ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

BASILIO MANIÀ

Alcuni teoremi di unicità nel calcolo delle variazioni

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 6, nº 3-4 (1937), p. 247-276

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1937_2_6_3-4_247_0>

ALCUNI TEOREMI DI UNICITÀ NEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI [1]

di BASILIO MANIÀ (Pisa).

1. - Nella trattazione di un qualunque problema di minimo si possono distinguere quattro momenti principali. Innanzi tutto la risoluzione della questione di esistenza; in secondo luogo la determinazione delle condizioni analitiche che debbono essere soddisfatte dal « valore » della variabile che dà il minimo: condizioni analitiche che per i problemi di minimo ordinari saranno date da equazioni con variabili numeriche, e per i problemi di Calcolo delle Variazioni da equazioni differenziali; in terzo luogo la risoluzione, esatta o più in generale approssimata, delle equazioni così ottenute; e infine la verifica se le soluzioni di queste equazioni forniscono effettivamente il minimo cercato.

Per i due ultimi punti qui indicati i teoremi di unicità sono di importanza fondamentale. Infatti, quando ci si ponga nel campo dei metodi diretti e si sappia che le equazioni stabilite come condizioni necessarie per il minimo hanno una ed una sola soluzione, è senz'altro assicurata sotto condizioni molto generali la convergenza di ogni processo di approssimazione; e inoltre, quando si sa che il minimo esiste, che il « valore » della variabile che dà tale minimo deve soddisfare le equazioni suddette, e che tali equazioni hanno un'unica soluzione, anche l'ultima delle quattro questioni che sopra abbiamo distinte è risolta.

Per i problemi di MAYER e di LAGRANGE io ho dato vari teoremi di esistenza dell'estremo assoluto; teoremi che sono in particolare applicabili al problema di navigazione di ZERMELO, e a quelli della curva di massima velocità finale e della brachistocrona in un mezzo resistente [2]. In seguito altri teoremi sono stati dati

---

[1] Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

[2] *Esistenza dell'estremo assoluto in un classico problema di Mayer.* Ann. Sc. Norm., S. II, Vol. II (1933), pp. 343-354. - *Sul problema di Mayer.* Rend. Acc. Lincei, S. VI, Vol. XVIII (1933), pp. 358-365. - *Sui problemi di Lagrange e di Mayer.* Rend. Circ. Mat. Palermo, T. LVIII (1934), pp. 285-310. - *Sulla curva di massima velocità finale.* Ann. Sc. Norm., S. II, Vol. III (1934), pp. 317-336. - *Sopra una classe di problemi di Mayer considerati come limiti di ordinari problemi di minimo.* Rend. Sem. Mat. Padova, Vol. V (1934), pp. 98-121. - *Sopra alcuni problemi condizionati del calcolo delle variazioni.* Rend. Acc. Lincei, S. VI, Vol. XXI (1935), pp. 426-432. - *Sopra un problema di navigazione di Zermelo.* Rend, Acc. Lincei, S. VI, Vol. XXIII (1936), pp. 292-295. - *Sopra un problema di navigazione di Zermelo.* Math. Ann., Bd. 113 (1936), pp. 584-599.

da L. M. GRAVES (3) ed E. J. MCSHANE (4), e recentemente L. TONELLI (5) ha enunciato varie condizioni sufficienti per la semicontinuità nei problemi di MAYER e di LAGRANGE, da cui si possono ottenere facilmente i corrispondenti teoremi di esistenza dell'estremo assoluto. Queste condizioni sono notevolmente generali e anche qui avremo occasione di applicarle.

Circa le equazioni delle estremanti dei problemi di cui stiamo parlando, è da ricordare un lavoro del GRAVES (6), nel quale tali equazioni sono stabilite nella forma integrale partendo dall'ipotesi che le funzioni che rappresentano la curva minimante siano a rapporto incrementale limitato. Questo risultato è notevole perchè nel caso dei problemi in forma parametrica permette di stabilire le dette equazioni partendo dai soli dati di continuità e derivabilità che per le curve estremanti risultano dai teoremi di esistenza. Modificando opportunamente l'impostazione dei problemi di MAYER e di LAGRANGE, io ho ottenuto, a partire dai soli dati di continuità e derivabilità che risultano dai teoremi di esistenza, le equazioni delle estremanti sia per i problemi nella forma parametrica sia per i problemi nella forma ordinaria; e, inoltre, per importanti classi di problemi, nelle quali rientrano gli esempi classici sopra ricordati, ho indicato dei criteri per dedurre dalle equazioni delle estremanti in forma integrale, ulteriori proprietà di derivabilità delle estremanti stesse, ciò che permette di scrivere quelle equazioni nella forma differenziale (7). Io ho trattato i problemi con equazioni di condizione in forma esplicita, ma ciò, finchè si considerano funzioni a rapporto incrementale limitato, e quindi in particolare per i problemi nella forma parametrica, non costituisce alcuna restrizione, come risulta dai teoremi sui sistemi differenziali in forma implicita ottenuti da HILDEBRANDT e GRAVES (8) coi metodi dell'analisi generale, e che io ho dimostrato (sotto condizioni un poco meno restrittive) essere conse-

---

(3) *The existence of an extremum in problems of Mayer.* Trans. Am. Math. Soc., Vol. 39 (1936), pp. 456-471.

(4) *Semicontinuity of integrals in the calculus of variations.* Duke Math. Journ., Vol. 2 (1936), pp. 597-616.

(5) *Su la semicontinuità nei problemi di Mayer e di Lagrange.* Rend. Acc. Lincei, S. VI, Vol. XXIV (1936), pp. 399-404.

(6) *On the problem of Lagrange.* Am. Journ. of Math., Vol. 53 (1931), pp. 127-153.

(7) *Proprietà delle estremanti nei problemi di Mayer.* Ann. Sc. Norm., S. II, Vol. IV (1935), pp. 107-131. - *Proprietà delle estremanti nei problemi di Lagrange.* Ibid., Vol. V (1936), pp. 89-126. - *Le equazioni delle estremanti nei problemi di Lagrange.* Rend. Acc. Lincei, S. VI, Vol. XXIII (1936), pp. 398-405. - *Una osservazione sui sistemi differenziali lineari.* Boll. Un. Mat. It., Vol. 15 (1936); e anche i due lavori già citati: *Sulla curva di massima velocità finale* e *Sopra una classe di problemi di Mayer considerati come limiti di ordinari problemi di minimo.*

(8) HILDEBRANDT and GRAVES: *Implicit functions and their differential in general analysis.* Trans. Am. Math. Soc., Vol. 29 (1927), pp. 163-177. - GRAVES: *Implicit functions and differential equations in general analysis.* Ibid., pp. 514-552.

guenze immediate del teorema del DINI opportunamente generalizzato ([9]). Per ciò che riguarda le equazioni delle estremanti dei problemi di MAYER e di LAGRANGE, il TONELLI ([10]) ha dato una dimostrazione assai semplice che è applicabile, per i problemi in forma ordinaria, sotto ipotesi più larghe di quelle da me considerate.

Da questo insieme di lavori la teoria dei problemi di MAYER e di LAGRANGE per ciò che riguarda le prime due questioni indicate sopra appare già notevolmente progredita. Invece, che io sappia, non sono stati finora ottenuti dei teoremi di unicità («in grande»), teoremi che, come abbiamo detto, hanno importanza notevole per le altre due questioni sopra indicate.

Relativamente ai problemi liberi del Calcolo delle Variazioni un teorema di unicità per le estremali è stato dato da S. BERNSTEIN ([11]), nel 1912; il TONELLI nei suoi *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni* ([12]) ha dato vari teoremi di unicità sia per i problemi liberi di forma parametrica sia per i problemi liberi in forma ordinaria; e, per i primi, il CARATHÉODORY ([13]) ha dimostrato un teorema di unicità delle estremali sotto ipotesi più generali.

Nel presente lavoro, io estendo i teoremi di unicità dati da TONELLI e CARATHÉODORY per i problemi liberi in forma parametrica. L'estensione consiste nel fatto che invece di considerare problemi definiti positivi [$F>0$] (o definiti negativi [$F<0$]), ammetto, circa il segno di F, la sola ipotesi che è veramente essenziale nei teoremi di esistenza dell'estremo assoluto, cioè che in ogni campo limitato $\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}$ tenda a $+\infty$ al tendere all'infinito della lunghezza $\mathfrak{L}$ della curva $\mathfrak{C}$ ([14]).

Dei teoremi del TONELLI (teorema di unicità per le estremanti e teorema di unicità per le estremali) così generalizzati, dimostro poi gli analoghi per i problemi di MAYER con una sola equazione differenziale, facendo due tipi di ipotesi, che sono rispettivamente suggerite dal problema di navigazione di ZERMELO e da quello della curva di massima velocità finale, ciò che dà maggior concretezza alle ipotesi stesse. Invece l'estensione ai problemi di MAYER del teorema di CARATHÉODORY presenta qualche difficoltà, che preciso al numero 12, dove ho così

([9]) *Sopra i sistemi di equazioni differenziali in forma implicita.* Rend. Ist. Lomb., Vol. LXIX (1936).

([10]) *Sulle equazioni delle estremanti nei problemi di Mayer.* Rend. Acc. Lincei, Vol. XXIV (1936), pp. 180-187. - *Sulle equazioni delle estremanti nei problemi di Lagrange.* Ibid., pp. 239-245.

([11]) *Sur les équations du calcul des variations.* Ann. de l'Éc. Norm., T. 29 (1912), pp. 431-485, e in particolare p. 451.

([12]) *Fondamenti....*, II, pp. 266-275, 389-397.

([13]) *Sui campi di estremali uscenti da un punto e riempienti tutto lo spazio.* Boll. Un. Mat. It., Vol. II (1923), pp. 2-6, 48-52, 81-87.

([14]) Questa circostanza presenta l'utilità che nel passaggio dai teoremi di esistenza a quelli di unicità non è necessario aggiungere ulteriori restrizioni circa il segno della F.

modo di stabilire per i problemi di MAYER una forma speciale dell'analoga di una importante formula di WEIERSTRASS.

Passando poi ai problemi in forma ordinaria, dopo avere enunciato due teoremi di tipo simile a quelli per i problemi in forma parametrica, estendo ai problemi di MAYER il teorema di BERNSTEIN, che è di natura diversa da quella dei teoremi di TONELLI e CARATHÉODORY in quanto non si fonda sulla considerazione topologica dei campi di estremali, ma sullo studio della variazione seconda. Questa circostanza permette di stabilire un teorema di unicità per le estremali anche nel caso del problema di LAGRANGE.

Osservo ancora che il lemma del numero 4 permette di estendere ai campi illimitati i teoremi di esistenza stabiliti relativamente ai campi limitati, anche nel caso di integrali che non siano semidefiniti ([15]).

2. - Nei successivi tre numeri ci occuperemo dei teoremi di unicità per le estremanti e le estremali dei problemi liberi del Calcolo delle Variazioni. È opportuno perciò premettere alcune precisazioni sulle ipotesi e sulle notazioni.

Indicheremo con $F(x, y, x', y')$ una funzione che per (x, y) appartenente a un campo A e (x', y') qualunque con $x'^2+y'^2>0$ è finita e continua con le sue derivate parziali dei primi tre ordini, ed è positivamente omogenea di grado 1 rispetto a x' e y', cioè tale che per $k>0$ qualunque si ha in tutto il campo di definizione

$$F(x, y, kx', ky')=kF(x, y, x', y').$$

Porremo inoltre

$$F_1(x, y, x', y')\equiv\frac{F_{x'x'}}{y'^2}\equiv-\frac{F_{x'y'}}{x'y'}\equiv\frac{F_{y'y'}}{x'^2}$$

ed ammetteremo che sia sempre $F_1(x, y, x', y')>0$, cioè che il problema di Calcolo delle Variazioni relativo all'integrale

$$\mathfrak{I}_{\mathfrak{C}}=\int_{\mathfrak{C}} F(x, y, x', y')ds$$

sia regolare positivo.

In queste ipotesi, le estremali dell'integrale $\mathfrak{I}_{\mathfrak{C}}$ sono tutte e sole le curve

$$x=x(s), \qquad y=y(s), \qquad (0\leqslant s\leqslant \mathfrak{L})$$

appartenenti al campo A e soddisfacenti il sistema di equazioni differenziali

$$\text{(1)}\qquad \left\{\begin{aligned} x''&=y'\,\frac{F_{xy'}-F_{yx'}}{F_1}\\ y''&=x'\,\frac{F_{yx'}-F_{xy'}}{F_1}.\end{aligned}\right.$$

([15]) Cfr. L. TONELLI: *Fondamenti....*, II, p. 68 e segg.

Fissato un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ interno al campo A, le estremali uscenti da esso formano un fascio che si può rappresentare mediante le equazioni

$$x = \varphi(s, \omega), \qquad y = \psi(s, \omega), \tag{2}$$

essendo $[\varphi(s, \omega), \psi(s, \omega)]$, per ω fissato, la soluzione del sistema (1) determinata dalle condizioni iniziali

$$\varphi(0, \omega) = x_0, \qquad \psi(0, \omega) = y_0, \qquad \varphi_s(0, \omega) = \cos\omega, \qquad \psi_s(0, \omega) = \operatorname{sen}\omega. \tag{3}$$

Posto

$$\Delta(s, \omega) = \begin{vmatrix} \varphi_s & \varphi_\omega \\ \psi_s & \psi_\omega \end{vmatrix},$$

è $\Delta(0, \omega) \equiv 0$, $\Delta_s(0, \omega) \equiv 1$, e quindi per $s > 0$ sufficientemente piccolo è $\Delta(s, \omega) > 0$ e si può porre la seguente definizione.

DEFINIZIONE. - Fissata un' estremale (2) si chiama fuoco destro del suo primo punto terminale P_0 il punto dell' estremale che corrisponde al più piccolo valore positivo di s per il quale $\Delta(s, \omega) = 0$, quando in questa equazione si ponga il valore di ω a cui corrisponde l' estremale fissata.

3. - Possiamo dimostrare ora la proposizione seguente che fornisce una condizione sufficiente per l' unicità delle estremanti nei problemi liberi di Calcolo delle Variazioni.

TEOREMA I. - *Se il campo A coincide col piano (x, y); se l' integrale $\mathfrak{I}_{\mathfrak{C}}$ è regolare positivo; se in ogni parte limitata A' di A l' integrale $\mathfrak{I}_{\mathfrak{C}}$ tende a $+\infty$ al tendere all' infinito della lunghezza $\mathfrak{L}$ di $\mathfrak{C}$; se, infine, sopra nessuna estremale esiste il fuoco destro del primo punto terminale; allora, fissati nel piano (x, y) due punti P, Q qualunque, nella classe $\mathfrak{K}$ delle curve continue e rettificabili del piano (x, y) aventi in P e Q rispettivamente il primo e il secondo punto terminale, esiste al più una curva minimante l' integrale $\mathfrak{I}_{\mathfrak{C}}$* ([16]).

Cominciamo con l' osservare che se $\mathfrak{C}$ è una curva continua e rettificabile chiusa del campo A è necessariamente $\mathfrak{I}_{\mathfrak{C}} > 0$, poichè se fosse $\mathfrak{I}_{\mathfrak{C}} \leq 0$, percorrendo la $\mathfrak{C}$ un numero di volte sufficientemente grande si otterrebbe una curva di lunghezza grande ad arbitrio, tutta contenuta in una parte finita e fissa di A, e sulla quale il valore dell' integrale sarebbe sempre ≤ 0, contro l' ipotesi che in ogni parte limitata A' di A $\mathfrak{I}_{\mathfrak{C}}$ tenda a $+\infty$ quando la lunghezza $\mathfrak{L}$ di $\mathfrak{C}$ tende all' infinito. Di qua segue subito che le curve minimanti l' integrale $\mathfrak{I}_{\mathfrak{C}}$ nella classe $\mathfrak{K}$ sono prive di punti multipli.

([16]) Cfr. L. TONELLI: *Fondamenti....*, II, p. 266.

In secondo luogo osserviamo che se $\mathcal{E}$ è un'estremale uscente da un punto P ed A' è una parte limitata chiusa qualunque di A contenente P e un arco iniziale di $\mathcal{E}$, se Q' è un punto abbastanza vicino a P sopra la $\mathcal{E}$, l'arco $\mathcal{E}(P, Q')$ è minimante per $\mathfrak{J}_{\mathcal{C}}$ nella classe $\mathcal{K}'$ delle curve continue e rettificabili di A' aventi in P e Q' il primo e il secondo punto terminale. Indicato infatti con Γ un cerchio sufficientemente piccolo di centro P, e con $\overline{\mathcal{K}}'$ la parte di $\mathcal{K}'$ formata dalle curve che non sono completamente interne a Γ, per $Q' \equiv P$, in $\overline{\mathcal{K}}'$ esiste il minimo μ di $\mathfrak{J}_{\mathcal{C}}$ ed è $\mu > 0$, mentre il minimo in $\mathcal{K}'$ è uguale a zero. Perciò anche se è $Q' \not\equiv P$ con Q' sufficientemente vicino a P, il minimo di $\mathfrak{J}_{\mathcal{C}}$ in $\overline{\mathcal{K}}'$ è maggiore del minimo in $\mathcal{K}'$. Ne segue che quest'ultimo è dato da una curva tutta interna a Γ, e se supponiamo, come è lecito, che P sia interno ad A', la detta curva minimante è un'estremale e deve coincidere con $\mathcal{E}(P, Q')$ se Γ è sufficientemente piccolo, per un teorema di unicità delle estremali « in piccolo ».

Supponiamo ora che nella classe $\mathcal{K}$ esistano due curve minimanti $\mathfrak{J}_{\mathcal{C}}$. Esse sono necessariamente due estremali che possiamo indicare con

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_1: \quad x = \varphi(s, \omega_1), \qquad y = \psi(s, \omega_1), \qquad (0 \leqslant s \leqslant \mathcal{L}_1),\\
&\mathcal{E}_2: \quad x = \varphi(s, \omega_2), \qquad y = \psi(s, \omega_2), \qquad (0 \leqslant s \leqslant \mathcal{L}_2).
\end{aligned}$$

Per quanto abbiamo detto sopra $\mathcal{E}_1$ ed $\mathcal{E}_2$ sono prive di punti multipli; inoltre hanno in comune soltanto i punti terminali e si può supporre che, considerata una qualunque direzione ω con $\omega_1 < \omega < \omega_2$, in un intorno di P essa sia interna all'area A semplicemente connessa racchiusa da $\mathcal{E}_1$ ed $\mathcal{E}_2$ e l'estremale

$$\mathcal{E}: \quad x = \varphi(s, \omega), \qquad y = \psi(s, \omega)$$

non sia mai una curva minimante $\mathfrak{J}_{\mathcal{C}}$ nella classe $\mathcal{K}$ ([17]).

Osserviamo inoltre che se Q' è un punto di A' le curve minimanti $\mathfrak{J}_{\mathcal{C}}$ nella classe $\mathcal{K}'$ di tutte le curve continue e rettificabili del piano aventi in P e Q' i punti terminali sono tutte e sole le curve minimanti $\mathfrak{J}_{\mathcal{C}}$ nella sottoclasse formata dalle curve di $\mathcal{K}'$ appartenenti ad A'.

Consideriamo quindi l'estremale $\mathcal{E}$ uscente da P con direzione $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$. Se prolungandola sufficientemente essa ha un punto Q' diverso da P sul contorno di A', l'arco $\mathcal{E}(P, Q')$ non può essere minimante per $\mathfrak{J}_{\mathcal{C}}$ nella classe $\mathcal{K}'$ delle curve continue e rettificabili aventi in P e Q' il primo e il secondo punto terminale: esiste perciò un ultimo punto Q_1 sopra $\mathcal{E}$ tale che $\mathcal{E}(P, Q_1)$ risulti minimante nella classe delle curve continue e rettificabili congiungenti P e Q_1 nell'ordine. Alla stessa conclusione si giunge se per quanto si prolunghi $\mathcal{E}$ non si arriva mai sul contorno di A'. Infatti $\mathfrak{J}_{\mathcal{E}}$ quando $\mathcal{E}$ viene prolungata indefinitamente tende a $+\infty$,

([17]) Vedi L. TONELLI: *Fondamenti....*, II, p. 267.

e perciò esiste su di essa un punto Q' per il quale $\mathcal{E}(P, Q')$ non è più minimante $\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}$ in $\mathcal{K}'$.

Determinato Q_1, sia Q' successivo a Q_1 sopra $\mathcal{E}$, interno ad A'. Nella classe $\mathcal{K}'$ determiniamo le curve minimanti $\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}$. Esse sono delle estremali appartenenti ad A' e al tendere di Q' a Q_1 ammettono almeno una curva di accumulazione che è pure un'estremante nella classe delle curve continue e rettificabili aventi i suoi stessi punti terminali ed è perciò anche un'estremale che indicheremo con $\mathcal{E}'$. Se ω' è la direzione di $\mathcal{E}'$ in P si vede che è $\omega_1 < \omega' < \omega_2$ e $\omega' \neq \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ perchè $\mathcal{E}'$ non può coincidere nè con $\mathcal{E}_1$ nè con $\mathcal{E}_2$ e sopra $\mathcal{E}'$ non ci può essere il fuoco destro di P.

Si può perciò passare dalla coppia di estremanti $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ a un'altra coppia soddisfacente condizioni analoghe con direzioni comprese fra ω_1 ed ω_2 e formanti fra loro un angolo minore della metà dell'angolo formato da ω_1 ed ω_2.

Ripetendo indefinitamente queste operazioni si ottiene una successione di coppie di estremali

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}_n': \quad x = \varphi(s, \omega_n'), \qquad y = \psi(s, \omega_n''), \qquad (0 \leqslant s \leqslant \mathcal{L}_n'), \\ &\mathcal{E}_n'': \quad x = \varphi(s, \omega_n''), \qquad y = \psi(s, \omega_n''), \qquad (0 \leqslant s \leqslant \mathcal{L}_n''), \end{aligned}$$

con

$$\varphi(\mathcal{L}_n', \omega_n') = \varphi(\mathcal{L}_n'', \omega_n''), \qquad \psi(\mathcal{L}_n', \omega_n') = \psi(\mathcal{L}_n'', \omega_n''), \tag{4}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \omega_n' = \lim_{n\to\infty} \omega_n'' = \omega_0. \tag{5}$$

Possiamo inoltre supporre che sia

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_n' = \mathcal{L}', \qquad \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_n'' = \mathcal{L}'', \qquad \mathcal{L}' \geqslant \mathcal{L}''. \tag{6}$$

Considerata allora l'estremale

$$\mathcal{E}_0: \quad x = \varphi(s, \omega_0), \qquad y = \psi(s, \omega_0) \qquad (0 \leqslant s \leqslant \mathcal{L}'),$$

essa è anche un'estremante ([18]) essendo limite di curve estremanti. Se fosse $\mathcal{L}' > \mathcal{L}''$ si avrebbe

$$\varphi(\mathcal{L}', \omega_0) = \varphi(\mathcal{L}'', \omega_0), \qquad \psi(\mathcal{L}', \omega_0) = \psi(\mathcal{L}'', \omega_0)$$

e la $\mathcal{E}_0$ avrebbe un punto multiplo, ciò che non è possibile. È perciò $\mathcal{L}' = \mathcal{L}''$.

Allora dalle (4), (5), (6) si ha

$$\Delta(\mathcal{L}', \omega_0) = 0$$

([18]) Nella classe delle curve continue e rettificabili del piano (x, y) aventi i suoi stessi punti terminali.

e sopra $\mathscr{E}_0$ esiste il fuoco destro del primo punto terminale, contro una delle ipotesi dell'enunciato. Siamo così giunti a un assurdo e il teorema è dimostrato.

OSSERVAZIONE. - *La condizione che, in ogni parte limitata A' di A, $\mathfrak{J}_{\mathcal{C}}$ tenda a $+\infty$ al tendere all'infinito della lunghezza di $\mathcal{C}$, è soddisfatta se esiste un differenziale esatto $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ tale che sia sempre*

$$\overline{F}(x, y, x', y') \equiv F(x, y, x', y') + M(x, y)x' + N(x, y)y' \geqslant 0$$

e, per ogni parte limitata A' di A, i valori θ per i quali $\overline{F}(x, y, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = 0$ in qualche punto (x, y) di A' appartengono tutti a un arco di ampiezza minore di π.

Infatti, posto

$$\overline{\mathfrak{J}}_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} \overline{F}(x, y, x', y')dx,$$

la condizione suddetta è soddisfatta da $\overline{\mathfrak{J}}_{\mathcal{C}}$ [19] e perciò anche da $\mathfrak{J}_{\mathcal{C}}$.

4. - In questo numero ci proponiamo di dedurre dal teorema precedente una condizione di unicità per le estremali dei problemi liberi di Calcolo delle Variazioni, ma per renderci conto della portata di tale condizione è opportuno premettere un lemma.

LEMMA. - *Se in ogni parte limitata A' del campo A l'integrale $\mathfrak{J}_{\mathcal{C}}$ tende a $+\infty$ al tendere all'infinito della lunghezza $\mathfrak{L}$ di $\mathcal{C}$; se esistono due numeri positivi R e μ tali che per $x^2+y^2 \geqslant R^2$ e $x'^2+y'^2=1$ si abbia sempre*

$$F(x, y, x', y') \geqslant \frac{\mu}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

allora, fissato comunque un punto P del piano (x, y) e considerate le curve continue e rettificabili $\mathcal{C}$ uscenti da P, $\mathfrak{J}_{\mathcal{C}}$ tende a $+\infty$ al tendere all'infinito della massima corda di $\mathcal{C}$ uscente da P.

Determiniamo da prima $R_1 > R$ in modo che P sia interno alla circonferenza Γ_1 di equazione $x^2+y^2=R_1^2$. Per un arco $\mathcal{C}(M, N)$ di curva continua e rettificabile senza punti interni a Γ_1 e con M su Γ_1 è

$$\mathfrak{J}_{\mathcal{C}(M,N)} \geqslant \mu \int_{\mathcal{C}(M,N)} \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} \geqslant \int_{\mathcal{C}(M,N)} \frac{ds}{R_1+s} \tag{7}$$

e perciò si può determinare un numero $R_2 > R_1$ tale che, indicata con Γ_2 la circon-

---

[19] Ciò segue da un lemma noto. Vedi L. TONELLI: *Fondamenti....*, II, pp. 17-18.

ferenza $x^2+y^2=R_2^2$, se $\mathcal{C}(M, N)$ ha qualche punto esterno a Γ_2, si abbia (fissato comunque un verso positivo su Γ_1)

$$\mathfrak{J}_{\mathcal{C}(M, N)} > \int_{\Gamma_1} F(x, y, x', y')ds. \tag{8}$$

Dopo ciò sia λ il minimo di $\mathfrak{J}_{\mathcal{C}}$ per $\mathcal{C}$ tutta contenuta in Γ_2, e indicato con $R_3 > R_2$ un numero che fisseremo nel seguito, sia Γ_3 la circonferenza di equazione $x^2+y^2=R_3^2$.

Se $\mathcal{C}$ è una curva continua e rettificabile uscente da P e avente qualche punto esterno a Γ_3, per ogni suo punto esterno a Γ_2 possiamo considerare il massimo arco senza punti interni a Γ_1 a cui esso appartiene. Tali archi esistono in numero finito, e possiamo distinguerli in due categorie a seconda che non hanno punti esterni a Γ_3 o hanno punti esterni a Γ_3; allora nella seconda categoria vi è almeno un arco. Se un arco $\mathcal{C}(M, N)$ appartiene alla prima categoria M appartiene a Γ_1; se anche N appartiene a Γ_1, sostituiamo $\mathcal{C}(M, N)$ con $\Gamma_1(M, N)$, se N non appartiene a Γ_1, sopprimiamo l'arco $\mathcal{C}(M, N)$. In questo modo otteniamo dalla $\mathcal{C}$ una curva $\overline{\mathcal{C}}$ e per le (7) ed (8) si ha

$$\mathfrak{J}_{\mathcal{C}} \geqslant \mathfrak{J}_{\overline{\mathcal{C}}}.$$

Fissato ora un numero Λ grande ad arbitrio supponiamo R_3 fissato in modo che se $\mathcal{C}(M, N)$ è senza punti interni a Γ_1, con M su Γ_1 ed almeno un punto esterno a Γ_3, si abbia

$$\int_{\mathcal{C}(M, N)} F(x, y, x', y')ds > \Lambda + \int_{\Gamma_1} F(x, y, x', y')ds.$$

Allora se indichiamo con n il numero degli archi massimi di $\mathcal{C}$ aventi punti esterni a Γ_3 e senza punti interni a Γ_1, ed operiamo anche su questi come sugli archi della prima categoria sopra indicati, otteniamo una cúrva $\tilde{\mathcal{C}}$ tutta contenuta in Γ_2 e tale che

$$\mathfrak{J}_{\mathcal{C}} \geqslant \mathfrak{J}_{\overline{\mathcal{C}}} > \mathfrak{J}_{\tilde{\mathcal{C}}} + n\Lambda \geqslant \Lambda + \lambda.$$

Poichè Λ è indipendente da λ e si può prendere grande ad arbitrio purchè R_3 sia sufficientemente grande, si ha l'asserto.

Ora possiamo enunciare il

TEOREMA II. - *Se sono soddisfatte le condizioni del teorema I, e se fissato comunque un punto P e considerate le curve $\mathcal{C}$ continue e rettificabili uscenti da P, $\mathfrak{J}_{\mathcal{C}}$ tende a $+\infty$ al tendere all'infinito della massima corda di $\mathcal{C}$ uscente da P; allora, presi due punti P e Q del piano (x, y), esiste sempre una e una sola estremale col primo punto terminale in P e il secondo in Q.*

La deduzione di questo teorema dal teorema I è assai semplice ([20]). Detta $\mathcal{K}$ la classe delle curve continue e rettificabili aventi il primo punto terminale in P e in Q il secondo, esiste almeno una curva minimante $\mathfrak{J}_{\mathcal{C}}$ in $\mathcal{K}$ e, per il teorema I, proprio una sola: tale curva è un'estremale $\mathcal{E}_1$. Se in $\mathcal{K}$ vi fosse un'ulteriore estremale $\mathcal{E}_2$, questa non potrebbe essere una curva minimante, e quindi su di essa vi sarebbe un ultimo punto Q_1, tale che $\mathcal{E}_2(P, Q_1)$ sia minimante per $\mathfrak{J}_{\mathcal{C}}$. Allora, per un ragionamento già fatto nella dimostrazione del teorema I, vi sarebbe una seconda curva minimante coi punti terminali P e Q_1, e ciò contro il teorema I.

5. - Il teorema ora dimostrato estende un teorema stabilito dal TONELLI per i problemi regolari definiti positivi, e lo si può anche dedurre come caso particolare da un teorema che a sua volta estente un teorema del CARATHÉODORY ([21]) per i problemi regolari definiti positivi. Tuttavia il metodo seguito nei due numeri precedenti, e che è analogo a quello del TONELLI, è importante per il seguito di questo lavoro, poichè è questo metodo che estenderemo al caso dei problemi di MAYER, mentre l'èstensione a tali problemi del metodo che applicheremo in questo numero, e che modifica leggermente quello del CARATHÉODORY, presenta qualche difficoltà.

TEOREMA III. - *Se sono soddisfatte le condizioni del teorema I e se, fissato comunque un punto P e considerate le estremali $\mathcal{E}$ uscenti da P, l'integrale $\mathfrak{J}_{\mathcal{E}}$ tende a $+\infty$ al tendere all'infinito della lunghezza di $\mathcal{E}$; allora, presi due punti P e Q del piano (x, y), esiste una e una sola estremale avente in P il primo e in Q il secondo punto terminale.*

Siano

$$x=\varphi(s, \omega), \qquad y=\psi(s, \omega), \qquad (0 \leqslant s < \infty), \tag{9}$$

le equazioni dell'estremale indefinita uscente da P con direzione ω; interpretiamo (s, ω) come coordinate polari in un piano Π e indichiamo con Σ il piano (x, y).

Le (9) possono essere interpretate come una rappresentazione del piano Π sul piano Σ (o, eventualmente, una parte di Σ). Esse sono *localmente* invertibili: nel punto $(s=0, \omega)$ per noti teoremi di esistenza e di unicità delle estremali considerate « in piccolo », e negli altri punti perchè è $\Delta(s, \omega) \neq 0$. Per queste stesse ragioni, fissato un punto (x, y), i punti (s, ω) di cui è l'immagine non possono avere punti di accumulazione a distanza finita.

Consideriamo ora un punto $(\bar{x}, \bar{y})$ che sia l'immagine di qualche punto (s, ω)

([20]) Vedi L. TONELLI: *Fondamenti....*, II, pp. 273-274.

([21]) Vedi C. CARATHÉODORY: *Sui campi di estremali uscenti da un punto e riempienti tutto lo spazio*. Boll. Un. Mat. It., Vol. II, pp. 2-6, 48-52, 81-87.

e fissiamo uno di questi: sia $(\bar{s}, \bar{\omega})$. In un intorno di $(\bar{x}, \bar{y})$ sufficientemente piccolo invertiamo le (9). Otteniamo così due funzioni continue

(10) $$s=\sigma(x, y), \qquad \omega=\chi(x, y)$$

con

$$\bar{s}=\sigma(\bar{x}, \bar{y}) \qquad \bar{\omega}=\chi(\bar{x}, \bar{y}).$$

Dimostriamo che le (10) si possono prolungare lungo una qualunque linea continua e rettificabile γ uscente dal punto fissato $(\bar{x}, \bar{y})$. A tal fine cominciamo con l'osservare che, fino a quando le (10) sono prolungabili lungo γ, la prima di esse resta limitata. Sia infatti

$$\gamma: \quad x=\xi(s'), \qquad y=\eta(s'), \qquad (0 \leqq s' \leqq l').$$

Allora, finchè il prolungamento lunto γ è possibile, si ottiene un fascio di estremali uscenti da P

$$\mathscr{E}_{s'}: \quad x=\varphi\{s, \omega[\xi(s'), \eta(s')]\}, \qquad y=\psi\{s, \omega[\xi(s'), \eta(s')]\},$$
$$0 \leqq s \leqq \sigma[\xi(s'), \eta(s')],$$

e da una formula di WEIERSTRASS segue l'equazione

$$\mathfrak{J}_{\mathscr{E}_{s'}} - \mathfrak{J}_{\mathscr{E}_0} + \int_{\gamma\, 0}^{s'} E ds' = \int_{\gamma\, 0}^{s'} F ds'$$

dove la funzione integranda sotto il primo segno di integrazione è la funzione E di WEIERSTRASS, che, essendo il problema regolare positivo, è sempre $\geqq 0$. È perciò

$$\mathfrak{J}_{\mathscr{E}_{s'}} \leqq \mathfrak{J}_{\mathscr{E}_0} + \int_{\gamma_0}^{s'} F ds'.$$

Dunque, fino a quando il prolungamento lungo γ è possibile, il valore di $\mathfrak{J}_{\mathscr{E}_{s'}}$ resta limitato e perciò resta limitata anche la lunghezza $\sigma[\xi(s'), \eta(s')]$ di $\mathscr{E}_{s'}$.

Se si suppone che le (10) non si possano prolungare lungo tutta la curva γ, esiste un valore $s_1' \leqq l'$ tale che fino a ogni $s' < s_1'$ il prolungamento è possibile mentre non lo è fino a $s'=s_1'$. Esiste inoltre, nel piano Π, almeno un punto di accumulazione per $\{s=\sigma[\xi(s'), \eta(s')], \ \omega=\chi[\xi(s'), \eta(s')]\}$ al tendere di s' a s_1' da sinistra. Se indichiamo con $(\tilde{s}, \tilde{\omega})$ un tale punto, si ha

$$\xi(s_1')=\varphi(\tilde{s}, \tilde{\omega}), \qquad \eta(s_1')=\psi(\tilde{s}, \tilde{\omega}),$$

Tenendo conto poi del fatto che in un intorno di $(\tilde{s}, \tilde{\omega})$ la trasformazione (9) è invertibile, si vede che, fissando opportunamente la determinazione di $\tilde{\omega}$ rispetto al modulo 2π, deve essere

$$\lim_{s' \to s_1'-0} \sigma[\xi(s'), \eta(s')]=\tilde{s}, \qquad \lim_{s' \to s_1'-0} \chi[\xi(s'), \eta(s')]=\tilde{\omega}.$$

e il prolungamento delle (10) risulta possibile anche oltre s_1' contro l'ipotesi.

Come prima conseguenza di quanto ora abbiamo dimostrato si ha intanto che ogni punto del piano Σ è immagine di almeno un punto del piano Π. Per dimostrare che ogni punto di Σ è l'immagine di un unico punto del piano Π basta provare che, fissata comunque una determinazione delle (10) e prolungandola lungo una qualunque linea γ continua rettificabile chiusa, si deve ottenere alla fine la determinazione di partenza. Ora ciò è una conseguenza del fatto che la curva γ si può ridurre a un punto con continuità, è possibile l'inversione locale, il prolungamento si può fare lungo una qualunque linea continua e rettificabile, e le ipotetiche molteplici determinazioni delle (10) in un punto formerebbero in ogni caso un insieme discreto di punti del piano Π.

Dunque la corrispondenza (9) fra i piani Π e Σ è biunivoca, e fissato un punto Q, esiste una e una sola estremale uscente da P e terminante nel punto Q.

OSSERVAZIONE I. - Il CARATHÉODORY ha dimostrato questo teorema nell'ipotesi $F>0$, ammettendo soltanto che sopra ogni estremale $\mathcal{E}$ l'integrale $\mathfrak{I}_{\mathcal{C}}$ tenda a $+\infty$ prolungando l'estremale indefinitamente, mentre qui abbiamo supposto che ciò avvenga uniformemente per tutte le estremali uscenti da un punto, al tendere all'infinito della loro lunghezza. Questa condizione è però soddisfatta nelle ipotesi del CARATHÉODORY.

OSSERVAZIONE II. - Come corollario dei due teoremi precedenti si ha che nelle ipotesi ivi fatte, non possono esistere estremali chiuse.

6. - Passiamo ora a stabilire dei teoremi di unicità relativi alle estremanti e alle estremali dei problemi di MAYER in forma parametrica, e per questo cominciamo col precisare anche in questo caso le ipotesi e le notazioni.

Sia $F(x, y, x', y', u)$ una funzione finita e continua insieme con le sue derivate parziali dei primi tre ordini per (x, y) appartenente a un campo A, u appartenente a un intervallo Δ, (x', y') qualunque con $x'^2+y'^2>0$. Per ogni $k>0$ sia

$$F(x, y, kx', ky', u)=kF(x, y, x', y', u)$$

in tutto il campo di definizione della $F(x, y, x', y', u)$. Poniamo inoltre

$$F_1(x, y, x', y', u)\equiv\frac{F_{x'x'}}{y'^2}\equiv-\frac{F_{x'y'}}{x'y'}\equiv\frac{F_{y'y'}}{x'^2},$$

$$\begin{aligned}E(x, y\,;\, x', y'\,;\, \tilde{x}', \tilde{y}'\,;\, u)\equiv F(x, y\,;\, x', y', u)-\\ -\tilde{x}'F_{x'}(x, y, x', y', u)-\tilde{y}'F_{y'}(x, y, x', y', u).\end{aligned}$$

Essendo u_0 un valore di u fissato nell'intervallo Δ, consideriamo per ogni curva continua e rettificabile

$$\mathcal{C}:\quad x=x(s),\qquad y=y(s),\qquad (0\leqslant s\leqslant\mathfrak{L}),$$

l'equazione

$$u=u_0+\int_0^s F(x,\, y,\, x',\, y',\, u)ds. \tag{11}$$

Chiameremo *curve ordinarie* le curve $\mathcal{C}$ per le quali l'equazione ora scritta ammette una soluzione $u(s)$ in tutto l'intervallo $(0, \mathfrak{L})$ con $u(s)$ sempre appartenente a Δ. Per indicare la dipendenza di $u(s)$ dalla curva $\mathcal{C}$ useremo anche la notazione $u_{\mathcal{C}}(s)$.

Data una classe $\mathcal{K}$ di curve ordinarie $\mathcal{C}$, chiameremo problema di MAYER relativo all'equazione (11) e alla classe $\mathcal{K}$, il problema della ricerca del minimo [o massimo] di $u_{\mathcal{C}}(\mathfrak{L})$ nella classe $\mathcal{K}$.

Diremo che il problema di MAYER è definito positivo [negativo] se è sempre $F>0$ $[F<0]$; diremo che il problema di MAYER è semidefinito positivo [negativo] se è sempre $F \geqslant 0$ $[F \leqslant 0]$; negli altri casi diremo che il problema è indefinito. Il problema di MAYER si dirà poi regolare positivo [negativo] se è sempre $F_1>0$ $[F_1<0]$; quasi regolare positivo [negativo] se è sempre $F_1 \geqslant 0$ $[F_1 \leqslant 0]$; quasi regolare positivo [negativo] normale se è sempre $F_1 \geqslant 0$ $[F_1 \leqslant 0]$ e, per (x, y, u) fissato, i valori di θ per i quali $F_1(x, y, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta, u)=0$ non riempiono mai tutto un intervallo; quasi regolare positivo [negativo] seminormale se è sempre $F_1 \geqslant 0$ $[F_1 \leqslant 0]$ e per nessun punto (x, y, u) si ha, identicamente in θ, $F_1(x, y, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta, u) \equiv 0$.

Una curva ordinaria $\mathcal{C}$ si dice un'estremaloide se soddisfa le equazioni

$$\left\{\begin{aligned} &\int_0^s \{F_x+F_{x'}F_u\}\, ds-\frac{d}{ds}\int_0^s F_{x'}ds=c_1 \quad \text{(cost.)} \\ &\int_0^s \{F_y+F_{y'}F_u\}\, ds-\frac{d}{ds}\int_0^s F_{y'}ds=c_2 \quad \text{(cost.)} \quad ({}^{22}). \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Un'estremaloide di classe 1 si chiama estremale. Per le estremali le equazioni (12) si possono scrivere anche nella forma differenziale

$$\left\{\begin{aligned} &F_x+F_{x'}F_u=\frac{d}{ds}F_{x'} \\ &F_y+F_{y'}F_u=\frac{d}{ds}F_{y'}, \end{aligned}\right. \tag{13}$$

e se il problema di MAYER considerato è quasi regolare normale ogni estremaloide è di classe 1 ([23]).

([22]) B. MANIÀ: *Proprietà delle estremanti nei problemi di Mayer*, p. 109

([23]) B. MANIÀ, loc. cit. p. 114.

Se un'estremale è di classe 2 dalle equazioni (13) seguono le altre

$$
(14)\qquad \begin{cases} x'' = \dfrac{y'(F_{xy'} - F_{yx'}) + F_{x'}F_u - FF_{x'u}}{F_1} \\ y'' = \dfrac{x'(F_{yx'} - F_{xy'}) + F_{y'}F_u - FF_{y'u}}{F_1}, \end{cases}
$$

e se il problema di MAYER è regolare ogni estremale è di classe 2 ([24]).

Supponiamo che il problema di MAYER sia regolare; allora le estremali sono determinate dal sistema differenziale formato dalle (14) e dall'equazione

$$
(15)\qquad u' = F(x, y, x', y', u).
$$

Fissato un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ interno al campo A, consideriamo le soluzioni

$$
(16)\qquad x = \varphi(s, \omega), \qquad y = \psi(s, \omega), \qquad u = \chi(s, \omega)
$$

del sistema (14), (15) determinate dalle condizioni iniziali

$$
\varphi(0, \omega) = x_0, \qquad \psi(0, \omega) = y_0, \qquad \chi(0, \omega) = u_0
$$
$$
\varphi_s(0, \omega) = \cos \omega, \qquad \psi_s(0, \omega) = \mathrm{sen}\, \omega.
$$

Al variare di ω le prime due delle equazioni (16) danno tutte e sole le estremali uscenti dal punto (x_0, y_0) e la terza delle (16) dà il funzionale $u_{\mathcal{C}}(s)$ associato a ciascuna di esse.

Anche in questo caso, come per i problemi liberi, posto

$$
\Delta(s, \omega) = \begin{vmatrix} \varphi_s & \varphi_\omega \\ \psi_s & \psi_\omega \end{vmatrix},
$$

è $\Delta(0, \omega) = 0$, $\Delta_s(0, \omega) = 1$ e si può perciò porre la definizione seguente.

DEFINIZIONE. - Fissata un'estremale $\mathcal{E}$ qualunque del fascio di centro P_0, si chiama fuoco destro di P_0 sopra $\mathcal{E}$ il primo punto di $\mathcal{E}$ corrispondente a un valore positivo s tale che $\Delta(s, \omega) = 0$, quando in questa equazione si ponga il valore di ω a cui corrisponde l'estremale fissata.

7. - Dopo queste premesse possiamo dimostrare per i problemi di MAYER in forma parametrica un teorema anagolo al teorema I.

TEOREMA IV. - *Il campo A coincida col piano (x, y) e l'intervallo Δ con l'asse reale delle u; il problema di Mayer considerato sia regolare positivo; in ogni parte limitata A' del campo A il valore del funzionale $u_{\mathcal{C}}(\mathfrak{L})$ tenda a $+\infty$ al tendere all'infinito della lunghezza $\mathfrak{L}$ di $\mathcal{C}$, e resti limitato quando la lunghezza $\mathfrak{L}$ resta limitata; sopra nessuna estremale esista*

([24]) B. MANIÀ, loc. cit. p. 115.

il fuoco destro del primo punto terminale; allora, fissati comunque due punti P, Q del piano (x, y), nella classe $\mathcal{K}$ delle curve ordinarie aventi in P e Q rispettivamente il primo e il secondo punto terminale, esiste al più una curva minimante $u_{\mathcal{C}}(\mathcal{L})$.

Anche ora come nella dimostrazione del teorema I possiamo osservare che le curve minimanti $u_{\mathcal{C}}(\mathcal{L})$ sono prive di punti multipli. Infatti, se $\mathcal{C}$ è una qualunque curva ordinaria e γ è un suo arco chiuso, non può essere $\int_{\gamma} F(x, y, x', y', u_{\mathcal{C}})ds \leq 0$, perchè, altrimenti, aggiungendo alla curva $\mathcal{C}$ l'arco γ percorso un numero sufficientemente grande di volte, si otterebbe una curva $\overline{\mathcal{C}}$ di lunghezza $\overline{\mathcal{L}}$ grande ad arbitrio, appartenente a una parte limitata e fissa A' di A, e per la quale si avrebbe $u_{\overline{\mathcal{C}}}(\overline{\mathcal{L}}) \leq u_{\mathcal{C}}(\mathcal{L})$.

Notiamo poi che nelle ipotesi fatte ogni curva continua e rettificabile è una curva ordinaria.

Infine osserviamo che in ogni classe $\mathcal{K}'$ completa di curve ordinarie appartenenti a una parte limitata e chiusa A' del campo A esiste il minimo assoluto di $u_{\mathcal{C}}(\mathcal{L})$; poichè ci si può limitare, per le ipotesi fatte, a considerare una sottoclasse $\overline{\mathcal{K}}'$ di $\mathcal{K}'$ formata da curve le cui lunghezze non superano un numero fisso sufficientemente grande. Costruita una successione minimante in $\overline{\mathcal{K}}'$, questa ammette almeno una curva di accumulazione $\mathcal{C}_0$, appartenente a $\overline{\mathcal{K}}'$, sulla quale $u_{\mathcal{C}}(s)$ è un funzionale semicontinuo inferiormente ([25]). Allora $\mathcal{C}_0$ fornisce il minimo assoluto di $u_{\mathcal{C}}(\mathcal{L})$ in $\overline{\mathcal{K}}'$.

Dopo queste osservazioni non resta che ripetere la dimostrazione del teorema I.

OSSERVAZIONE I. - *La condizione che in ogni parte limitata A' del campo A il valore del funzionale $u_{\mathcal{C}}(\mathcal{L})$ tenda a $+\infty$ al tendere all'infinito della lunghezza $\mathcal{L}$ di $\mathcal{C}$, e resti limitato quando la lunghezza $\mathcal{L}$ resta limitata, è soddisfatta se esiste un differenziale esatto $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ per il quale sia sempre*

$$\overline{F}(x, y, x', y', u) \equiv F(x, y, x', y', u) + M(x, y)x' + N(x, y)y' \geq 0,$$

e i valori di θ per i quali $\overline{F}(x, y, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta, u) = 0$ in qualche punto (x, y, u), con (x, y) in A', appartengono tutti a un arco di ampiezza minore di π, e se inoltre esistono due costanti h, k per le quali sia

$$F(x, y, x', y', u) \leq hu + k;$$

con (x, y) in A', $x'^2 + y'^2 = 1$, u qualunque.

([25]) Vedi L. TONELLI: *Sulla semicontinuità nei problemi di Mayer e di Lagrange*. Rend. Acc. Naz. dei Lincei, S. VI, Vol. XXIV (1936), pp. 399-404.

Infatti se $\mathcal{C}$ è una curva di A' si ha, per $0 \leqslant s' \leqslant s'' \leqslant \mathfrak{L}$,

$$u_{\mathcal{C}}(s'') - u_{\mathcal{C}}(s') = \int_{s'}^{s''} F(x, y, x', y', u_{\mathcal{C}}) ds \geqslant \int_{s'}^{s''} \{ M(x, y) x' + N(x, y) y' \} ds$$

e quindi $u_{\mathcal{C}}(s)$ è limitato inferiormente, e, inoltre, se $u_{\mathcal{C}}(\mathfrak{L})$ resta inferiore a un numero fisso A' anche $u_{\mathcal{C}}(s)$ per tutti i valori di s nell'intervallo $(0, \mathfrak{L})$ resta inferiore a un numero fisso A' dipendente soltanto da Λ e dal campo A'.

Dunque se in A' esistessero curve di lunghezza grande ad arbitrio e sulle quali $u_{\mathcal{C}}(\mathfrak{L})$ fosse limitato superiormente, sopra tali curve $u_{\mathcal{C}}(s)$ resterebbe limitato. D'altronde, su tali curve, purchè di lunghezza sufficientemente grande

$$\int_{\mathcal{C}} \overline{F}(x, y, x', y', u_{\mathcal{C}}) ds$$

sarebbe maggiore di un numero arbitrariamente fissato, e quindi la stessa cosa si verificherebbe per

$$\int_{\mathcal{C}} F(x, y, x', y', u_{\mathcal{C}}) ds;$$

e ciò evidentemente è assurdo.

Infine dalla seconda ipotesi ammessa risulta facilmente che, sopra le curve $\mathcal{C}$ di A' di lunghezza limitata, $u_{\mathcal{C}}(\mathfrak{L})$ resta limitato superiormente, e quindi la proposizione enunciata è dimostrata.

OSSERVAZIONE II. - *Se è $F(x, y, x', y', u) \geqslant 0$, il teorema precedente vale anche se Δ non coincide con tutto l'asse reale, ma è un intervallo illimitato a destra.*

OSSERVAZIONE III. - *Nel problema di navigazione di Zermelo le condizioni dell'osservazione I sono soddisfatte perchè è*

$$0 < F(x, y, x', y', u) < k$$

con k costante ([26]).

8. - Le ipotesi ammesse nel teorema IV sono suggerite dal problema di navigazione di ZERMELO. Ora ci proponiamo di modificare tali ipotesi e di metterci in condizioni analoghe a quelle che si presentano nel problema della curva di massima velocità finale.

Il campo A sia ancora l'intero piano (x, y), ma l'intervallo Δ sia illimitato soltanto a sinistra; sia cioè $(-\infty, \beta)$ con $\beta < +\infty$.

([26]) Vedi B. MANIÀ: *Sopra un problema di navigazione di Zermelo*, loc. cit.

Fissato un punto P del piano (x, y), chiamiamo *punto raggiungibile a partire da P* ogni punto Q per il quale esiste almeno una curva ordinaria $\mathcal{C}$ col primo punto terminale in P e il secondo in Q e sulla quale sia sempre $u_{\mathcal{C}}(s) < \beta$. I punti raggiungibili a partire da P formano un campo aperto che indicheremo con D_P.

Possiamo dimostrare il seguente

TEOREMA V. - *Il campo A coincida col piano (x, y) e l'intervallo Δ sia $(-\infty, \beta)$ con $\beta < +\infty$; il problema di Mayer considerato sia regolare positivo; l'insieme D_P, per ogni punto P, sia semplicemente connesso; esista un differenziale esatto $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ tale che si abbia sempre*

$$\overline{F}(x, y, x', y', u) \equiv F(x, y, x', y', u) + M(x, y)x' + N(x, y)y' \geqslant 0,$$

e, in ogni parte limitata A' di A, i valori θ per i quali $\overline{F}(x, y \cos\theta, \operatorname{sen}\theta, u) = 0$ in qualche punto (x, y, u) con (x, y) in A' e u in Δ, appartengano tutti a un arco minore di π; sopra nessuna estremale esista il fuoco destro del primo punto terminale; allora, fissati comunque due punti P e Q del piano (x, y), nella classe $\mathcal{K}$ delle curve ordinarie aventi in P e Q rispettivamente il primo e il secondo punto terminale, esiste al più una curva minimante $u_{\mathcal{C}}(\mathcal{L})$ che sia tutta costituita di punti raggiungibili a partire da P (cioè appartenente a D_P).

Se γ e un arco chiuso di una qualunque curva ordinaria $\mathcal{C}$, si ha

$$\int_\gamma F(x, y, x', y', u_{\mathcal{C}})ds = \int_\gamma \overline{F}(x, y, x', y', u_{\mathcal{C}})ds > 0,$$

e perciò le curve minimanti sono prive di punti multipli.

Supposto che nella classe $\mathcal{K}$ vi siano due curve minimanti $\mathcal{E}_1$ ed $\mathcal{E}_2$ tutte costituite di punti raggiungibili, su di esse è sempre

$$-\infty < u_{\mathcal{C}}(s) < \beta,$$

e quindi sono due estremali aventi in comune soltanto i punti P e Q e racchiudenti un'area semplicemente connessa A' tutta costituita di punti raggiungibili a partire da P.

Se Q' è un punto qualunque di A' e $\mathcal{C}$ è una curva ordinaria avente in P il primo e in Q' il secondo punto terminale, esiste sempre una curva ordinaria $\overline{\mathcal{C}}$, tutta appartenente ad A', avente gli stessi punti terminali, tale che $u_{\overline{\mathcal{C}}}(\overline{\mathcal{L}}) \leqslant u_{\mathcal{C}}(\mathcal{L})$, e sulla quale sia sempre

$$-\infty < u_{\overline{\mathcal{C}}}(s) < \beta,$$

e anzi si può determinare un numero $\overline{\beta} < \beta$ tale che, per ogni punto Q' di A', vi sia almeno una curva ordinaria $\tilde{\mathcal{C}}$, tutta appartenente ad A', avente in P il primo e in Q' il secondo punto terminale, su cui si abbia sempre

$$-\infty < u_{\tilde{\mathcal{C}}}(s) \leq \bar{\beta}. \tag{17}$$

Di qua segue che nel problema di minimo per $u_{\mathcal{C}}(\mathcal{L})$ nella classe $\mathcal{K}'$ di tutte le curve ordinarie aventi in P il primo e in Q' il secondo punto terminale, possiamo limitarci a considerare quelle sole curve ordinarie di $\mathcal{K}'$ che appartengono ad A' e sulle quali è sempre soddisfatta la (17), e allora ogni curva minimante $u_{\mathcal{C}}(\mathcal{L})$ in $\mathcal{K}'$ è un'estremale.

Dopo ciò non resta che ripetere la dimostrazione del teorema I.

Osservazione I. - *L'insieme D_P è semplicemente connesso se esiste almeno una direzione orientata per cui, se Q è un punto raggiungibile a partire da P, tutta la semiretta uscente da Q con quella direzione è formata da punti raggiungibili a partire da P.*

Questa circostanza si verifica, per esempio, nel problema della curva di massima velocità finale, e, più generalmente, se è

$$F(x, y, x', y', u) = \varphi(x, y, u)\sqrt{x'^2 + y'^2} + M(x, y)x' + N(x, y)y',$$

con $\varphi(x, y, u) > 0$, $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ differenziale esatto, e se esiste un angolo ϑ tale che $\varphi(x, y, u) + M(x, y)\cos\vartheta + N(x, y)\operatorname{sen}\vartheta \leq 0$ quando u è sufficientemente vicino a β e $\varphi(x, y, u) + M(x, y)\cos\vartheta + N(x, y)\operatorname{sen}\vartheta > hu + k$, con h e k costanti per $u < 0$ sufficientemente grande in valore assoluto.

Osservazione II. - *Il teorema precedente resta vero anche se per $u = \beta$ il problema di Mayer non è regolare.*

Questo caso si verifica, per esempio, nel problema della curva di massima velocità finale.

9. - I teoremi IV e V danno delle condizioni sufficienti per l'unicità delle curve minimanti. Da essi vogliamo dedurre ora delle condizioni sufficienti per l'unicità delle estremali; e per chiarire la portata delle proposizioni che dimostreremo, premettiamo ad esse un lemma.

Lemma. - *Se esistono un differenziale esatto $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ e due costanti positive R e μ tali che sia sempre*

$$\bar{F}(x, y, x', y', u) \equiv F(x, y, x', y', u) + M(x, y)x' + N(x, y)y' \geq 0,$$

e per $x^2 + y^2 \geq R^2$

$$\bar{F}(x, y, x', y', u) \geq \frac{\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

allora, fissato comunque un insieme E limitato del piano (x, y), nella classe $\mathcal{K}^*$ delle curve ordinarie $\mathcal{C}$ aventi i punti terminali P, Q in E, il *valore del funzionale* $u_{\mathcal{C}}(\mathfrak{L})$ *tende a* $+\infty$ *al tendere all'infinito della massima corda di* $\mathcal{C}$ *uscente da* P, *supposto che in* $\mathcal{K}^*$ *vi siano curve ordinarie per le quali tale massima corda non resta inferiore a un numero fisso.*

Fissato $R_1 > R$ in modo che l'insieme E sia interno alla circonferenza Γ_1 di equazione $x^2+y^2=R_1^2$, sia $\mathcal{C}(M, N)$ un arco di $\mathcal{C}$ senza punti interni a Γ_1. È allora

$$\int_{\mathcal{C}} \overline{F}(x, y, x', y', u_{\mathcal{C}})ds \geqslant \int_{\mathcal{C}(M, N)} \overline{F}(x, y, x', y', u_{\mathcal{C}})ds > \mu \int_{\mathcal{C}(M, N)} \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2}} \geqslant \mu \int_{\mathcal{C}(M, N)} \frac{ds}{R_1 + s}$$

e di qua segue che

$$\int_{\mathcal{C}} \overline{F}(x, y, x', y', u_{\mathcal{C}})ds$$

tende a $+\infty$ al tendere all'infinito della massima corda di $\mathcal{C}$ uscente da P, e quindi la stessa cosa è vera per $u_{\mathcal{C}}(\mathfrak{L})$.

10. - Come dal teorema I si deduce il teorema II, così dal teorema IV si può dedurre il teorema seguente.

TEOREMA VI. - *Se sono soddisfatte le condizioni del teorema IV; se, considerate le curve ordinarie* $\mathcal{C}$ *aventi i punti terminali in un insieme limitato,* $u_{\mathcal{C}}(\mathfrak{L})$ *tende a* $+\infty$ *al tendere all'infinito della massima corda di* $\mathcal{C}$ *uscente dal primo punto terminale; allora, fissati due punti* P *e* Q *qualunque del piano* (x, y), *esiste una e una sola estremale avente in* P *il primo e in* Q *il secondo punto terminale.*

11. - Riprendiamo le considerazioni del numero 8 e indichiamo con Γ_P la frontiera dell'insieme D_P. Sia poi $\widetilde{D}_P$ l'insieme dei punti Q di D_P tali che nella classe $\mathcal{K}$ delle curve ordinarie aventi in P il primo e in Q il secondo punto terminale non esista nessuna curva minimante $u_{\mathcal{C}}(\mathfrak{L})$ e avente qualche punto sulla frontiera Γ_P di D_P.

Allora dal teorema V si può dedurre, nel solito modo, il teorema seguente.

TEOREMA VII. - *Se sono soddisfatte le condizioni del teorema V; se esistono due numeri positivi* R, μ *tali che sia sempre per* $x^2+y^2 \geqslant R^2$

$$\overline{F}(x, y, x', y', u) \geqslant \frac{\mu}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

allora, fissati due punti P *e* Q *del piano* (x, y), *con* Q *appartenente a* $\widetilde{D}_P$, *nella classe* $\mathcal{K}$ *delle curve ordinarie aventi in* P *e* Q *rispettiva-*

mente il primo e il secondo punto terminale, esiste una e una sola estremale.

Si osservi che per il lemma del numero 9, le curve ordinarie della classe $\mathcal{K}$ stanno tutte in un campo limitato, e, nelle ipotesi del nostro teorema, hanno tutte lunghezza limitata. Costruita una successione minimante, essa ammette almeno una curva di accumulazione $\mathcal{C}_0$ e questa dà il minimo di $u_{\mathcal{C}}(\mathcal{L})$ in $\mathcal{K}$.

OSSERVAZIONE I. - *La restrizione imposta al campo di variabilità di Q è analoga a quella che si deve imporre nella dimostrazione dell'esistenza dell'estremo assoluto quando si vogliano escludere le soluzioni discontinue* (27).

OSSERVAZIONE II. - *La condizione che esistono due numeri positivi R, μ tali che per $x^2+y^2 \geqslant R^2$ sia*

$$\overline{F}(x, y, x', y', u) \geqslant \frac{\mu}{\sqrt{x^2+y^2}}, \tag{18}$$

serve soltanto ad assicurare che nella ricerca del minimo di $u_{\mathcal{C}}(\mathcal{L})$ nella classe $\mathcal{K}$ basta considerare le curve ordinarie che appartengono a un campo limitato.

Questa osservazione è opportuna perchè in casi importanti la (18) può non essere verificata pur valendo la conseguenza che ne abbiamo tratta. Così, per esempio, questo accade nel problema della curva di massima velocità finale in cui non è soddisfatta una condizione del tipo della (18).

12. - Abbiamo già accennato che l'estensione ai problemi di MAYER del teorema di unicità per le estremali dei problemi liberi dato dal CARATHÉODORY presenta qualche difficoltà. In questo numero vogliamo concludere lo studio dei problemi di MAYER in forma parametrica precisando la nostra affermazione, ciò che ci dà anche l'occasione di estendere ai problemi di MAYER la formula di WEIERSTRASS di cui si fa uso nella dimostrazione del CARATHÉODORY.

Sia

$$x=\varphi(t, \omega), \qquad y=\psi(t, \omega), \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1;\ \omega_1 \leqslant \omega \leqslant \omega_2),$$

un fascio di estremali del problema di MAYER considerato, uscenti da un punto P, e $\varphi(t, \omega)$, $\psi(t, \omega)$ siano finite e continue con le loro derivate parziali del primo ordine e con le derivate parziali del secondo ordine miste. Indichiamo con γ la curva di equazioni parametriche

$$x=\varphi(1, \omega), \qquad y=\psi(1, \omega), \qquad (\omega_1 \leqslant \omega \leqslant \omega_2),$$

(27) Si veda per esempio il problema della curva di massima velocità finale.

e, detta $u(t, \omega)$ la soluzione dell'equazione

$$u(t, \omega)=u_0+\int_0^t \overline{F}(\varphi, \psi, \varphi_t, \psi_t, u)dt,$$

consideriamo il funzionale

$$U(\omega)=u(1, \omega)+\int_\omega^{\omega_2} F[\varphi(1, \omega), \psi(1, \omega), \varphi_\omega(1, \omega), \psi_\omega(1, \omega), u(1, \omega)]d\omega.$$

Derivando si ottiene

$$\frac{dU(\omega)}{d\omega}=\frac{\partial u(1, \omega)}{\partial\omega}-F[\varphi(1, \omega), \psi(1, \omega), \varphi_\omega(1, \omega), \psi_\omega(1, \omega), u(1, \omega)]. \tag{19}$$

Ora

$$\frac{\partial u(t, \omega)}{\partial\omega}=\int_0^t \left\{ F_x\varphi_\omega+F_y\psi_\omega+F_{x'}\varphi_{t\omega}+F_{y'}\psi_{t\omega}+F_u\frac{\partial u}{\partial\omega}\right\} d\tau$$

e perciò dalla formula risolutiva delle equazioni differenziali lineari segue

$$\frac{\partial u(t, \omega)}{\partial\omega}=\left(\exp\int_0^t F_u d\tau\right)\int_0^t \left\{ (F_x\varphi_\omega+F_y\psi_\omega+F_{x'}\varphi_{t\omega}+F_{y'}\psi_{t\omega})\left(\exp-\int_0^\tau F_u d\sigma\right)\right\} d\tau.$$

Ponendo $t=1$ si ha

$$\frac{\partial u(1, \omega)}{\partial\omega}=\int_0^1 \lambda(F_x\varphi_\omega+F_y\psi_\omega+F_{x'}\varphi_{t\omega}+F_{y'}\psi_{t\omega})dt$$

con

$$\lambda=\exp\int_t^1 F_u d\tau.$$

Con due integrazioni per parti, si può anche scrivere

$$\frac{\partial u(1, \omega)}{\partial\omega}=\left[\varphi_\omega\int_0^t \lambda F_x d\tau+\psi_\omega\int_0^t \lambda F_y d\tau\right]_0^1+$$
$$+\int_0^1 \left\{ \left[\lambda F_{x'}-\int_0^t \lambda F_x d\tau\right]\varphi_{t\omega}+\left[\lambda F_{y'}-\int_0^t \lambda F_y d\tau\right]\psi_{t\omega}\right\} d\sigma.$$

Ma, per ω fissato, è

$$\lambda F_{x'}-\int_0^t \lambda F_x d\tau=c_1 \quad \text{(cost.)},$$

$$\lambda F_{y'}-\int_0^t \lambda F_y d\tau=c_2 \quad \text{(cost.)},$$

e perciò

$$\frac{\partial u(1,\omega)}{\partial\omega}=\varphi_\omega(1,\omega)F_{x'}[\varphi(1,\omega),\ \psi(1,\omega),\ \varphi_t(1,\omega),\ \psi_t(1,\omega),\ u(1,\omega)]+$$
$$+\psi_\omega(1,\omega)F_{y'}[\varphi(1,\omega),\ \psi(1,\omega),\ \varphi_t(1,\omega),\ \psi_t(1,\omega),\ u(1,\omega)].$$

Di qua e dalla (19) segue

$$\frac{dU(\omega)}{d\omega}=-E[\varphi(1,\omega),\ \psi(1,\omega);\ \varphi_t(1,\omega),\ \psi_t(1,\omega);\ \varphi_\omega(1,\omega),\ \psi_\omega(1,\omega);\ u(1,\omega)]$$

e, integrando,

$$U(\omega_2)-U(\omega_1)+\int_{\omega_1}^{\omega_2}Ed\omega=0$$

cioè

$$u(1,\omega_2)-u(1,\omega_1)+\int_{\omega_1}^{\omega_2}Ed\omega=\int_{\omega_1}^{\omega_2}F[\varphi(1,\omega),\dots,\ u(1,\omega)]d\omega. \tag{20}$$

Questa è l'analoga della formula di WEIERSTRASS sfruttata al numero 5, ma mentre ivi dall'essere γ continua e rettificabile si deduceva che il secondo membro restava limitato, qui ciò non è senz'altro possibile per la presenza di $u(1,\omega)$ nella funzione integranda.

13. - Passiamo ora allo studio dei problemi di MAYER in forma ordinaria.

Sia $f(x, y, y', u)$ una funzione finita e continua insieme con le sue derivate parziali dei primi tre ordini per (x, y) appartenente a un campo A, y' finito qualunque, u appartenente a un intervallo Δ.

Essendo u_0 un valore fissato nell'intervallo Δ, per ogni curva

$$C:\quad y=y(x),\qquad (a\leqslant x\leqslant b),$$

con $y(x)$ assolutamente continua in (a, b), appartenente al campo A, consideriamo l'equazione

$$u=u_0+\int_a^x f(x,\ y(x),\ y'(x),\ u(x))dx. \tag{21}$$

Chiameremo *curve ordinarie* quelle curve C per le quali l'equazione ora scritta ammette una soluzione $u(x)$ in tutto l'intervallo (a, b) con $u(x)$ sempre appartenente a Δ. Per indicare la dipendenza di $u(x)$ da C useremo anche la notazione $u_C(x)$.

Data una classe K di curve ordinarie C, chiameremo problema di MAYER relativo all'equazione (21) e alla classe K, il problema della ricerca del minimo (o massimo) di $u_C(b)$ in K.

Il problema di MAYER proposto si dice regolare positivo [negativo] quando è sempre $f_{y'y'}(x, y, y', u) > 0$ [< 0]; quasi regolare positivo [negativo] quando è sempre $f_{y'y'}(x, y, y', u) \geqslant 0$ [$\leqslant 0$]; quasi regolare positivo [negativo] normale quando è sempre $f_{y'y'}(x, y, y', u) \geqslant 0$ [$\leqslant 0$] e, per (x, y, u) fissato con (x, y) in A e u in Δ, i valori di y' per i quali $f_{y'y'}(x, y, y', u) = 0$ non riempiono mai tutto un intervallo; quasi regolare positivo [negativo] seminormale quando è sempre $f_{y'y'}(x, y, y', u) \geqslant 0$ [$\leqslant 0$] e, per (x, y, u) fissato nel modo indicato, non è mai $f_{y'y'}(x, y, y', u) \equiv 0$ identicamente in y'.

Chiameremo estremaloidi relative al problema di MAYER considerato le curve ordinarie soddisfacenti un'equazione della forma

$$\int_a^x (f_y + f_{y'} f_u) dx - \frac{d}{dx} \int_a^x f_{y'} dx = c \quad \text{(cost.)}. \tag{22}$$

Per una curva ordinaria di classe 1 l'equazione precedente equivale all'altra

$$f_y + f_{y'} f_u - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0. \tag{23}$$

Le curve ordinarie di classe 1 che soddisfano tale equazione si chiamano estremali. Se il problema di MAYER è regolare, ogni estremale risulta di classe 2 e l'equazione precedente si può anche scrivere sotto la forma

$$y'' = \frac{f_y + f_{y'} f_u - f_{y'x} - f_{y'u} f - f_{y'y} u'}{f_{y'y'}}, \tag{24}$$

e per una tale curva le (21) si può scrivere

$$u' = f(x, y, y', u). \tag{25}$$

Supponiamo dunque che il problema di MAYER assegnato sia regolare, e fissato un punto (x_0, y_0) interno al campo A, indichiamo con

$$y = \varphi(x, \omega), \qquad u = \chi(x, \omega) \tag{26}$$

la soluzione del sistema formato dalle equazioni (24) e (25) determinata dalle condizioni iniziali

$$\varphi(x_0, \omega) = y_0, \qquad \varphi_x(x, \omega) = \omega, \qquad \chi(x_0, \omega) = y_0$$ ([28]).

Allora si ha, evidentemente,

$$\varphi_\omega(x_0, \omega) = 0, \qquad \varphi_{x\omega}(x_0, \omega) = 1.$$

([28]) Se (x_0, y_0) è sulla frontiera di A, la soluzione del sistema detto esisterà soltanto per certi valori di ω.

Fissato ω, la prima delle (26) diventa l'equazione dell'estremale uscente dal punto (x_0, y_0) con coefficiente angolare ω. Sopra questa estremale si chiama fuoco destro del primo punto terminale, il punto di essa (se esiste) che corrisponde al più piccolo valore $x > x_0$ per il quale $\varphi_\omega(x, \omega) = 0$.

14. - Dopo queste premesse possiamo enunciare i seguenti teoremi.

TEOREMA VIII. - *Il campo A coincida con tutto il piano (x, y) o con una sua striscia parallela all'asse delle y e l'intervallo Δ coincida con l'asse reale delle u; il problema di Mayer sia regolare; ad ogni parte limitata A' di A e ad ogni numero positivo Y' si possa far corrispondere un numero positivo M tale che, sopra ogni estremale tutta contenuta in A' e sulla quale in un punto sia $|y'| \leq Y'$, sia sempre $|y'| < M$, $|u| < M$; sopra nessuna estremale del campo A esista il fuoco destro del primo punto terminale; allora, fissati due punti P e Q del campo A, esiste al più una sola estremale che li congiunga.*

Qui si può ripetere la dimostrazione del teorema analogo per i problemi liberi ([29]).

TEOREMA IX. - *Il campo A coincida con tutto il piano (x, y) o con una sua striscia a lati paralleli all'asse delle y e l'intervallo Δ coincida con l'asse reale delle u; il problema di Mayer sia regolare; ogni curva C del campo A sia una curva ordinaria; in ogni classe completa K di curve ordinarie tutte contenute in una parte limitata A' di A esista il minimo assoluto di $u_C(b)$; ogni curva minimante $u_C(b)$ in una classe K di curve di A' e che sia tutta, i punti terminali al più esclusi, formata da punti interni ad A' e di indifferenza rispetto ad A' e a K* ([30]), *sia un'estremale; fissato un insieme limitato E, e considerate le curve ordinarie C aventi in E i punti terminali, $u_C(b)$ tenda a $+\infty$ al tendere all'infinito del modulo della massima ordinata di C; sopra nessuna estremale del campo A esista il fuoco destro del primo punto terminale; allora, fissati due punti P e Q del campo A, esiste una e una sola estremale che li congiunge* ([31]).

La dimostrazione si fa per assurdo. Si ammette che esistano due estremali congiungenti P e Q. Coi ragionamenti fatti nella dimostrazione del teorema I si prova che non possono essere entrambe minimanti per $u_C(b)$ nella classe delle curve ordinarie che congiungono i punti P e Q; e dopo questo si ragiona come nella dimostrazione del teorema II.

([29]) Vedi L. TONELLI: *Fondamenti....*, II, pp. 393-396.

([30]) Cioè tali che ogni curva ordinaria, ottenuta dalla data sostituendo un arco appartenente a un intorno sufficientemente piccolo di un suo punto con un arco appartenente allo stesso intorno, sia ancora una curva della classe K.

([31]) Cfr. L. TONELLI: *Fondamenti....*, II, pp. 396-397.

15. - Ci proponiamo adesso di dimostrare un teorema di un tipo diverso dai precedenti, e per questo cominciamo con lo stabilire una formula di cui ci serviremo nella dimostrazione.

Riprendiamo le ipotesi del numero 13 e il campo A sia convesso.

Sia

$$C_0: \quad y = y_0(x), \qquad (a \leqslant x < b),$$

una curva ordinaria di classe 1 e

$$C_1: \quad y = y_1(x), \qquad (a \leqslant x \leqslant b),$$

sia una curva ordinaria qualunque avente gli stessi punti terminali. Allora si ha, con notazioni evidenti,

$$\begin{aligned}(27) \qquad u_{C_1}(x) - u_{C_0}(x) &= \int_a^x \{ f(x, y_1(x), y_1'(x), u_{C_1}(x)) - f(x, y_0(x), y_0'(x), u_{C_0}(x)) \} dx = \\ &= \int_a^x (f_y \Delta y + f_{y'} \Delta y' + f_u \Delta u) dx + \frac{1}{2} \int_a^x (\tilde{f}_{yy} \overline{\Delta y}^2 + 2\tilde{f}_{yy'} \Delta y \Delta y' + 2\tilde{f}_{yu} \Delta y \Delta u + \\ &+ \tilde{f}_{y'y'} \overline{\Delta y'}^2 + 2\tilde{f}_{y'u} \Delta y' \Delta u + \tilde{f}_{uu} \overline{\Delta u}^2) dx = \int_a^x (f_y \Delta y + f_{y'} \Delta y' + f_u \delta u) dx + \\ &+ \int_a^x f_u (\Delta u - \delta u) dx + \frac{1}{2} \int_a^x (\tilde{f}_{yy} \overline{\Delta y}^2 + \dots + \tilde{f}_{uu} \overline{\Delta u}^2) dx,\end{aligned}$$

avendo posto

$$\Delta y = y_1(x) - y_0(x), \qquad \Delta y' = y_1'(x) - y_0'(x), \qquad \Delta u = u_{C_1}(x) - u_{C_0}(x),$$

ed essendo δu definita dall'equazione

$$(28) \qquad \delta u = \int_a^x (f_y \Delta y + f_{y'} \Delta y' + f_u \delta u) dx.$$

Dalle (27) e (28) segue

$$\Delta u - \delta u = \int_a^x f_u (\Delta u - \delta u) dx + \frac{1}{2} \int_a^x (\tilde{f}_{yy} \overline{\Delta y} + \dots + \tilde{f}_{uu} \overline{\Delta u}^2) dx,$$

e applicando la formula risolutiva per le equazioni differenziali lineari del primo ordine si ottiene

$$\Delta u - \delta u = \frac{1}{2} \left(\exp \int_a^x f_u dx \right) \int_a^x (\tilde{f}_{yy} \overline{\Delta y}^2 + \dots + \tilde{f}_{uu} \overline{\Delta u}^2) \left(\exp - \int_a^\xi f_u d\eta \right) d\xi.$$

D'altronde, applicando la stessa formula risolutiva, dalla (28) si ottiene

$$\delta u = \left(\exp \int_a^x f_u dx \right) \int_a^x (f_y \Delta y + f_{y'} \Delta y') \left(\exp - \int_a^\xi f_u d\eta \right) d\xi$$

e perciò

$$\Delta u(x)=\int_a^x (f_y\Delta y+f_{y'}\Delta y')\left(\exp\int_\xi^x f_u d\eta\right)d\xi+$$
$$+\frac{1}{2}\int_a^x (\widetilde{f_{yy}}\overline{\Delta y}^2+\ldots.+\widetilde{f_{uu}}\overline{\Delta u}^2)\left(\exp\int_\xi^x f_u d\eta\right)d\xi.$$

Ponendo $x=b$, otteniamo la formula voluta

$$\Delta u(b)=\int_a^b \lambda(f_y\Delta y+f_{y'}\Delta y')dx+\frac{1}{2}\int_a^b \lambda(\widetilde{f_{yy}}\overline{\Delta y}^2+\ldots.+\widetilde{f_{uu}}\overline{\Delta u}^2)dx \tag{29}$$

con

$$\lambda=\exp\int_x^b f_u d\xi. \tag{30}$$

16. - Ora possiamo dimostrare un teorema analogo al teorema di S. Bernstein per i problemi liberi del Calcolo delle Variazioni.

Teorema X. - *Il campo A sia convesso; il problema di Mayer sia regolare positivo; la forma quadratica nelle tre variabili ξ_1, ξ_2, ξ_3,*

$$f_{yy}\xi_1^2+2f_{yy'}\xi_1\xi_2+2f_{yu}\xi_1\xi_3+f_{y'y'}\xi_2^2+2f_{y'u}\xi_2\xi_3+f_{uu}\xi_3^2$$

sia semidefinita in ogni punto (x, y, y', u) dell'insieme di definizione di $f(x, y, y', u)$; allora, presi comunque due punti P, Q del campo A, esiste al più una sola estremale che li congiunge, e questa, se esiste, è una curva minimante $u_C(b)$ nella classe K di tutte le curve ordinarie aventi gli stessi punti terminali [32].

Sia C_0 una estremale della classe K. Se C_1 è un'altra curva qualunque della classe K, possiamo scrivere la (29). Ma ora, poichè C_0 è un'estremale, il primo integrale nel secondo membro della (29) è nullo, come si vede integrando per parti $\lambda f_y\Delta y$ e tenendo conto della (30). Si ha perciò

$$u_{C_1}(b)-u_{C_0}(b)=\frac{1}{2}\int_a^b \lambda(\widetilde{f_{yy}}\overline{\Delta y}^2+\ldots.+\widetilde{f_{uu}}\overline{\Delta u}^2)dx \tag{31}$$

e quindi intanto

$$u_{C_1}(b)-u_{C_0}(b)\geqslant 0, \tag{32}$$

donde segue che ogni estremale della classe K è una curva minimante.

---

[32] Cfr. S. Bernstein, loc. cit., o L. Tonelli: *Fondamenti....*, II, p. 389 e segg.

Dimostriamo che se C_1 è di classe 1 nella (32) non può valere il segno di uguaglianza. Per questo, essendo sempre $\lambda>0$, basta dimostrare che vi è almeno un intervallo parziale (x_0, x_1) di (a, b) per il quale

$$\int_{x_0}^{x_1}(\tilde{f}_{yy}\overline{\Delta y}^2+2\tilde{f}_{yy'}\Delta y\Delta y'+2\tilde{f}_{yu}\Delta y\Delta u+\tilde{f}_{y'y'}\overline{\Delta y}'^2+\tilde{f}_{y'u}\Delta y'\Delta u+\tilde{f}_{uu}\overline{\Delta u}^2)dx>0.$$

Fissiamo un campo chiuso convesso limitato Σ dello spazio (x, y, y', u) che contenga tutti i punti $(x, y_0(x), y_0'(x), u_{C_0}(x))$, $(x, y_1(x), y_1'(x), u_{C_1}(x))$ per $a\leq x\leq b$, e sia M il massimo modulo di f_y, $f_{y'}$, f_{yy}, $f_{yy'}$, f_{yu}, $f_{y'u}$, f_{uu} in Σ, ed m sia il minimo di $f_{y'y'}$ pure in Σ. Allora ci basta dimostrare che l'intervallo (x_0, x_1) può essere scelto in modo che sia

$$\int_{x_0}^{x_1}\{m\overline{\Delta y}'^2-2M(\overline{\Delta y}^2+|\Delta y\Delta y'|+|\Delta y\Delta u|+|\Delta y'\Delta u|+\overline{\Delta u}^2)\}\,dx>0. \tag{33}$$

Ora, con notazioni evidenti,

$$\Delta u=\int_a^x(f_y{}^*\Delta y+f_{y'}^*\Delta y'+f_u{}^*\Delta u)dx$$

e quindi

$$\Delta u=\left(\exp\int_a^x f_u{}^*\,dx\right)\int_a^x(f_y{}^*\Delta y+f_{y'}^*\Delta y')\left(\exp-\int_a^\xi f_u{}^*\,d\eta\right)d\xi.$$

Perciò se x_0 è il massimo valore di x per il quale in (a, x_0) è sempre $\Delta y=0$, si ha, per $x>x_0$,

$$|\Delta u|<e^{M(b-a)}M\int_{x_0}^x\{|\Delta y|+|\Delta y'|\}\,dx=N\int_{x_0}^x\{|\Delta y|+|\Delta y'|\}\,dx$$

con $N=e^{M(b-a)}M$.

Applicando la disuguaglianza di SCHWARZ, per $x_0\leq x\leq x_1\leq b$, si ha

$$\overline{\Delta y}^2=\left\{\int_{x_0}^x\Delta y'dx\right\}^2\leq(x-x_0)\int_{x_0}^x\overline{\Delta y}'^2dx,$$

$$\int_{x_0}^{x_1}\overline{\Delta y}^2dx\leq(x_1-x_0)^2\int_{x_0}^{x_1}\overline{\Delta y}'^2dx,$$

$$\int_{x_0}^{x_1}|\Delta y\Delta y'|\,dx\leq\left\{\int_{x_0}^{x_1}\overline{\Delta y}^2dx\cdot\int_{x_0}^{x_1}\overline{\Delta y}'^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}\leq(x_1-x_0)\int_{x_0}^{x_1}\overline{\Delta y}'^2dx,$$

$$\int_{x_0}^{x_1}|\Delta y|\,dx\int_{x_0}^{x_1}|\Delta y'|\,dx\leq(x_1-x_0)\left\{\int_{x_0}^{x_1}\overline{\Delta y}^2dx\int_{x_0}^{x_1}\overline{\Delta y}'^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}\leq(x_1-x_0)^2\int_{x_0}^{x_1}\overline{\Delta y}'^2dx,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} |\Delta y \Delta u|\, dx \leqslant N\left\{\left[\int_{x_0}^{x_1} |\Delta y|\, dx\right]^2 + \int_{x_0}^{x_1} |\Delta y|\, dx \int_{x_0}^{x_1} |\Delta y'|\, dx\right\} \leqslant$$

$$\leqslant N[(x_1-x_0)^3 + (x_1-x_0)^2] \int_{x_0}^{x_1} \overline{\Delta y'}^2 dx,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} |\Delta y' \Delta u|\, dx \leqslant N\left\{\int_{x_0}^{x_1} |\Delta y|\, dx \int_{x_0}^{x_1} |\Delta y'|\, dx + \left[\int_{x_0}^{x_1} |\Delta y'|\, dx\right]^2\right\} \leqslant$$

$$\leqslant N[(x_1-x_0)^2 + (x_1-x_0)] \int_{x_0}^{x_1} \overline{\Delta y'}^2 dx,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \overline{\Delta u}^2 dx \leqslant N^2\left\{\left[\int_{x_0}^{x_1} |\Delta y|\, dx\right]^2 + 2\int_{x_0}^{x_1} |\Delta y|\, dx \int_{x_0}^{x_1} |\Delta y'|\, dx + \left[\int_{x_0}^{x_1} |\Delta y'|\, dx\right]^2\right\} \leqslant$$

$$\leqslant N^2[(x_1-x_0)^3 + 2(x_1-x_0)^2 + (x_1-x_0)] \int_{x_0}^{x_1} \overline{\Delta y'}^2 dx.$$

Da queste disuguaglianze si deduce subito che per $x_1 > x_0$ sufficientemente vicino a x_0 è vera la (33), e perciò

$$u_{C_1}(b) - u_{C_0}(b) > 0. \tag{34}$$

Di qua viene che oltre alla C_0 non vi possono essere altre estremali nella classe K, poichè se C_1 fosse una tale estremale, insieme con la (34) si avrebbe

$$u_{C_0}(b) - u_{C_1}(b) > 0 \tag{35}$$

e ciò non è possibile.

OSSERVAZIONE I. - *Se la forma quadratica del teorema precedente è definita positiva, e se nella classe K esiste un' estremale, questa è l'unica curva minimante $u_C(b)$ in K.*

Infatti, in questo caso, nella (32) non può valere il segno di uguaglianza per nessuna curva C_1 di K diversa da C_0.

OSSERVAZIONE II. - *Se la funzione $f(x, y, y', u)$ è indipendente da y la forma quadratica del teorema precedente diventa*

$$f_{y'y'}\xi_2^2 + 2f_{y'u}\xi_2\xi_3 + f_{uu}\xi_3^2$$

ed è semidefinita positiva allora e allora soltanto che è

$$f_{y'y'}f_{uu} - f_{y'u}^2 \geqslant 0$$

e definita positiva allora e allora soltanto che è

$$f_{y'y'}f_{uu} - f_{y'u}^2 > 0 \quad (^{33}).$$

(33) Si ricordi che è $f_{y'y'} > 0$.

17. - Un teorema analogo a quello ora dimostrato si può ottenere anche per i problemi di LAGRANGE che ora definiremo.

Conserviamo per la funzione $f(x, y, y', u)$ le ipotesi ammesse al numero 13, e manteniamo la definizione del funzionale $u_C(x)$ ivi data. Sia poi $g(x, y, y', u)$ una funzione soddisfacente le stesse condizioni ammesse per la $f(x, y, y', u)$, e chiamiamo ora curve ordinarie soltanto quelle delle curve ordinarie del numero 13 per le quali esiste finito l'integrale

$$I_C = \int_C g(x, y, y', u_C)dx. \tag{36}$$

Assegnata una classe K di curve ordinarie, chiamiamo problema di LAGRANGE relativo all'integrale I_C, all'equazione (21) e alla classe K, il problema della ricerca del minimo (o massimo) di I_C nella classe K.

Ciò posto andiamo a stabilire una formula analoga alla (29).

Sia ancora

$$C_0: \quad y = y_0(x), \qquad (a \leqslant x \leqslant b),$$

una curva ordinaria di classe 1 e

$$C_1: \quad y = y_1(x), \qquad (a \leqslant x \leqslant b),$$

una curva ordinaria qualunque avente gli stessi punti terminali. È allora

$$I_{C_1} - I_{C_0} = \int_a^b (g_y \Delta y + g_{y'} \Delta y' + g_u \delta u)dx + \int_a^b g_u(\Delta u - \delta u)dx + \\ + \frac{1}{2}\int_a^b (\widetilde{g}_{yy}\overline{\Delta y}^2 + \dots + \widetilde{g}_{uu}\overline{\Delta u}^2)dx. \tag{37}$$

Ma dall'espressione trovata al numero 15 per $\Delta u - \delta u$ segue

$$\int_a^b g_u(\Delta u - \delta u)dx = \\ = \frac{1}{2}\int_a^b \left\{ g_u \left(\exp \int_a^x f_u d\xi\right) \int_a^x (\widetilde{f}_{yy}\overline{\Delta y}^2 + \dots + \widetilde{f}_{uu}\overline{\Delta u}^2)\left(\exp - \int_a^\xi f_u d\eta\right) d\xi \right\} dx,$$

e con una integrazione per parti, si ottiene

$$\int_a^b g_u(\Delta u - \delta u)\, dx = \frac{1}{2}\int_a^b (\widetilde{f}_{yy}\overline{\Delta y}^2 + \dots + \widetilde{f}_{uu}\overline{\Delta u}^2)\mu dx \tag{38}$$

con

$$\mu = \int_x^b g_u \left(\exp \int_x^\eta f_u d\xi\right) d\eta. \tag{39}$$

Allora, la (37) si può scrivere, nella forma seguente

$$(40)\qquad I_{C_1}-I_{C_0}=\int_a^b (g_y\Delta y+g_{y'}\Delta y'+g_u\delta u)dx+$$
$$+\frac{1}{2}\int_a^b \{(\widetilde{g}_{yy}+\mu\widetilde{f}_{yy})\overline{\Delta y}^2+\ldots.+(\widetilde{g}_{uu}+\mu\widetilde{f}_{uu})\overline{\Delta u}^2\}\,dw$$

con μ data dalla (39). Questa è la formula analoga alla (29) che volevamo stabilire.

Ricordiamo ora che si chiamano estremali relative al problema di LAGRANGE considerato, le curve ordinarie di classe 1, soddisfacenti l'equazione differenziale

$$\frac{d}{dx}(g_{y'}+\mu f_{y'})=g_y+\mu f_y$$

con μ data dalla (39). Un calcolo non difficile dimostra allora che se C_0 è un' estremale si ha

$$\int_a^b (g_y\Delta y+g_{y'}\Delta y'+g_u\delta u)dx=0$$

e quindi la formula (40) si può scrivere

$$(41)\qquad I_{C_1}-I_{C_0}=\frac{1}{2}\int_a^b \{(\widetilde{g}_{yy}+\mu\widetilde{f}_{yy})\overline{\Delta y}^2+\ldots.+(\widetilde{g}_{uu}+\mu\widetilde{f}_{uu})\overline{\Delta u}^2\}\,dx.$$

Dopo ciò si può dimostrare, con lo stesso ragionamento del numero 16, il seguente teorema.

TEOREMA XI. - *Il campo A sia convesso; sia sempre $g_{y'y'}>0$ e sempre $g_u\geqslant 0$ o sempre $g_u\leqslant 0$; la forma quadratica nelle tre variabili ξ_1, ξ_2, ξ_3,*

$$g_{yy}\xi_1^2+2g_{yy'}\xi_1\xi_2+2g_{yu}\xi_1\xi_3+g_{y'y'}\xi_2^2+2g_{y'u}\xi_2\xi_3+g_{uu}\xi_3^2$$

sia semidefinita in ogni punto (x, y, y', u) dell'insieme di definizione di $g(x, y, y', u)$; la forma quadratica nelle tre variabili ξ_1, ξ_2, ξ_3,

$$f_{yy}\xi_1^2+2f_{yy'}\xi_1\xi_2+2f_{yu}\xi_1\xi_3+f_{y'y'}\xi_2^2+2f_{y'u}\xi_2\xi_3+f_{uu}\xi_3^2$$

sia semidefinita positiva se è sempre $g_u\geqslant 0$ e semidefinita negativa se è sempre $g_u\leqslant 0$; allora, presi comunque due punti P, Q del campo A, esiste al più una sola estremale che li congiunge, e questa, se esiste, è una curva minimante I_C nella classe K di tutte le curve ordinarie aventi gli stessi punti terminali.