Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

E. Makai

Asymptotische Abschätzung der Eigenwerte gewisser Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 10, nº 2 (1941), p. 123-126

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1941_2_10_2_123_0>

ASYMPTOTISCHE ABSCHÄTZUNG DER EIGENWERTE GEWISSER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG

von E. MAKAI (Budapest).

In einer vorhergehenden Arbeit (1) habe ich gezeigt, daß die Eigenwerte der Differentialgleichung

$$(1) \qquad y'' + \lambda\varrho(x)y = 0$$

mit den Randbedingungen $y(a) = y(b) = 0$ in gewisser Beziehung zu der Größe

$$J = \int_a^b \sqrt{-\frac{y''}{y}}\, dx = \int_a^b \sqrt{\lambda\varrho(x)}\, dx$$

stehen. Jetzt will ich zeigen, daß die Betrachtung dieser Größe zu einer asymptotischen Abschätzung von λ_n führt und zwar nicht nur beim sogenannten ersten Randwertproblem, sondern auch beim zweiten. (D.h. wenn die Lösung, bzw. die Derivierte der Lösung in den beiden Endpunkten des Intervalles verschwindet). Ich behaupte, daß, *wenn im Intervalle* (a, b) *und in dessen Endpunkten* $\varrho(x)$ *überall positiv und zweimal differentiierbar ist, für die Eigenwerte* λ_n *der Differentialgleichung* (1) *beim ersten und zweiten Randwertproblem die Beziehung*

$$(2) \qquad \sqrt{\lambda_n} - \frac{n\pi}{\int_a^b \sqrt{\varrho(x)}\, dx} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

gilt.

Wenn wir aber die Differentialgleichung

$$(3) \qquad y'' + [p(x) + \lambda]y = 0$$

bei den obigen Randbedingungen betrachten, erhalten wir mit Hilfe der Grösse J die Abschätzung

(1) Über eine Eigenwertabschätzung... [Comp. Math. 6 (1939), 368-374].

$$\int_a^b \sqrt{\lambda_n + p(x)}\,dx - n\pi = O\left(\frac{1}{n^3}\right). \tag{4}$$

(Voraussetzung: $p(x)$ ist beschränkt und zweimal differentiierbar).

Im Beweise werden wir der Kürze halber die Größe $\sqrt{-y''/y}$ mit $\sigma(x)$ oder σ bezeichnen. Wir führen statt y eine neue stetige Veränderliche

$$\varphi(x) = \operatorname{arc\,cot} \frac{y'}{\sigma y} \tag{5}$$

ein. $\varphi(x)$ nennen wir die Phase der Lösung. (Diese Bezeichnung ist eine Verallgemeinerung des Phasenbegriffes für die Differentialgleichung $y'' + \sigma^2 y$, $\sigma = \text{const.}$) Die Differentialgleichung für φ lautet

$$\varphi' - \sigma = \frac{1}{2} \sin 2\varphi \cdot \frac{\sigma'}{\sigma}. \tag{6}$$

wo der Strich die Differentiation nach x bedeutet.

Die Funktion $\varphi(x)$ ist keineswegs monoton wachsend, doch hat sie eine ähnliche Eigenschaft. Wenn sie gleich einem ganzzahligen Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ ist, hat sie einen positiven Differentialquotienten. Daraus folgt, daß, wenn $\varphi(x)$ in einem Punkte gleich $\frac{m\pi}{2}$ ist und wir x wachsen lassen, bis $\varphi(x)$ wieder ein Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ wird, $\varphi(x)$ den Wert $\frac{(m+1)\pi}{2}$ annimmt. Wenn also

$$\varphi(a) = m\frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \varphi(b) = n\frac{\pi}{2}$$

ist, hat die Kongruenz

$$\varphi(x) \equiv 0 \mod \frac{\pi}{2}$$

im Inneren des Intervalles (a, b) $(n-m-1)$ Lösungen.

Wir betrachten noch näher die Größe $\varphi(x)$ an den Stellen $\varphi(a) = m\frac{\pi}{2}$. Wenn $m = 2\mu$ ist (μ ganze Zahl), wird laut Gl. (5) $\frac{y'}{\sigma y} = \infty$ sein. Das heißt, y verschwindet an der Stelle a. Wenn aber $m = 2\mu + 1$ ist, so folgt wieder aus Gl. (5), daß an der Stelle a y' verschwindet.

Nach dieser Einleitung kehren wir zur Gleichung (1) zurück. Da jetzt $\sigma = \sqrt{\lambda \varrho(x)}$ ist, gestaltet sich Gl. (6) folgendermaßen:

$$\varphi' - \sqrt{\lambda}\sqrt{\varrho(x)} = \frac{1}{4} \sin 2\varphi \cdot \frac{\varrho'(x)}{\varrho(x)}. \tag{7}$$

Wenn $\lambda = \lambda_n$ der n-te Eigenwert des ersten Randwertproblems ist, so wird y außer an den beiden Endpunkten, im Intervalle (a, b) noch $(n-1)$-mal verschwinden. Ebenso wird die Gleichung

$$\varphi(x) \equiv 0 \mod \pi$$

$n-1$ Lösungen im Intervalle außer den Lösungen $x=a$, $x=b$ haben. Es wird also $\varphi(b)-\varphi(a)=n\pi$ sein. Integrieren wir also Gl. (7), so erhalten wir

$$\int_a^x \varphi' dx - \sqrt{\lambda_n}\int_a^x \sqrt{\varrho(x)}\,dx = \frac{1}{4}\int_a^x \sin 2\varphi \,\frac{\varrho'(x)}{\varrho(x)}\,dx,$$

oder, wenn $\varphi(a)=0$ gesetzt ist,

$$\left|\varphi(x)-\sqrt{\lambda_n}\int_a^x \sqrt{\varrho(x)}\,dx\right| < \frac{1}{4}\left|\int_a^x \frac{\varrho'(x)}{\varrho(x)}\right| dx < \frac{1}{4}\int_a^b \left|\frac{\varrho'(x)}{\varrho(x)}\right| dx = A.$$

Das ist eine erste Abschätzung des Eigenwertes. Denn, wenn wir $x=b$ schreiben, erhalten wir

$$\left| n\pi - \sqrt{\lambda_n}\int_a^b \sqrt{\varrho(x)}\,dx \right| < A, \tag{8}$$

wo A eine von λ_n unabhängige endliche Größe ist. Daraus bekommen wir

$$\sqrt{\lambda_n} \sim \frac{n\pi}{\int_a^b \sqrt{\varrho(x)}\,dx} = \frac{n\pi}{J}. \tag{9}$$

Dasselbe Resultat erhalten wir auch dann, wenn λ_n den n-ten Eigenwert des zweiten Eigenwertproblemes bedeutet. In diesem Falle ist nämlich $\varphi(a)\equiv\varphi(b)\equiv\frac{\pi}{2} \bmod \pi$ und $\varphi(b)-\varphi(a)=n\pi$.

Nun können wir aber auch weitergehen. Wir werden beweisen, daß die linke Seite von (8) selbst wie n^{-1} nach 0 konvergiert. Zu diesem Zwecke schätzen wir die Größe

$$L=\int_a^b \sin 2\varphi \,\frac{\varrho'}{\varrho}\,dx$$

ab. Aus Gl. (7) folgt, daß

$$\frac{d\varphi}{dx} = \sqrt{\lambda\varrho} + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\,\frac{\varrho'}{\varrho}$$

ist. Bei genügend großem n wird die rechte Seite dieser Gleichung im ganzen Intervalle positiv sein, da wir die Positivität von $\varrho(x)$ vorausgesetzt haben. So können wir für große n

$$L=\int_a^b \varphi' \sin 2\varphi \,\frac{\varrho'}{\varrho}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^{-1} dx$$

schreiben. Nach einer partiellen Integration erhalten wir:

$$L=\left[-\cos 2\varphi\cdot\frac{\varrho'}{\varrho}\cdot\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^{-1}\right]_a^b - \int_a^b \cos 2\varphi\left[\left(\frac{d}{dx}\,\frac{\varrho'}{\varrho}\right)\cdot\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^{-1} - \frac{\varrho'}{\varrho}\cdot\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^{-2}\cdot\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right] dx. \tag{10}$$

Nun ist $\frac{d\varphi}{dx} = O(\sqrt{\lambda})$ und auch

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \sqrt{\lambda\varrho'} + \frac{1}{4}\cdot 2\frac{d\varphi}{dx}\cos 2\varphi\,\frac{\varrho'}{\varrho} + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)' = O(\sqrt{\lambda}).$$

So sehen wir, daß die rechte Seite von (10) eine Funktion ist, die mit $\lambda^{-\frac{1}{2}}$ nach 0 konvergiert.

Eben dasselbe Resultat erhalten wir auch beim zweiten Eigenwertproblem, und wenn wir aus Gl. (9) in Betracht nehmen, daß $\lambda^{-\frac{1}{2}} = O(n^{-1})$ ist, erhalten wir Gl. (2).

Jetzt gehen wir zu einer kurzen Betrachtung der Differentialgleichung (3) über. Die Eigenwerte dieser Gleichung erfüllen, wie bekannt, die Ungleichung

$$\frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2} - p_{\max} < \lambda_n < \frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2} - p_{\min},$$

oder

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{n\pi}{b-a} + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{11}$$

Zur genaueren Abschätzung von λ_n brauchen wir nochmals Gl. (6); die Größe $\sigma = \frac{y''}{y}$ ist jetzt gleich $\sqrt{p(x)+\lambda_n}$. So erhalten wir für die Phase φ der Gl. (3) die Differentialgleichung:

$$\varphi' - \sqrt{p(x)+\lambda_n} = \frac{1}{4}\sin 2\varphi\,\frac{p'(x)}{p(x)+\lambda_n}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung konvergiert mit λ_n^{-1} oder nach (11) mit n^{-2} gegen 0. Wenn wir jetzt diese Gleichung integrieren, wird die rechte Seite wegen der immer größeren Oscillation von $\sin 2\varphi$ schneller nach 0 konvergieren, als n^{-2}; und zwar wird sie eine Funktion $O(n^{-3})$ sein, wie es nach einer partiellen Integration ersichtlich ist. Dies Resultat gilt fürs erste wie fürs zweite Eigenwertproblem. (Formel 4).