C \frac{y'}{\varphi(y)} ds \right| \leqslant \int_{Y_0}^{Y^*} \frac{dy}{\varphi(y)}. \tag{26}$$

7. - Indicheremo con K^* l'insieme di tutte le curve C^*, continue e rettificabili, giacenti nel rettangolo R^*, e tali che:

1°) esse abbiano il primo estremo nel punto (X_0, Y_i) ed il secondo disposto comunque sul lato di R^* appartenente alla retta $x = X_1$;

2°) su ciascuna di esse l'ascissa x del punto generico sia funzione *non decrescente* della lunghezza dell'arco che dal primo estremo della curva va al punto generico;

3°) quasi dappertutto su ognuna di esse la tangente alla curva formi con l'asse delle x un angolo α (considerato in valore e segno) soddisfacente alla disuguaglianza

$$\operatorname{tang} \alpha \geqslant \psi(y), \tag{27}$$

ove y è l'ordinata del punto considerato della curva ed ove intendiamo, per $\alpha = 90°$ e $\alpha = -90°$, di sostituire a tang α rispettivamente $+\infty$ e $-\infty$.

La condizione 2°) equivale a dire che su ogni curva C^* è *quasi dappertutto* (ossia per quasi tutti gli s corrispondenti ai punti della curva) $x'(s) \geqslant 0$, s essendo la lunghezza dell'arco della curva che dal primo estremo di essa va al suo punto generico. Per la condizione 3°), su ogni C^* l'insieme dei punti in cui la tangente alla curva non esiste oppure esiste e non soddisfa alla (27) si può rinchiudere in una successione di archi della C^* di lunghezza complessiva minore di un numero positivo arbitrariamente prefissato.

Osserviamo che ogni curva C rappresentante una funzione $y(x)$ della classe K e soddisfacente alla (22) è una curva C^* e quindi appartiene alla classe K^*. Evidentemente però esistono delle curve C^* che non sono rappresentabili in forma ordinaria e che perciò non rappresentano geometricamente nessuna funzione $y(x)$ di K.

Nei numeri seguenti, dimostreremo che *l'integrale J_C ha un minimo assoluto nella classe K^*, e che ogni curva minimante assoluta è rappresentabile in forma ordinaria ed è la rappresentazione geometrica di una funzione $y(x)$ della classe K.* Pertanto ognuna di tali curve minimanti risulterà anche una minimante assoluta per $I[y]$ in K, e con ciò sarà provato che *l'integrale $I[y]$ ha in K il minimo assoluto.*

8. - Indichiamo con i^* il confine inferiore dell'integrale J_C nella classe K^*. Poichè J_C è, nel rettangolo R^*, un integrale semidefinito positivo, risulta $i^* \geqslant 0$.

Sia

$$C_1^*,\ C_2^*, \dots,\ C_n^*, \dots \quad \text{[2]}$$

una successione di curve di K^* minimizzante per J_C in K^*, tale cioè che sia, per ogni n,

$$J_{C_n^*} \leqslant i^* + \frac{1}{n}. \tag{28}$$

Dalle (25) e (26) segue, da una parte,

$$\bar{J}_{C_n^*} \leqslant J_{C_n^*} + \gamma \left| \int\limits_{C_n^*} \frac{y'}{\varphi(y)}\, ds \right| \leqslant i^* + \frac{1}{n} + \gamma \int\limits_{Y_0}^{Y^*} \frac{dy}{\varphi(y)}$$

$$\leqslant i^* + 1 + \gamma \int\limits_{Y_0}^{Y^*} \frac{dy}{\varphi(y)},$$

e dall' altra,

$$\bar{J}_{C_n^*} \geqslant m_0 L_n^*,$$

dove abbiamo indicato con L_n^* la lunghezza della C_n^*; e pertanto

$$L_n^* \leqslant \frac{1}{m_0} \left\{ i^* + 1 + \gamma \int\limits_{Y_0}^{Y^*} \frac{dy}{\varphi(y)} \right\}.$$

Poichè il secondo membro di questa disuguaglianza è un numero fisso, indipendente da n, ne risulta che le curve C_n^* hanno tutte lunghezza inferiore o uguale ad uno stesso numero; e poichè le C_n^* sono tutte contenute nel rettangolo R^*, un noto teorema HILBERT ci assicura che esse ammettono almeno una curva di accumulazione, continua e rettificabile (giacente in R^*), avente il primo estremo nel punto (X_0, Y_i) ed il secondo estremo sulla retta $x = X_1$.

Sia C_∞ una di tali curve di accumulazione.

Per essere, in R^*, J_C un integrale *regolare positivo*, tale integrale è semicontinuo inferiormente [3] e dalla (28) segue perciò

$$J_{C_\infty} \leqslant i^*. \tag{29}$$

Se noi ora dimostreremo che C_∞ appartiene alla classe K^*, avremo che nella (29) varrà il segno $=$.

Per provare che C_∞ appartiene a K^* occorre mostrare che su di essa la x del punto generico è funzione non decrescente della lunghezza dell' arco che dal primo estremo della curva va al suo punto generico, e poi che, quasi dappertutto sulla C_∞, è verificata la (27).

---

[2] Per semplicità considero qui le successioni minimizzanti di curve; ma quanto dirò si potrà ripetere immediatamente per le successioni minimizzanti di insiemi di curve, analogamente a quanto ho fatto nei miei *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Vol. II (Bologna, Zanichelli).

[3] L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*. Vol. I, p. 272.

Il primo dei due fatti ora indicati è evidente, essendo la C_∞ curva di accumulazione di curve della classe K^*.

Per il secondo fatto, consideriamo un punto $\overline{P} \equiv (\overline{x}, \overline{y})$ della C_∞, distinto dagli estremi della curva, nel quale esista la tangente alla curva, e diciamo $\overline{\alpha}$ il valore corrispondente dell'angolo α. Affermiamo che in $\overline{P}$ sussiste la (27), vale a dire, che è

$$(30) \qquad \operatorname{tang} \overline{\alpha} \geqslant \psi(\overline{y}).$$

Supponiamo, infatti, che questa disuguaglianza non risulti verificata. Allora potremo determinare un numero *positivo* μ (> 0) in modo da avere

$$(31) \qquad \operatorname{tang} \overline{\alpha} < \psi(\overline{y}) - \mu.$$

Diciamo δ un numero positivo tale che, per ogni y dell'intervallo $(\overline{y} - \delta, \overline{y} + \delta)$ (e compreso in (Y_0, Y^*)) risulti

$$(32) \qquad \psi(y) > \psi(\overline{y}) - \mu,$$

e scegliamo sulla C_∞ due punti $\overline{P}_1 \equiv (\overline{x}_1, \overline{y}_1)$ e $\overline{P}_2 \equiv (\overline{x}_2, \overline{y}_2)$, il primo precedente $\overline{P}$ e il secondo seguente $\overline{P}$, in modo che su tutto l'arco $\overset{\frown}{\overline{P}_1 \overline{P}_2}$ della C_∞ la y del punto corrente sia sempre *interna* all'intervallo $(\overline{y} - \delta, \overline{y} + \delta)$, e in modo pure che risulti

$$\overline{y}_2 - \overline{y}_1 < (\overline{x}_2 - \overline{x}_1) \{ \psi(\overline{y}) - \mu \}.$$

Per essere la C_∞ curva di accumulazione della C_n^*, potremo trovare un $\overline{n}$ in modo che la $C_{\overline{n}}^*$ abbia un arco $\overset{\frown}{P_{\overline{n},1} P_{\overline{n},2}}$, di estremi $P_{\overline{n},1} \equiv (x_{\overline{n},1}, y_{\overline{n},1})$, $P_{\overline{n},2} \equiv (x_{\overline{n},2}, y_{\overline{n},2})$, sul quale la y del punto corrente risulti sempre *interna* all'intervallo $(\overline{y} - \delta, \overline{y} + \delta)$, e tale inoltre che sia

$$(33) \qquad y_{\overline{n},2} - y_{\overline{n},1} < (x_{\overline{n},2} - x_{\overline{n},1}) \{ \psi(\overline{y}) - \mu \}.$$

Su tutto l'arco $\overset{\frown}{P_{\overline{n},1} P_{\overline{n},2}}$ di $C_{\overline{n}}^*$ vale allora la (32); e quasi dappertutto sul medesimo arco vale la (27). Dunque su quasi tutto $\overset{\frown}{P_{\overline{n},1} P_{\overline{n},2}}$ è

$$(34) \qquad \operatorname{tang} \alpha > \psi(\overline{y}) - \mu.$$

Ora, indicando con s la lunghezza dell'arco generico di $C_{\overline{n}}^*$, contato a partire dal primo estremo della curva, e dette $x = x(s)$, $y = y(s)$ le equazioni della $C_{\overline{n}}^*$, si ha quasi dappertutto su $\overset{\frown}{P_{\overline{n},1} P_{\overline{n},2}}$, *ove risulti* $-90^\circ < \alpha < 90^\circ$,

$$\frac{y'(s)}{x'(s)} = \operatorname{tang} \alpha$$

e quindi, per la (34),

$$(35) \qquad y'(s) > x'(s) \{ \psi(\overline{y}) - \mu \};$$

e questa disuguaglianza vale quasi dappertutto su $\overset{\frown}{P_{\bar{n},1}P_{\bar{n},2}}$, anche se è $a=\pm 90^\circ$, perchè in tal caso si ha $x'(s)=0$ e $y'(s)=1$, se $a=90^\circ$, $y'(s)=-1$, se $a=-90^\circ$, e per la (27) deve essere $a>-90^\circ$ quasi dappertutto sulla $C_{\bar{n}}^*$.

Dalla (35) segue

$$y_{\bar{n},2}-y_{\bar{n},1}=\int_{\overset{\frown}{P_{\bar{n},1}P_{\bar{n},2}}} y'(s)ds>\{\psi(\bar{y})-\mu\}\int_{\overset{\frown}{P_{\bar{n},1}P_{\bar{n},2}}} x'(s)\,ds=\{\psi(\bar{y})-\mu\}(x_{\bar{n},2}-x_{\bar{n},1})$$

che contraddice alla (33).

Così è provato che in $\bar{P}$ vale la (30), e quindi che, quasi dappertutto sulla C_∞, vale la (27); e possiamo concludere che la curva C_∞ appartiene alla classe K^*, e che è perciò

$$J_{C_\infty}=i^*.$$

Dunque la C_∞ *è una curva minimante assoluta per* J_C *in* K^*.

Osserviamo che, per la (5) e per il fatto che, valendo quasi dappertutto sulla C_∞ la (27), è, quasi dappertutto sulla C_∞, $a>-90^\circ$, la curva indicata ha un solo punto di ascissa $x=X_1$.

9. - Per dimostrare che la curva C_∞ — *od una qualsiasi altra curva minimante assoluta per* J_C *in* K^* — è rappresentabile in forma ordinaria $y=y(x)$, con $y(x)$ appartenente alla classe K, proveremo che la derivata $x'(s)$ dell'ascissa $x(s)$ del punto corrente sulla curva (intendendosi per s la lunghezza dell'arco variabile sulla C_∞, contata a partire dal primo estremo della curva) resta quasi dappertutto — ossia per quasi tutti gli s corrispondenti ai punti della curva — maggiore di un numero fisso *positivo*.

Rammentiamo che, per essere la C_∞ una curva C^* di K^*, è quasi dappertutto $x'(s)\geqslant 0$; ed anche tang $a\geqslant\psi(y)$, onde, indicando con ψ_0 il minimo (certamente *negativo*, per la (2)) della funzione $\psi(y)$ in tutto l'intervallo (Y_0, Y_1), quasi dappertutto è tang $a\geqslant\psi_0$. Perciò, quasi dappertutto ove è $y'(s)\leqslant 0$, risulta $\frac{y'(s)}{x'(s)}=\text{tang } a\geqslant\psi_0$, da cui

$$-\sqrt{\frac{1}{x'^2(s)}-1}\geqslant\psi_0,\qquad \sqrt{\frac{1}{x'^2(s)}-1}\leqslant-\psi_0,$$

$$x'(s)\geqslant\frac{1}{\sqrt{1+\psi_0^2}}. \tag{36}$$

Restano da considerarsi i punti in cui è $y'(s)>0$. Se fosse, quasi dappertutto sulla C_∞, tang $a\leqslant 2\Psi$, si avrebbe, quasi dappertutto ove è $y'(s)>0$,

$$\frac{y'(s)}{x'(s)}=\text{tang } a\leqslant 2\Psi,\qquad \sqrt{\frac{1}{x'^2(s)}-1}\leqslant 2\Psi$$

$$x'(s)\geqslant\frac{1}{\sqrt{1+4\Psi^2}} \tag{37}$$

e la $x'(s)$ risulterebbe quasi dappertutto maggiore di un qualunque numero positivo minore di ambedue i secondi membri delle (36) e (37).

Supponiamo dunque che *non* sia, quasi dappertutto sulla C_∞, $\operatorname{tang} \alpha \leqslant 2\Psi$; supponiamo cioè che l'insieme dei punti della C_∞ in cui è $\operatorname{tang} \alpha > 2\Psi$ abbia *misura positiva* (4). Cominciamo a provare, in tale ipotesi, l'esistenza sulla C_∞ di un insieme E_1, di *misura positiva*, e costituito di tutti i punti in cui esistono $x'(s)$ e $y'(s)$, ed è $x'(s)>0$, $y'(s)>0$.

Poichè il primo estremo della C_∞ è nel punto (X_0, Y_i) ed il secondo estremo ha per ascissa X_1, ed avendosi

$$X_1 - X_0 = x(L) - x(0) = \int_0^L x'(s)\, ds,$$

dove abbiamo indicato con L la lunghezza della C_∞, l'insieme dei punti della C_∞ in cui è $x'(s) > 0$ ha necessariamente misura $\geqslant X_1 - X_0$. Analogamente, considerando un arco della C_∞ avente gli estremi in due punti di ascisse x_1 e x_2, con $x_1 < x_2$, l'insieme dei punti di tale arco in cui è $x'(s) > 0$ ha misura $\geqslant x_2 - x_1$.

Ammettiamo, se è possibile, che sia $m(E_1)=0$.

Allora, su ogni arco della C_∞, l'insieme dei punti in cui esistono $x'(s)$ e $y'(s)$ ed è $x'(s) > 0$, $y'(s) \leqslant 0$, ha la stessa misura dell'insieme dei punti in cui esistono $x'(s)$ e $y'(s)$ ed è $x'(s) > 0$; e scelto sulla C_∞ un punto P_1, di ascissa *minore* di X_1 e tale che in esso la curva abbia tangente, con $\operatorname{tang} \alpha > 2\Psi$, potremo prendere sulla C_∞ un punto P_2, di ascissa *maggiore* di quella di P_1 e minore di X_1, e in modo che, in tale punto, la curva abbia tangente con coseni direttori dati da $x'(s_2) > 0$, $y'(s_2) \leqslant 0$.

Ne segue che, fissato comunque un numero $\varrho > 0$, potremo sempre scegliere sulla C_∞ due punti $P_{1,1}$ e $P_{1,2}$, in prossimità di P_1, e due altri punti $P_{2,1}$ e $P_{2,2}$, in prossimità di P_2, in modo che, detti $s_{1,1}$, $s_{1,2}$, $s_{2,1}$, $s_{2,2}$ i corrispondenti valori del parametro s, risulti

$$(38)\quad \begin{cases} \varrho > s_{1,2} - s_{1,1} = s_{2,2} - s_{2,1} > 0 \\ X_0 \leqslant x(s_{1,1}) \leqslant x(s_{1,2}) < x(s_{2,1}) < x(s_{2,2}) < X_1 \quad (\text{onde } s_{1,1} < s_{1,2} < s_{2,1} < s_{2,2}) \\ y(s_{1,2}) - y(s_{1,1}) > 2\Psi\{x(s_{1,2}) - x(s_{1,1})\},\ y(s_{2,2}) - y(s_{2,1}) < 2\Psi\{x(s_{2,2}) - x(s_{2,1})\}. \end{cases}$$

Detto Δ il valore comune delle differenze $s_{1,2} - s_{1,1}$, $s_{2,2} - s_{2,1}$, consideriamo la funzione di s

$$y(s+\Delta) - y(s) - 2\,\Psi\{x(s+\Delta) - x(s)\}.$$

(4) La *misura* dell'insieme considerato è contata sulla curva C_∞, vale a dire è calcolata mediante la considerazione della lunghezza complessiva delle successioni di archi della curva ricoprenti l'insieme.

Essa è continua e negli estremi dell'intervallo $(s_{1,1}, s_{2,1})$ assume, per le (38), valori di segno contrario. Dunque, per almeno un $\bar{s}$ tale che $s_{1,1} < \bar{s} < s_{2,1}$, è

$$y(\bar{s}+\Delta)-y(\bar{s})=2\Psi\{x(\bar{s}+\Delta)-x(\bar{s})\}, \tag{39}$$

e i due membri di questa uguaglianza sono $\neq 0$ perchè, altrimenti, su quasi tutto l'arco della C_∞ corrispondente all'intervallo $(\bar{s}, \bar{s}+\Delta)$ di variabilità per la s, risulterebbe $x'(s)=0$ e $|y'(s)|=1$, con $y'(s)=-1$ in un insieme di misura positiva, ciò che è impossibile (5).

Indichiamo con M_1 e M_2 i punti della C_∞ corrispondenti ai valori $\bar{s}$ e $\bar{s}+\Delta$ di s.

Poichè gli integrali $I[y]$ e J_C sono entrambi *regolari positivi*, se ϱ è sufficientemente piccolo esiste (6) una ed una sola estremale per $I[y]$ congiungente M_1 e M_2 e giacente nel cerchio di centro M_1 e raggio ϱ, e tale estremale ha sempre la derivata maggiore di Ψ e quindi soddisfa alla (12), ed è anche un'estremale per J_C e dà, per questo secondo integrale, *la sola* curva minimante fra tutte le curve continue e rettificabili che uniscono M_1 e M_2 e che giacciono nel cerchio di centro M_1 e raggio ϱ. E poichè l'arco della C_∞ compreso fra M_1 e M_2, cioè corrispondente ai valori di s dell'intervallo $(\bar{s}, \bar{s}+\Delta)$, giace tutto nel cerchio indicato (perchè è $\Delta < \varrho$, in virtù della prima delle (38)), se ne conclude che l'arco detto della C_∞ coincide con l'estremale sopra indicata. Ma su tale estremale è sempre $x'(s) > 0$ e $\frac{y'(s)}{x'(s)} > \Psi$, e quindi anche $y'(s) > 0$; perciò i suoi punti fanno parte dell'insieme E_1 e la misura di tale insieme *non può essere nulla.*

10. - Essendo dunque provato che, supposto di *misura positiva* l'insieme dei punti della C_∞ in cui è $\operatorname{tang} \alpha > 2\Psi$, anche l'insieme E_1 risulta di *misura positiva*, potremo trovare un numero $\Lambda > 0$, tale che, detto $E_{1,\Lambda}$ il componente E_1 in cui è $x'(s) \geqslant \Lambda$, risulti

$$m(E_{1,\Lambda}) > 0.$$

Indichiamo con λ un numero tale che sia $0 < \lambda < \Lambda$ e $\lambda < \frac{1}{\sqrt{1+\Psi^2}}$, e consideriamo l'insieme E_λ dei punti della C_∞ in cui esistono $x'(s)$ e $y'(s)$ ed è

$$x'(s) \leqslant \lambda, \qquad y'(s) > 0.$$

(5) Poichè quasi dappertutto sulla C_∞ vale la (27), deve essere, quasi dappertutto, $y'(s) > -1$.

(6) Vedi i miei *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Vol. II, n.i 111, 51 e 52. V. pure la mia Memoria: *Sulle equazioni di Eulero nel Calcolo delle Variazioni.* (Annali della R. Scuola Normale Sup. di Pisa, Vol. IV, 1935, pp. 191-216). Osserviamo che le funzioni $\varphi(y)$ e $F(y, x', y')$ possono venir definite anche per $y < Y_0$, in modo da conservare le ammesse proprietà di continuità e di derivabilità, e in modo anche da conservare agli integrali J_C e $I[y]$ il loro carattere di integrali regolari positivi.

Osserviamo subito che, nei punti di E_λ in cui è $x'(s) > 0$, risulta quasi dappertutto

$$\frac{y'(s)}{x'(s)} = \sqrt{\frac{1}{x'^2(s)} - 1} > \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - 1} > \Psi. \tag{40}$$

Poniamo, per s in $(0, L)$, dove L indica ancora la lunghezza della curva C_∞,

$$i(s) = \begin{cases} m(E_{1A}), & \text{in } E_\lambda \\ -m(E_\lambda), & \text{in } E_{1A} \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\omega(s) = \int_0^s i(s)\, ds.$$

Risulta allora

$$\omega(0) = 0, \qquad \omega(L) = m(E_{1A})\, m(E_\lambda) - m(E_\lambda)\, m(E_{1A}) = 0.$$

Ciò posto, ed essendo $x = x(s)$, $y = y(s)$, $0 \leqslant s \leqslant L$, le equazioni della C_∞, definiamo, per $t \geqslant 0$, la curva $C_{\infty, t}$ mediante le equazioni

$$C_{\infty, t}\colon \quad x = x_t(s) \equiv x(s) + t\omega(s), \qquad y = y(s), \qquad 0 \leqslant s \leqslant L.$$

Per $t = 0$ è $C_{\infty, 0} \equiv C_\infty$. Per $t > 0$, la $C_{\infty, t}$ è continua e rettificabile, ha il primo estremo coincidente con quello di C_∞ ed il secondo estremo ugualmente, perchè è $\omega(0) = \omega(L) = 0$.

Quasi dappertutto, al di fuori di E_{1A}, è $\omega'(s) = i(s) \geqslant 0$ onde $x_t'(s) = x'(s) + ti(s) \geqslant x'(s) \geqslant 0$; e più precisamente, poichè fuori di E_λ è quasi dappertutto $x'(s) > 0$, e quasi dappertutto su E_λ è

$$x_t'(s) = x'(s) + tm(E_{1A}) > x'(s) \geqslant 0,$$

fuori di E_{1A} è quasi dappertutto $x_t'(s) > 0$.

Quasi dappertutto su E_{1A} è poi $\omega'(s) = i(s) = -m(E_\lambda)$; e perciò, posto $t_0 = \dfrac{A}{2m(E_\lambda)}$ se è $m(E_\lambda) > 0$, e $t_0 = 1$ se è $m(E_\lambda) = 0$, per ogni t tale che $0 < t \leqslant t_0$, è quasi dappertutto su E_{1A},

$$x_t'(s) = x'(s) - tm(E_\lambda) \geqslant A - tm(E_\lambda) \geqslant \frac{A}{2} > 0$$

con

$$x_t'(s) \leqslant x'(s).$$

Dunque, per $0 < t \leqslant t_0$, è quasi dappertutto su $(0, L)$, $x_t'(s) > 0$.

Indicate con L_t la lunghezza di tutta la curva $C_{\infty, t}$ e con $\sigma_t(s)$ la lunghezza del suo arco che dal primo estremo della curva va al punto corrispondente a s, è

$$\sigma_t(s) = \int_0^s \sqrt{[x'(s) + t\omega'(s)]^2 + y'^2(s)}\, ds,$$

e questa funzione, assolutamente continua (come lo sono $x_t(s)=x(s)+t\omega(s)$ e $y(s)$) e nella quale $[x'(s)+t\omega'(s)]^2+y'^2(s)$ è quasi dappertutto maggiore o uguale al minore dei due numeri 1 e $\Lambda:2$, fa corrispondere agli insiemi di misura nulla di $(0, L)$ gli insiemi di misura nulla su $(0, L_t)$.

E se le equazioni parametriche della $C_{\infty, t}$, in funzione della lunghezza σ_t dell'arco, le scriviamo nella forma

$$x=\bar{x}_t(\sigma_t), \qquad y=\bar{y}_t(\sigma_t) \qquad 0\leqslant\sigma_t\leqslant L_t,$$

avendosi, per quasi tutti gli s,

$$x_t'(s)=\bar{x}_t'(\sigma_t)\sigma_t'(s),$$

dall'essere $x_t'(s)>0$ per quasi tutti gli s di $(0, L)$, segue $\bar{x}_t'(\sigma_t)>0$ per quasi tutti i σ_t di $(0, L_t)$, e pertanto l'ascissa del punto corrente su $C_{\infty, t}$ è funzione *crescente* di σ_t.

Inoltre, dall'essere quasi dappertutto $x_t'(s)>0$, segue pure che la funzione assolutamente continua $x_t(s)$ è crescente e che perciò è sempre $x_t(0)\leqslant x_t(s)\leqslant x_t(L)$. E siccome è sempre $Y_0\leqslant y(s)\leqslant Y^*$, ne segue che la curva $C_{\infty, t}$, per $0\leqslant t\leqslant t_0$, è tutta contenuta nel rettangolo R^*.

Per poter concludere che la $C_{\infty, t}$ (per $0<t\leqslant t_0$) è una curva C^* della classe K^*, occorre verificare che su di essa è quasi dappertutto soddisfatta la (27). Poichè abbiamo già detto che, quasi dappertutto su $(0, L)$, è $x_t'(s)>0$, quasi dappertutto su $(0, L)$ il rapporto $\frac{y'(s)}{x_t'(s)}$ ha un valore finito (per $0<t\leqslant t_0$). Tale valore è, quasi dappertutto fuori di $E_\lambda+E_{1\Lambda}$, uguale a $\frac{y'(s)}{x'(s)}$ (perchè ivi è $x_t'(s)=x'(s)$); quasi dappertutto su E_λ, per $0<t\leqslant t_0'<t_0$, con t_0' sufficientemente piccolo, è maggiore di Ψ (perchè ivi è $x_t'(s)=x'(s)+tm(E_{1\Lambda})$ e $y'(s)>0$, e, ove è $x'(s)>0$ vale la (40)); quasi dappertutto su $E_{1\Lambda}$ è maggiore o uguale a $\frac{y'(s)}{x'(s)}$ (perchè ivi è $0<x_t'(s)=x'(s)-tm(E_\lambda)\leqslant x'(s)$ e $y'(s)>0$). E siccome la curva C_∞ soddisfa quasi dappertutto alla (27) e nei punti di C_∞ e di $C_{\infty,t}$ corrispondenti allo stesso s le ordinate y sono uguali, ne viene che anche la $C_{\infty, t}$, per $0<t\leqslant t_0'$, verifica quasi dappertutto la detta disuguaglianza.

Pertanto la $C_{\infty, t}$, per $0\leqslant t\leqslant t_0'$, è una curva C^* della classe K^*.

11. - Consideriamo l'integrale $J_{C_{\infty, t}}$, per $0\leqslant t\leqslant t_0'$. Deve essere

$$J_{C_{\infty, t}}\geqslant J_{C_\infty}. \tag{41}$$

L'integrale $J_{C_{\infty, t}}$ è una funzione di t. Diciamo che, per $t=0$, tale funzione è derivabile (o meglio che ammette derivata destra). Abbiamo

$$J_{C_{\infty, t}}=\int_0^L \frac{F(y(s),\, x_t'(s),\, y'(s))}{\varphi(y(s))}\, ds,$$

e, per quasi tutti gli s, è

$$\frac{d}{dt} F(y(s), x_t'(s), y'(s)) = F_{x'}(y(s), x_t'(s), y'(s))\, \omega'(s).$$

Osserviamo che, essendo la $F(y, x', y')$ funzione positivamente omogenea di grado 1 rispetto ad x' e y', la derivata $F_{x'}(y, x', y')$ risulta funzione positivamente omogenea di grado zero rispetto ad x' e y', cioè tale che, per ogni $k>0$ (e per ogni coppia di numeri x' e y' non ambedue nulli), sia $F_{x'}(y, kx', ky') = F_{x'}(y, x', y')$. Di qui risulta che, detto H il massimo valore assoluto della $F_{x'}(y, x', y')$ per tutti gli y dell'intervallo (Y_0, Y^*) e per tutte le coppie (x', y') tali che $x'^2 + y'^2 = 1$, è, per tutti gli y detti e per tutte le coppie (x', y') di numeri non ambedue nulli,

$$|F_{x'}(y, x', y')| \leqslant H.$$

Ed essendo, quasi dappertutto,

$$|\omega'(s)| \leqslant m(E_\lambda) + m(E_{1A}),$$

ne viene, per $0 \leqslant t \leqslant t_0'$,

$$\left| \frac{d}{dt} F(y(s), x_t'(s), y'(s)) \right| \leqslant H\{m(E_\lambda) + m(E_{1A})\}$$

quasi dappertutto. Poichè il secondo membro della disuguaglianza ora scritta è indipendente da t e da s, si può affermare che all'integrale $J_{C_\infty, t}$ è applicabile il teorema di derivazione sotto il segno. È perciò

$$\frac{d}{dt} J_{C_\infty, t} = \int_0^L \frac{F_{x'}(y(s), x_t'(s), y'(s))}{\varphi(y(s))}\, \omega'(s)\, ds,$$

da cui, per $t=0$,

$$\left[\frac{d}{dt} J_{C_\infty, t}\right]_{t=0} = \int_0^L \frac{F_{x'}(y(s), x'(s), y'(s))}{\varphi(y(s))}\, \omega'(s) ds.$$

E siccome, quasi dappertutto fuori di $E_\lambda + E_{1A}$, è $\omega'(s) = i(s) = 0$, resta

$$\begin{aligned}\left[\frac{d}{dt} J_{C_\infty, t}\right]_{t=0} &= \int_{E_\lambda + E_{1,A}} \frac{F_{x'}(y(s), x'(s), y'(s))}{\varphi(y(s))}\, i(s)\, ds \\ &= m(E_{1,A}) \int_{E_\lambda} \frac{F_{x'}(y(s), x'(s), y'(s))}{\varphi(y(s))}\, ds \\ &\quad - m(E_\lambda) \int_{E_{1A}} \frac{F_{x'}(y(s), x'(s), y'(s))}{\varphi(y(s))}\, ds.\end{aligned}$$

Ma dalla (41) segue

$$\left[\frac{d}{dt} J_{C_\infty, t}\right]_{t=0} \geqslant 0;$$

è quindi

$$(48) \qquad m(E_\lambda) \int_{E_{1A}} \frac{F_{x'}(y(s), x'(s), y'(s))}{\varphi(y(s))} ds \leqslant m(E_{1A}) \int_{E_\lambda} \frac{F_{x'}(y(s), x'(s), y'(s))}{\varphi(y(s))} ds.$$

Rammentando ora l'ipotesi espressa dalla (6), abbiamo su E_{1A} (sul quale insieme è sempre $x'(s) \geqslant A$, $y'(s) > 0$)

$$(49) \qquad F_{x'}(y(s), x'(s), y'(s)) \geqslant F_{x'}(y(s), A, y'(s)).$$

Per $Y_0 \leqslant y \leqslant Y^*$, $x' = A$, $0 < y' \leqslant 1$ è, in virtù delle (6) e (7),

$$F_{x'}(y, A, y') > F_{x'}(y, 0, y') = 0;$$

e poichè per la (6) $F_{x'}(y, A, y')$ è funzione decrescente di y' (sempre per $y' > 0$), si ha pure

$$F_{x'}(y, A, 0) > F_{x'}(y, A, y') > 0.$$

Dunque, sull'insieme chiuso dei punti (y, x', y') tali che $Y_0 \leqslant y \leqslant Y^*$, $x' = A$, $0 \leqslant y' \leqslant 1$, la funzione continua $F_{x'}$ è sempre maggiore di zero e il suo minimo σ risulta esso pure >0. Dalla (49) segue perciò, su tutto E_{1A},

$$(50) \qquad F_{x'}(y(s), x'(s), y'(s)) \geqslant \sigma.$$

Su E_λ (sul quale insieme è sempre $0 \leqslant x'(s) \leqslant \lambda$, $y'(s) > 0$) è, per la (6),

$$(51) \qquad F_{x'}(y(s), x'(s), y'(s)) \leqslant F_{x'}(y(s), \lambda, y'(s));$$

ed è pure quasi dappertutto $y'(s) = \sqrt{1 - x'^2(s)} \geqslant \sqrt{1 - \lambda^2} > 0$. Sull'insieme chiuso dei punti (y, x', y'), tali che $Y_0 \leqslant y \leqslant Y^*$, $0 \leqslant x' \leqslant 1$, $\sqrt{1-\lambda^2} \leqslant y' \leqslant 1$, la funzione $F_{x'}$ è continua; e siccome, per la (7), è $F_{x'}(y, 0, y') = 0$ (se $y' \neq 0$), se λ è sufficientemente piccolo risulta, per $Y_0 \leqslant y \leqslant Y^*$, $\sqrt{1-\lambda^2} \leqslant y' \leqslant 1$, sempre

$$F_{x'}(y, \lambda, y') < \frac{\sigma \Phi_0}{2 \Phi_1},$$

dove, con Φ_0 e Φ_1 abbiamo indicati rispettivamente il minimo ed il massimo della funzione $\varphi(y)$ sull'intervallo (Y_0, Y^*).

Supposto allora che il λ, oltre alle condizioni indicate per esso nel n.º 10, abbia il grado di piccolezza necessario per la validità della disuguaglianza ora scritta, possiamo asserire che, quasi dappertutto su E_λ, è, per la (51),

$$(52) \qquad F_{x'}(y(s), x'(s), y'(s)) < \frac{\sigma \Phi_0}{2 \Phi_1}.$$

Dalle (48), (50) e (52), segue quindi

$$\frac{\sigma}{\Phi_1} m(E_\lambda)\, m(E_{1\Lambda}) \leqslant \frac{\sigma}{2\Phi_1} m(E_{1\Lambda})\, m(E_\lambda)$$

ossia, per essere $\frac{\sigma}{\Phi_1} > 0$, $m(E_{1\Lambda}) > 0$,

$$m(E_\lambda) \leqslant \frac{1}{2}\, m(E_\lambda),$$

donde
$$m(E_\lambda) = 0.$$

Resta così dimostrato che, se λ ha il valore sopra indicato, quasi dappertutto sulla C_∞, ove è $y'(s) > 0$, o vale la (37) oppure è $x'(s) > \lambda$; e siccome, ove è $y'(s) \leqslant 0$, vale quasi dappertutto la (36), ne risulta l'esistenza di un numero positivo N tale che, quasi ovunque sulla C_∞, sia

$$x'(s) > N > 0.$$

12. - In virtù di quanto abbiamo or ora affermato, la funzione assolutamente continua $x(s)$ è crescente, e, se è $0 \leqslant s_1 < s_2 \leqslant L$, è

$$N < \frac{x(s_2) - x(s_1)}{s_2 - s_1} \leqslant 1.$$

Perciò la funzione $s(x)$, inversa della $x(s)$, verifica, per $X_0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant X_1$, le disuguaglianze

$$1 \leqslant \frac{s(x_2) - s(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{1}{N}.$$

La $s(x)$ è dunque lipschitziana e quindi assolutamente continua; e poichè anche la $y(s)$, che dà l'ordinata del punto corrente sulla C_∞, è a rapporto incrementale limitato (in valore assoluto $\leqslant 1$), ne risulta pure lipschitziana la $y(s(x))$.

Così è provato che la curva C_∞ — od una qualsiasi altra curva minimante assoluta per J_C in K^* — è rappresentabile in forma ordinaria $y = y_\infty(x)$, con $y_\infty(x)$ appartenente alla classe K, *e lipschitziana.* Pertanto, il teorema enunciato nell'introduzione risulta dimostrato.

13. - Ci proponiamo ora di mostrare che *la funzione assolutamente continua (e lipschitziana) $y_\infty(x)$, che dà l'ordinata della curva C_∞ — o di una qualsiasi altra curva minimante assoluta per $I[y]$ in K — ammette sempre la derivata $y'_\infty(x)$, finita e continua, ovunque soddisfacente alla* (12).

Osserviamo, in primo luogo, che, per quanto si è dimostrato nel n.° 4, è sempre, su tutto l'intervallo (X_0, X_1),

$$y_\infty(x) < Y^*,$$

vale a dire, la curva C_∞ non ha alcun punto sul lato del rettangolo R^* che giace sulla retta $y = Y^*$.

Sia ora P_0 un punto della C_∞, di ascissa x_0 minore di X_1, e dimostriamo che in x_0 esiste la derivata destra $D^+ y_\infty(x)$ della $y_\infty(x)$, la quale derivata, per essere la $y_\infty(x)$ lipschitziana, dovrà risultare certamente finita. Ammesso che la indicata derivata destra non esista, dovranno risultare *distinti* i numeri derivati destri, inferiore e superiore, della $y_\infty(x)$ in x_0. Indicati con λ^+ e Λ^+ tali numeri derivati, rispettivamente inferiore e superiore, sarà $\lambda^+ < \Lambda^+$.

Per la definizione stessa di λ^+, possiamo trovare un x' minore di X_1, maggiore di x_0 e prossimo ad esso quanto vogliamo e in modo che il rapporto

$$\frac{y_\infty(x') - y_\infty(x_0)}{x' - x_0}$$

sia prossimo quanto vogliamo a λ^+; e siccome nell'intervallo (x_0, x') deve necessariamente esistere in un insieme di punti di misura *positiva* su cui la $y'_\infty(x)$ esista (finita) e non superiore al rapporto scritto, tenendo conto del fatto che, sulla C_∞ è quasi dappertutto verificata la (12), possiamo affermare che λ^+ verifica la disuguaglianza

$$\lambda^+ \geqslant \psi(y_\infty(x_0)). \tag{53}$$

È allora

$$\lambda^+ + \frac{\Lambda^+ - \lambda^+}{2} > \psi(y_\infty(x_0)),$$

e si può scegliere un x'' sufficientemente vicino a x_0, tale che $x_0 < x'' < X_1$ e che

$$\frac{y_\infty(x'') - y_\infty(x_0)}{x'' - x_0} = \lambda^+ + \frac{\Lambda^+ - \lambda^+}{2},$$

e in modo che l'estremale per $I[y]$, che unisce i punti della C_∞ di ascisse x_0 e x'', giaccia in R^*, soddisfi sempre alla (12), e renda l'integrale $I[y]$ *minore* dello stesso integrale calcolato su un'altra qualsiasi funzione $y(x)$ assolutamente continua in (x_0, x''), assumente in x_0 e x'' gli stessi valori della $y_\infty(x)$ e sempre compresa, se è $\lambda^+ + \frac{\Lambda^+ - \lambda^+}{2} \neq 0$, fra il minimo ed il massimo della $y_\infty(x)$ in (x_0, x''), e, se è $\lambda^+ + \frac{\Lambda^+ - \lambda^+}{2} = 0$, fra $y_\infty(x_0) - (x'' - x_0)$ e $y_\infty(x_0) + (x'' - x_0)$ (7). In virtù della proprietà di minimo della C_∞, tale estremale deve coincidere con l'arco corrispondente della C_∞, e ne segue che in x_0 la $y_\infty(x)$ deve ammettere la derivata destra.

---

(7) Ciò è conseguenza del fatto che $I[y]$ è un integrale *regolare positivo* (si veda loc. cit. in (6)). Si tenga presente che, se è $y_\infty(x_0) = Y_0$, risulta necessariamente $\lambda^+ \geqslant 0$ e quindi $\lambda^+ + \frac{\Lambda^+ - \lambda^+}{2} > 0$.

E poichè la disuguaglianza (53) è indipendente dall'ipotesi $\lambda^+ < \Lambda^+$, ne segue anche la disuguaglianza

$$[D^+ y_\infty(x)]_{x=x_0} \geqslant \psi(y_\infty(x_0)). \tag{54}$$

Con lo stesso ragionamento ora svolto si prova che, se è $X_0 < x_0 \leqslant X_1$, in x_0 esiste la derivata sinistra $D^- y_\infty(x)$ (necessariamente finita) della $y_\infty(x)$, e che è

$$[D^- y_\infty(x)]_{x=x_0} \geqslant \psi(y_\infty(x_0)). \tag{55}$$

Sia ora $X_0 < x_0 < X_1$ e proviamo che è

$$[D^+ y_\infty(x)]_{x=x_0} = [D^- y_\infty(x)]_{x=x_0}. \tag{56}$$

Supposto, infatti, che tale uguaglianza non sussista, possiamo scegliere in (X_0, X_1) e vicini a x_0 quanto vogliamo, due numeri x' e x'', tali che $x' < x_0 < x''$, che il rapporto

$$\frac{y_\infty(x'') - y_\infty(x')}{x'' - x'} \tag{57}$$

sia uguale alla semisomma delle due derivate destra e sinistra della $y_\infty(x)$ in x_0 (quindi maggiore di $\psi(y_\infty(x_0))$ e in modo che l'estremale per $I[y]$, che unisce i punti della C_∞ di ascisse x' e x'', giaccia in R^*, soddisfi sempre alla (12), e renda l'integrale $I[y]$ *minore* dello stesso integrale calcolato su un'altra qualsiasi funzione $y(x)$ assolutamente continua in (x', x''), assumente in x', x'' gli stessi valori della $y_\infty(x)$ e sempre compresa, se il valore del rapporto (57) è $\neq 0$, fra il minimo ed il massimo della $y_\infty(x)$ in (x', x''), e, se il valore del rapporto detto è $=0$, fra $y_\infty(x) - (x'' - x')$ e $y_\infty(x') + (x'' - x')$. E poichè, in virtù della proprietà di minimo della C_∞, tale estremale deve coincidere con l'arco corrispondente della C_∞, ne viene che in x_0 la $y_\infty(x)$ ammette la derivata ordinaria. Da (54), (55) e (56) segue pure in x_0,

$$y'_\infty(x_0) \geqslant \psi(y_\infty(x_0)).$$

Resta così dimostrato che *la* $y_\infty(x)$ *ammette sempre la derivata finita* $y'_\infty(x)$ (*derivata destra in* X_0 *e sinistra in* X_1), *e che è sempre*

$$y'_\infty(x) \geqslant \psi(y_\infty(x)). \tag{58}$$

Essendo, inoltre, la $y_\infty(x)$ lipschitziana, esiste un numero positivo H in modo che sia, in tutto (X_0, X_1),

$$|y'_\infty(x)| < H. \tag{59}$$

14. - Proviamo ora che, se è $X_0 \leqslant x_0 < X_1$, in x_0 *la* $y'_\infty(x)$ *è continua a destra.* Indichiamo con l_1 e l_2 rispettivamente il minimo e il massimo limite dei valori di $y'_\infty(x)$ per $x \to x_0 + 0$. Se è $l_1 = l_2$, risulta necessariamente $l_1 = l_2 = y'_\infty(x_0)$, e quindi la continuità a destra della $y'_\infty(x)$ in x_0.

Supponiamo $l_1 \neq l_2$ e quindi $l_1 < l_2$. Potremo allora trovare un x' maggiore di x_0 e prossimo ad esso quanto vogliamo, e in modo che la derivata $y'_\infty(x')$ risulti prossima quanto vogliamo a l_1; e poichè vale sempre la (58), possiamo affermare che è

$$l_1 > \psi(y_\infty(x_0)).$$

È allora

$$l_1 + \frac{l_2 - l_1}{2} > \psi(y_\infty(x_0)),$$

e possiamo scegliere un x'' maggiore di x_0 e prossimo ad esso quanto vogliamo, in modo da aversi

$$y'_\infty(x'') = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{2} > \psi(y_\infty(x'')).$$

Possiamo anche scegliere un $\bar{x}$ tale che $x_0 \leqslant \bar{x} < x''$ e in modo che il rapporto

$$\frac{y_\infty(x'') - y_\infty(\bar{x})}{x'' - \bar{x}}$$

risulti prossimo quanto vogliamo a $y'_\infty(x'')$ e che l'estremale per $I[y]$ che unisce i punti della C_∞ di ascisse $\bar{x}$ e x'' giaccia in R^*, soddisfi sempre alla (12) e renda l'integrale $I[y]$ *minore* dello stesso integrale calcolato su un'altra qualsiasi funzione $y(x)$ assolutamente continua in $(\bar{x}, x'')$, assumente in $\bar{x}$ e x'' gli stessi valori della $y_\infty(x)$ e sempre compresa, se è $y'_\infty(x'') \neq 0$, fra il minimo ed il massimo della $y_\infty(x)$ in $(\bar{x}, x'')$, e se è $y'_\infty(x'') = 0$, fra $y_\infty(x'') - (x'' - \bar{x})$ e $y_\infty(x'') + (x'' - \bar{x})$. Per la proprietà di minimo della curva C_∞, tale estremale deve coincidere con l'arco corrispondente della C_∞, e perciò il punto $(x'', y_\infty(x''))$ è il secondo estremo di un arco della C_∞ che è un'estremale ([8]).

Consideriamo il massimo degli archi della C_∞ che hanno il secondo estremo nel punto $(x'', y_\infty(x''))$ e che sono delle estremali. Tale massimo arco esiste perchè, in virtù dell'equazione delle estremali di $I[y]$

$$y'' = \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \frac{f}{\varphi} - y' \frac{\partial^2}{\partial y' \partial y} \frac{f}{\varphi} \right\} : \frac{f_{y'y'}}{\varphi},$$

([8]) Per la completa comprensione del ragionamento ora fatto, conviene osservare che, se è $y_\infty(x_0) = Y_0$, risulta necessariamente $l_1 \geqslant 0$ $\left(\text{e quindi } y'_\infty(x'') = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{2} > 0\right)$. Infatti, se fosse $y_\infty(x_0) = Y_0$ e $l_1 < 0$, fissato un l' minore di zero e tale che $l_1 < l' < l_2$, si potrebbe scegliere, vicino a x_0 quanto si vuole, un $x' > x_0$ in modo da aversi $y'_\infty(x') = l'$, $\psi(y_\infty(x')) < l'$, e ne risulterebbe $y'_\infty(x') > \psi(y_\infty(x'))$ ed anche, poichè è $y'_\infty(x') = l' < 0$, $y_\infty(x') > Y_0$, perchè nei punti della C che sono sulla retta $y = Y_0$ e con ascissa interna a (X_0, X_1) è $y'_\infty(x) = 0$. Il punto $(x', y_\infty(x'))$ sarebbe così [come $(x'', y_\infty(x''))$] il secondo estremo di un arco di estremale facente parte della C, arco che, per x' sufficientemente vicino a x_0, verificherebbe sempre la disuguaglianza $y'_\infty(x) < 0$ e conterrebbe necessariamente il punto $(x_0, y_\infty(x_0))$, contro la $y_\infty(x) = Y_0$.

e della (59), su ogni estremale la derivata seconda y'' resta, in valore assoluto, minore di un numero fisso, indipendente dall'estremale stessa.

Chiamiamo $\mathfrak{E}$ il massimo arco indicato, e diciamo $\bar{x}_0$ l'ascissa del suo primo estremo. Affermiamo che, per x'' sufficientemente prossimo a x_0, è $\bar{x}_0 \leqslant x_0$.

Supponiamo, infatti, che sia $\bar{x}_0 > x_0$ (e necessariamente $\bar{x}_0 < x''$). Allora il primo estremo di $\mathfrak{E}$ non può essere sulla retta $y = Y_0$. Ciò è evidente se è $y_\infty(x_0) > Y_0$. Se è, invece, $y_\infty(x_0) = Y_0$, dovendo risultare $l_1 \geqslant 0$, è $l_1 + \frac{l_2 - l_1}{2} > 0$; e, in virtù dell'osservazione già fatta sul comportamento della derivata y'' sopra ogni estremale e se x'' è sufficientemente prossimo a x_0, risulta $y'_\infty(\bar{x}_0) > 0$, mentre nei punti della C_∞ che sono sulla retta $y = Y_0$ e con ascissa interna a (X_0, X_1) è $y'_\infty(x) = 0$. Dunque è $y_\infty(\bar{x}_0) > Y_0$, e, per x'' sufficientemente vicino a x_0, risulta $y'_\infty(\bar{x}_0) > \psi(y_\infty(\bar{x}_0))$, onde il punto $(\bar{x}_0, y_\infty(\bar{x}_0))$ è, al pari del punto $(x'', y_\infty(x''))$, il secondo estremo di un arco della C_∞ che è un'estremale, e ciò contraddice alla definizione di $\mathfrak{E}$.

È dunque $\bar{x}_0 \leqslant x_0$, e ciò prova che la $y'_\infty(x)$ è, in x_0, *continua a destra.* Con lo stesso ragionamento ora fatto, si prova che, se è $X_0 < x_0 \leqslant X_1$, la $y'_\infty(x)$ è, in x_0, *continua a sinistra*; e si può concludere che *la $y'_\infty(x)$ è continua in tutti i punti di (X_0, X_1)*, intendendosi, naturalmente, continuità a destra per $x = X_0$ e continuità a sinistra per $x = X_1$.