

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

GIUSEPPE OTTAVIANI

## **Sulla convergenza e sommabilità delle serie di Hermite : disuguaglianze fondamentali per i polinomi di Laguerre ed Hermite**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2<sup>e</sup> série*, tome 7, n° 1 (1938), p. 1-23

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1938\\_2\\_7\\_1\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1938_2_7_1_1_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1938, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

**SULLA CONVERGENZA E SOMMABILITÀ DELLE SERIE DI  
HERMITE: DISUGUAGLIANZE FONDAMENTALI PER I POLI-  
NOMI DI LAGUERRE ED HERMITE (\*)**

di GIUSEPPE OTTAVIANI (Pisa).

I polinomi di HERMITE formano un sistema di polinomi a due a due ortogonali, nell'intervallo  $(-\infty, \infty)$ , rispetto alla funzione peso  $e^{-x^2}$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 0 \quad (m \neq n); \quad = 2^n n! \sqrt{\pi} \quad (m = n).$$

Si può quindi considerare lo sviluppo di FOURIER di una funzione  $f(x)$  definita in  $(-\infty, \infty)$  in serie di polinomi di HERMITE:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} f(u) H_n(u) du \quad (\text{serie di tipo } H).$$

Lo studio delle condizioni sufficienti di convergenza di questa serie si divide in due parti: una che riguarda le condizioni da imporre alla funzione  $f(x)$  in un intervallo finito comprendente quello in cui si studia la convergenza; e l'altra che riguarda le condizioni da imporre alla funzione  $f(x)$  nelle regioni all'infinito dell'intervallo  $(-\infty, \infty)$ .

La prima parte si può dire sia stata completamente risolta da ADAMOFF il quale nel 1906 ha dimostrato che se si considera una funzione  $f(x)$  che per  $|x| \geq a$  è nulla, la sua serie di HERMITE si comporta in un punto  $x_0$  interno a  $(-a, a)$  come la serie trigonometrica di FOURIER di una funzione che coincida con la  $f(x)$  in un intorno  $(x_0 - h, x_0 + h)$  del punto detto.

Per quanto riguarda le condizioni all'infinito, il problema si riconnette a trovare le migliori limitazioni per i polinomi  $H_n(x)$  nell'intervallo  $(-\infty, \infty)$  per  $n \rightarrow \infty$ ; infatti, per il risultato di ADAMOFF, nelle regioni all'infinito bisogna imporre a  $f(x)$  delle condizioni tali che il termine:

$$\sum_{m=0}^n \frac{H_m(x)}{2^m m! \sqrt{\pi}} \int_a^{\infty} e^{-u^2} f(u) H_m(u) du = \int_a^{\infty} e^{-u^2} f(u) S_n^{(0)}(x, u) du$$

---

(\*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

in cui è  $a$  grande quanto si vuole, ma fisso al variare di  $n$ , tenda a 0 per  $n \rightarrow \infty$ ; e analogamente per l'intervallo  $(-\infty, -a)$ ; ed ora il termine  $S_n^{(0)}(x, u)$ , somma parziale  $n$ -esima della serie nucleo, si esprime mediante i polinomi di HERMITE di ordine  $n, n+1$ .

Quindi il primo problema che sorge è lo studio di queste limitazioni.

Siccome i polinomi di HERMITE sono un caso particolare dei polinomi di LAGUERRE, ai quali sono legati dalle relazioni (8), ci si può porre il problema più generale di trovare tali limitazioni per i polinomi di LAGUERRE.

I polinomi di LAGUERRE:  $L_n^{(\alpha)}(x)$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ), definiti per ogni valore reale di  $\alpha$ , formano un sistema di polinomi a due a due ortogonali in  $(0, \infty)$  rispetto alla funzione peso  $e^{-x}x^\alpha$ , per  $\alpha > -1$ ; quindi è per tali valori di  $\alpha$  che essi interessano nello studio degli sviluppi in serie di funzioni ortogonali.

La nota limitazione dei polinomi di LAGUERRE:

$$(*) \quad L_n^{(\alpha)}(x) = O\left(\frac{x}{\sqrt{x}} \left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}}\right)$$

valevole per  $0 < x \leq O\left(n^{\frac{1}{3}}\right)$ , e ottenuta dallo sviluppo assintotico di  $L_n^{(\alpha)}(x)$ , è stata estesa dal KOGBELTANTZ a tutto l'intervallo  $0 < x < \infty$ .

Egli la dimostra dividendo l'intervallo in tre parti:

$$0 < x \leq n; \quad n \leq x \leq 2e^2n; \quad 2e^2n \leq x.$$

Ma la dimostrazione relativa al secondo intervallo non è esatta come nel presente lavoro ho mostrato, anzi in tale intervallo tale limitazione non sussiste. E infatti ho trovato lo sviluppo assintotico di  $L_n^{(\alpha)}(x)$  nell'intervallo

$$0 < x \leq 4n \left(1 - \frac{1}{o\left(n^{\frac{2}{3}}\right)}\right),$$

dal quale ho dedotto che la (\*) vale nell'intervallo  $0 < x \leq Kn$ , con  $K < 4$ , e che anzi non può esistere una limitazione più forte; ma quando  $x \rightarrow 4n$  essa non vale più e l'ho sostituita, nell'intorno del punto  $x=4n$ , con altre limitazioni. Poi per  $x > K_1n$  con  $K_1 > 4$  ho trovato una limitazione più forte della (\*). Inoltre, considerato l'intorno del punto  $O$ , ho dimostrato che lo sviluppo assintotico vale, per  $\alpha \geq -1$ , pure per  $x \rightarrow 0$  al crescere di  $n$  all'infinito, purchè  $nx \rightarrow \infty$ ; ed ho mostrato con un esempio che tale sviluppo non vale se è  $nx \leq A$ , con  $A$  grande a piacere, ma fisso.

Il limite inferiore di validità della corrispondente limitazione (\*) risulta invece, per  $\alpha \geq -1$ ,  $\frac{1}{O(n)}$ , che per  $\alpha \geq -\frac{1}{2}$  diventa lo zero, a causa della (21'').

Dai risultati così ottenuti per i polinomi di LAGUERRE ho dedotto corrispondenti formule assintotiche e limitazioni per i polinomi di HERMITE.

Queste formule saranno utilizzate in un secondo lavoro, nel quale continuo lo studio delle serie di HERMITE, secondo quanto è stato detto in questa introduzione; applico cioè dette limitazioni allo studio delle condizioni sufficienti di convergenza e sommabilità del CESARO delle serie di HERMITE.

1. - I polinomi di HERMITE:  $H_n(x)$  sono polinomi di grado  $n$ , definiti in  $(-\infty, \infty)$  dall'espressione:

$$(1) \quad H_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}, \quad n \geq 1; \quad H_0(x) \equiv 1 \quad (1).$$

Lo sviluppo formale di  $H_n(x)$  è:

$$(2) \quad H_n(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{n!}{k! (n-2k)!} (2x)^{n-2k}$$

dove  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  indica il massimo intero contenuto in  $\frac{n}{2}$ .

Particolare importanza hanno nei problemi riguardanti i polinomi di HERMITE, le formule di approssimazione assintotica e le limitazioni di  $H_n(x)$ , per  $n \rightarrow \infty$ . È nota la formula di approssimazione assintotica:

$$(3) \quad H_n(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \sqrt{2^n n!} \sqrt{\frac{2}{n\pi}} \left\{ \cos \left( x \sqrt{2n} + \frac{n\pi}{2} \right) + O\left(\frac{x^3}{\sqrt{n}}\right) \right\} \quad (2)$$

valevole uniformemente per  $x$  variabile nell'intervallo  $0 \leq |x| \leq O\left(n^{\frac{1}{6}-\sigma}\right)$ ,  $\sigma > 0$ .

Si ha una facile dimostrazione della (3) col procedimento di STONE <sup>(3)</sup> e KOWALLIK <sup>(4)</sup>, il quale anzi permette di calcolare con esattezza il termine  $O\left(\frac{x^3}{\sqrt{n}}\right)$ . Infatti si ottiene:

$$(3') \quad \left\{ \begin{aligned} H_{2n}(x) &= \frac{x^2}{e^{\frac{x^2}{2}}} \frac{\sqrt{2^{2n}(2n)!}}{\sqrt{\pi n}} \left\{ (-1)^n \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{8n}\right) \cos x \sqrt{4n+1} - \frac{\sqrt{\pi n}}{\sqrt{4n+1}} h(2n, x) \right\} \\ H_{2n+1}(x) &= \frac{x^2}{e^{\frac{x^2}{2}}} \frac{\sqrt{2^{2n+1}(2n+1)!}}{\sqrt{\pi n}} \left\{ (-1)^{n+1} \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{8n}\right) \sin x \sqrt{4n+3} - \frac{\sqrt{\pi n}}{\sqrt{4n+3}} h(2n+1, x) \right\} \end{aligned} \right.$$

(1) Per tutte le formule riguardanti i polinomi di HERMITE e di LAGUERRE che vengono utilizzate in questo lavoro vedi per esempio G. VITALI e G. SANSONE: *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*. (Zanichelli, Bologna), parte II, Cap. IV.

(2) Ricordiamo che il simbolo  $f(x, n) = O[\varphi(x, n)]$  per  $n \rightarrow \infty$  e  $x$  variabile in  $(a, b)$  indica che si può determinare una costante  $A$  tale che valga, per ogni  $x$  di  $(a, b)$ , e per ogni  $n > 0$ , la  $|f(x, n)| \leq A\varphi(x, n)$ . Il simbolo  $f = o(\varphi)$  indica invece che si ha:  $[f(x, n) : \varphi(x, n)] \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ .

(3) STONE: *Developementes in H. polynomials*. Ann. of Math. 29 (1927).

(4) KOWALLIK: *Entwicklung einer willkürlichen Funktion....* Math. Zeitsch. 31 (1930).

in cui è  $0 < \varepsilon_i < 1$  ( $i=1, 2$ ), ed inoltre:

$$(4) \quad h(n, x) = \int_0^x \alpha^2 f_n(\alpha) \operatorname{sen} [\sqrt{2n+1}(\alpha-x)] d\alpha$$

ove  $f_n(x)$  è il polinomio  $n$ -esimo di HERMITE normalizzato:

$$(5_1) \quad f_n(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}},$$

$$(5_2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_n^2(x) dx = 1.$$

Dalla (3) si ricava la limitazione:

$$(6) \quad H_n(x) = O\left(\frac{e^{\frac{x^2}{2}} \sqrt{2^n n!}}{\sqrt{n}}\right),$$

$$(6') \quad f_n(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

valevole uniformemente per  $n \rightarrow \infty$  e per  $0 \leq |x| \leq O\left(n^{\frac{1}{6}}\right)$ .

I polinomi di HERMITE sono un caso particolare dei polinomi  $L_n^{(\alpha)}(x)$  di LAGUERRE, definiti (in  $0, \infty$ ) dalle formule seguenti:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha} e^x}{n!} \frac{d^n (x^{n+\alpha} e^{-x})}{dx^n} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

od anche come coefficienti di  $z^n$  dello sviluppo in serie di potenze di  $z$  della funzione generatrice:

$$(7) \quad \frac{e^{-\frac{xz}{1-z}}}{(1-z)^{\alpha+1}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) z^n; \quad L_n^{(\alpha)}(x) = 1;$$

e precisamente si hanno le note relazioni:

$$(8) \quad \begin{cases} H_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} 2^{2n+1} n! x L_n^{(\frac{1}{2})}(x^2). \\ H_{2n}(x) = (-1)^n 2^{2n} n! L_n^{(-\frac{1}{2})}(x^2) \end{cases}$$

Per quanto ci si voglia limitare nel presente lavoro allo studio dei polinomi di HERMITE, è utile avere formule assintotiche e limitazioni per i polinomi di LAGUERRE: infatti da queste si deducono come caso particolare, tenendo conto delle (8), le analoghe formule per gli  $H_n(x)$ ; ed inoltre queste formule sono utili anche perchè le somme del CESARO ( $C, \delta$ ) delle somme parziali  $n$ -esime della

serie-nucleo degli  $H_n(x)$ , somme che ricorrono nella sommazione  $(C, \delta)$  delle serie di HERMITE, si esprimono mediante gli  $L_n^{(\alpha)}(x)$ .

Per i polinomi  $L_n^{(\alpha)}(x)$  vale la limitazione data da FÈJER <sup>(5)</sup> per  $x$  variabile in un intervallo finito  $0 < \alpha \leq x \leq A$ : in cui  $A$  è grande quanto si vuole ed  $\alpha$  è  $> 0$ , ma entrambi sono fissi al variare di  $n$ :

$$(9) \quad L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{\pi x}} \left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} \left\{ \cos \left( 2\sqrt{nx} - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + O \left( \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n}} \right) \right\},$$

che PERRON <sup>(6)</sup> ha estesa per  $0 < \alpha \leq x \leq O \left( n^{\frac{1}{3} - \sigma} \right)$ ,  $\sigma > 0$ .

2. - Nel presente numero ci proponiamo di studiare la validità di tale formula quando  $x$  tenda a zero col crescere di  $n$  all'infinito.

Per  $\alpha = -\frac{1}{2}$  ed  $\alpha = \frac{1}{2}$  la (9) si deduce dalla (3) e vale quindi per  $0 \leq x \leq O \left( n^{\frac{1}{3} - \sigma} \right)$ .

Nel caso di  $\alpha = -\frac{1}{2}$ , scriviamo la (9) esattamente, utilizzando le (3'). Si ha, tenendo presente la formula di WALLIS:

$$(10) \quad L_n^{(-\frac{1}{2})}(x) = (-1)^n \frac{H_{2n}(\sqrt{x})}{2^{2n} n!} = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{\pi n}} \left( 1 - \frac{\varepsilon}{8n} \right) \cos(\sqrt{x} \sqrt{4n+1}) + \alpha \frac{e^{\frac{x}{2}}}{n^{\frac{3}{4}}} h(2n, \sqrt{x}),$$

in cui  $\alpha$  ed  $\varepsilon$  sono indipendenti da  $x$ , e limitate al variare di  $n$ .

Per  $\alpha = \frac{1}{2}$  ricaviamo:

$$(11) \quad L_n^{(\frac{1}{2})}(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{\pi}} \left( 1 - \frac{\varepsilon'}{n} \right) \frac{1}{\sqrt{x}} \left\{ \left( 1 - \frac{\varepsilon_2}{n} \right) \operatorname{sen} \sqrt{(4n+3)x} + \right. \\ \left. + (-1)^n \frac{\sqrt[4]{\pi n}}{\sqrt{4n+3}} \int_0^{\sqrt{x}} a^2 f_{2n+1}(a) \operatorname{sen} [\sqrt{4n+3}(a - \sqrt{x})] da \right\}$$

in cui  $\varepsilon', \varepsilon_2$  sono due costanti indipendenti da  $x$ ; e questa uguaglianza vale qualsiasi sia  $x$ .

Derivando allora i due membri otteniamo ancora una identità. Ma si ha:

$$\frac{d}{dx} L_n^{(\alpha)}(x) = -L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x).$$

<sup>(5)</sup> FÈJER: *Über die bestimmung asymptotischer Werte*. Math. ès termès èrtesito, 27 (1909), pp. 1-33.

<sup>(6)</sup> PERRON: *Journal v. Crelle*, 151 (1921), pp. 63-78.

Allora si può scrivere:

$$\begin{aligned}
 (12) \quad -L_{n-1}^{(\frac{3}{2})}(x) &= \frac{x}{\sqrt{x}} \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{n}\right) \frac{\sqrt{n + \frac{3}{4}}}{x} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{n}\right) \operatorname{sen} \sqrt{(4n+3)x} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (-1)^n \frac{\sqrt[4]{xn}}{\sqrt{4n+3}} h(2n+1, \sqrt{x}) \right] \times \left[ \sqrt{\frac{x}{n + \frac{3}{4}}} - \frac{1}{\sqrt{x(n + \frac{3}{4})}} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{n}\right) \cos \sqrt{(4n+3)x} + \right. \\
 &\quad \left. + (-1)^{n+1} \frac{\sqrt[4]{xn}}{\sqrt{4n+3}} \int_0^{\sqrt{x}} \alpha^2 f_{2n+1}(\alpha) \cos [\sqrt{4n+3}(\alpha - \sqrt{x})] d\alpha \right\}.
 \end{aligned}$$

Vediamo da questa che anche per  $0 < x < a$ , con  $a$  piccolo a piacere, vale la (9), per  $a = \frac{3}{2}$ , purchè al termine  $O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n}}\right)$  si sostituisca il termine  $O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{nx}}\right)$ .

Con tale sostituzione la (9) vale pure, sempre per  $a = \frac{3}{2}$ , per  $x \rightarrow 0$  quando  $n$  tende all'infinito, purchè il prodotto  $nx$  tenda all'infinito: infatti in tale ipotesi, quando  $n$  tende all'infinito,  $O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{nx}}\right)$  tende a 0. Ma quando  $nx$  risulta limitato, allora il termine secondario viene ad essere dell'ordine di grandezza del termine principale, e quindi la (9) può non valere più: che sia effettivamente così lo si vede dalla (12) in cui, facendo tendere  $n$  all'infinito e  $x$  a 0 in modo che  $nx$  sia limitato, si ha che al termine principale:

$$\left(1 - \frac{\varepsilon_2}{n}\right) \cos \sqrt{(4n+3)x}$$

viene a sommarsi il termine:

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{n}\right) \frac{1}{\sqrt{x(n + \frac{3}{4})}} \operatorname{sen} \sqrt{(4n+3)x}$$

mentre gli altri tendono a 0.

Derivando di nuovo la (12) si ottiene al primo membro  $L_{n-2}^{(2+\frac{1}{2})}(x)$  e nella parentesi al secondo membro, messo in evidenza un altro  $\sqrt{\frac{n + \frac{3}{4}}{x}}$ , il termine principale:

$$-\left(1 - \frac{\varepsilon_2}{n}\right) \operatorname{sen} \sqrt{(4n+3)x}$$

mentre gli altri termini sono dell'ordine di grandezza di  $\frac{1}{\sqrt{nx}}$  o più piccoli. Derivando ancora, si può concludere che:

Per  $\delta \geq -1$  intero vale la formula di approssimazione asintotica .

$$(13) \quad L_n^{(\delta + \frac{1}{2})}(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{\pi x}} \left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\delta}{2}} \left\{ \text{sen} \left( 2\sqrt{nx} - \frac{\delta\pi}{2} \right) + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{nx}}\right) \right\}$$

uniformemente per  $x$  variabile nell'intervallo:

$$\frac{1}{o(n)} \leq x \leq O\left(n^{\frac{1}{3}-\varepsilon}\right).$$

Quindi occorre sostituire la (9) con tale formula per  $\frac{1}{o(n)} \leq x \leq a$ ; ma se  $nx$  risulta limitato, il termine secondario è effettivamente dell'ordine di grandezza del termine principale, e la formula non sussiste più.

Questa formula si può estendere facilmente pure per  $\delta$  non intero, mediante la formula integrale di KOGBETLIANTZ:

$$(14) \quad L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta)} \frac{1}{x^\alpha} \int_0^x (x-u)^{\alpha-\beta-1} u^\beta L_n^{(\beta)}(u) du, \quad (\alpha > \beta) \quad (7)$$

ma tralasciamo di farlo, non servendoci. D'altra parte per  $\delta$  non intero  $\geq -\frac{3}{2}$  la (13) verrà sostituita, per  $x \rightarrow 0$ , dalla (17) che ha lo stesso limite inferiore di validità.

Dalla (9) si ricava la nota limitazione:

$$(15) \quad L_n^{(\alpha)}(x) = O\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} \left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}}\right)$$

valevole uniformemente, per qualsiasi  $\alpha$ , nell'intervallo  $0 < \alpha \leq x \leq O\left(n^{\frac{1}{3}-\varepsilon}\right)$ .

Dalla (13) risulta che quando sia  $\alpha = \delta + \frac{1}{2}$ , con  $\delta$  intero  $\geq -1$  la (15) è valida pure per  $O\left(\frac{1}{n}\right) \leq x$ , ma tale estensione è dimostrata nel n.º 4 a) per  $\alpha$  reale  $\geq -1$ .

3. - KOGBETLIANTZ (vedi loc. cit. in (7), pp. 149-157) ha provato che la (15) è valida per  $x$  variabile nell'intervallo:  $0 < \alpha \leq x \leq kn$ , in cui è  $k$  grande quanto si vuole, ma finito.

Egli la dimostra direttamente per  $x$  variabile in  $\alpha \leq x \leq n$ , e da questa ricava poi che la (6) è valida per  $|x| \leq \sqrt{\frac{n}{2}}$ .

(7) KOGBETLIANTZ: *Recherches sur la sommabilité des séries d'Hermite*. Ann. de l'École Norm. Sup. de Paris, 1932, form. (32).



Per  $x$  variabile in  $n \leq x \leq kn$ : dimostra prima la corrispondente limitazione (6) per i polinomi di HERMITE, per  $x$  variabile in  $\left(\sqrt{\frac{n}{2}}, k\sqrt{n}\right)$ , e poi da questa mediante la (8) e la relazione integrale (14) ricava la (15) (ho posto  $\sqrt{\frac{n}{2}} \leq x$  invece di  $\sqrt{n} \leq x$  come KOGBETLIANTZ, perchè la (8) lega  $H_{2n}(x)$  a  $L_n^{(-\frac{1}{2})}(x^2)$ ). Senonchè la dimostrazione della (6), per  $\sqrt{\frac{n}{2}} \leq x \leq k\sqrt{n}$ , è errata.

Infatti il KOGBETLIANTZ parte dalla formula di addizione di RUNGE:

$$(16) \quad H_n\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} H_m(x) H_{n-m}(y)$$

in cui fa  $x=y$ :

$$(16') \quad H_n(x\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} H_m(x) H_{n-m}(x)$$

e dice: se risulta  $|x| \leq \sqrt{\frac{n}{2}}$ , allora è  $|x\sqrt{2}| \leq \sqrt{n}$ : se quindi riusciamo a dimostrare che è:

$$(a) \quad \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \frac{\sqrt{2^m m!}}{\sqrt{m+1}} \frac{\sqrt{2^{n-m} (n-m)!}}{\sqrt{n-m+1}} = O\left(\frac{\sqrt{2^n n!}}{\sqrt{n}}\right)$$

la disuguaglianza (6) sarà dimostrata per  $|x| \leq \sqrt{n}$ , mentre prima lo era per  $|x| \leq \sqrt{\frac{n}{2}}$ , cioè la lunghezza dell'intervallo della sua validità sarà moltiplicata per  $\sqrt{2}$ . E quindi ripetendo il ragionamento un numero finito di volte dimostra la (6) per  $|x| \leq k\sqrt{n}$ .

Ma il primo membro della (a) lo ottiene dal secondo membro della (16') maggiorando gli  $H_m(x)$  con la (6); e questa è stata dimostrata per ora per  $|x| \leq \sqrt{\frac{m}{2}}$  e non per  $|x| \leq \sqrt{\frac{n}{2}}$ : così per esempio, per  $m = \frac{n}{2}$  la (6) vale per  $|x| \leq \sqrt{\frac{n}{4}}$ , ed egli la usa per  $|x| \leq \sqrt{\frac{n}{2}}$ .

Cosicchè il risultato che rimane è che la validità della (15) è estesa all'intervallo  $0 < a \leq x \leq n$ .

Ora noi di questa non daremo una rapida dimostrazione che estende pure il campo di validità a  $\frac{1}{O(n)} \leq x \leq kn$ , con  $k < 4$  (c'è quindi pure l'estensione per  $x$  piccola quanto si vuole e tendente a 0 per  $n \rightarrow \infty$ ); poi completeremo questo risultato, dando una formula assintotica per  $L_n^{(a)}(x)$  (la quale ci dirà come caso particolare che la limitazione detta non può essere migliorata) ed un'altra limitazione in modo da coprire tutto l'intervallo  $(0, \infty)$ .

4. - Dimostrazione della disuguaglianza fondamentale (15). — Dall'espressione della funzione generatrice dei polinomi di LAGUERRE

$$(7) \quad \frac{e^{-\frac{xz}{1-z}}}{(1-z)^{\alpha+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) z^n$$

si ricava, esprimendo il coefficiente di  $z^n$  mediante l'integrale di CAUCHY :

$$(a) \quad L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{e^{-\frac{xz}{1-z}}}{(1-z)^{\alpha+1} z^{n+1}} dz$$

oppure

$$(a') \quad e^{-\frac{x}{2}} L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{e^{-\frac{x}{2} \frac{1+z}{1-z}}}{(1-z)^{\alpha+1} z^{n+1}} dz$$

in cui  $c$  è una curva chiusa qualsiasi, racchiudente l'origine ma non il punto 1, unico punto singolare della funzione generatrice.

Prendiamo per curva  $c$  la circonferenza di centro l'origine e raggio 1, sostituita nell'intorno del punto 1 da un arco di circonferenza

di centro 1 e raggio  $r = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{x}{n}}$ : quindi mettiamo per ora la limitazione  $0 < x < 16n$ , perchè l'origine rimanga sempre entro la curva scelta. Indicando i due archi con  $c_1, c_2$ , cominciamo col maggiorare l'integrale (a') sull'arco  $c_1$  (vedi figura). Su esso si ha :

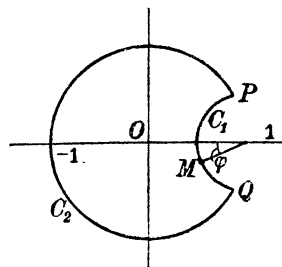


Fig. 1.

in cui  $\varphi$  è l'angolo  $\widehat{M10}$ ,  $\geq 0$  secondochè  $M$ , che varia sull'arco  $c_1$ , è sopra o sotto l'asse reale. Allora :

$$R\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = R\left(\frac{1}{r} \frac{2-r \cos \varphi + ir \sin \varphi}{\cos \varphi - i \sin \varphi}\right) = \frac{2}{r} \cos \varphi - 1 \geq 0 :$$

il segno di uguaglianza vale nei punti  $P, Q$ , nei quali  $\frac{1+z}{1-z}$  è immaginario puro.

Inoltre :

$$\frac{1}{|z|^n} = \frac{1}{(1-2r \cos \varphi + r^2)^{\frac{n}{2}}} = e^{\left(\frac{rn}{2} + \frac{x}{2r}\right) \cos \varphi - \frac{r^2 n}{4} - \frac{x}{4}} \left\{ e^{-\left(r + \frac{x}{rn}\right) \cos \varphi + \frac{r^2}{2} + \frac{x}{2n}} \right\}$$

dove la funzione  $f(\varphi)$  in parentesi, avendo per derivata:

$$f'(\varphi) = \operatorname{sen} \varphi \left[ r + \frac{x}{rn} - \frac{2r}{1 - 2r \cos \varphi + r^2} \right] f(\varphi)$$

è per  $x < 6n$ , crescente a partire da  $\varphi = 0$  verso  $P$  o  $Q$ , definiti da  $\cos \varphi = \frac{r}{2}$  ed ha quindi in  $\cos \varphi = \frac{r}{2}$  il suo valore massimo, uguale a 1. Infine è:

$$\left| \frac{dz}{(1-z)^{\alpha+1}} \right| = \frac{d\varphi}{r^\alpha}$$

Allora l'integrale su  $c_1$  è maggiorato da:

$$|J_1| = \left| \int \right| \leq \frac{2}{r^\alpha} \int_{\cos \varphi = 1}^{\cos \varphi = \frac{r}{2}} e^{-\left(\frac{x}{2r} - \frac{rn}{2}\right) \cos \varphi + \frac{x}{4} - \frac{r^2 n}{4}} d\varphi.$$

Ma ora essendo  $r = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{x}{n}}$ , si ha:

$$\frac{x}{2r} - \frac{nr}{2} = \sqrt{nx} \left( 2 - \frac{1}{8} \right) > 0;$$

ed anche:

$$\frac{x}{4} - \frac{r^2 n}{4} - \left( \frac{x}{2r} - \frac{rn}{2} \right) \cos \varphi \leq 0$$

per  $\varphi$  in  $\left( 0, \cos \varphi = \frac{r}{2} \right)$ , e crescente per  $\varphi$  crescente; quindi:

$$\begin{aligned} |J_1| &\leq \frac{2e^{\frac{x}{4} - \frac{r^2 n}{4}}}{r^\alpha} \left\{ \int_0^{\cos \varphi = \frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{x}{2r} - \frac{nr}{2}\right) \cos \varphi} d\varphi + \int_{\cos \varphi = \frac{1}{2}}^{\cos \varphi = \frac{r}{2}} e^{-(\dots) \cos \varphi} d\varphi \right\} \leq \\ &\leq \frac{2\pi e^{-\left(\frac{x}{4r} - \frac{nr}{4}\right)(1-r)}}{r^\alpha} + \frac{2}{r^\alpha} e^{\frac{x}{4} - \frac{r^2 n}{4}} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{r}{2}} \frac{e^{-\left(\frac{x}{r} - nr\right) \frac{t}{2}}}{\sqrt{1-t^2}} dt. \end{aligned}$$

Per il secondo teorema della media applicato alla funzione:  $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$  positiva crescente in  $\left( \frac{r}{2}, \frac{1}{2} \right)$  (è  $r < 1$ ) ed integrando, si ottiene:

$$(b) \quad J_1 = O\left( \frac{1}{r^\alpha \left( \frac{x}{2r} - \frac{nr}{2} \right)} \right) = O\left( \frac{1}{r^\alpha \sqrt{nx}} \right) = O\left( \frac{n^{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}}}{x^{\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}} \sqrt{nx}} \right).$$

Tale risultato, importante per il seguito, è valido per  $0 < x < 6n$ .

Passiamo ora all'integrale esteso all'arco  $c_2$ .

Si ha su  $c_1$ :  $z = e^{i\vartheta}$  in cui  $\vartheta$  varia tra  $r_1$  e  $2\pi - r_1$ :  $r_1$  è l'arco che sottende la corda di lunghezza uguale a  $r$ , e quindi è  $r < r_1$ .

Inoltre è  $\frac{dz}{z^{n+1}} = ie^{-in\vartheta} d\vartheta$ .

$\frac{1+z}{1-z}$  è su  $c_2$  immaginario puro: infatti si ha:

$$\frac{1+z}{1-z} = i \frac{\operatorname{sen} \vartheta}{1 - \cos \vartheta} = i \frac{\operatorname{sen} \vartheta}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta}{2}}.$$

Infine  $1-z$  ha per modulo  $\sqrt{2-2\cos\vartheta} = 2 \operatorname{sen} \frac{\vartheta}{2}$  e per argomento  $2\pi - \frac{\pi - \vartheta}{2}$ , come si vede subito dal triangolo che ha per vertici i punti 0, 1,  $z$ ; quindi:

$$1-z = 2 \operatorname{sen} \frac{\vartheta}{2} e^{i \frac{\vartheta - \pi}{2}}.$$

Sostituendo in (a') si ha:

$$J_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_2} = \frac{e^{i \frac{\alpha+1}{2} \pi}}{2\pi} \int_{r_1}^{2\pi-r_1} \frac{e^{-i \left[ \frac{x \operatorname{sen} \vartheta}{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta}{2}} + \left( n + \frac{\alpha+1}{2} \right) \vartheta \right]}}{2^{\alpha+1} \operatorname{sen}^{\alpha+1} \frac{\vartheta}{2}} d\vartheta = \int_{r_1}^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi-r_1} = I_1 + I_2.$$

In  $I_1$  separiamo nella funzione integranda parte reale da parte immaginaria, e consideriamo per esempio l'integrale relativo alla parte reale:

$$(b') \quad R(I_1) = \frac{e^{i \frac{\alpha+1}{2} \pi}}{2\pi} \int_{r_1}^{\pi} \frac{\cos \left[ \frac{x \operatorname{sen} \vartheta}{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta}{2}} + \left( n + \frac{\alpha+1}{2} \right) \vartheta \right]}{2^{\alpha+1} \operatorname{sen}^{\alpha+1} \frac{\vartheta}{2}} d\vartheta.$$

Se consideriamo la funzione di  $\vartheta$ :

$$u = \frac{x \operatorname{sen} \vartheta}{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta}{2}} + \left( n + \frac{\alpha+1}{2} \right) \vartheta$$

si ha:

$$u'(\vartheta) = n + \frac{\alpha+1}{2} - \frac{x}{4} \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta}{2}}$$

quindi se indichiamo con  $\bar{\vartheta}$  l'eventuale radice dell'equazione  $u'(\vartheta) = 0$ :

$$(c) \quad 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\bar{\vartheta}}{2} = \frac{x}{n + \frac{\alpha+1}{2}} = \frac{x}{n_1} \quad \text{con} \quad r_1 < \bar{\vartheta} \leq \pi \quad \left( \text{si è posto } n_1 = n + \frac{\alpha+1}{2} \right)$$

tale radice esiste solo se è  $x \leq 4 \left( n + \frac{\alpha+1}{2} \right) = 4n_1$ .

Spezziamo allora l'intervallo  $(r_1, \pi)$  nelle tre parti:

$$\begin{aligned} r_1 &\leq \vartheta \leq \bar{\vartheta} - a = \bar{\vartheta} - \sqrt{\frac{x}{n}} \frac{1}{(nx)^\beta}; \\ \bar{\vartheta} - a &\leq \vartheta \leq \bar{\vartheta} + a; \\ \bar{\vartheta} + a &\leq \vartheta \leq \pi \end{aligned}$$

in cui  $\beta$  può assumere i valori  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{1}{6}$ .

Osserviamo che se è  $x \leq 4n \left(1 - \frac{1}{(2n)^{4\beta}}\right)$  si ha  $\bar{\vartheta} + a < \pi$ , cioè i tre intervalli esistono effettivamente.

A questo punto introduciamo la limitazione  $x \leq 4n \left(1 - \frac{1}{n^{2/3}}\right)$  e maggioriamo gli integrali relativi al primo e terzo intervallo.

Ad esempio per il terzo si ha, supponendo  $a \geq -1$  e per il secondo teorema della media:

$$\begin{aligned} (d) \quad \int_{\bar{\vartheta}+a}^{\pi} \frac{\cos u(\vartheta)}{2^{\alpha+1} \operatorname{sen}^{\alpha+1} \frac{\vartheta}{2}} d\vartheta &= \frac{1}{2^{\alpha+1} \operatorname{sen}^{\alpha+1} \frac{\bar{\vartheta}+a}{2}} \int_{\bar{\vartheta}+a}^{\pi-\zeta} \cos u(\vartheta) d\vartheta \leq \\ &\leq \frac{1}{2^{\alpha+1} \operatorname{sen}^{\alpha+1} \frac{\bar{\vartheta}}{2}} \int_{\frac{\bar{\vartheta}}{2} u(\bar{\vartheta}+a)}^{u(\pi-\zeta)} \frac{\cos u du}{x - \frac{x}{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta(u)}{2}}}. \end{aligned}$$

Nell'intervallo in cui si integra è  $u'(\vartheta) > 0$ , quindi la funzione al denominatore,  $> 0$ , è crescente al crescere di  $u$ .

Applicando nuovamente il secondo teorema della media risulta:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\bar{\vartheta}+a}{2}}^{\pi} &= O \left( \left( \frac{n}{x} \right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \frac{1}{n + \frac{\alpha+1}{2} - \frac{x}{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\bar{\vartheta}+a}{2}}} \right) = O \left( \frac{\frac{\alpha-1}{n^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{x^{\frac{\alpha+1}{2}} \left( \cos \frac{\alpha}{2} + \cotg \frac{\bar{\vartheta}}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \right)^2} \right) = \\ &= O \left\{ \frac{\frac{\alpha-1}{n^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{x^{\frac{\alpha+1}{2}} \operatorname{sen} \alpha \cdot \cotg \frac{\bar{\vartheta}}{2}} \frac{1 + \operatorname{sen} \alpha \cdot \cotg \frac{\bar{\vartheta}}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \left( \cotg^2 \frac{\bar{\vartheta}}{2} - 1 \right)}{1 + \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\bar{\vartheta}}{2} \left( \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{\bar{\vartheta}}{2}} - \operatorname{sen} \frac{\bar{\vartheta}}{2} \right)}} \right\} = \\ &= O \left\{ \frac{\frac{\alpha}{n^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}} \frac{1}{x^{\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}} (nx)^{1/4 - \beta} \sqrt{1 - \frac{x}{4n}}} \right\}. \end{aligned}$$

L'ultimo passaggio è ottenuto notando che il termine:

$$\frac{1 + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{cotg} \frac{\bar{\vartheta}}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} \left( \operatorname{cotg}^2 \frac{\bar{\vartheta}}{2} - 1 \right)}{1 + \frac{\operatorname{tg} \frac{a}{2}}{\cos \frac{\bar{\vartheta}}{2}} \left( \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{\bar{\vartheta}}{2}} - \operatorname{sen} \frac{\bar{\vartheta}}{2} \right)}$$

risulta limitato per  $x \leq 4n \left( 1 - \frac{1}{n^{2/3}} \right)$ , come si vede sostituendo le funzioni trigonometriche di  $a$  coi rispettivi archi (è  $a \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ ), e quelle di  $\bar{\vartheta}$  con i valori esatti, ottenuti dalla (c), e ricordando che per  $\beta$  si considerano i valori  $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}$ .

Nel caso in cui sia  $a < -1$  tale limitazione sussiste solo se il limite inferiore dei valori considerati di  $x$  è dell'ordine di grandezza di  $n$ , poichè lo stesso ragionamento conduce per l'integrale considerato alla limitazione:

$$O \left( \frac{1}{(nx)^{1/2-\beta}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{4n}}} \right).$$

Così per la parte reale della funzione integranda che compare in  $I_1$  si ha:

$$(e) \quad R(I_1) = \frac{e^{\frac{i}{2} \frac{\alpha+1}{2} \pi}}{2\pi} \int_{\bar{\vartheta}-a}^{\bar{\vartheta}+a} \frac{\cos u(\vartheta) d\vartheta}{2^{a+1} \operatorname{sen}^{a+1} \frac{\vartheta}{2}} + O \left( \frac{n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}}{x^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}} \frac{1}{(nx)^{1/4-\beta}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{4n}}} \right)$$

valevole per  $\frac{1}{O(n)} \leq x \leq 4n \left( 1 - \frac{1}{n^{2/3}} \right)$  se è  $a \geq -1$ ; per  $\sigma n \leq x \leq 4n \left( 1 - \frac{1}{n^{2/3}} \right)$ , con  $\sigma > 0$ , se è  $a < -1$ .

Se supponiamo  $x \leq kn$ , con  $k < 4$ , e se prendiamo come valore di  $a$  il seguente:

$$a = \sqrt{\frac{x}{n}} \frac{1}{(nx)^{1/4}} \quad \left( \beta = \frac{1}{4} \right),$$

possiamo maggiorare l'integrale del secondo membro sostituendolo con la lunghezza dell'intervallo, moltiplicata per il valore massimo della funzione integranda.

Procedendo in modo analogo per gli altri integrali (parte immaginaria di  $I_1$  e  $I_2$ ), e ricordando la limitazione (b), viene dimostrata la (15): se è  $a \geq -1$ , per  $\frac{1}{O(n)} \leq x \leq kn$  ( $k < 4$ ) (il limite inferiore è dovuto alla limitazione (b)); se è  $a < -1$ , per  $\sigma n \leq x \leq kn$ : ma per  $0 < a \leq x \leq \sigma n$ , dato che si può prendere  $\sigma < 1$ , vale la dimostrazione del KOGBETLIANTZ, e quindi il campo di validità è  $(a, kn)$ .

## 5. - Formula assintotica per i polinomi di Laguerre.

Riprendiamo a tal uopo, ferme restando tutte le considerazioni precedenti, lo studio dell'integrale (e), di cui cerchiamo una espressione asintotica per  $n \rightarrow \infty$ .

Spezzato l'intervallo di integrazione in due parti mediante il punto  $\bar{\vartheta}$ , consideriamo per esempio l'intervallo  $(\bar{\vartheta}, \bar{\vartheta} + a)$ , e su esso la seguente differenza:

$$d = \int_{\bar{\vartheta}}^{\bar{\vartheta}+a} \cos u(\vartheta) \cdot \left\{ \frac{1}{2^{a+1} \operatorname{sen}^{a+1} \frac{\vartheta}{2}} - \frac{1}{2^{a+1} \operatorname{sen}^{a+1} \frac{\bar{\vartheta}}{2}} \right\} \cdot d\vartheta.$$

La funzione in parentesi, = 0 per  $\vartheta = \bar{\vartheta}$ , è crescente positiva o decrescente negativa secondochè è  $a < -1$  e  $a > -1$ . Applicando allora il secondo teorema della media si ha, supposto, per esempio,  $a \geq -1$ :

$$d = \left\{ \frac{1}{2^{a+1} \operatorname{sen}^{a+1} \frac{\bar{\vartheta}+a}{2}} - \frac{1}{2^{a+1} \operatorname{sen}^{a+1} \frac{\bar{\vartheta}}{2}} \right\} \int_{\frac{\bar{\vartheta}}{2+\xi}}^{\frac{\bar{\vartheta}+a}{2}} \cos u(\vartheta) d\vartheta \quad \text{con } 0 \leq \xi < a.$$

La quantità in parentesi è maggiorata da:

$$O\left(\frac{a}{\operatorname{sen}^{a+2} \frac{\bar{\vartheta}+\varepsilon a}{2}}\right) = O\left(\frac{n^{\frac{a+1}{2}}}{x^{\frac{a+1}{2}}} \frac{1}{(nx)^\beta}\right) \quad (0 < \varepsilon < 1);$$

l'integrale è maggiorato da:

$$O\left(\frac{x^{1/4}}{n^{3/4}} \frac{1}{\sqrt[4]{1-\frac{x}{4n}}}\right)$$

(vedi nota (8)), quindi si ottiene:

$$d = O\left(\frac{n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}}{x^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}} \frac{1}{(nx)^\beta} \frac{1}{\sqrt[4]{1-\frac{x}{4n}}}\right)$$

e preso  $\beta = \frac{1}{6}$ :

$$(f) \quad R(I_1) = \frac{e^{\frac{\alpha+1}{2}\pi}}{2\pi} \left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \int_{\frac{\bar{\vartheta}-a}{2}}^{\frac{\bar{\vartheta}+a}{2}} \cos u(\vartheta) d\vartheta + O\left(\frac{n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}}{x^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}} \frac{1}{(nx)^{1/12}} \frac{1}{\sqrt[4]{1-\frac{x}{4n}}}\right)$$

Ora si può porre  $u(\vartheta) = u(\bar{\vartheta}) + u(\bar{\vartheta} + t) - u(\bar{\vartheta})$ , con  $-a \leq t \leq a$ ;

$$u(\vartheta) = u(\bar{\vartheta}) + n_1 \left\{ \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\bar{\vartheta}}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\bar{\vartheta} + t}{2}} \operatorname{sen}(\bar{\vartheta} + t) + t - \operatorname{sen} \bar{\vartheta} \right\} =$$

$$= u(\bar{\vartheta}) + n_1 \left\{ 2 \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\bar{\vartheta}}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\bar{\vartheta} + t}{2}} + t - \operatorname{sen} \bar{\vartheta} \right\}.$$

Sviluppando in serie di TAYLOR arrestata alla quarta potenza  $\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\bar{\vartheta} + t}{2}}$  si ha:

$$\frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{\bar{\vartheta}}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\bar{\vartheta} + t}{2}} = \operatorname{sen} \bar{\vartheta} - t + \frac{t^2}{2} \frac{\cos \frac{\bar{\vartheta}}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\bar{\vartheta}}{2}} - \frac{t^3}{12} \left( 1 + 3 \frac{\cos^2 \frac{\bar{\vartheta}}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\bar{\vartheta}}{2}} \right) + O \left( \frac{t^4}{\operatorname{sen}^3 \frac{\bar{\vartheta}}{2}} \right)$$

e quindi:

$$(g) \quad u(\vartheta) = u(\bar{\vartheta}) + n_1 \left\{ \frac{t^2}{2} \frac{\cos \frac{\bar{\vartheta}}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\bar{\vartheta}}{2}} - \frac{t^3}{12} \left( 1 + 3 \frac{\cos^2 \frac{\bar{\vartheta}}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\bar{\vartheta}}{2}} \right) + O \left( \frac{t^4}{\operatorname{sen}^3 \frac{\bar{\vartheta}}{2}} \right) \right\}.$$

Se nell'integrale (f) si sostituisce a  $u(\vartheta)$  l'espressione:

$$u_1(\vartheta) = u(\bar{\vartheta}) + \frac{nt^2}{2} \frac{\cos \frac{\bar{\vartheta}}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\bar{\vartheta}}{2}} - \frac{nt^3}{12} \left( 1 + 3 \frac{\cos^2 \frac{\bar{\vartheta}}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\bar{\vartheta}}{2}} \right)$$

l'errore che si commette è:

$$\int_{\bar{\vartheta}-a}^{\bar{\vartheta}+a} \cos u(\vartheta) d\vartheta - \int_{\bar{\vartheta}-a}^{\bar{\vartheta}+a} \cos u_1(\vartheta) d\vartheta =$$

$$= 2 \int_{-a}^a \operatorname{sen} \left( \frac{u(\bar{\vartheta} + t) + u_1(\bar{\vartheta} + t)}{2} \right) \operatorname{sen} O \left( \frac{nt^4}{\operatorname{sen}^3 \frac{\bar{\vartheta}}{2}} \right) dt = O \left( \frac{na^5}{\operatorname{sen}^3 \frac{\bar{\vartheta}}{2}} \right) = O \left( \frac{x}{(nx)^{5/6}} \right)$$

quindi:

$$R(I_1) = e^{\frac{i\alpha+1}{2}\pi} \left( \frac{n}{x} \right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \int_{-a}^a \cos u_1(\bar{\vartheta} + t) dt + O \left( \frac{n^{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}}}{x^{\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}}} \frac{1}{(nx)^{1/12}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x}{4n}}} \right).$$



Possiamo ancora sostituire ad  $u_1(\vartheta)$  l'espressione:

$$\bar{u}(\vartheta) = u(\bar{\vartheta}) + \frac{nt^2}{2} \frac{\cos \frac{\bar{\vartheta}}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\bar{\vartheta}}{2}};$$

infatti la differenza dei due integrali corrispondenti è:

$$\begin{aligned} d_1 &= 2 \int_{-a}^a \operatorname{sen} \frac{u_1 + \bar{u}}{2} \operatorname{sen} \frac{nt^3}{24} \left( 1 + 3 \frac{\cos^2 \frac{\bar{\vartheta}}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\bar{\vartheta}}{2}} \right) dt = \\ &= 2 \int_0^a -2 \int_0^a \operatorname{sen} \left[ u(\bar{\vartheta}) + \frac{nt^2}{2} \frac{\cos \frac{\bar{\vartheta}}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\bar{\vartheta}}{2}} + \frac{nt^3}{24} \left( 1 + 3 \frac{\cos^2 \frac{\bar{\vartheta}}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\bar{\vartheta}}{2}} \right) \right] \cdot \\ &\quad \cdot \operatorname{sen} \frac{nt^3}{24} \left( 1 + 3 \frac{\cos^2 \frac{\bar{\vartheta}}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\bar{\vartheta}}{2}} \right) dt = \\ &= 4 \int_0^a \cos \left[ u(\bar{\vartheta}) + \frac{nt^2}{2} \frac{\cos \frac{\bar{\vartheta}}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\bar{\vartheta}}{2}} \right] \operatorname{sen}^2 \left[ \frac{nt^3}{24} \left( 1 + 3 \frac{\cos^2 \frac{\bar{\vartheta}}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\bar{\vartheta}}{2}} \right) \right] dt. \end{aligned}$$

Con la sostituzione:

$$\frac{nt^2}{2} \frac{\cos \frac{\bar{\vartheta}}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\bar{\vartheta}}{2}} = t_1$$

otteniamo:

$$d_1 = 4 \sqrt{\frac{\operatorname{sen} \frac{\bar{\vartheta}}{2}}{2n \cos \frac{\bar{\vartheta}}{2}}} \int_0^{\frac{na^2 \cos \frac{\bar{\vartheta}}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\bar{\vartheta}}{2}}} \cos [u(\bar{\vartheta}) + t] \left\{ \frac{1}{\sqrt{t}} \operatorname{sen}^2 \left[ \frac{t^{3/2}}{24 \sqrt{n}} \left( 2 \frac{\operatorname{sen} \frac{\bar{\vartheta}}{2}}{\cos \frac{\bar{\vartheta}}{2}} \right) \left( 1 + 3 \frac{\cos^2 \frac{\bar{\vartheta}}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\bar{\vartheta}}{2}} \right) \right] \right\} dt.$$

La funzione in parentesi è crescente nell'intervallo di integrazione, essendo ivi la derivata positiva; quindi applicando il secondo teorema della media si ottiene:

$$d_1 = O \left( 4 \sqrt{\frac{\operatorname{sen} \frac{\bar{\vartheta}}{2}}{2n \cos \frac{\bar{\vartheta}}{2}}} \sqrt{\frac{1}{\frac{na^2 \cos \frac{\bar{\vartheta}}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\bar{\vartheta}}{2}}}} \right) = O \left\{ \frac{x^{1/4}}{n^{3/4}} \frac{1}{(nx)^{1/12}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x}{4n}}} \right\}.$$

Si ottiene allora con la detta sostituzione di  $u(\vartheta)$ :

$$R(I_1) = \frac{e^{i\frac{\alpha+1}{2}\pi}}{2\pi} \left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \int_{-a}^a \cos \left\{ u(\bar{\vartheta}) + \frac{nt^2}{2} \frac{\cos \frac{\bar{\vartheta}}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\bar{\vartheta}}{2}} \right\} dt + O \left\{ \frac{n^{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}}}{x^{\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}}} \frac{1}{(nx)^{1/42}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x}{4n}}} \right\}.$$

La funzione sotto il segno è pari; fatto allora il cambiamento di variabili:

$$\frac{nt^2}{2} \frac{\cos \frac{\bar{\vartheta}}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\bar{\vartheta}}{2}} = t_1; \quad dt = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \frac{\bar{\vartheta}}{2}}{2n}} \frac{dt_1}{\sqrt{t_1}} \cong \frac{1}{2} \frac{x^{1/4}}{n^{3/4}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x}{4n}}} \frac{dt_1}{\sqrt{t_1}}$$

e visto che è:

$$\frac{na^2}{2} \frac{\cos \frac{\bar{\vartheta}}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\bar{\vartheta}}{2}} \rightarrow \infty \quad \text{per } n \rightarrow \infty,$$

si ha:

$$R(I_1) = \frac{e^{i\frac{\alpha+1}{2}\pi}}{2\pi} \frac{n^{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}}}{x^{\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x}{4n}}} \left\{ \int_0^\infty \frac{\cos [u(\bar{\vartheta}) + t_1]}{\sqrt{t_1}} dt_1 + O \left( \frac{1}{(nx)^{1/42} \sqrt{1 - \frac{x}{4n}}} \right) \right\} \quad (8).$$

Facendo in modo analogo per la parte immaginaria di  $I_1$ , e per  $I_2$  (per il quale notiamo: la radice di  $u'(\vartheta) = 0$  che si trova in  $(\pi, 2\pi)$  è  $2\pi - \bar{\vartheta}$ ; inoltre tale punto è ora un punto di massimo per  $u(\vartheta)$ ), e ricordando la limitazione (b), si ottiene, per valori di  $x$  compresi tra  $\frac{1}{O(n)}$ ,  $4n \left(1 - \frac{1}{n^{2/3}}\right)$ , se è  $\alpha \geq -1$ ; o tra  $on$ ,  $4n \left(1 - \frac{1}{n^{2/3}}\right)$  se è  $\alpha < -1$ :

(8) Risulta da questa dimostrazione, che dà il valore di

$$\int_{\bar{\vartheta}-a}^{\bar{\vartheta}+a} \cos u(\vartheta) d\vartheta,$$

che è pure:

$$\int_{\bar{\vartheta}+\xi}^{\bar{\vartheta}+a} \cos u(\vartheta) d\vartheta = O \left( \frac{x^{1/4}}{n^{3/4}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x}{4n}}} \right), \quad \text{con } 0 \leq \xi < a.$$

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}} n^{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi x^2 + \frac{1}{4}}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x}{4n}}} \cdot \left. \begin{aligned} & e^{\frac{i\frac{\alpha+1}{2}\pi}{2\sqrt{\pi}}} \left\{ \int_0^\infty \frac{\cos [u(\bar{\vartheta}) + t]}{\sqrt{t}} dt - i \int_0^\infty \frac{\text{sen} [u(\bar{\vartheta}) + t]}{\sqrt{t}} dt + \right. \\ & \left. + \int_0^\infty \frac{\cos [u(2\pi - \bar{\vartheta}) - t]}{\sqrt{t}} dt - i \int_0^\infty \frac{\text{sen} [u(2\pi - \bar{\vartheta}) - t]}{\sqrt{t}} dt + O\left(\frac{1}{(nx)^{1/12} \sqrt{1 - \frac{x}{4n}}}\right) \right\} \end{aligned} \right\}.$$

Ora si ha:

$$\begin{aligned} u(\bar{\vartheta}) &= \frac{x}{4} \frac{\text{sen } \bar{\vartheta}}{\text{sen}^2 \frac{\bar{\vartheta}}{2}} + n_1 \bar{\vartheta} = n_1 (\text{sen } \bar{\vartheta} + \bar{\vartheta}) = \\ &= \sqrt{n_1 x} \sqrt{1 - \frac{x}{4n_1}} + 2n_1 \text{arc sen } \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{n_1}} = \psi(x, n, \alpha) \\ u(2\pi - \bar{\vartheta}) &= 2\pi n + \pi(\alpha + 1) - u(\bar{\vartheta}). \end{aligned}$$

Se calcoliamo allora gli integrali della parentesi, si ha che questa è data da:

$$\begin{aligned} & \frac{e^{\frac{i\frac{\alpha+1}{2}\pi}{2\sqrt{\pi}}}}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \cos u(\bar{\vartheta}) - \text{sen } u(\bar{\vartheta}) - i[\text{sen } u(\bar{\vartheta}) + \cos u(\bar{\vartheta})] + \right. \\ & \quad \left. + \cos u(2\pi - \bar{\vartheta}) + \text{sen } u(2\pi - \bar{\vartheta}) - i[\text{sen } u(2\pi - \bar{\vartheta}) - \cos u(2\pi - \bar{\vartheta})] \right\} = \\ &= \frac{e^{\frac{i\frac{\alpha+1}{2}\pi}{2}}}{2} \left\{ -\text{sen} \left( u(\bar{\vartheta}) - \frac{\pi}{4} \right) - i \cos \left( u(\bar{\vartheta}) - \frac{\pi}{4} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \cos \left( u(2\pi - \bar{\vartheta}) - \frac{\pi}{4} \right) - i \text{sen} \left( u(2\pi - \bar{\vartheta}) - \frac{\pi}{4} \right) \right\} = \\ &= \frac{e^{\frac{i \left[ u(\bar{\vartheta}) + \frac{\pi}{4} - \pi \frac{\alpha+1}{2} \right]} + e^{-i \left[ u(\bar{\vartheta}) + \frac{\pi}{4} - \pi \frac{\alpha+1}{2} \right]}}{2} = \cos \left( u(\bar{\vartheta}) - \frac{\alpha}{2} \pi - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Si ottiene in tal modo la seguente formula assintotica dei polinomi di Laguerre:

$$(17) \quad L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{\pi x}} \left( \frac{n}{x} \right)^{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x}{4n}}} \left\{ \cos \left[ \psi(x, n, \alpha) - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right] + O \left[ \frac{1}{(nx)^{1/12} \sqrt{1 - \frac{x}{4n}}} \right] \right\}$$

valevole, se è  $a \geq -1$ , per i valori di  $x$  che soddisfano la limitazione:

$$(17') \quad \frac{1}{o(n)} \leq x \leq 4n \left(1 - \frac{1}{o(n^{1/3})}\right)$$

dato che per tali valori di  $x$  il termine complementare  $O \left[ \frac{1}{(nx)^{1/12}} \frac{1}{\sqrt[4]{1 - \frac{x}{4n}}} \right]$  tende a zero per  $n \rightarrow \infty$ .

Nella (17) risulta inoltre:

$$(17'') \quad \psi(x, n, a) = \sqrt{n_1} x \sqrt{1 - \frac{x}{4n_1}} + 2n_1 \arcsin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{n_1}}.$$

Per  $x = o(n)$  la (17'') si può mettere nella seguente forma:

$$\psi(x, n, a) = 2\sqrt{nx} - \frac{1}{12} \frac{x^{3/2}}{\sqrt{n_1}} + O \left\{ \frac{x^{5/2}}{n^{3/2}} + \sqrt{\frac{x}{n}} \right\}$$

la quale mostra che la formula assintotica (9) non può valere se  $x$  è dell'ordine di grandezza o maggiore di  $n^{1/3}$ .

Se è  $a < -1$ , la validità della (17) è limitata inferiormente a  $\sigma n$ , con  $\sigma > 0$  piccolo da arbitrio, ma fisso al variare di  $n$ .

#### 6. - Limitazioni per i polinomi di Laguerre in $(0, \infty)$ .

La formula assintotica trovata ci mostra che i limiti di validità della disuguaglianza di KOGBETLIANTZ (15) sono: per  $a \geq -1$ :  $\frac{1}{O(n)} \leq x \leq kn$ , con  $k < 4$ , e per  $a < -1$   $0 < a \leq x \leq kn$ , e che entro tale limiti non può esistere, per i polinomi di LAGUERRE, una maggiorazione più forte.

Anzi per  $x \rightarrow 4n$  la disuguaglianza stessa non è più verificata, a causa del termine  $\sqrt[4]{1 - \frac{x}{4n}}$  al denominatore del secondo membro della (17), il quale tende a zero per  $x \rightarrow 4n$ , anche se è soddisfatta la (17').

Occorre quindi sostituire la (15) con la limitazione:

$$(18) \quad L_n^{(a)}(x) = O \left\{ \frac{x}{e^2} \left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{a}{2} - \frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt[4]{1 - \frac{x}{4n}}} \right\}$$

che ha per campo di validità:

$$\begin{aligned} \frac{1}{O(n)} \leq x \leq 4n \left(1 - \frac{1}{O(n^{2/3})}\right) & \text{ per } a \geq -1; \\ a \leq x \leq 4n \left[1 - \frac{1}{O(n^{2/3})}\right] & \text{ per } a < -1. \end{aligned}$$

Passiamo ora all'intervallo  $4n \left[ 1 - \frac{1}{O(n^{2/3})} \right] \leq x$ .

Per trovare una maggiorazione di  $L_n^{(a)}(x)$  in

$$\left\{ 4n \left[ 1 - \frac{1}{O(n^{2/3})} \right], k_1 n \right\} \quad \text{con } 4 < k_1 < 6,$$

basta ricordare la limitazione (b) e maggiorare l'integrale (b') (e gli analoghi). Se è  $x \leq 4n_1$ , esiste il punto  $\bar{\vartheta}$  e si può scrivere:

$$R(I_1) = O \left\{ \left| \int_{r_1}^{\bar{\vartheta}} \frac{\cos u(\vartheta) d\vartheta}{2^{\alpha+1} \operatorname{sen}^{\alpha+1} \frac{\vartheta}{2}} \right| + \left| \int_{\bar{\vartheta}}^{\pi} \dots d\vartheta \right| \right\}.$$

Considerato, per esempio, il primo integrale, esso diventa per il secondo teorema della media (supposto, per esempio,  $\alpha \leq -1$ ):

$$\frac{1}{2^{\alpha+1} \operatorname{sen}^{\alpha+1} \frac{\bar{\vartheta}}{2}} \int_{r_1+\xi}^{\bar{\vartheta}} \cos u(\vartheta) d\vartheta = \left( \frac{n_1}{x} \right)^{\alpha+1} \cdot \int_{\frac{u(\bar{\vartheta})}{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta(u)}{2}} - n_1}^{\frac{u(r_1+\xi)}{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta(u)}{2}}} \frac{\cos u du}{x} \quad \text{con } 0 \leq \xi < \bar{\vartheta} - r_1.$$

Determinato  $h$  intero tale che sia:  $\left( h - \frac{1}{2} \right) \pi = u(\bar{\vartheta}) + \eta$ , con  $0 \leq \eta < \pi$ , e spezzato l'intervallo di integrazione con i punti  $\left( h - \frac{1}{2} + i \right) \pi$  ( $i=0, 1, 2, \dots$ ), l'integrale risulta uguale alla somma di una serie i cui termini sono a segno alternato e di valore assoluto decrescente (escluso al più il primo), poichè la funzione  $\frac{1}{x} > 0$  è decrescente al crescere di  $u$ ; allora;

$$\frac{1}{x} > 0 \quad \frac{1}{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta(u)}{2}} - n_1$$

$$\left| \int_{\frac{u(\bar{\vartheta})}{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta(u)}{2}}^{\frac{u(r_1+\xi)}{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta(u)}{2}}} \dots du \right| \leq \left| \int_{\frac{u(\bar{\vartheta})}{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta(u)}{2}}^{\left( h - \frac{1}{2} \right) \pi} \right| + \left| \int_{\left( h - \frac{1}{2} \right) \pi}^{\left( h + \frac{1}{2} \right) \pi} \right| = \int_{\frac{u(\bar{\vartheta})}{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta(u)}{2}}^{\bar{\vartheta}} |\cos u(\vartheta)| d\vartheta < t_0$$

in cui  $t_0$  è la radice di:  $u(\bar{\vartheta} - t) - u(\bar{\vartheta}) = \eta + \pi$ .

Sviluppando  $u(\bar{\vartheta} - t)$  in serie di TAYLOR rispetto a  $t$ , arrestata alla quarta potenza, e ricordando la (c), si ha:

$$u(\bar{\vartheta} - t) - u(\bar{\vartheta}) = n_1 \left\{ \frac{t^2}{2} \cotg \frac{\bar{\vartheta}}{2} + \frac{t^3}{12} \left( 1 + 3 \cotg^2 \frac{\bar{\vartheta}}{2} \right) + O \left[ t^4 \left( 3 \cotg^3 \frac{\bar{\vartheta}}{2} + 2 \cotg \frac{\bar{\vartheta}}{2} \right) \right] \right\}$$

Tale termine è una funzione crescente di  $t$ ; quindi se troviamo un valore  $t$ , tale che sia  $u(\bar{\vartheta} - t_1) - u(\bar{\vartheta}) > \pi + \eta$ , è  $t_0 < t_1$ .

Basta prendere, per esempio,  $t_1 = \frac{3}{n^{1/3}}$ ; quindi  $t_0 = O \left( \frac{1}{n^{1/3}} \right)$ .

Anche l'integrale esteso all'intervallo  $(\bar{\vartheta}, \pi)$  risulta dell'ordine di grandezza di  $\frac{1}{n^{1/3}}$ , perchè la funzione integranda è limitata, ed è  $\pi - \bar{\vartheta} = O\left(\frac{1}{n^{1/3}}\right)$  per i valori di  $x$  considerati; ragionando in modo eguale per gli altri integrali, si ottiene:

$$L_n^{(a)}(x) = O\left(\frac{x}{n^{1/3}}\right).$$

Se è  $4n_1 < x \leq k_1 n$ ,  $\bar{\vartheta}$  non esiste; e determinato  $h$  intero tale che sia:

$$\left(h - \frac{1}{2}\right)\pi = u(\pi) + \eta_1 \quad \text{con} \quad 0 \leq \eta_1 < \pi,$$

la radice  $t_0$  è minore di un valore  $t$  che soddisfi la disuguaglianza:

$$\eta_1 + \pi < u(\pi - t) - u(\pi) = \frac{x}{4} \cdot 2 \operatorname{tg} \frac{t}{2} - n_1 t = \left(\frac{x}{4} - n_1\right)t + \frac{x}{4} \frac{t^3}{12} + \frac{x}{4} \cdot O(t^5),$$

in cui l'ultimo membro è ottenuto sviluppando  $\operatorname{tg} \frac{t}{2}$  in serie di TAYLOR arrestata al terzo termine.

I due valori di  $t$ :

$$t = \frac{3}{n^{1/3}}; \quad t = \frac{2\pi}{\frac{x}{4} - n_1}$$

soddisfano tale disuguaglianza. Allora dai risultati ottenuti si deduce che: *nell'intervallo*:

$$4n \left(1 - \frac{1}{O(n^{2/3})}\right) \leq x \leq 4n \left(1 + \frac{1}{O(n^{2/3})}\right)$$

si può usare la limitazione:

$$(19) \quad L_n^{(a)}(x) = O\left(\frac{x}{n^{1/3}}\right)$$

e nell'intervallo

$$4n \left(1 + \frac{1}{O(n^{2/3})}\right) \leq x \leq k_1 n \quad \text{con} \quad 4 < k_1 < 6,$$

la limitazione:

$$(20) \quad L_n^{(a)}(x) = O\left(\frac{\frac{x}{e^2}}{\frac{x}{4} - n}\right).$$

Passiamo infine all'intervallo  $x \geq k_1 n$ , con  $k_1 > 4$ . Prendiamo ora come curva  $c$  sulla quale calcolare l'integrale ( $a'$ ) la circonferenza di centro l'origine e raggio  $r < 1$ .

Si ha su essa:

$$z = r e^{i\vartheta} \quad (0 \leq \vartheta \leq 2\pi); \quad R \left( \frac{1+z}{1-z} \right) = \frac{1-r^2}{1-2r \cos \vartheta + r^2} \geq \frac{1-r}{1+r}; \quad \left| \frac{dz}{z^{n+1}} \right| = \frac{d\vartheta}{r^n}.$$

Inoltre se è  $r < 1$  e fisso, è  $\frac{1}{|1-z|^{a+1}}$  limitato; quindi maggiorando ( $a'$ ) si ottiene:

$$L_n^{(a)}(x) = O \left( e^{\frac{x}{2}} e^{-\frac{x}{2} \frac{1-r}{1+r}} \frac{1}{r^n} \right).$$

Consideriamo la funzione:  $\varphi(r) = e^{\frac{1-r}{2} \frac{2n}{r^2}}$ ; si ha:

$$\varphi(1) = 1; \quad \varphi'(r) = \left( -\frac{2}{(1+r)^2} + \frac{2n}{x} \frac{1}{r} \right) \varphi(r); \quad \varphi'(1) = -\frac{1}{2} + \frac{2n}{x} < 0$$

per  $x \geq k_1 n$ , con  $k_1 > 4$ ; posso quindi determinare un  $\bar{r} < 1$  tale che in  $(\bar{r}, 1)$  sia  $\varphi'(r) < 0$ ; allora si ha:  $\varphi(\bar{r}) > 1$  e si ottiene la limitazione:

$$(21) \quad L_n^{(a)}(x) = O \left( e^{\frac{x}{2} (1-\epsilon)} \right)$$

valevole per  $x \geq k_1 n$ , con  $k_1 > 4$ , in cui è  $\epsilon$  tanto più piccolo quanto più  $k_1$  è vicino a 4, ma  $\neq 0$  e fisso.

Riunendo le disuguaglianze trovate in una sola, possiamo dire che nell'intervallo  $\frac{1}{O(n)} \leq x < \infty$  vale per  $a \geq -1$  la limitazione:

$$(21') \quad L_n^{(a)}(x) = O \left\{ \frac{e^{\frac{x}{2}}}{x^{\frac{1}{4} + x^{\frac{1}{3}}}} \left( \frac{n}{x} \right)^{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} \right\}.$$

Infine nell'intorno del punto 0 si può usare la seguente limitazione, valevole per  $0 \leq x \leq A$  e per  $a \geq -\frac{1}{2}$ :

$$(21'') \quad |L_n^{(a)}| \leq T n^a \quad (9),$$

in cui  $T$  è una conveniente costante, ed  $A$  è finito arbitrario. Questa limitazione è più forte della (18) quando sia  $0 \leq x \leq 0 \left( \frac{1}{n} \right)$ , quindi si può considerare lo 0 come il limite inferiore di validità della (18), per  $a \geq -\frac{1}{2}$ .

(9) Vedi SANSONE, loc. cit. (4).

7. - Limitazioni per i polinomi di Hermite in  $(-\infty, \infty)$ .

Le (8) permettono di dedurre dalle formule trovate quelle corrispondenti per i polinomi di HERMITE. Dalla (17) si ricava la formula assintotica:

$$(22) \quad H_n(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \sqrt{2^n n!} \sqrt{\frac{2}{n\pi}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{2n}}} \left\{ \cos \left[ \varphi(x, n) + \frac{n\pi}{2} \right] + O \left[ \frac{1}{(nx^2)^{1/12}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{2n}}} \right] \right\}$$

con:

$$\varphi(x, n) = x \sqrt{\frac{n}{2} + \frac{1}{4}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{2n+1}} + \left( n + \frac{1}{2} \right) \arcsin \frac{x}{\sqrt{2n+1}}$$

valevole per:

$$\frac{1}{o(\sqrt{n})} \leq |x| \leq \sqrt{2n} \sqrt{1 - \frac{1}{o(n^{2/3})}}$$

Per  $x$  limitato è da preferirsi la (3), valevole anche per  $0 \leq |x|$ .

Le (18), (19), (20), (21) danno rispettivamente:

$$(23) \quad H_n(x) = O \left( \frac{e^{\frac{x^2}{2}} \sqrt{2^n n!}}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{2n}}} \right)$$

valevole per  $0 \leq |x| < \sqrt{2n} \sqrt{1 - \frac{1}{n^{2/3}}}$

$$(24) \quad H_n(x) = O \left( \frac{e^{\frac{x^2}{2}} \sqrt{2^n n!}}{n^{1/12}} \right),$$

da utilizzare per  $\sqrt{2n} \sqrt{1 - \frac{1}{o(n^{2/3})}} \leq |x| \leq \sqrt{2n} \sqrt{1 - \frac{2}{o(n^{2/3})}}$

$$(25) \quad H_n(x) = O \left( e^{\frac{x^2}{2}} \sqrt{2^n n!} \frac{\sqrt{n}}{x^2 - 2n} \right),$$

da utilizzare per  $\sqrt{2n} \sqrt{1 + \frac{1}{o(n^{2/3})}} \leq |x| \leq \sqrt{kn}$ , con  $k < 2$  ed infine:

$$(26) \quad H_n(x) = O \left( e^{\frac{x^2}{2} (1-\varepsilon)} \sqrt{2^n n!} \sqrt{n} \right),$$

valida per  $|x| \geq \sqrt{kn}$ , con  $k > 2$ , in cui è  $\varepsilon$  una opportuna costante  $> 0$ , tanto più piccola quanto più  $k$  è vicino a 2, ma  $\neq 0$  per  $k \neq 0$ .

Le formule trovate mostrano che la validità della (24) è estesa a tutto l'intervallo  $(-\infty, \infty)$ : essa risulta inoltre una limitazione più forte della disuguaglianza di KRAMER, valevole anch'essa in  $(-\infty, \infty)$ :

$$H_n(x) = O \left( e^{\frac{x^2}{2}} \sqrt{2^n n!} \right).$$