Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Ennio Mattioli

Sulle matrici ortogonali periodiche razionali e in particolare su quelle di 3° ordine e di 3° grado

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 8, nº 3-4 (1939), p. 219-237
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1939_2_8_3-4_219_0>

SULLE MATRICI ORTOGONALI PERIODICHE RAZIONALI E IN PARTICOLARE SU QUELLE DI 3° ORDINE E DI 3° GRADO

di ENNIO MATTIOLI (Pisa).

Lo studio di una Memoria di V. AMATO [1] mi ha indotto a ricercare se possano determinarsi le matrici ortogonali periodiche aventi gli elementi nel campo assoluto di razionalità.

La ricerca non si presenta facile: la condizione della periodicità può trattarsi, nel campo assoluto, seguendo le indicazioni date dal CECIONI [2] ed approfondendole ulteriormente; ma le condizioni di ortogonalità aggiungono varie $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right.$ se n è l'ordine della matrice$\left.\right)$ equazioni di 2° grado che complicano molto la questione.

Ho potuto risolvere il problema per il caso delle matrici di 3° ordine periodiche di 3° grado e non mi sembra privo di interesse esporre questo caso particolare.

Nel fare tale studio ho rielaborato la Memoria dell'AMATO cercando in particolare, secondo indicazioni datemi dal Prof. CECIONI, di isolare il punto nel quale entra essenzialmente l'uso del campo totale di razionalità.

Esporrò sommariamente tale rielaborazione nella prima parte di questo lavoro; nella seconda esporrò il caso particolare suddetto. La seconda parte può leggersi indipendentemente dalla prima.

PARTE PRIMA

Matrici ortogonali periodiche.

1. - Le matrici ortogonali periodiche sono le matrici che soddisfano alle due equazioni:

$$(1) \qquad \begin{cases} X^p = E \\ XX_{-1} = E \end{cases}$$

dove p è un intero positivo, E la matrice unità e X_{-1} la trasposta di X.

---

(1) V. AMATO: *Sulle sostituzioni ortogonali periodiche.* Atti dell'Accademia Gioenia di Catania, 1914.

(2) F. CECIONI: *Sopra alcune operazioni algebriche sulle matrici.* Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, 1909, p. 126 segg.

L'equazione caratteristica di una tale matrice è reciproca, le sue radici sono tutte radici p^{esime} dell'unità e i divisori elementari della $X-Ex$ sono lineari (3).

Indichiamo con Ω la forma canonica, in un campo qualunque di razionalità, di una matrice la cui equazione caratteristica abbia le proprietà dette ora. Nel campo totale è

$$\Omega=\begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \omega_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

dove si è posto

$$\omega=e^{\frac{2\pi i}{p}}$$

$$\omega_1=\omega_2=\dots=\omega_{m_1}=\omega$$

$$\omega_{m_1+1}=\omega_{m_1+2}=\dots=\omega_{m_1+m_2}=\omega^2$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\omega_{n-m_p+1}=\dots=\omega_n=\omega^p=1$$

e sarà

$$m_1=m_{p-1}, \quad m_2=m_{p-2} \quad \text{ecc.}$$

$$m_1+m_2+\dots+m_{p-1}+m_p=n.$$

Il sistema $(m_1, m_2, \dots, m_p)$ è chiamato dall'AMATO *carattere di Ω*. Si ha

$$\Omega^p=E$$

ed ogni matrice S che soddisfa alla (1), ed ha il carattere $(m_1, m_2, \dots, m_p)$, si ottiene trasformando la Ω con matrici arbitrarie B:

$$S=B^{-1}\Omega B.$$

Se inoltre S è ortogonale $(SS_{-1}=E)$ la B soddisfa alla relazione (4). Si à

$$\Omega \cdot BB_{-1}=BB_{-1} \cdot \Omega_{-1}^{-1};$$

cioè, posto

$$BB_{-1}=H, \tag{3}$$

la H è simmetrica e tale che

$$\Omega H=H\Omega_{-1}^{-1}. \tag{4}$$

Viceversa se H è una matrice simmetrica, col determinante non nullo, che soddisfa a questa equazione, e B è una matrice che soddisfa alla (3), la $S=B^{-1}\Omega B$ è periodica e ortogonale.

---

(3) V. AMATO, m. c.

(4) Scriviamo Ω_{-1}^{-1}, e non Ω^{-1}, perchè in un campo arbitrario di razionalità la Ω non è simmetrica.

Poichè le forme canoniche Ω si possono costruire ([5]), per trovare tutte le S periodiche con $S^p = E$ e ortogonali, occorre e basta determinare la più generale matrice simmetrica che soddisfa alla (4), poi determinare la più generale matrice B che soddisfa alla (3); indi trasformare la Ω con la soluzione generale B così ottenuta.

Vedremo però che non occorrerà considerare la H generale, ma che tutte le S si otterranno da una qualunque H^* particolare a determinante non nullo attraverso la soluzione generale della

$$BB_{-1} = H^*.$$

Ciò seguirà dalle seguenti considerazioni.

2. - *Se Ω è una qualunque matrice con equazione caratteristica reciproca e i divisori elementari della $\Omega - Ex$ sono tutti lineari, la più generale soluzione simmetrica dell'equazione*

$$\Omega H = H \Omega_{-1}^{-1} \tag{5}$$

si ottiene da una qualunque soluzione simmetrica particolare H^* con $|H^*| \neq 0$ mediante la formula

$$H = M H^* M_{-1} \tag{6}$$

dove M è la più generale matrice permutabile con Ω ([6]).

In generale si hanno le H infinite volte.

Osserviamo che la condizione di avere Ω l'equazione caratteristica reciproca è necessaria perchè la (5) ammetta soluzioni H con $|H| \neq 0$ ([7]).

La (5) ammette soluzioni simmetriche perchè se K è soluzione anche K_{-1} lo è (come segue subito da $\Omega K = K \Omega_{-1}^{-1}$ moltiplicando a sinistra per Ω^{-1}, a destra per Ω_{-1} e trasponendo), onde anche $K + K_{-1}$ (che è simmetrica) sarà soluzione della (5).

Osserviamo ancora che essendo M permutabile con Ω, e perciò M_{-1} permutabile con Ω_{-1}^{-1}, la formula (6) ci dà soluzioni della (5), simmetriche insieme ad H^*: rimarrà da dimostrare che detta formula ci dà *tutte* le soluzioni simmetriche.

a). Il teorema è vero se Ω è la forma canonica del campo totale: lo dimostreremo in *b*).

Allora esso è vero per una qualunque matrice A che soddisfi alle condizioni del teorema. Chiamiamo infatti Ω la forma canonica di A nel campo totale e supponiamo che per Ω il teorema sia stato dimostrato.

([5]) Vedi Cecioni, m. c. Matrici cicliche, p. 126.

([6]) Questa osservazione, che mi è stata suggerita dal Prof. Cecioni, isola l'intervento del campo di razionalità nella questione trattata, cioè quando in un campo K vale la proprietà sopra enunciata (che vale certo nel campo totale, come è dimostrato in questo n.º 2), valgono anche, in K, i risultati di Amato che deduciamo nel sucessivo n.º 3.

([7]) Vedi Cecioni, m. c., p. 79.

Sia V una matrice particolare con $|V| \neq 0$ che trasforma la Ω nella A

$$V^{-1}\Omega V = A.$$

Chiamiamo Y e Z le soluzioni *generali* delle equazioni

$$AY = YA_{-1}^{-1} \qquad (Y \text{ simmetrica})$$
$$AZ = ZA.$$

Le soluzioni *generali*: H (simmetrica) ed M, delle equazioni

$$\Omega H = H\Omega_{-1}^{-1} \qquad (H \text{ simmetrica})$$
$$\Omega M = M\Omega$$

sono legate ad Y e Z dalle relazioni

$$H = VYV_{-1}$$
$$Z = V^{-1}MV,$$

come è facile vedere.

Detta Y^* la Y particolare che corrisponde alla H^*, per cui è

$$H^* = VY^*V_{-1},$$

sostituendo nella (6) ad H ed H^* le loro espressioni per le Y ed Y^* si ha:

$$VYV_{-1} = MVY^*V_{-1}M_{-1}$$

cioè

$$Y = V^{-1}MV \cdot Y^* \cdot V_{-1}M_{-1}V_{-1}^{-1}$$

da cui

$$Y = ZY^*Z_{-1}$$

che è ciò che si voleva dimostrare.

b). Supponiamo quindi che Ω sia la forma canonica nel campo totale. Possiamo anche supporre che essa abbia la forma (2) dove le ω_i non saranno necessariamente radici p^{esime} dell'unità, ma si avrà ancora che le prime m_1 saranno uguali fra loro, ecc.; insieme ad ogni radice vi sarà la sua reciproca, ed in coerenza con le notazioni del n.° 1 supporremo che le radici (in numero di m_{p-1}), uguali fra loro, del $(p-1)^{\text{esimo}}$ gruppo abbiano valore reciproco a quelle del primo gruppo, e così via; le ultime m_p radici saranno uguali a 1; si avrà quindi $m_1 = m_{p-1}$, $m_2 = m_{p-2}$, ecc. Se p è pari potrà comparire la radice -1 nel gruppo $\left(\frac{p}{2}\right)^{\text{esimo}}$.

Si trova subito che

$$H = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} m_1 & m_2 & \dots & m_2 & m_1 & m_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & H^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & H^{(2)} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & H_{-1}^{(2)} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ H_{-1}^{(1)} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & H^{(p)} \end{pmatrix} \end{array}$$

dove le $H^{(i)}$ $(i=1, 2,...., p)$ sono matrici quadrate di ordine m_i con elementi del tutto arbitrari. Inoltre deve essere $H^{(p)}$ simmetrica e quando p è pari comparirà eventualmente, sulla diagonale principale, un'altra matrice simmetrica $H^{\left(\frac{p}{2}\right)}$ di ordine $m_{\frac{p}{2}}$: essa corrisponde alla radice -1 della matrice Ω. Analogamente si ha

$$M=\begin{pmatrix} M^{(1)} & 0 & .... & 0 & 0 \\ 0 & M^{(2)} & .... & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & .... & M^{(p-1)} & 0 \\ 0 & 0 & .... & 0 & M^{(p)} \end{pmatrix}$$

dove ogni $M^{(i)}$ è una matrice quadrata di ordine m_i formata da m_i^2 elementi arbitrari $(i=1, 2,...., p)$.

Chiamando $\overline{H}^{(i)}$ le sottomatrici, con $|\overline{H}^{(i)}| \neq 0$, che ci danno la H^* particolare e sviluppando la formula $H=MH^*M_{-1}$ si ottiene:

$$H=\begin{pmatrix} 0 & .... & M^{(1)}\overline{H}^{(1)}M_{-1}^{(p-1)} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ M^{(p-1)}\overline{H}_{-1}^{(1)}M_{-1}^{(1)} & .... & 0 & 0 \\ 0 & .... & 0 & M^{(p)}\overline{H}^{(p)}M_{-1}^{(p)} \end{pmatrix}.$$

Ma qualunque sia la $\overline{H}^{(1)}$ (col determinante non nullo) è sempre possibile trovare due matrici $M^{(1)}$ ed $M^{(p-1)}$ tali che sia

$$H^{(1)}=M^{(1)}\overline{H}^{(1)}M_{-1}^{(p-1)}.$$

Basta infatti fissare la $M^{(p-1)}$ a piacere (per esempio uguale alla matrice unità) e determinare la $M^{(1)}$ con la formula $M^{(1)}=H^{(1)}(\overline{H}^{(1)})^{-1}$.

Lo stesso ragionamento si ripete per $H^{(2)}$, $H^{(3)}$, ecc. Anche per $H^{(p)}$ è possibile trovare una M tale che

$$H^{(p)}=M^{(p)}\overline{H}^{(p)}M_{-1}^{(p)}.$$

Per tale scopo basta considerare due matrici B e $\overline{B}$ che soddisfano rispettivamente alle equazioni ([8])

$$H^{(p)}=BB_{-1}, \qquad \overline{H}^{(p)}=\overline{B}\overline{B}_{-1}$$

e prendere una $M^{(p)}$ tale che $B=M^{(p)}\overline{B}$. Ciò che si è detto per $H^{(p)}$ si ripete per l'eventuale matrice $H^{\left(\frac{p}{2}\right)}$.

([8]) È noto che se H è una qualunque matrice simmetrica è sempre possibile trovare una matrice B tale che

$$BB_{-1}=H.$$

Vedi per esempio TURNBULL and AITKEN: *An introduction to the Theory of canonical matrices*. Cap. V°, parag. IV°.

Dunque qualunque sia la H è possibile trovare una M tale che la H si ottenga dalla H^* mediante la formula (6). Questa formula ci dà allora la più generale soluzione simmetrica della (5); ogni H verrà in generale ripetuta infinite volte.

3. - Ritorniamo alla Ω periodica data dalla (2). Se X è una matrice che soddisfa a

$$H = XX_{-1}$$

ed M quella matrice per cui $MH^*M_{-1} = H$, si ha che posto $B = M^{-1}X$ la B soddisfa all'equazione $BB_{-1} = H^*$.

Dalla relazione

$$X = MB$$

si ha

$$X^{-1}\Omega X = B^{-1}M^{-1}\Omega MB = B^{-1}\Omega B;$$

questo ci dice che la matrice $X^{-1}\Omega X$ si otteneva già mediante la B, cioè che *tutte le matrici periodiche ortogonali di un assegnato carattere si ottenevano già con le soluzioni dell'equazione*

$$BB_{-1} = H^*. \tag{7}$$

In altre parole basta una sola H^* con $|H^*| \neq 0$ per generare, attraverso la soluzione generale della (7), tutte le matrici ortogonali e periodiche aventi lo stesso carattere di Ω.

Ora troviamo la soluzione generale della (7). Siano B e P due soluzioni particolari

$$BB_{-1} = H^*, \qquad PP_{-1} = H^*;$$

avremo $BB_{-1} = PP_{-1}$ e quindi

$$P^{-1}B \cdot B_{-1}P_{-1}^{-1} = E$$

che ci dice che la matrice $A = P^{-1}B$ è ortogonale; cioè si ha

$$B = PA$$

essendo A una matrice ortogonale. Viceversa è subito verificato che tutte le matrici $P \cdot A$ con A ortogonale soddisfano alla (7).

Dunque se P è una soluzione particolare della (7) *la soluzione generale dell'equazione stessa è data da $P \cdot A$ con A ortogonale qualunque* ([9]).

Ne viene che tutte le matrici ortogonali e periodiche simili ad Ω si ottengono dalla formula

$$(PA)^{-1}\Omega(PA)$$

essendo P una soluzione particolare della (7) ed A una qualunque matrice ortogonale. Infine chiamata Φ la matrice ortogonale e periodica data da

$$\Phi = P^{-1}\Omega P$$

([9]) V. AMATO, m. c.

si ha che [10] *nel campo totale tutte le matrici ortogonali e periodiche di un assegnato carattere si ottengono dalla formula*

$$A^{-1}\Phi A$$

dove Φ è una particolare di esse ed A è una qualunque matrice ortogonale.

Poichè è nota la formula che dà tutte le matrici ortogonali di un dato ordine [11] si può ritenere che il problema sia risolto non appena se n'è trovata una soluzione particolare.

OSSERVAZIONE. - Il teorema di AMATO, così stabilito, vale dunque in ogni campo K nel quale valga la proprietà del n.° 2.

4. - L'AMATO giunge al teorema enunciato sopra, attraverso il calcolo effettivo delle matrici in questione. Ottenuto invece come sopra il risultato finale dell'AMATO, il problema in questione sarà risolto non appena se ne determini una soluzione particolare.

È facile ritrovare la soluzione particolare stessa dell'AMATO.

A tale scopo scegliamo per H^* la matrice H particolare che ha per sottomatrici $H^{(1)}$, $H^{(2)}$,.... le matrici unità dei rispettivi ordini m_1, m_2,..... Con un'ovvia trasposizione fatta contemporaneamente sulle righe e sulle colonne della H^* otteniamo la matrice

$$K=\begin{pmatrix} 0 & E^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ E^{(1)} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E^{(2)} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & E^{(2)} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & E^{(p)} \end{pmatrix}.$$

Al posto opportuno potrà comparire quando p è pari la matrice $E^{\left(\frac{p}{2}\right)}$ di ordine $m_{\left(\frac{p}{2}\right)}$. La matrice I che trasforma la H^* nella K, per la quale cioè si ha:

(8) $$K=IH^*I^{-1}$$

è *ortogonale*. Tutto ciò risulta da note proprietà delle matrici.

È facile trovare una soluzione particolare dell'equazione

$$XX_{-1}=K.$$

Basta per esempio risolvere tante equazioni della forma:

(9) $$Y_s Y_{s-1}=\begin{pmatrix} 0 & E^{(s)} \\ E^{(s)} & 0 \end{pmatrix}.$$

---

[10] V. AMATO, m. c.

[11] M. CIPOLLA: *Le sostituzioni ortogonali non cayleyane.* Atti Accademia Gioenia di Catania (1914).

Scomposta la Y_s in modo simile alla matrice che sta a secondo membro si trova subito una Y_s soddisfacente alla (9):

$$Y_s=\begin{pmatrix} E^{(s)} & iE^{(s)} \\ \frac{1}{2}E^{(s)} & -\frac{i}{2}E^{(s)} \end{pmatrix}, \qquad i=\sqrt{-1}$$

ne segue

$$X=\begin{pmatrix} E^{(1)} & iE^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2}E^{(1)} & -\frac{i}{2}E^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & E^{(2)} & iE^{(2)} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}E^{(2)} & -\frac{i}{2}E^{(2)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & E^{(p)} \end{pmatrix};$$

e trasformando la X mediante la I^{-1} si trova una matrice B

$$B=I^{-1}XI$$

che soddisfa all'equazione $BB_{-1}=H^*$. Osservando che la B si ottiene dalla X con la trasformazione inversa di quella con la quale dalla H^* si è ottenuta la K, si trova subito:

$$B=\begin{pmatrix} E^{(1)} & 0 & \dots & 0 & iE^{(1)} & 0 \\ 0 & E^{(2)} & \dots & iE^{(2)} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{1}{2}E^{(2)} & \dots & -\frac{i}{2}E^{(2)} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}E^{(1)} & 0 & \dots & 0 & -\frac{i}{2}E^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & E^{(p)} \end{pmatrix}.$$

Si trova allora (cfr. AMATO, l. c., n.° 4):

$$B^{-1}\Omega B=\Phi=\begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{p}E^{(1)} & 0 & \dots & 0 & -\operatorname{sen}\frac{2\pi}{p}E^{(1)} & 0 \\ 0 & \cos\frac{4\pi}{p}E^{(2)} & \dots & -\operatorname{sen}\frac{4\pi}{p}E^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}\frac{4\pi}{p}E^{(2)} & \dots & \cos\frac{4\pi}{p}E^{(2)} & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\frac{2\pi}{p}E^{(1)} & 0 & \dots & 0 & \cos\frac{2\pi}{p}E^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & E^{(p)} \end{pmatrix}$$

che è la soluzione particolare data dall'AMATO.

5. - Si può ritrovare la soluzione Φ per altra via operando solo nel campo reale. Basta prendere per Ω la forma canonica nel campo reale, ad esempio (12)

$$\Omega_r=\begin{pmatrix} \begin{array}{cc|} 0 & 1 \\ -1 & 2\cos\frac{2\pi}{p} \\ \hline \end{array} & \cdots & & \\ \cdots & \begin{array}{cc|} 0 & 1 \\ -1 & 2\cos\frac{4\pi}{p} \\ \hline \end{array} & & \\ & & \cdots & \\ & & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Per trasformare Ω_r in una matrice ortogonale basta allora eseguire questa trasformazione su

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Si trova facilmente la ben nota matrice

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

E così si ottiene la soluzione particolare

$$\Phi_r=\begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{p} & \operatorname{sen}\frac{2\pi}{p} & & & \\ -\operatorname{sen}\frac{2\pi}{p} & \cos\frac{2\pi}{p} \cdots & & & \\ & \cdots & \cos\frac{4\pi}{p} & \operatorname{sen}\frac{4\pi}{p} & \\ & & -\operatorname{sen}\frac{4\pi}{p} & \cos\frac{4\pi}{p} \cdots & \\ & & & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Questa differisce dalla Φ trovata dall'AMATO per una trasposizione ed una trasformazione sulle righe e sulle colonne.

6. - In questo numero mostriamo con due semplici esempi *due differenze* sostanziali *tra ciò che avviene nel campo totale e ciò che avviene nel campo razionale.*

1). Nel campo razionale non per ogni carattere esistono matrici ortogonali.

2). Se ne esistono non è detto che tutte si ottengano da una sola trasformandola con matrici ortogonali razionali.

ESEMPIO 1. - La matrice

$$\Omega=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(12) Cfr. CECIONI, m. c., p. 34.

è periodica di 3° grado con l'equazione caratteristica

$$x^2+x+1=0.$$

Le matrici ortogonali del 2° ordine sono dei due tipi seguenti:

$$\begin{pmatrix} -\cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Le prime essendo simmetriche sono periodiche di 2° grado perciò solo quelle del 2° tipo possono essere periodiche di 3° grado e perciò simili a Ω. Ma la loro equazione caratteristica è

$$x^2-2\cos\varphi x+1=0$$

e per la similitudine con Ω deve essere

$$-2\cos\varphi=1, \qquad \cos\varphi=-\frac{1}{2}$$

perciò sen φ *irrazionale.*

ESEMPIO 2. - Tra le matrici ortogonali del 2° ordine quelle del 1° tipo sono periodiche di 2° grado le altre non lo sono.

Le matrici del 2° ordine periodiche di 2° grado, escluso il caso banale $-E$, hanno un solo carattere, perciò una sola forma canonica data da

$$\Omega_0=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che è pure ortogonale.

Le matrici ortogonali del 1° tipo sono simili ad Ω_0; perciò esistono *nel campo totale* delle matrici *ortogonali* T per le quali si ha

$$T^{-1}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T=\begin{pmatrix} -\cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Queste T si determinano subito: possono essere del 1° e del 2° tipo e col calcolo diretto si trovano le quattro matrici

$$T_1=\begin{pmatrix} -\cos\frac{\varphi}{2} & \operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} \\ \operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}, \qquad T_2=\begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & -\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} \\ \operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}, \qquad -T_1, \qquad -T_2.$$

Se quindi cos φ e sen φ sono razionali, ma $\cos\frac{\varphi}{2}$ e $\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}$ non sono entrambi razionali le due matrici

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} -\cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

non sono trasformabili l'una nell'altra mediante matrici ortogonali e razionali. Posto, com'è noto, $\cos\varphi=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$ e $\operatorname{sen}\varphi=\frac{2mn}{m^2+n^2}$ con m, n interi qualunque, risultano $\cos\varphi$ e $\operatorname{sen}\varphi$ razionali; è $\cos\frac{\varphi}{2}=\pm\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}$ e $\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}=\pm\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}$, e quindi se m^2+n^2 non è quadrato di un numero intero, $\cos\frac{\varphi}{2}$ e $\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}$ sono irrazionali.

PARTE SECONDA

Matrici razionali di 3º ordine, periodiche di 3º grado ed ortogonali.

Abbiamo dunque visto che fra le matrici di 2º ordine con elementi razionali, periodiche di 2º grado ed ortogonali, non vale, nel campo razionale, il teorema di AMATO. Dimostriamo invece che per le matrici accennate ora nel titolo il teorema stesso vale anche nel campo razionale.

Dimostriamo precisamente che:

Nel campo razionale esistono infinite matrici del 3º ordine che sono periodiche di 3º grado e ortogonali; esse sono simili fra loro, e si ottengono tutte da una qualunque di esse trasformandola mediante matrici ortogonali razionali.

1. - *a*). Una matrice periodica di 3º grado non può avere per radice caratteristica il -1 perchè -1 non è radice 3ª dell'unità. Perciò se una matrice ortogonale S è periodica di 3º grado essa è necessariamente cayleyana ([13]) e si può mettere nella forma

$$S=2\cdot Z^{-1}-E=Z^{-1}Z_{-1}=Z_{-1}Z^{-1}$$

dove Z è una matrice qualunque pseudosimmetrica con gli elementi principali uguali a 1 e col determinante $\neq 0$. Posto

$$S=Z^{-1}Z_{-1} \quad \text{con} \quad Z+Z_{-1}=2E$$

vediamo a quali condizioni deve soddisfare la Z perchè la S, già ortogonale, sia periodica di 3º grado. Dovrà essere

$$S^3=(Z^{-1}Z_{-1})^3=(Z^{-1})^3Z_{-1}^3=E$$

quindi $Z_{-1}^3=Z^3$ cioè

$$(Z^3)_{-1}=Z^3.$$

Dunque occorre e basta che la Z^3 sia simmetrica.

Poniamo

$$Z=\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ -a & 1 & c \\ -b & -c & 1 \end{pmatrix}$$

con a, b, c arbitrari, non tutti nulli; sarebbe altrimenti $S=E$.

([13]) Vedi CIPOLLA, m. c., p. 11, n.º 5, 2.

Scrivendo effettivamente la Z^3 si trova subito che la condizione che Z^3 sia simmetrica si riduce alla condizione $a^2+b^2+c^2=3$. Ne segue:

Le matrici di 3° ordine, periodiche di 3° grado ed ortogonali, sono tutte date dalla formula

$$S=2Z^{-1}-E=Z^{-1}Z_{-1}=Z_{-1}Z^{-1}$$

dove Z ha la forma precedente, con $Z\neq 0$, *e*

$$a^2+b^2+c^2=3. \tag{1}$$

OSSERVAZIONE I. - La S determina in modo unico la Z dalla quale proviene, mediante la formula

$$Z=2(S+E)^{-1}.$$

OSSERVAZIONE II. - Tutto ciò vale anche nel campo totale. Perchè poi S abbia gli elementi razionali è necessario e sufficiente che siano razionali gli elementi di Z, cioè a, b, c. Ed in tale caso (anzi per a, b, c reali) è sempre $|Z|\neq 0$, come subito si verifica. Quindi: Le matrici *razionali* di 3° ordine, periodiche di 3° grado ed ortogonali, sono tutte date dalla formula di sopra

$$S=2Z^{-1}-E$$

dove per a, b, c si mettano tutte le *soluzioni razionali* dell'equazione

$$a^2+b^2+c^2=3.$$

b). Calcoliamo con la formula $\overline{S}=2Z^{-1}-E$ le matrici ortogonali cayleyane del 3° ordine.

Troviamo

$$\overline{S}=\frac{2}{1+a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix} -\dfrac{a^2+b^2-1-c^2}{2} & -a-bc & ac-b \\ a-bc & -\dfrac{c^2+a^2-1-b^2}{2} & -c-ab \\ ac+b & c-ab & -\dfrac{b^2+c^2-1-a^2}{2} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Se a, b, c sono razionali la (2) ci dà la più generale matrice ortogonale cayleyana del 3° ordine con elementi razionali.

Imponendo ai parametri a, b, c la condizione (1) si ottiene che *tutte le matrici del 3° ordine razionali ortogonali e periodiche di 3° grado sono date dalla espressione*

$$S=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} c^2-1 & -a-bc & ac-b \\ a-bc & b^2-1 & -c-ab \\ ac+b & c-ab & a^2-1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

dove gli a, b, c sono le soluzioni razionali dell'equazione (1).

2. - Tutte le matrici periodiche razionali (anzi, reali) del 3° ordine e di 3° grado sono simili fra loro; infatti le loro radici caratteristiche devono essere le tre radici cubiche dell'unità, ciascuna come radice semplice ([14]). Dunque queste matrici sono tutte simili alla matrice A, ortogonale,

$$(4) \qquad A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che si ottiene dalla (3) facendo $a=-1$, $b=1$, $c=-1$.

Anche le nostre S saranno tali;

$$S=X^{-1}AX;$$

e dobbiamo dimostrare che la X che opera la trasformazione può scegliersi *razionale e ortogonale*.

Cominciamo col determinare la più generale matrice X tale che

$$(5) \qquad AX=XS.$$

Indichiamo la X incognita con

$$X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

e adoperiamo per la S della formula (3) le seguenti notazioni abbreviate

$$S=(a_{ik}), \qquad S^2=(a_{ik}^{(2)}), \qquad S^3=E=(a_{ik}^{(3)}).$$

Essendo $S^2=S^{-1}=S_{-1}$ si ha $a_{ik}^{(2)}=a_{ki}$.

La (5) ci dà

$$y_h=\sum_i a_{ih}x_i, \qquad z_h=\sum_i a_{ih}y_i, \qquad x_h=\sum_i a_{ih}z_i$$

quindi

$$z_h=\sum_j a_{jh}^{(2)}x_j, \qquad x_h=\sum_j a_{jh}^{(3)}x_j$$

la quale ultima mostra la compatibilità del sistema, e l'arbitrarietà delle x_1, x_2, x_3.

La $z_h=\sum a_{jh}^{(2)}x_j$ ci dà

$$z_h=\sum_i a_{hi}x_i$$

che unita alla

$$y_h=\sum_i a_{ih}x_i$$

ci fornisce l'espressione effettiva della X.

([14]) Vedi CECIONI: *Matrici cicliche*, m. c., p. 127.

Dobbiamo dunque dimostrare che per i parametri x_1, x_2, x_3 possono scegliersi dei valori *razionali tali che la X risulti ortogonale.*

3. - Abbiamo risolto tale questione indirettamente sfruttando la circostanza che se una X si moltiplica a sinistra per una matrice permutabile con A la S rimane invariata; quindi abbiamo cercato per X non la condizione di ortogonalità, ma la condizione perchè divenga ortogonale mediante la suddetta moltiplicazione a sinistra. Perciò osserviamo quanto segue.

a). La più generale matrice R permutabile con A ha la seguente forma

$$R=\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_3 & r_1 & r_2 \\ r_2 & r_3 & r_1 \end{pmatrix}$$

dove r_1, r_2, r_3 sono parametri arbitrari.

Inoltre se R è permutabile con A anche R_{-1} lo è perchè da

$$AR=RA$$

segue, trasponendo e ricordando che $A_{-1}=A^{-1}$,

$$A^{-1}R_{-1}=R_{-1}A^{-1}$$

da cui

$$R_{-1}A=AR_{-1}.$$

b). Per ipotesi $S=X^{-1}AX$ è ortogonale; allora, come al n.° 1 della prima parte, si ricava che X soddisfa all'equazione

$$AXX_{-1}=XX_{-1}A_{-1}^{-1}$$

cioè

$$AXX_{-1}=XX_{-1}A.$$

La matrice

$$H=XX_{-1}$$

è permutabile con A e simmetrica perciò ha la forma seguente

$$H=XX_{-1}=\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

essendo

$$\alpha=x_1^2+x_2^2+x_3^2, \qquad \beta=\sum_{i,\,h} a_{ih}x_ix_h.$$

c). Esaminiamo il determinante $|H|$. Si ha

$$|H|=\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \alpha+\beta+\beta & \beta & \beta \\ \beta+\alpha+\beta & \alpha & \beta \\ \beta+\beta+\alpha & \beta & \alpha \end{vmatrix}=(\alpha+2\beta)\begin{vmatrix} 1 & \beta & \beta \\ 1 & \alpha & \beta \\ 1 & \beta & \alpha \end{vmatrix}$$

$$|H|=(\alpha+2\beta)(\alpha-\beta)^2.$$

Dalla relazione $H=XX_{-1}$ si ricava

$$|H|=|X|^2;$$

perciò tutte le terne di numeri razionali x_1, x_2, x_3 danno ad $|H|$, *e quindi anche ad* $\alpha+2\beta$, dei valori che sono i quadrati di numeri razionali. La $\alpha+2\beta$ è una espressione quadratica omogenea, a coefficenti razionali, di x_1, x_2, x_3; e in base alla proprietà di cui gode si potrebbe dimostrare che essa è il quadrato di una espressione lineare in x_1, x_2, x_3 a coefficenti razionali, il che subito si verifica dalle formule date in *b*); si ha infatti; tenendo presenti i valori dei coefficienti a_{ih}:

$$\begin{aligned}\alpha+2\beta &= x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\sum_{i,h} a_{ih}x_ix_h= \\ &= x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\cdot\frac{1}{2}\,[(c^2-1)x_1^2+(b^2-1)x_2^2+(a^2-1)x_3^2-2bcx_1x_2+ \\ &\quad +2acx_1x_3-2abx_2x_3]=(cx_1-bx_2+ax_3)^2.\end{aligned}$$

d). L'artificio consiste precisamente in questo: visto che la S non cambia moltiplicando la X a sinistra per una permutabile con A, chiamiamola R^{-1}, determiniamo la R tale che $R^{-1}X$ sia ortogonale (razionale).

Affinchè sia

$$(R^{-1}X)(R^{-1}X)_{-1}=E$$

dovrà essere

$$XX_{-1}=RR_{-1}.$$

Dobbiamo scegliere cioè dei valori razionali di r_1, r_2, r_3 e x_1, x_2, x_3 in modo che si identifichino i due prodotti RR_{-1} e XX_{-1}.

Il prodotto RR_{-1} lo chiamiamo H': esso è simmetrico, è permutabile con A (essendo tali R ed R_{-1}), perciò avrà la forma

$$H'=\begin{pmatrix}\alpha' & \beta' & \beta' \\ \beta' & \alpha' & \beta' \\ \beta' & \beta' & \alpha'\end{pmatrix}.$$

Le α' e le β' si calcolano subito in funzione di r_1, r_2, r_3.

Ragionando su $|H'|$ come si è fatto per $|H|$ si vede che $\alpha'+2\beta'$ deve essere il quadrato di una espressione lineare in r_1, r_2, r_3 a coefficienti razionali. Infatti si trova subito

$$\alpha'=r_1^2+r_2^2+r_3^2$$
$$\alpha'+2\beta'=(r_1+r_2+r_3)^2.$$

Per avere $H=H'$ bisogna rendere $\alpha=\alpha'$ e $\beta=\beta'$.

Per eguagliare α e α' prendiamo

$$r_1=x_1, \quad r_2=x_2, \quad r_3=x_3.$$

Rimangono da scegliere gli x_1, x_2, x_3 razionali in modo che sia β uguale β'; ma essendo già $\alpha=\alpha'$ l'uguaglianza $\beta=\beta'$ equivale all'altra

$$\alpha+2\beta=\alpha'+2\beta'$$

cioè

$$(cx_1-bx_2+ax_3)^2=(x_1+x_2+x_3)^2. \tag{6}$$

In ultima analisi dobbiamo dimostrare che esistono valori razionali x_1, x_2, x_3 *pei quali sia verificata la* (6), *e sia insieme* $|H|\neq 0$.

Se la (6) è una identità basta $|H|\neq 0$, e ciò è possibile (con valori razionali) perchè $|H|$ non è identicamente nullo.

Ed osserviamo che la (6) sarà una identità allora, e solo allora, che sia $a=-b=c=\pm 1$.

Se la (6) non è una identità, basterà guardare che non accada che tutte le volte che essa è verificata sia anche $|H|=0$.

Per essere nullo il determinante $|H|$ deve essere o $\alpha+2\beta=0$ o $\alpha-\beta=0$.

La seconda si può scrivere successivamente $\beta=\alpha$, $2\beta=2\alpha$, $\alpha+2\beta=3\alpha$ cioè

$$(x_1+x_2+x_3)^2=3(x_1^2+x_2^2+x_3^2).$$

Questa equazione in coordinate omogenee del piano rappresenta una conica spezzata col solo punto reale

$$x_1=x_2=x_3.$$

Basta prendere dunque x_1, x_2, x_3 (razionali) non tutti uguali perchè sia $\alpha-\beta\neq 0$.

Resta da vedere che tutte le volte che la (6) è verificata non sia anche $\alpha+2\beta=0$. Se ciò fosse, tenendo conto della espressione data in *c*) per $\alpha+2\beta$, e tenendo conto della (6) stessa, vediamo che tutte le terne x_1, x_2, x_3 che soddisfano alla (6) soddisfarebbero anche al sistema

$$\begin{cases} cx_1-bx_2+ax_3=0 \\ x_1+x_2+x_3=0. \end{cases}$$

Questo sistema ammetterebbe dunque ∞^2 soluzioni, e si avrebbe perciò $c=-b=a$. Da qui, per la (1), si deduce $c=-b=a=\pm 1$; ma allora la (6) sarebbe una identità, contro l'ipotesi.

L'affermazione fatta è quindi dimostrata.

e). In conclusione esistono dei valori razionali x_1, x_2, x_3 pei quali $|H|\neq 0$ e pei quali è

$$XX_{-1}=RR_{-1}$$

quando in R si faccia $r_i=x_i$.

La matrice

$$R^{-1}X$$

così costruita è *razionale e ortogonale* e la S data da

$$S=X^{-1}AX$$

si può ottenere dalla A trasformandola mediante la matrice $R^{-1}X$

$$S=X^{-1}AX=(R^{-1}X)^{-1}A(R^{-1}X).$$

Dunque *la formula*

$$TAT^{-1}$$

dove A rappresenta la matrice (4) *e T la più generale matrice ortogonale razionale, ci dà tutte le matrici ortogonali razionali del 3° ordine periodiche di 3° grado.*

4. - Applichiamo le considerazioni fatte innanzi per trovare *tutte* le soluzioni razionali dell'equazione

$$x^2+y^2+z^2=3. \tag{1'}$$

Dal n.° 1 *a*) oss. I e II, si vede intanto che gli elementi sopra la diagonale principale della matrice Z data da

$$Z=2(S+E)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ -x & 1 & z \\ -y & -z & 1 \end{pmatrix}$$

ove si mettano per S tutte le matrici di 3° ordine razionali ortogonali periodiche di 3° grado, ci forniscono tutte le soluzioni razionali dell'equazione (1').

D'altra parte ogni S è data da $S=TAT^{-1}$ essendo A la matrice (4) e T la più generale matrice razionale ortogonale del 3° ordine. Sostituendo alla S la sua espressione si ha allora

$$\begin{aligned} Z&=2(TAT^{-1}+E)^{-1}=2(TAT^{-1}+TT^{-1})^{-1}=2[T(A+E)T^{-1}]^{-1}= \\ &=T\cdot 2(A+E)^{-1}\cdot T^{-1}=TZ_0T^{-1}, \end{aligned}$$

dove abbiamo posto

$$Z_0=2(A+E)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Tutte le matrici ortogonali di un dato ordine, per esempio del 3°, sono state determinate ([15]). Le cayleyane si ottengono con la formula $T=2Z^{-1}-E$ e sono date dalla (2) con a, b, c parametri arbitrari (razionali, dato che T deve essere razionale); le non cayleyane si ottengono tutte moltiplicando quelle per le matrici

$$J=\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3=\pm 1$$

che si ottengono dalla matrice unità cambiando il segno ad almeno un 1.

([15]) Vedi CIPOLLA, m. c., p. 12, n.° 7.

Trasformare la matrice Z_0 mediante una JT equivale a trasformare la matrice TZ_0T^{-1} mediante la J. Ma questa trasformazione non ha altro effetto che quello di cambiare il segno a certe righe e colonne. Prescindendo dunque dai segni (poichè è evidente che se una terna x, y, z soddisfa alla (1′) anche le terne che si ottengono da essa variandone comunque i segni soddisfano alla stessa equazione), tutte le soluzioni razionali della (1′) si ottengono trasformando la Z_0 data dalla (7) mediante matrici ortogonali *cayleyane.*

CONCLUDENDO: *Tutte le soluzioni razionali della* (1′) *sono date, a meno dei segni, dagli elementi situati da una parte della diagonale principale della matrice Z con*

$$Z=(2\overline{Z}^{-1}-E)\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot(2\overline{Z}^{-1}-E)_{-1}$$

dove è

$$\overline{Z}=\begin{pmatrix}1 & a & b\\ -a & 1 & c\\ -b & -c & 1\end{pmatrix}$$

essendo a, b, c parametri razionali arbitrari.

Ricordiamo che $2\overline{Z}^{-1}-E$ è data dalla (2). Omettiamo per brevità l'ulteriore sviluppo effettivo dei calcoli; omettiamo anche la ricerca dei parametri indipendenti perchè tali sono evidentemente a, b, c.

5. - Facciamo un'ultima applicazione per dimostrare che *l'equazione in u, v*

$$u^2+3v^2=2(\beta^2+\gamma^2) \tag{8}$$

con β, γ razionali tali che

$$\beta^2+\gamma^2\leqslant 3, \qquad 3-(\beta^2+\gamma^2)=\alpha^2, \qquad \alpha \text{ razionale}$$

ammette sempre soluzioni razionali.

Se la condizione che $3-(\beta^2+\gamma^2)$ sia il quadrato di un numero razionale non è soddisfatta, la (8) può non ammettere soluzioni razionali.

Supponiamo infatti che sia $\beta=0$, $\gamma=1$; se la (8) ammettesse soluzioni razionali, $u=\frac{m}{p}$, $v=\frac{n}{p}$, sarebbe

$$m^2+3n^2=2p^2$$

con m, n, p, interi e primi fra loro. Di qui segue [(mod. 3)]

$$m^2\equiv 2p^2, \qquad m^2+p^2\equiv 0, \qquad m\equiv p\equiv 0;$$

quindi essendo m^2 e p^2 divisibili per 9, deve essere tale anche $3n^2$, cioè n deve essere divisibile per 3 contro l'ipotesi che m, n, p siano primi fra loro.

Riprendiamo le due matrici ortogonali razionali A ed $S=(a_{ih})$ periodiche di 3° grado. Sappiamo che esistono delle matrici ortogonali razionali X che trasformano la A nella S. Detti x_1, x_2, x_3 i parametri che ci danno tale matrice (v. n.° 2), le condizioni di ortogonalità delle X sono (cfr. n.° 3 *b*))

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1 \quad \text{e} \quad \sum_{i,\,h} a_{ih}x_ix_h=0$$

la quale ultima espressa effettivamente e tenuto conto della prima dà:

$$cx_1-bx_2+ax_3=\pm 1 \quad (\text{cfr. n.° 3 } c)).$$

Prendiamo per esempio il segno + (altrimenti basterebbe cambiare il segno a x_1, x_2, x_3 in ciò che segue) e otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2+x_3^2=1 \\ cx_1-bx_2+ax_3=1 \end{cases}$$

ossia cambiando lettere

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ \alpha x+\beta y+\gamma z=1, \qquad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=3. \end{cases} \tag{9}$$

Questo sistema ammette dunque soluzioni razionali. Esso ci rappresenta una sfera e un piano; cambiando gli assi in modo da prendere il piano come piano XY e il centro del cerchio sezione come origine dei nuovi assi si hanno le formule di trasformazione

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}{\sqrt{3}}\,X+ && &&+\frac{\alpha}{\sqrt{3}}\,Z+\frac{\alpha}{3}\\
y &= -\frac{\alpha\beta}{\sqrt{3}\,\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}\,X+ &&\frac{\gamma}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}\,Y+ &&\frac{\beta}{\sqrt{3}}\,Z+\frac{\beta}{3}\\
z &= -\frac{\alpha\gamma}{\sqrt{3}\,\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}\,X- &&\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}\,Y+ &&\frac{\gamma}{\sqrt{3}}\,Z+\frac{\gamma}{3}.
\end{aligned}$$

L'equazione della sfera e del piano nei nuovi assi è

$$X^2+Y^2+Z^2+\frac{2Z}{\sqrt{3}}=\frac{2}{3}, \qquad Z=0$$

e l'intersezione

$$X^2+Y^2=\frac{2}{3}.$$

Dall'esame delle formule di trasformazione e delle inverse si vede che, sul piano $\alpha x+\beta y+\gamma z=1$, cioè $Z=0$, x, y, z, sono razionali allora e solo che sia

$$X=\frac{u}{\sqrt{3}\,\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}, \qquad Y=\frac{v}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}$$

con u, v razionali i quali dovranno soddisfare all'equazione

$$u^2+3v^2=2(\beta^2+\gamma^2)$$

che non è altro che la (8). Poichè sappiamo che esistono soluzioni razionali del sistema (9) possiamo da esse ricavare soluzioni razionali della (8).