

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LJUBOMIR TSCHAKALOFF

Trigonometrische Polynome mit einer Minimumeigenschaft

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e série, tome 9, n° 1 (1940), p. 13-26

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1940_2_9_1_13_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1940, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TRIGONOMETRISCHE POLYNOME MIT EINER MINIMUMEIGENSCHAFT

von LJUBOMIR TSCHAKALOFF (L. ČAKALOV - Sofia).

Bei seinem elementaren Beweis des Primzahlsatzes hat LANDAU ⁽¹⁾ die Frage nach der günstigsten Abschätzung des Exponenten im Restgliede auf folgendes Minimumproblem über trigonometrische Polynome zurückgeführt. Man betrachte die Menge C_n der positiv-definiten Kosinuspolynome

$$(1) \quad g(\varphi) = a_0 + a_1 \cos \varphi + \dots + a_n \cos n\varphi$$

n -ter oder niederer Ordnung, deren Koeffizienten den Ungleichungen

$$a_0 \geq 0, \quad a_1 \geq 0, \dots, \quad a_n \geq 0; \quad a_1 > a_0$$

genügen. Welches ist die *genaue* untere Grenze P_n des Ausdrucks $\frac{g(0)}{a_1 - a_0}$, wenn $g(\varphi)$ die Polynome dieser Menge durchläuft? Vor einigen Jahren kam LANDAU ⁽²⁾ auf dasselbe Problem zurück, indem er unabhängig von mir ⁽³⁾ auf wenigen Zeilen zeigte, dass $P_2 = 7$ ist und $P_3 = P_4 = P_5 = 6$ ist. Zum Schluss seiner Arbeit bemerkte er dabei ausdrücklich: « Die Schwierigkeit fängt also erst bei $n=6$ an.... Die Bestimmung von P_6 lässt sich in endlicher Zeit erzwingen. Vielleicht gelingt sie einem Leser auf wenigen Zeilen oder wenigen Seiten ».

Da ich in einer 1923 publizierten, bulgarisch geschriebenen Arbeit ⁽⁴⁾ die erwähnten Landauschen Ergebnisse früher auf demselben Wege gefunden und ausserdem die schwierigeren Fälle $n=6, 7, 8, 9$ erledigt habe, erachte ich es

⁽¹⁾ Vgl. E. LANDAU: *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*. Leipzig 1909, Bd. I, S. 245-258 und Bd. II, S. 891-893.

⁽²⁾ E. LANDAU: *Eine Frage über trigonometrische Polynome*. Diese Annali, Serie II, Vol. II (1933-XI), pp. 209-210.

⁽³⁾ Vgl. E. LANDAU: *Nachtrag zu meiner Arbeit « Eine Frage über trigonometrische Polynome »*. Diese Annali, Serie II, Vol. V (1936-XIV), p. 141.

⁽⁴⁾ L. TSCHAKALOFF: *Trigonometrische Polynome mit einer Minimumeigenschaft* (Bulgarisch). Jahrbuch der Universität Sofia, Phys.-Math. Fakultät, Bd. XIX (1923), S. 355-387.

nicht für überflüssig, hier diese meine Ergebnisse einem breiteren Leserkreis zugänglich zu machen und zugleich ein Desideratum meines unvergesslichen Lehrers zu erfüllen.

§ 1.

Unter einem *zulässigen* Kosinuspolynom n -ter Ordnung verstehe ich ein trigonometrisches Polynom der Gestalt (1) mit nichtnegativen reellen Koeffizienten a_k , das den Bedingungen $g(\varphi) \geq 0$ für jedes reelle φ und $a_1 > a_0$ genügt. Da (wegen $a_1 > a_0$) ein solches Polynom nicht identisch verschwinden kann, so ist $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(\varphi) d\varphi$ stets positiv. Es sei C_n die Menge aller zulässigen Kosinuspolynome n -ter Ordnung. Offenbar ist C_n eine Teilmenge von C_{n+1} und ausserdem ist die Menge C_1 leer, da für $n=1$ die Ungleichung $g(\pi) = a_0 - a_1 \geq 0$ mit $a_0 < a_1$ unverträglich ist.

Unsere Aufgabe besteht darin, bei einem gegebenen $n \geq 2$ die genaue untere Grenze P_n des Quotienten

$$(2) \quad \frac{g(0)}{a_1 - a_0} = \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{a_1 - a_0}$$

effektiv zu bestimmen, wenn $g(\varphi)$ die Polynome der Menge C_n durchläuft.

Ich will zunächst zeigen, dass die untere Grenze P_n wirklich erreicht wird für ein passendes Kosinuspolynom der Menge C_n , d. h. dass P_n das Minimum des Ausdrucks (2) ist. Dieser Ausdruck bleibt nämlich unverändert, wenn man $g(\varphi)$ durch $\lambda g(\varphi)$ ersetzt, unter λ eine beliebige positive Konstante verstanden. Da aber mit $g(\varphi)$ auch $\lambda g(\varphi)$ der Menge C_n angehört, so kann man die Polynome dieser Menge so normieren, dass stets $a_1 - a_0 = 1$ ist, was damit gleichbedeutend ist, $g(\varphi)$ durch $\frac{g(\varphi)}{a_1 - a_0}$ zu ersetzen. Wir dürfen uns daher auf « normierte » Polynome der Menge C_n beschränken, indem wir nur diese zur Konkurrenz zulassen. Einem beliebigen normierten Polynom (1) dieser Menge ordnen wir den Punkt $A(a_0, a_1, \dots, a_n)$ des $(n+1)$ -dimensionalen Raumes zu; die so entstehende Punktmenge wollen wir mit M_n bezeichnen. Konvergiert nun die Punktfolge A_1, A_2, A_3, \dots , deren Glieder der Menge M_n angehören, gegen einen Grenzpunkt $C(c_0, c_1, \dots, c_n)$, so konvergiert die entsprechende Polynomenfolge $g_1(\varphi), g_2(\varphi), \dots$ gegen das normierte Grenzpolynom

$$G(\varphi) = c_0 + c_1 \cos \varphi + \dots + c_n \cos n\varphi,$$

das offenbar der Menge C_n angehört. Der Punkt C gehört also ebenfalls zur Punktmenge M_n , d. h. diese Menge ist abgeschlossen. Die beschränkte abgeschlos-

sene Teilmenge von M_n , die dem Würfel

$$0 \leq a_0 \leq 8, \quad 0 \leq a_1 \leq 8, \dots, \quad 0 \leq a_n \leq 8$$

angehört, ist dabei nicht leer, da

$$2(1 + \cos \varphi)^2 = 3 + 4 \cos \varphi + \cos 2\varphi$$

ein zulässiges normiertes Polynom darstellt; folglich erreicht die stetige Funktion $x_0 + x_1 + \dots + x_n$ ihre genaue untere Grenze P_n , wenn (x_0, x_1, \dots, x_n) die Punkte dieser Teilmenge durchläuft, und dieses Minimum ist gewiss $\leq 3 + 4 + 1 = 8$. P_n ist zugleich das Minimum des Ausdrucks (2) für alle zulässigen Kosinuspolynome, da die Koordinatensumme $\sum_0^n x_k$ eines beliebigen Punktes X von M_n , der ausserhalb des obigen Würfels liegt, stets grösser als 8 ist.

§ 2.

Wir beginnen mit der Bestimmung von P_6 . Es sei

$$g(\varphi) = a_0 + a_1 \cos \varphi + \dots + a_6 \cos 6\varphi$$

ein zulässiges Polynom 6-ter Ordnung. Durch die Substitution $x = \cos \varphi$ geht $g(\varphi)$ in das algebraische Polynom

$$f(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_6 x^6$$

über, wobei

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0 + \frac{1}{2} b_2 + \frac{3}{8} b_4 + \frac{5}{16} b_6, & a_1 &= b_1 + \frac{3}{4} b_3 + \frac{5}{8} b_5, \\ a_4 &= \frac{1}{8} b_4 + \frac{3}{16} b_6, & a_5 &= \frac{1}{16} b_5, & a_0 + a_1 + \dots + a_6 &= b_0 + b_1 + \dots + b_6. \end{aligned}$$

Das so gebildete algebraische Polynom $f(x)$ heisse zulässig, wenn das ursprüngliche Kosinuspolynom $g(\varphi)$ zulässig ist. Offenbar ist das reelle Polynom $f(x)$ nur dann zulässig, wenn es keine Nullstelle ungerader Ordnung hat, die im Intervall $-1 < x < 1$ liegt. (Das Umgekehrte ist natürlich nicht richtig).

Bedeutet nun λ eine untere Grenze des Quotienten $\frac{g(0)}{a_1 - a_0}$ für alle zulässigen Polynome 6-ter Ordnung, so besteht die Ungleichung

$$(3) \quad \frac{g(0)}{a_1 - a_0} = \frac{b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6}{b_1 + \frac{3}{4} b_3 + \frac{5}{8} b_5 - \left(b_0 + \frac{1}{2} b_2 + \frac{3}{8} b_4 + \frac{5}{16} b_6 \right)} \geq \lambda$$

oder

$$(4) \quad (1 + \lambda)b_0 + (1 - \lambda)b_1 + \left(1 + \frac{1}{2}\lambda\right)b_2 + \left(1 - \frac{3}{4}\lambda\right)b_3 + \left(1 + \frac{3}{8}\lambda\right)b_4 + \\ + \left(1 - \frac{5}{8}\lambda\right)b_5 + \left(1 + \frac{5}{16}\lambda\right)b_6 \geq 0.$$

Da die linke Seite der letzten Ungleichung linear von den Koeffizienten b_k abhängt, könnte man versuchen, sie in der Form

$$(5) \quad Af(\xi) + Bf(\eta) + \sum_0^6 C_k a_k$$

darzustellen, wobei $A, B, \xi, \eta, C_0, C_1, \dots, C_6$ gewisse von den Koeffizienten b_k (also von der Wahl von $f(x)$) unabhängige Zahlen bedeuten. Wenn es uns gelingt zu zeigen, dass $A, B, C_k \geq 0$ sind und dass ξ und η dem Intervall $(-1, 1)$ angehören, so ist die Summe (5) für jedes zulässige Polynom $f(x)$ nichtnegativ und die Ungleichung (3) von selbst erfüllt. Wir wollen statt (5) den einfacheren Ausdruck

$$(6) \quad Af(\xi) + Bf(\eta) + Ca_4 + Da_5$$

bilden und die sieben Zahlen $A, B, C, D, \xi, \eta, \lambda$, so zu bestimmen suchen, dass (6) identisch gleich der linken Seite von (4) sei, wenn die b_k als unbestimmte Grössen betrachtet werden. Man gelangt auf diese Weise, nachdem man a_4 und a_5 durch die b_k ausdrückt, zum folgenden Gleichungssystem zur Bestimmung der erwähnten 7 Unbekannten:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} A + B = 1 + \lambda \\ A\xi + B\eta = 1 - \lambda \\ A\xi^2 + B\eta^2 = 1 + \frac{1}{2}\lambda \\ A\xi^3 + B\eta^3 = 1 - \frac{3}{4}\lambda \\ A\xi^4 + B\eta^4 + \frac{1}{8}C = 1 + \frac{3}{8}\lambda \\ A\xi^5 + B\eta^5 + \frac{1}{16}D = 1 - \frac{5}{8}\lambda \\ A\xi^6 + B\eta^6 + \frac{3}{16}C = 1 + \frac{5}{16}\lambda. \end{array} \right.$$

Unsere weiteren Ausführungen bestehen im folgenden. Wir zeigen zunächst, dass das System (7) eine Lösung besitzt, für welche A, B, C, D, λ positiv sind und ausserdem ξ und η zwischen -1 und $+1$ liegen. Daraus folgt, wie schon erwähnt, dass λ eine untere Grenze des Quotienten (3) ist für alle zulässigen Polynome 6-ter Ordnung. Wir zeigen ferner, dass es ein zulässiges Polynom $f(x)$

gibt, welches den Bedingungen

$$f(\xi)=0, \quad f(\eta)=0, \quad a_4=0, \quad a_5=0$$

genügt, so dass für dieses Polynom das Zeichen \geq in (3) durch $=$ ersetzt werden muss. Dadurch wird es bewiesen sein, dass λ die genaue untere Grenze des Quotienten (3) ist, also $\lambda = P_6$.

§ 3. - Auflösung des Systems (7).

Ich setze der Kürze halber $u = \xi + \eta$, $v = \xi\eta$, so dass identisch

$$(x - \xi)(x - \eta)(x - 1) = x^3 - (u + 1)x^2 + (u + v)x - v,$$

und addiere die ersten vier Gleichungen (7), nachdem ich sie bzw. mit $-v$, $u + v$, $-u - 1$, 1 multipliziere. Es kommt heraus

$$0 = \lambda \left(-u - v - v - \frac{1}{2}u - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \right), \quad \text{d. h. (wegen } \lambda > 0 \text{)}$$

$$(8) \quad \frac{3}{2}u + 2v + \frac{5}{4} = 0.$$

Die Anwendung desselben Verfahrens auf je vier aufeinanderfolgende Gleichungen des Systems (7) liefert ferner

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{1}{8}C = \lambda \left(\frac{5}{4}u + \frac{3}{2}v + \frac{9}{8} \right) \\ -\frac{1}{8}(u+1)C + \frac{1}{16}D = \lambda \left(-\frac{9}{8}u - \frac{5}{4}v - 1 \right) \\ \frac{1}{8} \left(u + v + \frac{3}{2} \right) C - \frac{1}{16}(u+1)D = \lambda \left(u + \frac{9}{8}v + \frac{15}{16} \right). \end{cases}$$

Aus den letzten drei Gleichungen folgt nach Elimination von C , D und λ

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 10u + 12v + 9 \\ -u - 1 & 1 & -9u - 10v - 8 \\ u + v + \frac{3}{2} & -u - 1 & 8u + 9v + \frac{15}{2} \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$(10) \quad 10u^3 + 12u^2v + 10u^2 - 8uv - 12v^2 - 5u - 16v - 5 = 0.$$

Aus (8) und (10) erhält man schliesslich für u die resolvente Gleichung

$$(11) \quad 16u^3 + 28u^2 + 12u + 5 = 0,$$

die nur eine reelle Wurzel hat.

Um λ zu bestimmen, eliminieren wir A und B aus den ersten drei Gleichungen (7), indem wir sie der Reihe nach mit v , $-u$, 1 multiplizieren und dann addieren. Man erhält

$$(12) \quad 0 = v - u + 1 + \lambda \left(u + v + \frac{1}{2} \right),$$

also mit Rücksicht auf (8),

$$\lambda = \frac{u - v - 1}{u + v + \frac{1}{2}} = \frac{14u - 3}{2u - 1}.$$

Setzen wir $\lambda = 6 - t$, so lassen sich leicht u , v rational durch t ausdrücken:

$$(13) \quad u = \frac{t - 3}{2t + 2}, \quad v = \frac{1 - 2t}{2t + 2},$$

wobei t eine Wurzel der kubischen Gleichung

$$(14) \quad 5t^3 - 11t^2 + 15t - 1 = 0$$

bedeutet.

Die Auflösung des Systems (7) reduziert sich also im wesentlichen auf diejenige der kubischen Gleichung (14), wobei natürlich nur ihre reelle Wurzel

$$(15) \quad t = 0,07016147038 \dots$$

in Betracht kommt. Die entsprechenden Näherungswerte von λ , u und v sind nach (12) und (13)

$$\lambda = 6 - t = 5,92983852961, \quad u = -1,3688768526, \quad v = +0,4016576394.$$

Die ersten zwei Gleichungen des Systems (9) liefern für C und D , mit Rücksicht auf (12) und (13), die Werte

$$(16) \quad C = \frac{2t(6 - t)}{t + 1}, \quad D = \frac{31t^2 - 60t + 17}{4(t + 1)},$$

die offenbar positiv sind. ξ und η sind Wurzeln der quadratischen Gleichung $x^2 - ux + v = 0$, d. h.

$$(17) \quad (2t + 2)x^2 + (3 - t)x + 1 - 2t = 0$$

mit den Näherungswerten

$$\xi = -0,9428921359, \quad \eta = -0,4259847167.$$

Schliesslich bestimmt man A und B etwa aus den ersten zwei Gleichungen des Systems (7); die Werte von A und B sind reell und positiv wegen

$$A + B = 1 + \lambda > 0$$

und

$$AB(\xi - \eta)^2 = (A + B)(A\xi^2 + B\eta^2) - (A\xi + B\eta)^2 = \frac{1}{2} \lambda(7 - \lambda) > 0.$$

Man verifiziert umgekehrt leicht, dass die so bestimmten Werte von $A, B, C, D, \lambda, \xi, \eta$ in der Tat eine reelle Lösung des Systems (7) liefern. Da dabei A, B, C, D, λ positiv sind, und ξ und η zwischen -1 und $+1$ liegen, so stellt die Zahl

$$\lambda = 6 - t = 5,92983852961 \dots$$

eine untere Grenze des Quotienten (3) dar.

Es bleibt noch übrig zu beweisen, dass dieser Wert die *genaue* untere Grenze von (3) ist für alle zulässigen Polynome 6-ter Ordnung. Es genügt zu dem Zwecke zu zeigen, dass es ein zulässiges Polynom $g(\varphi) = f(x)$ gibt, das den Bedingungen

$$f(\xi) = 0, \quad f(\eta) = 0, \quad a_4 = 0 \quad a_5 = 0$$

genügt. Es ist klar, dass $f(x)$ die Gestalt

$$f(x) = c(x - \xi)^2(x - \eta)^2(x^2 + mx + n) = c(x^2 - ux + v)^2(x^2 + mx + n)$$

haben muss, wobei c eine beliebige positive konstante bebedeuten kann. Die Koeffizienten m und n werden durch die Forderungen bestimmt:

$$16a_4 = 2b_4 + 3b_6 = 0, \quad 16a_5 = b_5 = 0.$$

Nun ist

$$b_6 = c, \quad b_5 = c(m - 2u), \quad b_4 = c(n - 2um + u^2 + 2v),$$

so dass m und n den Gleichungen

$$m - 2u = 0, \quad 2(n - 2um + u^2 + 2v) + 3 = 0$$

genügen müssen. Man findet also

$$m = 2u, \quad n = 3u^2 - 2v - \frac{3}{2} = 3u^2 + \frac{3}{2}u - \frac{1}{4}.$$

Wegen

$$m^2 - 4n = -8u^2 - 6u + 1 = \frac{-4(t^2 - 5t + 2)}{(t + 1)^2} < 0$$

ist das Polynom $x^2 + mx + n$ positiv definit, also

$$f(x) = c(x^2 - ux + v)^2(x^2 + mx + n) \geq 0$$

für jedes reelle x . Nimmt man $c = 32$, so geht $f(x)$ durch die Substitution $x = \cos \varphi$ in das zulässige trigonometrische Polynom über

$$g(\varphi) = a_0 + a_1 \cos \varphi + a_2 \cos 2\varphi + a_3 \cos 3\varphi + a_6 \cos 6\varphi$$

mit den positiven Koeffizienten

$$a_0 = \frac{465}{8} u^2 + \frac{33}{2} u + \frac{619}{32} > 105,$$

$$a_1 = 102u^2 + 42u + \frac{75}{2} > 171,$$

$$a_2 = 60u^2 + 39u + \frac{57}{2} > 87,$$

$$a_3 = 20u^2 + 18u + 10 > 22,$$

$$a_6 = 1.$$

Wir haben somit bewiesen, dass $P_6 = 6 - t$ ist, wenn t die reelle Wurzel der kubischen Gleichung (14) bedeutet.

§ 4.

Es sei

$$g(\varphi) = a_0 + a_1 \cos \varphi + \dots + a_7 \cos 7\varphi$$

ein zulässiges Polynom 7-ter Ordnung, welches durch die Substitution $x = \cos \varphi$ in das algebraische Polynom

$$f(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_7 x^7$$

übergeht, wobei

$$a_0 = b_0 + \frac{1}{2} b_2 + \frac{3}{8} b_4 + \frac{5}{16} b_6,$$

$$a_1 = b_1 + \frac{3}{4} b_3 + \frac{5}{8} b_5 + \frac{35}{64} b_7,$$

$$a_4 = \frac{1}{8} b_4 + \frac{3}{16} b_6,$$

$$a_5 = \frac{1}{16} b_5 + \frac{7}{64} b_7.$$

Ist λ eine untere Grenze des Quotienten

$$(18) \quad \frac{g(0)}{a_1 - a_0} = \frac{b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_7}{b_1 + \frac{3}{4} b_3 + \frac{5}{8} b_5 + \frac{35}{64} b_7 - b_0 - \frac{1}{2} b_2 - \frac{3}{8} b_4 - \frac{5}{16} b_6},$$

so besteht die Ungleichung

$$(19) \quad (1 + \lambda)b_0 + (1 - \lambda)b_1 + \left(1 + \frac{1}{2}\lambda\right)b_2 + \left(1 - \frac{3}{4}\lambda\right)b_3 + \left(1 + \frac{3}{8}\lambda\right)b_4 + \\ + \left(1 - \frac{5}{8}\lambda\right)b_5 + \left(1 + \frac{5}{16}\lambda\right)b_6 + \left(1 - \frac{35}{64}\lambda\right)b_7 \geq 0.$$

Wir wollen versuchen, der linken Seite von (19) die Form

$$Af(\xi) + Bf(\eta) + Cf(-1) + Da_4 + Ea_5$$

zu geben, wobei A, B, C, D, E , von den Koeffizienten b_k (also von $f(x)$) unabhängig sind. Dafür ist notwendig und hinreichend, dass die Gleichungen bestehen

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} A + B + C = 1 + \lambda \\ A\xi + B\eta - C = 1 - \lambda \\ A\xi^2 + B\eta^2 + C = 1 + \frac{1}{2}\lambda \\ A\xi^3 + B\eta^3 - C = 1 - \frac{3}{4}\lambda \\ A\xi^4 + B\eta^4 + C + \frac{1}{8}D = 1 + \frac{3}{8}\lambda \\ A\xi^5 + B\eta^5 - C + \frac{1}{16}E = 1 - \frac{5}{8}\lambda \\ A\xi^6 + B\eta^6 + C + \frac{3}{16}D = 1 + \frac{5}{16}\lambda \\ A\xi^7 + B\eta^7 - C + \frac{7}{64}E = 1 - \frac{35}{64}\lambda. \end{array} \right.$$

Wenn es uns gelingt zu zeigen, dass das System (20) eine Lösung besitzt, für welche

$$A > 0, \quad B > 0, \quad C > 0, \quad D > 0, \quad E > 0, \quad \lambda > 0, \quad -1 \leq \xi, \quad \eta \leq 1,$$

so kann man daraus schliessen, dass λ eine untere Grenze des Ausdrucks (18) für alle zulässigen Polynome 7-ter Ordnung sein muss. Gibt es ausserdem ein zulässiges Polynom $g(\varphi) = f(x)$, für welches

$$f(\xi) = f(\eta) = f(-1) = a_4 = a_5 = 0,$$

so stellt offenbar λ die gesuchte untere Grenze P_7 dar.

§ 5. - Auflösung des Systems (20).

Wir setzen wieder $\xi + \eta = u$, $\xi\eta = v$, so dass identisch

$$(x - \xi)(x - \eta)(x - 1)(x + 1) = x^4 - ux^3 + (v - 1)x^2 + ux - v.$$

Man kann die Unbekannten A, B, C und das konstante Glied 1 eliminieren, indem man die n -te Gleichung des Systems mit $-v$, die $(n+1)$ -te mit u , die $(n+2)$ -te mit $v-1$, die $(n+3)$ -te mit $-u$, die $(n+4)$ -te mit 1 multipliziert

und dann addiert. So entstehen für $n=1, 2, 3, 4$ die Gleichungen

$$(21) \quad D = \lambda(-2u - 4v - 1),$$

$$(22) \quad -2uD + E = \lambda(2u + 4v + 2),$$

$$(23) \quad (2v+1)D - uE = \lambda(-2u - 2v - 1),$$

$$(24) \quad -4uD + (4v+3)E = \lambda(4u + 8v + 5).$$

Aus (21) und (23), (22) und (24), (21) und (22) folgen leicht die einfacheren Gleichungen

$$(25) \quad 2vD - uE = 2v\lambda,$$

$$(26) \quad (4v+1)E = \lambda,$$

$$(27) \quad (1-2u)D + E = \lambda.$$

Die Elimination von D, E und λ aus (21), (25) und (26) und nachher aus (21), (26) und (27) liefert, wenn man $4v=t$ setzt,

$$(28) \quad 2u(t^2 + t + 1) + t(t+1)(t+2) = 0$$

und

$$(29) \quad t^2 + 3t + 1 - 4u^2(t+1) - 2ut(t+1) = 0.$$

Aus (28) und (29) erhalten wir schliesslich für $t=4v$ die resolvente Gleichung

$$(30) \quad t^6 + 4t^5 + 4t^4 - 4t^3 - 8t^2 - 5t - 1 = 0.$$

Merkwürdigerweise ist diese Gleichung algebraisch auflösbar, da ihre linke Seite sich in der Form

$$\left(t^3 + 2t^2 + \frac{5}{2}t + \frac{1}{2}\right)^2 - 5\left(t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}\right)^2$$

darstellen lässt. Uns interessiert ihre positive Wurzel, d. h. die reelle Wurzel der kubischen Gleichung

$$(31) \quad t^3 + (2 - \sqrt{5})t^2 + \frac{1}{2}(5 - 3\sqrt{5})t + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) = 0,$$

welche durch die Substitution

$$2t = (1 + \sqrt{5})z + \sqrt{5} - 1$$

in die einfachere Gleichung

$$(32) \quad z^3 + z^2 - \sqrt{5}z + 2 = 0$$

übergeht. Man erhält ferner aus (28)

$$-2u = \frac{t^3 + 3t^2 + 2t}{t^2 + t + 1} = \frac{1}{z},$$

so dass ξ und η Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 + \frac{1}{2z}x + \frac{1}{8}\{(\sqrt{5}+1)z + \sqrt{5}-1\} = 0$$

sind. Man findet für z, t, u, ξ, η die Näherungswerte mit 8 Dezimalstellen

$$\begin{aligned} z &= 0,40927948, & t &= 1,28026210, & -u &= 1,22165909, \\ -\xi &= 0,38050976, & -\eta &= 0,84114933. \end{aligned}$$

Um λ durch u und v auszudrücken, eliminieren wir A, B und C aus den ersten 4 Gleichungen des Systems (20). Es ergibt sich

$$0 = 2v - 2u + 2 + \lambda \left(\frac{1}{2}u - \frac{1}{4} \right),$$

also

$$(33) \quad \lambda = \frac{8(v-u+1)}{1-2u} = 6-4 \cdot \frac{1-\sqrt{5}z}{2z+5-\sqrt{5}} = 5,90529131\dots$$

Man erhält ferner aus (21) und (26)

$$D = \lambda(-2u-4v-1) = \lambda \frac{t^2-1}{t^2+t+1} > 0, \quad E = \frac{\lambda}{t+1} > 0,$$

und aus den ersten vier Gleichungen des Systems (20)

$$\begin{aligned} C &= \frac{6u+8v+5}{8u+8v+8} \lambda = \frac{-t^3-2t^2+t+5}{-2t^3-2t^2+2t+8} \lambda > 0, \\ A &= \frac{\lambda}{4} \frac{2\eta+1}{(\eta-\xi)(1-\xi^2)} > 0, \quad B = \frac{\lambda}{4} \frac{2\xi+1}{(\xi-\eta)(1-\eta^2)} > 0. \end{aligned}$$

Da A, B, C, D, E, λ positiv sind und ξ, η zwischen -1 und $+1$ liegen, so stellt der durch (33) bestimmte Wert von λ eine untere Grenze des Quotienten (18) dar.

Es bleibt noch übrig zu zeigen, dass ein zulässiges Polynom $g(\varphi) = f(\cos \varphi)$ 7-ter Ordnung existiert, das den Bedingungen

$$f(\xi) = 0, \quad f(\eta) = 0, \quad f(-1) = 0, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = 0$$

genügt. Ein solches Polynom muss die Gestalt haben

$$f(x) = c(x+1)(x-\xi)^2(x-\eta)^2(x^2+px+q) = c(x+1)(x^2-ux+v)^2(x^2+px+q),$$

wobei c eine positive Konstante bedeutet. p und q sind durch die Bedingungen eindeutig bestimmt:

$$\begin{aligned} 16a_4 &= 2b_4 + 3b_6 = 0, & 64a_5 &= 4b_5 + 7b_7 = 0, & \text{d. h.} \\ p(2u^2 + 4v - 4u + 3) + 2q(1 - 2u) + 2u^2 - 4uv - 6u + 4v + 3 &= 0, \\ 4p(1 - 2u) + 4q + 4u^2 + 8v - 4u + 7 &= 0. \end{aligned}$$

Man verifiziert leicht, dass $p^2 - 4q$ negativ ist, so dass $f(x) \geq 0$ für jedes x des Intervalls $-1 \leq x \leq +1$. Nimmt man etwa $c=1$, so lassen sich die Koeffizienten a_k von $f(\cos \varphi)$ rational durch t ausdrücken. Durch einfache Rechnungen kann man bestätigen, dass alle Koeffizienten des so gebildeten trigonometrischen Polynoms

$$f(\cos \varphi) = a_0 + a_1 \cos \varphi + \dots + a_7 \cos 7\varphi$$

positiv sind mit Ausnahme von a_4 und a_5 , die ja verschwinden müssen.

Man schliesst daraus, wie zum Schluss des § 3, dass der durch (33) bestimmte Wert von λ gleich der genauen unteren Grenze P_7 ist.

§ 6.

Es sei

$$g(\varphi) = a_0 + a_1 \cos \varphi + \dots + a_9 \cos 9\varphi$$

ein zulässiges Polynom 9-ter Ordnung und

$$f(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_9 x^9$$

das entsprechende algebraische Polynom ($f(\cos \varphi) = g(\varphi)$). Man hat

$$a_0 = b_0 + \frac{1}{2} b_2 + \frac{3}{8} b_4 + \frac{5}{16} b_6 + \frac{35}{128} b_8,$$

$$a_1 = b_1 + \frac{3}{4} b_3 + \frac{5}{8} b_5 + \frac{35}{64} b_7 + \frac{63}{128} b_9,$$

$$a_4 = \frac{1}{8} b_4 + \frac{3}{16} b_6 + \frac{7}{32} b_8,$$

$$a_5 = \frac{1}{16} b_5 + \frac{7}{64} b_7 + \frac{9}{64} b_9,$$

$$a_8 = \frac{1}{128} b_8, \quad a_9 = \frac{1}{256} b_9,$$

$$a_0 + a_1 + \dots + a_9 = b_0 + b_1 + \dots + b_9 = g(0).$$

Man bilde den Ausdruck

$$(34) \quad a_0 + a_1 + \dots + a_9 - \lambda(a_1 - a_0),$$

wobei λ und später A, B, C, D, E, ξ, η dieselbe Bedeutung haben, wie in § 5. Der Ausdruck (34) lässt sich noch in der Form schreiben

$$\begin{aligned} & Af(\xi) + Bf(\eta) + Cf(-1) + Da_4 + Ea_5 \\ & + 128a_8 \left(1 + \frac{35}{128} \lambda - C - \frac{7}{32} D - A\xi^8 - B\eta^8 \right) \\ & + 256a_9 \left(1 - \frac{63}{128} \lambda + C - \frac{9}{64} E - A\xi^9 - B\eta^9 \right). \end{aligned}$$

Es ist leicht zu zeigen, dass die Zahlen

$$M = 128 \left(1 + \frac{35}{128} \lambda - C - \frac{7}{32} D - A\xi^8 - B\eta^8 \right)$$

und

$$N = 256 \left(1 - \frac{63}{128} \lambda + C - \frac{9}{64} E - A\xi^9 - B\eta^9 \right)$$

positiv sind. Man findet nämlich

$$M = (1+t)D > 0, \quad N = \lambda \cdot \frac{-t^3 - 2t^2 + 4t + 2}{2t + 1} > 0.$$

Folglich ist der Ausdruck (34) in der Form darstellbar

$$Af(\xi) + Bf(\eta) + Cf(-1) + Da_4 + Ea_5 + Ma_8 + Na_0,$$

woraus sofort erhellt, dass dieser Ausdruck für jedes zulässige Polynom nicht-negative Werte annimmt, da A, B, C, D, E, M, N positiv sind. Aus

$$a_0 + a_1 + \dots + a_9 - \lambda(a_1 - a_0) \geq 0$$

schliesst man wie oben, dass $P_9 = P_8 = P_7 = \lambda$ ist.

Zusammenfassend können wir die obigen Ergebnisse folgendermassen ausdrücken:

Bezeichnet man mit P_n die genaue untere Grenze des Quotienten

$$\frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{a_1 - a_0}$$

für alle zulässigen Kosinuspolynome n -ter Ordnung, so ist

$$P_6 = 6 - t = 5,92983852961\dots$$

und

$$P_7 = P_8 = P_9 = 6 - 4 \cdot \frac{1 - \sqrt{5}z}{2z + 5 - \sqrt{5}} = 5,90529131\dots,$$

wobei t und z die reellen Wurzeln der kubischen Gleichungen

$$5t^3 - 11t^2 + 15t - 1 = 0$$

und

$$z^3 + z^2 - \sqrt{5} + 2 = 0$$

bedeuten.

§ 7.

Wir wollen zum Schluss noch zeigen, dass $P_{11} > 5,792$ ist. Bedeutet

$$g(\varphi) = a_0 + a_1 \cos \varphi + \dots + a_{11} \cos 11\varphi$$

ein zulässiges Polynom 11-ter Ordnung, so folgt aus

$$\begin{aligned}
 0 &\leq (2\sqrt{3}-2)g\left(\frac{\pi}{2}\right) + 8g\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 8g\left(\frac{5\pi}{6}\right) + (3+\sqrt{3})g(\pi) = \\
 &= (17+3\sqrt{3})a_0 - (7+5\sqrt{3})a_1 + (5-\sqrt{3})a_2 + (5-\sqrt{3})a_3 \\
 &+ (-7+3\sqrt{3})a_4 + (-7+3\sqrt{3})a_5 + (5-\sqrt{3})a_6 + (-7+3\sqrt{3})a_7 \\
 &+ (-7+3\sqrt{3})a_8 + (5-\sqrt{3})a_9 + (5-\sqrt{3})a_{10} - (7+5\sqrt{3})a_{11} \\
 &\leq (17+3\sqrt{3})a_0 - (7+5\sqrt{3})a_1 + (5-\sqrt{3})(a_2+a_3+\dots+a_{11}),
 \end{aligned}$$

wenn man durch $(5-\sqrt{3})(a_1-a_0)$ dividiert, die Ungleichung

$$\frac{a_0+a_1+\dots+a_{11}}{a_1-a_0} \geq \frac{12+4\sqrt{3}}{5-\sqrt{3}} = \frac{36+16\sqrt{3}}{11} > 5,792.$$