ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LANDOLINO GIULIANO

Sulle condizioni sufficienti per la semicontinuità degli integrali doppi del calcolo delle variazioni

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 10, nº 1 (1941), p. 37-55

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1941_2_10_1_37_0>

SULLE CONDIZIONI SUFFICIENTI PER LA SEMICONTINUITÀ DEGLI INTEGRALI DOPPI DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI (*)

di LANDOLINO GIULIANO (Pisa).

In una sua Memoria del 1934 (1), il TONELLI, riprendendo, fra l'altro, la dimostrazione della semicontinuità degli integrali curvilinei del Calcolo delle Variazioni quasi-regolari seminormali in forma ordinaria, ha mostrato come si possa condurre, per tali integrali, la dimostrazione stessa in modo semplice e senza l'ipotesi per la funzione $f(x, y, y')$ dell'esistenza e della continuità della sua derivata parziale $f_{y'x}(x, y, y')$, ipotesi che Egli aveva già ammessa nel Suo libro: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni* (2) per gli integrali soltanto quasi-regolari.

In questo lavoro, estendendo opportunamente il procedimento del TONELLI, si esamina l'analoga questione per gli integrali doppi del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria e si prova come, per gli integrali quasi-regolari seminormali (che vengono qui definiti per mezzo della funzione $\mathcal{E}$ di WEIERSTRASS, in modo da non supporre l'esistenza delle derivate parziali f_{pp}, f_{pq}, f_{qq} della funzione $f(x, y, z, p, q)$) valga, sotto le ulteriori ipotesi ammesse dal TONELLI in una Sua fondamentale Memoria (3), la semicontinuità, indipendentemente dall'esistenza e dalla continuità delle derivate parziali f_{px}, f_{qy} della funzione $f(x, y, z, p, q)$, esistenza e continuità di cui il TONELLI si era servito nella Memoria ora citata e per gli integrali soltanto quasi-regolari.

(*) Lavoro eseguito nel Seminario di Alta Matematica della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

(1) L. TONELLI: *Su gli integrali del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria.* Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa. Vol. III, 1934, fasc. III-IV, pp. 401-450, in particolare pp. 405-413.

(2) L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni.* 2 volumi, Zanichelli, Bologna, 1922 e 1924, cfr. Vol. I, pag. 397.

(3) L. TONELLI: *Sur la semicontinuité des intégrales doubles du Calcul des Variations.* Acta Mathematica, T. 53 (1929), pp. 325-346, cfr. n.° 13 e n.° 14.

Il TONELLI ha dato, in tale Memoria, della semicontinuità degli integrali quasi-regolari, un'altra dimostrazione (cfr. n.° 8) dove l'ipotesi dell'esistenza e della continuità delle f_{px}, f_{qy} viene sostituita da un'altra, riguardante il comportamento della funzione $f(x, y, z, p, q)$ per $p^2 + q^2 \to +\infty$.

Il ragionamento che abbiamo adoperato è notevole per la sua semplicità ed è basato su un lemma che ne estende un altro sugli integrali curvilinei, dato dal TONELLI (4).

Ci occupiamo qui soltanto della semicontinuità inferiore bastando (come accade per gli integrali curvilinei), per ottenere i teoremi analoghi per la semicontinuità superiore, cambiare il senso delle diseguaglianze che figurano negli enunciati che daremo.

1. - La funzione $f(x, y, z, p, q)$ e l'integrale $I_D(z)$ (5).

Sia $f(x, y, z, p, q)$ una funzione (reale) finita e continua con le sue derivate parziali f_p, f_q, (6) per ogni punto (x, y) di un dominio aperto e limitato D (di cui diciamo $\overline{D}$ il dominio chiuso corrispondente, costituito dai punti di D e della sua frontiera (7)) e per ogni valore (reale) finito di z, p, q.

Si consideri la classe C delle funzioni definite e assolutamente continue (secondo TONELLI) in D e tali che l'integrale doppio (nel senso del LEBESGUE)

$$I_D(z) = \iint_D f(x, y, z(x, y), \quad p(x, y), \quad q(x, y))dxdy$$

(ove si è posto $p(x, y) = \frac{\partial z(x, y)}{\partial x}$, $q(x, y) = \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}$ per ogni punto di D in cui esistono finite $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ e $p=0$, $q=0$ negli altri punti di D) sia finito.

Considerato un punto (x_0, y_0, z_0) tale che (x_0, y_0) sia un punto di D e un sistema di assi cartesiani ortogonali (p, q, u) diciamo *figurativa* della funzione $f(x, y, z, p, q)$ relativa al punto (x_0, y_0, z_0), la superficie definita, rispetto agli assi p, q, u, da

$$u = f(x_0, y_0, z_0, p, q).$$

Il piano tangente ad essa nel punto $(\overline{p}, \overline{q}, \overline{u} = f(x_0, y_0, z_0, \overline{p}, \overline{q}))$ ha per equazione

$$u = f(x_0, y_0, z_0, \overline{p}, \overline{q}) + (p - \overline{p}) f_p(x_0, y_0, z_0, \overline{p}, \overline{q}) + (q - \overline{q}) f_q(x_0, y_0, z_0, \overline{p}, \overline{q}).$$

La differenza fra la u della figurativa e la u di tale piano tangente, nel punto (p, q, u), è espressa da:

$$\begin{aligned} & f(x_0, y_0, z_0, p, q) - f(x_0, y_0, z_0, \overline{p}, \overline{q}) - \\ & \quad - (p - \overline{p}) f_p(x_0, y_0, z_0, \overline{p}, \overline{q}) - (q - \overline{q}) f_q(x_0, y_0, z_0, \overline{p}, \overline{q}) = \\ & \quad = \mathcal{E}(x_0, y_0, z_0; \quad \overline{p}, \overline{q}; \quad p, q) \end{aligned}$$

dove $\mathcal{E}$ è la nota funzione di WEIERSTRASS.

---

(4) Cfr. loc. cit. in (1), pag. 405.

(5) Cfr. loc. cit. in (3), § 1, n.° 1, 2, 3, 4.

(6) Vedi Osservazione al n. 10.

(7) *frontiera* di D è il luogo dei punti di accumulazione di D non facenti parte di D.

Diremo $I_D(z)$ un integrale *quasi-regolare positivo* (*negativo*) se è

$$\mathcal{E}(x, y, z;\ \ \overline{p}, \overline{q};\ \ p, q) \geqslant 0 \qquad (\leqslant 0)$$

per qualsiasi punto (x, y) di D e per tutti i valori finiti di $z, p, q, \overline{p}, \overline{q}$; lo diremo *quasi-regolare positivo* (*negativo*) *seminormale* se è quasi-regolare positivo (negativo) e se, inoltre, per ogni punto (x, y, z) tale che (x, y) appartenga a D esiste almeno una coppia $(\overline{p}, \overline{q})$ tale che sia

$$\mathcal{E}(x, y, z;\ \ \overline{p}, \overline{q};\ \ p, q) > 0 \qquad (< 0)$$

per tutte le coppie (p, q) distinte dalla coppia $(\overline{p}, \overline{q})$; lo diremo infine *quasi-regolare positivo* (*negativo*) *normale* se è, qualunque siano $\overline{p}, \overline{q}$:

$$\mathcal{E}(x, y, z;\ \ \overline{p}, \overline{q};\ \ p, q) > 0 \qquad (< 0)$$

per ogni coppia (p, q) distinta dalla coppia $(\overline{p}, \overline{q})$ e in ogni punto (x, y, z) tale che (x, y) appartenga a D.

Diremo $I_D(z)$ un *integrale semicontinuo inferiormente* (*superiormente*) se, data una qualunque funzione $z_0(x, y)$ della classe C e un $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, si può determinare un $\varrho > 0$ in modo che si abbia

$$I_D(z) > I_D(z_0) - \varepsilon \qquad [I_D(z) < I_D(z_0) + \varepsilon]$$

per tutte le funzioni $z(x, y)$ della classe C, soddisfacenti in tutti i punti D, alla diseguaglianza:

$$|\, z\,(x, y) - z_0(x, y)\,| < \varrho.$$

OSSERVAZIONE I.ª - *Se $I_D(z)$ è un integrale quasi-regolare seminormale, la figurativa, rispetto agli assi ortogonali p, q, u:*

$$\text{(A)} \qquad u = f(x_0, y_0, z_0, p, q)$$

relativa a un punto qualunque (x_0, y_0, z_0) con (x_0, y_0) appartenente a D, non contiene alcuna retta.

Supponiamo che l'integrale $I_D(z)$ sia quasi-regolare positivo, (per fissare le idee), seminormale. Esisterà allora una coppia $(\overline{p}, \overline{q})$ tale che il piano α tangente alla figurativa (A) nel punto $\overline{P}$ corrispondente a tale coppia lascia al di sopra la superficie (A) colla quale ha a comune il solo punto $\overline{P}$. Se

$$u = lp + mq + n$$

è l'equazione del piano α, posto

$$\overline{f}(x_0, y_0, z_0, p, q) = f(x_0, y_0, z_0, p, q) - lp - mq - n$$

sarà $u = 0$ l'equazione del piano tangente alla superficie

$$\text{(B)} \qquad u = \overline{f}(x_0, y_0, z_0, p, q)$$

nel punto M corrispondente alla coppia $(\overline{p}, \overline{q})$ e il piano $u = 0$ lascierà al di sopra la superficie (B) colla quale ha a comune il solo punto M. Basterà provare che la superficie (B) non contiene alcuna retta. Una eventuale retta s della (B) non può giacere sul piano $u=0$, altrimenti questo piano avrebbe altri punti a comune colla (B) oltre M, nè potrà incontrare il piano $u=0$ perchè, in tal caso, la (B) avrebbe punti al di sotto di tale piano. Sia adunque, se possibile, la s parallela al piano $u=0$. Si conduca per il punto M la perpendicolare r al piano $u=0$ e si consideri il fascio di piani di asse r, il cui piano ν generico incontra la (B) secondo una curva Γ che non potrà avere punti al di sotto di ogni sua tangente; se è poi M' il punto di intersezione di Γ con la retta s, la cui distanza dal piano $u=0$ diciamo d, i punti di Γ compresi fra M e M' hanno dal piano $u=0$ distanze minori di d. Detta $\overline{\Gamma}$ la curva intersezione del piano $\bar{\nu}$ del fascio sopra considerato, parallelo alla retta s, quando ν tende a $\bar{\nu}$, la curva Γ tende alla curva $\overline{\Gamma}$. Si deduce, tenendo presente quanto si è sopra osservato, che ogni punto di $\overline{\Gamma}$ dovrà avere dal piano $u=0$ distanza minore o eguale a d e ciò è evidentemente assurdo.

OSSERVAZIONE II.ª - *La definizione sopra data di integrale quasi-regolare seminormale, nel caso degli integrali curvilinei nel piano, è perfettamente equivalente a quella di* TONELLI.

Sia A un campo del piano (x, y) contenente tutti i suoi punti di accumulazione (al finito) per ogni punto del quale e per ogni valore (reale) finito di y' sia definita una funzione (reale) $f(x, y, y')$ finita e continua insieme colla sua derivata parziale $f_{y'}(x, y, y')$.

Se (x_0, y_0) è un punto di A, dicesi *figurativa* della $f(x, y, y')$ relativa al punto (x_0, y_0) la curva, rispetto agli assi cartesiani ortogonali y', u:

$$u=f(x_0, y_0, y').$$

Considerata una curva C, appartenente al campo A, rappresentata nella forma:

$$y=y(x) \qquad a\leqslant x\leqslant b$$

con $y(x)$ funzione assolutamente continua in (a, b) e tale che, in tutto questo intervallo, risulti integrabile (nel senso del LEBESGUE) la funzione $f(x, y(x), y'(x))$ e posto

$$I_C=\int_C f(x, y, y')dx\equiv\int_a^b f(x, y(x), y'(x))\,dx$$

il TONELLI chiama I_C un integrale *quasi-regolare positivo* (*negativo*) *seminormale* se, per ogni punto (x, y) del campo A, la corrispondente figurativa della $f(x, y, y')$ è una curva non riducentesi ad una retta e non avente punti al di sotto (al di sopra) di ogni sua tangente.

La definizione di integrale *quasi-regolare positivo* (*negativo*) *seminormale* da noi posta, nel caso degli integrali curvilinei nel piano, esige che per ogni punto (x, y) del campo A la corrispondente figurativa della $f(x, y, y')$ sia una curva che non abbia punti al di sotto (al di sopra) di ogni sua tangente e inoltre che esista almeno una sua tangente avente soltanto un punto a comune con la figurativa stessa.

È chiaro, intanto, come dalla nostra definizione ne discenda quella di TONELLI.

Viceversa, si supponga I_C *quasi-regolare positivo* (per fissare le idee) *seminormale*, secondo TONELLI.

Consideriamo, nel piano (y', u) la figurativa

$$\Gamma: \quad u = f(x_0, y_0, y')$$

della $f(x, y, y')$ relativa al punto (x_0, y_0) di A. Poichè Γ non è una retta, esisteranno due suoi punti P e Q, corrispondenti rispettivamente a due valori y_1' e y_2' di y', con $y_1' < y_2'$, e tali che se t_1 e t_2 sono le relative tangenti della Γ, queste tangenti risultano distinte. Detto M il punto più a destra a comune fra la retta t_1 e la curva Γ e N il punto più a sinistra a comune fra la retta t_2 e la curva Γ, è M distinto da N, per la supposta esistenza della $f_{y'}(x_0, y_0, y')$.

Se ammettiamo che non esista alcuna tangente alla curva Γ non avente con Γ nessun altro punto a comune, oltre quello di contatto, i punti a comune della curva Γ con ogni tangente ai varî punti dell'arco MN formeranno un segmento (necessariamente finito) non nullo. Tali segmenti non hanno alcun punto a comune fra di loro (nemmeno gli estremi, per l'ipotesi che esista la $f_{y'}(x_0, y_0, y')$) e, per un teorema di CANTOR, saranno al più una infinità numerabile. I punti dell'arco MN che non sono interni a nessuno di essi costituiscono pertanto un insieme *chiuso* E di cui la totalità dei segmenti è la totalità degli archi contigui. E è privo di punti isolati e risulta quindi perfetto e perciò non numerabile. D'altra parte, per quanto si è ammesso, E coincide con gli estremi dei suoi intervalli contigui e deve essere numerabile. Dunque l'ipotesi ammessa deve essere respinta.

2. - **Lemma.** *Se $I_D(z)$ è un integrale quasi-regolare positivo seminormale, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, per ogni punto (x_0, y_0, z_0), essendo (x_0, y_0) un punto di D e per ogni coppia di valori $(\bar{p}, \bar{q})$, si può determinare (almeno) una quaterna di numeri λ, μ, ν, ϱ con $\varrho > 0$, in modo che, in ogni punto (x, y, z) tale che (x, y) appartenga a D e sia distante da (x_0, y_0, z_0) non più di ϱ, sia*

$$f(x, y, z, p, q) > \lambda p + \mu q + \nu \tag{1}$$

qualunque siano p, q e

$$f(x, y, z, p, q) < \lambda p + \mu q + \nu + \varepsilon \tag{2}$$

se è $(p - \bar{p})^2 + (q - \bar{q})^2 \leq \varrho^2$ [8].

---

[8] Per gli integrali quasi-regolari positivi normali, questo lemma è contenuto in quello dato da S. CINQUINI: *Condizioni sufficienti per la semicontinuità, nel Calcolo delle Variazioni.* Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, 1933, Vol. II, Serie, II, p. 43.

Consideriamo la figurativa della $f(x, y, z, p, q)$ relativa al punto (x_0, y_0, z_0):

$$u = f(x_0, y_0, z_0, p, q) \tag{3}$$

riferita agli assi cartesiani ortogonali (p, q, u).

Nel punto P della figurativa corrispondente alla coppia $(\bar{p}, \bar{q})$ sia π il piano tangente alla figurativa stessa. Essendo l'integrale $I_D(z)$ quasi-regolare positivo, la superficie (3) non ha punti al di sotto di π.

a) Supponiamo, in primo luogo, che la figurativa (3) e il piano π abbiano in comune il solo punto P.

Detta

$$u = \lambda p + \mu q + \nu_1$$

l'equazione di π sarà, per ogni coppia (p, q) distinta dalla coppia $(\bar{p}, \bar{q})$:

$$f(x_0, y_0, z_0, p, q) > \lambda p + \mu q + \nu_1$$

e si può, per la continuità della $f(x, y, z, p, q)$, scelto $\varepsilon > 0$, determinare un $\varrho_1 > 0$ tale che per ogni coppia (p, q) che soddisfi alla

$$(p - \bar{p})^2 + (q - \bar{q})^2 \leqslant \varrho_1^2 \tag{4}$$

risulti

$$f(x_0, y_0, z_0, p, q) < \lambda p + \mu q + \nu_1 + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Posto $\nu = \nu_1 - \frac{\varepsilon}{2}$ si avrà, per ogni coppia (p, q) or ora indicata, anche

$$\lambda p + \mu q + \nu < f(x_0, y_0, z_0, p, q) < \lambda p + \mu q + \nu + \varepsilon \tag{6}$$

e, per la continuità della $f(x, y, z, p, q)$, si potrà scegliere un $\varrho > 0$, tale che sia $0 < \varrho < \varrho_1$ e

$$\lambda p + \mu q + \nu < f(x, y, z, p, q) < \lambda p + \mu q + \nu + \varepsilon \tag{7}$$

per tutti i punti (x, y, z) distanti da (x_0, y_0, z_0) non più di ϱ e tali che (x, y) appartenga a D e per ogni coppia (p, q) che soddisfi alla (4).

Indichiamo con τ il piano di equazione

$$u = \lambda p + \mu q + \nu$$

e si dica Ω il cerchio sul piano (p, q) di centro $(\bar{p}, \bar{q})$ e raggio ϱ_1. Si consideri, sulla figurativa relativa al punto (x_0, y_0, z_0), la curva luogo dei punti P' che si proiettano ortogonalmente nei punti della circonferenza di Ω. Ognuno dei semiraggi r' che uniscono il punto P coi varî punti P' resta tutto al di sopra del piano τ e, se ϱ è sufficientemente piccolo, lo stesso accadrà dei semiraggi analoghi agli r' e relativi alla figurativa corrispondente al punto (x, y, z) distante da (x_0, y_0, z_0) non più di ϱ e con (x, y) appartenente a D.

Pertanto, la parte di tale ultima figurativa corrispondente alle coppie (p, q) soddisfacenti alla disuguaglianza:

$$(p-\overline{p})^2+(q-\overline{q})^2>\varrho_1^2$$

resterà completamente al di sopra di τ, ossia per tali coppie (p, q) è

$$f(x, y, z, p, q)>\lambda p+\mu q+\nu$$

che insieme con la (7) dimostra le (1) e (2).

b) Supponiamo ora che la superficie (3) e il piano π abbiano in comune più di un punto. Detto I l'insieme di tali punti, facili considerazioni mostrano:

se I rimane completamente al finito, esso costituisce:

1) un campo piano chiuso convesso limitato da una curva continua e chiusa Γ

2) oppure: un segmento rettilineo;

e se I ha punti all'infinito:

3) una parte del piano π, di cui non fa parte alcuna retta ([9]), limitata da una curva continua convessa Γ estendentesi all'infinito

4) oppure: una semiretta.

Nel caso 1), detta Γ' la proiezione ortogonale della curva Γ sul piano (p, q) e fissato un punto M *interno* al campo piano racchiuso da Γ', si dica $\overline{\Gamma}'$ la curva omotetica di Γ' rispetto ad M e con rapporto di omotetia eguale a $1+\varrho_1$ con $\varrho_1>0$; si determini ϱ_1 sufficientemente piccolo in modo che valga la (5) e quindi la (6) per tutte le coppie (p, q) corrispondenti ai punti che appartengono al campo piano racchiuso da $\overline{\Gamma}'$ e si ripeta il ragionamento fatto in *a*) sostituendo alla circonferenza di Ω la curva $\overline{\Gamma}'$: si conclude che si può determinare un $\varrho'>0$ tale che, se (x, y, z) è un punto distante da (x_0, y_0, z_0) non più di ϱ' e con (x, y) appartenente a D, valga la (1) qualunque siano p, q e la (2) per tutte le coppie (p, q) corrispondenti ai punti del campo racchiuso da $\overline{\Gamma}'$. Ogni altro $\varrho>0$ e che sia minore o eguale a ϱ' e minore o eguale alla minima distanza del punto $\overline{P}\equiv(\overline{p}, \overline{q}, 0)$ dai punti di $\overline{\Gamma}'$ è tale che in ogni punto (x, y, z) con (x, y) appartenente a D e distante da (x_0, y_0, z_0) non più di ϱ vale la (1) qualunque siano p, q e la (2) se è $(p-\overline{p})^2+(q-\overline{q})^2\leq\varrho^2$.

Nel caso 2) è chiaro come si dovrà modificare il ragionamento precedente.

Nel caso 3) si dica ancora Γ' la curva proiezione ortogonale sul piano (p, q) della curva Γ; detto M' un punto del piano (p, q) non appartenente a Γ' e proiezione ortogonale di un punto M dell'insieme I, sia $\overline{\Gamma}'$ la curva del piano (p, q) omotetica di Γ' rispetto ad M' e con rapporto di omotetia eguale a $1+\varrho_1$ con $\varrho_1>0$. Sia poi $\overline{\Gamma}$ la curva del piano π che ha come proiezione ortogonale sul

---

([9]) Si tenga presente l'oss. 1ª del n. 1.

piano (p, q) la curva $\overline{\Gamma}'$. L'angolo α, sul piano π, di lati r_1 e r_2 e di vertice P, contenente tutte le semirette, uscenti da P, facenti parte dell'insieme I è necessariamente minore di un angolo piatto, altrimenti dell'insieme I farebbero parte delle rette. Si dica t_1 la sua bisettrice e t_2 là perpendicolare, sul piano π, per il punto P, alla t_1. Sia poi, sul piano π, β un angolo, di vertice P e di lati $\bar{r}_1$ e $\bar{r}_2$, minore di un angolo piatto e contenente nel suo interno tutti i punti dell'angolo α, escluso il punto P (vedi figura 1).

Sia P' la proiezione ortogonale, sul piano (p, q), del punto P; t_1' e t_2' rispettivamente le proiezioni ortogonali, sul piano (p, q), delle rette t_1 e t_2 e $\bar{r}_1'$ e $\bar{r}_2'$ rispettivamente le proiezioni ortogonali, sul piano (p, q), dei lati $\bar{r}_1$ e $\bar{r}_2$

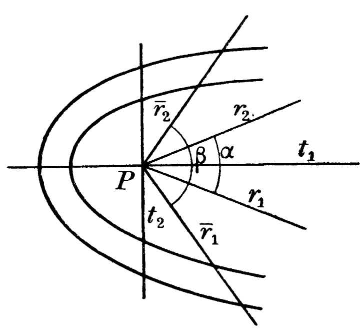

FIG. 1.

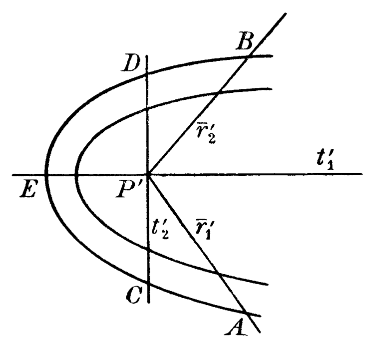

FIG. 2.

dell'angolo β. Se A e B sono i punti di intersezione della curva $\overline{\Gamma}'$ con le semirette $\bar{r}_1'$ e $\bar{r}_2'$ rispettivamente, si congiunga, mediante un segmento rettilineo, A con B e si consideri il campo piano Λ limitato dal segmento AB e dall'arco $ACEDB$ di $\overline{\Gamma}'$ (vedi figura 2).

Avendo indicato con

$$u = \lambda p + \mu q + \nu_1$$

l'equazione del piano π, risulta, per ogni p e q,

$$\Delta = f(x_0, y_0, z_0, p, q) - \lambda p - \mu q - \nu_1 \geqslant 0$$

e Δ è funzione continua in qualunque insieme limitato e chiuso del piano (p, q). Sia allora $\Phi(>0)$ il massimo di Δ lungo la curva chiusa $ACEDBA$, contorno del campo Λ e $\varphi(>0)$ il minimo di Δ lungo la curva aperta $ACEDB$. È $\varphi \leqslant \Phi$, e Φ e quindi φ tendono a zero quando ϱ_1 tende a zero. Scelto $\varepsilon > 0$, si determini ϱ_1 in modo che sia $2\varphi + 2\Phi < \varepsilon$ e si fissi il campo Λ. Se π_1 è il piano, parallelo a π, di equazione

$$u = \lambda p + \mu q + \nu_1 + 2\Phi$$

e π_2 il piano, parallelo a π, di equazione

$$u = \lambda p + \mu q + \nu_1 - 2\varphi$$

la parte della figurativa (3) che ha come proiezione ortogonale sul piano (p, q) il campo Λ rimane al di sopra del piano π_2 e al di sotto del piano π_1. Sia ora L_0 la curva della figurativa (3) che ha come proiezione ortogonale sul piano (p, q) la curva chiusa $ACEDBA$ e indichiamo con V_0 la superficie conica di vertice P formata dai raggi uscenti da P e appoggiantesi su L_0. Si dica $\bar{t}$ la parallela alla t_2 giacente sul piano π_2 e passante per il punto $(\bar{p}, \bar{q}, \lambda\bar{p} + \mu\bar{q} + \nu_1 - 2\varphi)$ e si faccia ruotare il piano π_2 intorno alla $\bar{t}$ in modo che, detta τ_2 la nuova posizione assunta da π_2, τ_2 non incontri la curva $\bar{\Gamma}$ del piano π, lasci al di sopra la superficie V_0, di cui nessun raggio risulterà pertanto parallelo a τ_2 e in modo che, detta

$$u = \bar{\lambda} p + \bar{\mu} q + \bar{\nu}$$

l'equazione di τ_2, se τ_1 è il piano, parallelo a τ_2, di equazione

$$u = \bar{\lambda} p + \bar{\mu} q + \bar{\nu} + 2\varphi + 2\Phi$$

la parte della figurativa (3) che ha come proiezione ortogonale sul piano (p, q) il campo Λ, rimanga al di sopra del piano τ_2 e al di sotto del piano τ_1. Fissati il campo Λ e i piani τ_1 e τ_2, come ora si è detto, e considerata la figurativa F della $f(x, y, z, p, q)$ relativa al punto (x, y, z) distante da (x_0, y_0, z_0) non più di ϱ' e con (x, y) appartenente a D, se ϱ' è sufficientemente piccolo, potrà affermarsi:

1°) la parte di F che si proietta ortogonalmente sul campo Λ del piano (p, q) rimarrà al di sopra del piano τ_2 e al di sotto del piano τ_1.

2°) la superficie conica V analoga alla V_0 e relativa alla F resterà al di sopra di τ_2 onde resterà al di sopra di τ_2 anche la parte della figurativa F che corrisponde ai punti (p, q) che non appartengono a Λ, poichè questa parte di F è al di sopra o sulla superficie V.

Detto ora $\bar{\tau}_1$ il piano di equazione

$$u = \bar{\lambda} p + \bar{\mu} q + \bar{\nu} + \varepsilon,$$

se ϱ è minore di ϱ' e della minima distanza del punto P' dai punti della curva $ACEDBA$, si conclude che, se (x, y, z) è un punto distante da (x_0, y_0, z_0) non più di ϱ e tale che (x, y) appartenga a D, quella parte della figurativa F relativa a questo punto e che corrisponde alle coppie (p, q) soddisfacenti alla disuguaglianza

$$(p - \bar{p})^2 + (q - \bar{q})^2 \leqslant \varrho^2$$

rimane al di sotto del piano $\bar{\tau}_1$, cioè è, per tali coppie,

$$f(x, y, z, p, q) < \bar{\lambda} p + \bar{\mu} q + \bar{\nu} + \varepsilon$$

mentre la F rimane completamente al di sopra del piano τ_2, vale a dire è, qualunque sia la coppia (p, q):

$$f(x, y, z, p, q) > \bar{\lambda} p + \bar{\mu} q + \bar{\nu},$$

e il lemma enunciato è così provato, nel caso qui considerato.

È chiaro, infine, come dovrà condursi il ragionamento nel caso 4).

3. - **Teorema.**

Supposto sempre in D, e per ogni valore finito di z, p, q:

$$f(x, y, z, p, q) \geqslant N \tag{9}$$

con N numero fisso, se $I_D(z)$ è un integrale quasi-regolare positivo seminormale, esso è semicontinuo inferiormente.

Se S_0: $z = z_0(x, y)$, con (x, y) appartenente a D, è una qualunque superficie della classe C, ci proponiamo di dimostrare che l'integrale $I_D(z)$ è semicontinuo inferiormente su tale superficie.

Sia Q un quadrato a lati paralleli agli assi x e y, contenente il campo D; si divida Q in 4^n quadrati uguali (n intero positivo) mediante parallele agli assi e di questi quadrati si considerino quelli (lati compresi) i cui punti sono tutti punti di D. Sia D_n l'insieme (limitato e chiuso) costituito da tutti i loro punti. Tenendo presente l'ipotesi (9), come ha provato il TONELLI [10], per dimostrare la semicontinuità inferiore dell'integrale $I_D(z_0)$, basta dimostrare la semicontinuità inferiore dell'integrale $I_{D_n}(z_0)$.

Tengasi presente il lemma del n.° 2: un semplice ben noto ragionamento [11] mostra allora che si può decomporre D_n in un numero finito di rettangoli Δ_1, Δ_2,...., Δ_m a lati paralleli agli assi x e y e che si possono determinare un numero positivo ϱ e m terne di numeri λ_r, μ_r, ν_r $(r = 1, ..., m)$ in modo che, detta $S_{0,r}$ la parte della superficie S_0 che ha Δ_r come proiezione ortogonale sul piano (x, y), per ogni punto (x, y, z) appartenente all'intorno (ϱ) [12] di $S_{0,r}$ e tale che (x, y) sia un punto di D_n, e per tutte le coppie (p, q), si abbia

$$f(x, y, z, p, q) > \lambda_r p + \mu_r q + \nu_r .$$

Come è chiaro, ci si può senz'altro limitare a dimostrare la semicontinuità inferiore dell'integrale $I_{\Delta_r}(z_0)$ esteso a un qualunque rettangolo Δ_r.

---

[10] Cfr. loc. cit. in [3], n.° 6, p. 332.

[11] Vedi per esempio S. CINQUINI: *Condizioni sufficienti per la semicontinuità nel Calcolo delle Variazioni.* Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Vol. II, 1933, pp. 41-58, p. 48.

[12] Per *intorno* (ϱ) di una superficie S s'intende l'insieme dei punti (x, y, z) distanti da S non più di ϱ $(\varrho > 0)$.

Poniamo

$$f^{(r)}(x, y, z, p, q) \equiv f(x, y, z, p, q) - (\lambda_r p + \mu_r q + \nu_r)$$

$$I_{\Delta_r}^{(r)}(z) \equiv \iint\limits_{\Delta_r} f(x, y, z, p, q)dxdy - \iint\limits_{\Delta_r} (\lambda_r p + \mu_r q + \nu_r)dxdy.$$

Si consideri ora una qualunque superficie della classe C:

$$S:\quad z = z(x, y), \text{ con } (x, y) \text{ appartenente a } \Delta_r$$

e tale che sia in tutto Δ_r:

$$|z(x, y) - z_0(x, y)| < \varrho.$$

Si può scrivere:

$$I_{\Delta_r}(z) - I_{\Delta_r}(z_0) = I_{\Delta_r}^{(r)}(z) - I_{\Delta_r}^{(r)}(z_0) + \iint\limits_{\Delta_r} (\lambda_r p(x, y) + \mu_r q(x, y) + \nu_r)\, dxdy - $$
$$- \iint\limits_{\Delta_r} (\lambda_r p_0(x, y) + \mu_r q_0(x, y) + \nu_r)dxdy$$

avendo posto, come al solito,

$$p(x, y) = \frac{\partial z(x, y)}{\partial x}, \qquad q(x, y) = \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}, \qquad p_0(x, y) = \frac{\partial z_0(x, y)}{\partial x}, \qquad q_0(x, y) = \frac{\partial z_0(x, y)}{\partial y}$$

dove le derivate parziali esistono finite e $p = q = 0$, $p_0 = q_0 = 0$ negli altri punti.

Poichè, per un lemma del TONELLI, l'integrale

$$\iint\limits_{\Delta_r} (\lambda_r p(x, y) + \mu_r q(x, y) + \nu_r)dxdy$$

ove λ_r, μ_r, ν_r sono delle costanti, è continuo nella classe delle funzioni $z(x, y)$ continue in $\overline{\Delta}_r$ e assolutamente continue in Δ_r ([13]), preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, risulterà, se ϱ è sufficientemente piccolo:

$$I_{\Delta_r}(z) - I_{\Delta_r}(z) > I_{\Delta_r}^{(r)}(z) - I_{\Delta_r}^{(r)}(z) - \varepsilon. \tag{10}$$

Se con S_r si indica quella parte della superficie S che si proietta ortogonalmente sul rettangolo Δ_r, su $S_{0,r}$ e su S_r è, per tutte le coppie (p, q):

$$f^{(r)}(x, y, z, p, q) > 0.$$

([13]) Cfr. loc. cit. in ([3]), n. 10, p. 338 dove il lemma è dimostrato nel caso in cui si tratti di un quadrato a lati paralleli agli assi, ma è facile vedere che esso vale anche nel caso in cui, come qui, si tratti di un rettangolo a lati paralleli agli assi. Con $\overline{\Delta}_r$ indichiamo, come al solito, il campo chiuso corrispondente a Δ_r.

Si scelga ora nel rettangolo aperto Δ_r un insieme chiuso E_r il quale soddisfi alla disuguaglianza

$$(11) \qquad \iint\limits_{\Delta_r - E_r} f^{(r)}(x, y, z_0, p_0, q_0)\, dxdy < \varepsilon$$

e sia tale che in ogni suo punto le derivate parziali $p_0(x, y)$ e $q_0(x, y)$ esistano sempre finite e siano continue su E_r.

Consideriamo un punto $(\bar{x}, \bar{y})$ di E_r. Applicando il lemma del n.° 2 all'integrale $I_{\Delta_r}^{(r)}(z)$ (che risulta quasi-regolare positivo seminormale) possiamo determinare cinque numeri $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\varrho} > 0$, $\bar{\sigma} > 0$ in modo che sia

$$(12) \qquad f^{(r)}(x, y, z, p, q) > \bar{\lambda} p + \bar{\mu} q + \bar{\nu}$$

per ogni coppia (p, q) e per tutti i punti (x, y, z) con (x, y) appartenente a Δ_r e distanti non più di $\bar{\varrho}$ da quella parte della superficie S_0 che ha per proiezione ortogonale, sul piano (x, y), il quadrato $\overline{H}$ coi lati paralleli agli assi, di centro $(\bar{x}, \bar{y})$ e lato $2\bar{\sigma}$ e in modo che sia anche

$$(13) \qquad f^{(r)}(x, y, z_0(x, y), p_0(x, y), q_0(x, y)) < \bar{\lambda} p_0(x, y) + \bar{\mu} q_0(x, y) + \bar{\nu} + \varepsilon$$

per ogni punto (x, y) di E_r appartenente al quadrato $\overline{H}$.

Siccome E_r è un insieme chiuso, per il noto teorema di PINCHERLE-BOREL, potremo ricoprirlo con un numero finito di quadrati analoghi ad $\overline{H}$: siano $H_1, H_2, \ldots, H_{N_r}$. Indichiamo con $\bar{\lambda}_{r,t}, \bar{\mu}_{r,t}, \bar{\nu}_{r,t}, \bar{\varrho}_{r,t}$ $(t = 1, 2, \ldots, N_r)$ le quaterne $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\varrho}$ corrispondenti ai quadrati così scelti. In ciascuno di questi quadrati si sopprimano poi quelle parti che eventualmente uscissero fuori dal minimo rettangolo coi lati paralleli agli assi contenente E_r o che risultassero sovrapposte a quadrati di indice minore dello stesso gruppo; si suddivida quindi in rettangoli ognuno dei campi ottenuti che non avesse tale forma e si sopprimano, dai nuovi rettangoli così ottenuti, un certo numero di quelle loro parti che eventualmente non contenessero alcun punto di E_r in modo che i nuovi campi ottenuti $K_{r,1}, K_{r,2}, \ldots, K_{r,M_r}$ siano ancora rettangoli a lati paralleli agli assi e detto E_r' l'insieme dei punti di tutti questi $K_{r,s}$ non appartenenti a E_r, risulti

$$(14) \qquad m(E_r') < \frac{\varepsilon}{L_r}, \qquad \iint\limits_{E_r'} \{ |p_0(x, y)| + |q_0(x, y)| \}\, dxdy < \frac{\varepsilon}{L_r}$$

dove L_r indica un numero superiore al massimo dei moduli $|\bar{\lambda}_{r,t}|$, $|\bar{\mu}_{r,t}|$, $|\bar{\nu}_{r,t}|$ per $t = 1, 2, \ldots, N_r$.

Indichiamo con $\lambda_{r,s}, \mu_{r,s}, \nu_{r,s}$ i numeri $\bar{\lambda}_{r,s}, \bar{\mu}_{r,s}, \bar{\nu}_{r,s}$ che corrispondono a quello dei quadrati H scelti per ricoprire E_r a cui appartiene interamente $K_{r,s}$.

Avremo, se ϱ è sufficientemente piccolo, per la (12):

$$\sum_{s=1}^{M_r} I^{(r)}_{K_{r,s}}(z) > \sum_{s=1}^{M_r} \iint_{K_{r,s}} (\lambda_{r,s}\, p(x,y) + \mu_{r,s}\, q(x,y) + \nu_{r,s})\, dxdy$$

ed anche, essendo sempre su S_r, $f^{(r)} > 0$:

$$I^{(r)}_{\Delta_r}(z) > \sum_{s=1}^{M_r} \iint_{K_{r,s}} (\lambda_{r,s}\, p(x,y) + \mu_{r,s}\, q(x,y) + \nu_{r,s})\, dxdy. \tag{15}$$

Avremo, inoltre, indicando con $E_{r,s}$ e $E'_{r,s}$ le parti di E_r e E_r' contenute in $K_{r,s}$:

$$I^{(r)}_{\Delta_r}(z_0) = \sum_{s=1}^{M_r} \iint_{E_{r,s}} f^{(r)}(x,y,z_0,p_0,q_0)\, dxdy + \iint_{\Delta_r - E_r} f^{(r)}(x,y,z_0,p_0,q_0)\, dxdy$$

ed essendo, tenendo presente la (13) e le (14):

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{M_r} \iint_{E_{r,s}} f^{(r)}(x,y,z_0,p_0,q_0)\, dxdy < \\
&\quad < \sum_{s=1}^{M_r} \iint_{E_{r,s}} (\lambda_{r,s}\, p_0(x,y) + \mu_{r,s}\, q_0(x,y) + \nu_{r,s})\, dxdy + \\
&\quad + \varepsilon m(E_r) < \sum_{s=1}^{M_r} \iint_{K_{r,s}} (\lambda_{r,s}\, p_0(x,y) + \mu_{r,s}\, q_0(x,y) + \nu_{r,s})\, dxdy + \\
&\quad + L_r \sum_{s=1}^{M_r} \Big[m(E'_{r,s}) + \iint_{E'_{r,s}} \{|p_0(x,y)| + |q_0(x,y)|\}\, dxdy\Big] + \varepsilon m(E_r) < \\
&\quad < \sum_{s=1}^{M_r} \iint_{K_{r,s}} (\lambda_{r,s}\, p_0(x,y) + \mu_{r,s}\, q_0(x,y) + \nu_{r,s})\, dxdy + \varepsilon(2 + m(E_r)),
\end{aligned}$$

si ha, per la (11):

$$I^{(r)}_{\Delta_r}(z) < \sum_{s=1}^{M_r} \iint_{K_{r,s}} (\lambda_{r,s}\, p_0(x,y) + \mu_{r,s}\, q_0(x,y) + \nu_{r,s})\, dxdy + \varepsilon(3 + m(E_r)), \tag{16}$$

dalle (10), (15), (16) segue:

$$\begin{aligned}
I_{\Delta_r}(z) - I_{\Delta_r}(z_0) > \sum_{s=1}^{M_r} \Big\{ &\iint_{K_{r,s}} (\lambda_{r,s}\, p(x,y) + \mu_{r,s}\, q(x,y) + \nu_{r,s})\, dxdy - \\
&- \iint_{K_{r,s}} (\lambda_{r,s}\, p_0(x,y) + \mu_{r,s}\, q_0(x,y) + \nu_{r,s})\, dxdy \Big\} - \varepsilon(4 + \Delta_r)
\end{aligned}$$

e quindi, se ϱ è sufficientemente piccolo, per la continuità dell'integrale [14]

$$\iint\limits_{K_{r,s}} (\lambda_{r,s} p(x, y) + \mu_{r,s} q(x, y) + \nu_{r,s}) dxdy$$

nella classe delle funzioni $z(x, y)$ continue in $\overline{K}_{r,s}$ e assolutamente continue in $K_{r,s}$:

$$I_{\Delta_r}(z) - I_{\Delta_r}(z_0) > -\varepsilon(5 + \Delta_r);$$

e siccome $\varepsilon > 0$ è arbitrario, la semicontinuità inferiore dell'integrale $I_{\Delta_r}(z_0)$ è così dimostrata.

4. - *Il teorema del numero precedente vale ancora se, al posto della* (9), *si suppone che la frontiera di D sia una curva continua* (di JORDAN) *chiusa, senza punti multipli, rettificabile. Inoltre bisognerà qui supporre che la f e le sue derivate parziali f_p, f_q siano finite e continue anche sulla frontiera di D.*

Infatti, analogamente a quanto è stato fatto al numero precedente per D_n, si decomponga il campo $\overline{D}$ in un numero finito di campi $\overline{\Delta}_1$, $\overline{\Delta}_2, \ldots, \overline{\Delta}_m$, aventi frontiere dotate della stessa proprietà di cui gode la frontiera di D e in modo che esistano i numeri λ_r, μ_r, ν_r, $\varrho > 0$ $(r = 1, 2, \ldots, m)$ tali che, indicata con $S_{0,r}$ la parte di S_0 che si proietta ortogonalmente sul piano (x, y) in $\overline{\Delta}_r$, si abbia

$$f(x, y, z, p, q) > \lambda_r p + \mu_r q + \nu_r$$

per ogni punto (x, y, z) appartenente all'intorno (ϱ) di $S_{0,r}$ e con (x, y) punto di $\overline{D}$, e per tutte le coppie (p, q).

Basterà, per dimostrare la semicontinuità inferiore dell'integrale $I_D(z_0)$, limitarsi a dimostrare quella di $I_{\Delta_r}(z_0)$ esteso al campo Δ_r.

Posto anche qui

$$f^{(r)}(x, y, z, p, q) \equiv f(x, y, z, p, q) - (\lambda_r p + \mu_r q + \nu_r)$$

$$I_{\Delta_r}^{(r)}(z) \equiv \iint\limits_{\Delta_r} f(x, y, z, p, q) dxdy - \iint\limits_{\Delta_r} (\lambda_r p(x, y) + \mu_r q(x, y) + \nu_r) dxdy$$

essendo, per un lemma del TONELLI [15], l'integrale

$$\iint\limits_{\Delta_r} (\lambda_r p(x, y) + \mu_r q(x, y) + \nu_r) dxdy$$

dove λ_r, μ_r, ν_r sono delle costanti, continuo nella classe delle funzioni $z(x, y)$

---

(14) Vedi nota (13).

(15) Cfr. loc. cit. in (3) n.° 14, pag. 344.

limitate e assolutamente continue in Δ_r, basterà provare la semicontinuità inferiore dell'integrale $I^{(r)}_{\Delta_r}(z_0)$. Poichè, in tutto un intorno (ϱ) di $S_{0.r}$, con ϱ sufficientemente piccolo, è

$$f^{(r)}(x, y, z, p, q) > 0$$

e $I^{(r)}_{\Delta_r}(z)$ appartiene, come $I_{\Delta_r}(z)$, alla classe degli integrali quasi-regolari positivi seminormali, tale semicontinuità risulta dal teorema del n.° 3.

5. - Estensione all'infinito della semicontinuità.

In questo numero e nel successivo estenderemo la proprietà della semicontinuità al caso in cui, per una data $z(x, y)$, la funzione $f(x, y, z, p, q)$ non sia integrabile.

TEOREMA. - *Supposte verificate le ipotesi del teorema del n.° 3, sia $z_0(x, y)$ una funzione definita e assolutamente continua nel campo aperto e limitato D e tale che la $f(x, y, z_0(x, y), p_0(x, y)\ q_0(x, y))$ risulti non integrabile in D. Allora, preso ad arbitrio un numero H, si può sempre determinare un $\varrho > 0$, in modo che, per ogni funzione $z(x, y)$ definita e assolutamente continua in D, soddisfacente in tutto D alla disuguaglianza*

$$|z(x, y) - z_0(x, y)| < \varrho \tag{17}$$

e tale che $I_D(z)$ esista finito, sia sempre

$$I_D(z) > H \quad ([16]).$$

a) Supponiamo, in primo luogo, che esista un quadrato Δ a lati paralleli agli assi x e y, interamente (lati compresi) costituito di punti di D e sul quale la $f(x, y, z_0(x, y), p_0(x, y), q_0(x, y))$ non sia integrabile. Avendosi, per la (9):

$$I_D(z) \geqslant -|N|\,D + I_\Delta(z)$$

basterà dimostrare la proposizione enunciata per l'integrale $I_\Delta(z)$.

Dette S_0 e S le superficie rappresentate in D rispettivamente dalle funzioni assolutamente continue $z = z_0(x, y)$, $z = z(x, y)$ con $z(x, y)$ soddisfacente in tutti i punti di D alla (17) e, considerati analogamente al n.° 3, i rettangoli a lati paralleli agli assi $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ che ricoprono completamente il campo Δ, per l'ipotesi ammessa, dovrà esistere almeno uno di tali rettangoli, sia Δ_r, su cui la $f(x, y, z_0(x, y), p_0(x, y), q_0(x, y))$ e quindi (riprendendo la considerazione degli integrali $I^{(i)}_{\Delta_i}(z)$) anche la $f^{(r)}(x, y, z_0(x, y), p_0(x, y), q_0(x, y))$ non sia integrabile. Il teorema sarà dimostrato se noi lo proveremo per il rettangolo Δ_r.

([16]) Anche questo teorema e così pure il successivo sono dunque dimostrati, a differenza di quanto fece il TONELLI, non ammettendo l'ipotesi dell'esistenza e della continuità delle derivate parziali f_{px}, f_{qy}.

Se L è sufficientemente grande, detto E_r^* l'insieme dei punti di Δ_r in cui esistono finite $p_0(x, y)$ e $q_0(x, y)$ e tale che in esso sia $|p_0(x, y)| < L$, $|q_0(x, y)| < L$, si avrà:

$$\iint_{E_r^*} f^{(r)}(x, y, z_0\ \ p_0, q_0)dx\,dy > H + 1 + \\ + \left| \iint_{\Delta_r} (\lambda_r p_0(x, y) + \mu_r q_0(x, y) + \nu_r)dx\,dy \right| .$$

Si dica poi E_r un insieme chiuso di E_r^* sul quale $p_0(x, y)$ e $q_0(x, y)$ siano continue e tale che si abbia

$$\iint_{E_r} f^{(r)}(x, y, z_0, p_0, q_0)dx\,dy > H + 1 + \\ + \left| \iint_{\Delta_r} (\lambda_r p_0(x, y) + \mu_r q_0(x, y) + \nu_r)dx\,dy \right| . \tag{18}$$

Conservando ai simboli il significato che hanno nel n.° 3, si ha

$$I_{\Delta_r}(z) - \iint_{E_r} f^{(r)}(x, y, z_0, p_0, q_0)dx\,dy = \\ = I_{\Delta_r}^{(r)}(z) + \iint_{\Delta_r} (\lambda_r p(x, y) + \mu_r q(x, y) + \nu_r)dx\,dy - \\ - \iint_{E_r} f^{(r)}(x, y, z_0, p_0, q_0)dx\,dy$$

e, se ϱ è sufficientemente piccolo, per la continuità ([17]) dell'integrale

$$\iint_{\Delta_r} (\lambda_r p(x, y) + \mu_r q(x, y) + \nu_r)dx\,dy$$

avremo:

$$I_{\Delta_r}(z) - \iint_{E_r} f^{(r)}(x, y, z_0, p_0, q_0)dx\,dy > \\ > I_{\Delta_r}^{(r)}(z) + \iint_{\Delta_r} (\lambda_r p_0(x, y) + \mu_r q_0(x, y) + \nu_r)dx\,dy - \\ - \varepsilon - \iint_{E_r} f^{(r)}(x, y, z_0, p_0, q_0)dx\,dy.$$

Essendo poi:

$$I_{\Delta_r}^{(r)}(z) > \sum_{s=1}^{M_r} \iint_{K_{r,s}} (\lambda_{r,s} p(x, y) + \mu_{r,s} q(x, y) + \nu_{r,s})dx\,dy$$

([17]) Vedi nota ([13]).

e inoltre:

$$\iint\limits_{E_r} f^{(r)}(x, y, x_0, p_0, q_0)\,dx\,dy =$$

$$= \sum_{s=1}^{M_r} \iint\limits_{E_{r,s}} f^{(r)}(x, y, z_0, p_0, q_0)\,dx\,dy <$$

$$< \sum_{s=1}^{M_r} \iint\limits_{K_{r,s}} (\lambda_{r,s} p_0(x, y) + \mu_{r,s} q_0(x, y) + \nu_{r,s})\,dxdy + \varepsilon(2 + m(E_r))$$

si ha:

$$I_{\Delta_r}(z) - \iint\limits_{E_r} f^{(r)}(x, y, z_0, p_0, q_0)\,dx\,dy >$$

$$> \sum_{s=1}^{M_r} \Big\{ \iint\limits_{K_{r,s}} (\lambda_{r,s} p(x, y) + \mu_{r,s} q(x, y) + \nu_{r,s})\,dx\,dy -$$

$$- \iint\limits_{K_{r,s}} (\lambda_{r,s} p_0(x, y) + \mu_{r,s} q_0(x, y) + \nu_{r,s})\,dx\,dy \Big\} +$$

$$+ \iint\limits_{\Delta_r} (\lambda_r p_0(x, y) + \mu_r q_0(x, y) + \nu_r)\,dx\,dy - \varepsilon(3 + \Delta_r).$$

Per ϱ sufficientemente piccolo la somma relativa all'indice s, sempre per la continuità dell'integrale che vi compare, risulta, in modulo, minore di ε e pertanto si ha, per la (18):

$$I_{\Delta_r}(z) > H + 1 - \varepsilon\,(4 + \Delta_r)$$

e per essere $\varepsilon > 0$ arbitrario, il teorema è provato.

b) Supponiamo ora che la $f(x, y, y_0, p_0, q_0)$ risulti integrabile in ogni quadrato a lati paralleli agli assi x e y e tutto contenuto (lati compresi) in D e riprendiamo il campo chiuso $\overline{D}_n$ definito al n.° 3. L'integrale

$$I_{\overline{D}_n}(z_0) = \iint\limits_{\overline{D}_n} f(x, y, z_0, p_0, q_0)\,dxdy$$

esiste finito per ogni valore di n e dovrà tendere a $+\infty$ per $n \to +\infty$: infatti, poichè è

$$f(x, y, z_0, p_0, q_0) + |N| \geqslant 0,$$

risulta

$$\lim_{n \to +\infty} \iint\limits_{\overline{D}_n} \{f(x, y, z_0, p_0, q_0) + |N|\}\,dxdy = +\infty$$

e quindi

$$\lim_{n \to +\infty} I_{\overline{D}_n}(z_0) = +\infty.$$

Potremo perciò determinare un n_0 tale che sia

$$I_{\overline{D}_{n_0}}(z_0) > K + 1 + |N| D$$

e quindi, in virtù della semicontinuità dell'integrale $I_{\overline{D}_{n_0}}(z_0)$ (n.° 3) si può determinare un $\varrho > 0$, in modo che per tutte le $z(x, y)$ assolutamente continue in D e tali che per esse esista l'integrale $I_D(z)$, e soddisfacenti in tutto D alla (15), sia

$$I_{\overline{D}_{n_0}}(z) > I_{\overline{D}_{n_0}}(z_0) - 1.$$

Per queste $z(x, y)$ sarà allora

$$I_{\overline{D}_{n_0}}(z) > K + |N| D$$

e perciò:

$$I_D(z) > I_{\overline{D}_{n_0}}(z) - |N| D > K$$

il che prova il teorema enunciato anche in questo caso.

6. - Allo stesso modo come dal teorema del n.° 3 si è dedotto il teorema del n.° 4, così da quello del n.° 5 si deduce il

TEOREMA: *Se la frontiera del dominio aperto e limitato D è una curva continua* (di JORDAN) *chiusa, senza punti multipli, rettificabile, e se le funzioni f, f_p, f_q sono finite e continue anche sulla frontiera di D; se l'integrale $I_D(z)$ è quasi-regolare positivo seminormale; se $z_0(x, y)$ è una funzione limitata e assolutamente continua in D e tale che la $f(x, y, z_0(x, y), p_0(x, y), q_0(x, y))$ risulti non integrabile in D; allora, preso ad arbitrio un numero H si può sempre determinare un $\varrho > 0$, in modo che per ogni funzione $z(x, y)$ limitata e assolutamente continua in D, soddisfacente in tutto D alla disuguaglianza*

$$|z(x, y) - z_0(x, y)| < \varrho$$

e tale che $I_D(z)$ esista finito, sia sempre

$$I_D(z) > H.$$

7. - Dal teorema del n.° 3 segue:

Se è $f(x, y, z, p, q) \geqslant N$, con N numero fisso, in ogni punto (x, y) di D e per ogni valore finito di z, p, q; se $I_D(z)$ è un integrale quasi-regolare positivo, esso è semicontinuo inferiormente in ogni classe K di superficie definite e assolutamente continue in D, tali da rendere l'integrale $I_D(z)$ finito, e tutte di area inferiore ad uno stesso numero H.

Infatti, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, si ponga $\sigma = \frac{\varepsilon}{2H}$ e si consideri l'integrale

$$\iint_D \{ f(x, y, z, p, q) + \sigma \sqrt{1 + p^2 + q^2} \} \, dx dy$$

il quale risulta quasi-regolare positivo normale con $f+\sigma\sqrt{1+p^2+q^2}\geqslant N$. Ad esso è perciò applicabile il teorema del n.° 3. Fissata una superficie $S_0: z=z_0(x, y)$ della classe K, si può pertanto determinare un $\varrho>0$ in modo che, per ogni superficie S: $z=z(x, y)$ della classe K, tale che sia in tutti i punti di D

$$|z(x, y)-z_0(x, y)|<\varrho$$

si abbia

$$\iint_D \{f(x, y, z, p, q)+\sigma\sqrt{1+p^2+q^2}\}\,dxdy-$$
$$-\iint_D \{f(x, y, z_0, p_0, q_0)+\sigma\sqrt{1+p_0^2+q_0^2}\}\,dx\,dy> -\frac{\varepsilon}{2}$$

cioè

$$I_D(z)-I_D(z_0)> -\frac{\varepsilon}{2}-\sigma\iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy>-\varepsilon$$

8. - *Il teorema ora dimostrato vale ancora se al posto della condizione $f\geqslant N$ si sostituisce l'ipotesi che la frontiera di D sia una curva chiusa, continua e rettificabile, senza punti multipli e si suppone inoltre che le f, f_p, f_q siano definite e continue anche su tale frontiera.*

Basterà, invece del teorema del n.° 3, applicare nella dimostrazione quello del n.° 4.

9. - *Come i teoremi dei n.i 3 e 4 valgono quando si tratti di integrali quasi-regolari, se ci si limita ad una classe di superficie tutte di area inferiore ad uno stesso numero, così i teoremi dei n.i 5 e 6 sussistono in condizioni analoghe.*

10. - Osservazione. — Tutti i teoremi precedenti valgono anche nel caso in cui non si faccia l'ipotesi dell'esistenza e della continuità delle derivate parziali f_p, f_q: basterà supporre soltanto che la $f(x, y, z, p, q)$ sia continua e che la sua figurativa per ogni punto (x, y, z) tale che (x, y) appartenga a D (oppure a $\overline{D}$ se si tratta dei teoremi dei n.i 4, 6, 8) sia una superficie concava verso l'alto e tale, inoltre, che esista almeno un piano il quale la lasci tutta al di sopra e avente con essa un sol punto a comune.

Ciò permette di non fare alcuna ipotesi sulla derivabilità della funzione $f(x, y, z, p, q)$.