

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

GIOVANNI RICCI

**Su la congettura di Goldbach e la costante di Schnirelmann
(prima memoria)**

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e série, tome 6, n° 1
(1937), p. 71-90

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1937_2_6_1_71_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1937, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SU LA CONGETTURA DI GOLDBACH E LA COSTANTE DI SCHNIRELMANN

(PRIMA MEMORIA)

di GIOVANNI RICCI. (Pisa).

Introduzione.

Le lettere latine minuscole, ad eccezione di e e o , denotano numeri razionali interi, le lettere p numeri primi, le lettere K costanti assolute.

Per ogni $n \geq 2$, esistono interi positivi g pei quali

$$(1) \quad n = p' + p'' + \dots + p^{(g)}$$

(p', p'', \dots uguali o distinti) e il minimo intero g per il quale vale una relazione di questo tipo è una funzione $G(n)$ di n .

È ovvio che esistono infiniti n pei quali $G(n) = 1$ e anche pei quali $G(n) = 2$ ($G(p) = 1$, $G(2p) = 2$); esistono anche infiniti n pei quali $G(n) \geq 3$: infatti per $n = 6h + 5$, non primo, non può essere $G(n) = 1$ e neppure $G(n) = 2$ poichè, essendo $6h + 5$ dispari > 5 , uno dei termini dovrebbe essere $p = 2$ mentre $6h + 5 - 2$ è divisibile per 3.

CHR. GOLDBACH congetturò ⁽¹⁾

$$(2) \quad G(2n) = 2, \quad (n \geq 2).$$

e anche (conseguenza immediata di questa)

$$(3) \quad 1 \leq G(n) \leq 3, \quad (n \geq 2).$$

La verità su questa congettura è ancor oggi un mistero; e fino a poco tempo fa neppure si sapeva se $G(n)$ fosse superiormente limitata per $n \rightarrow +\infty$. Si deve a L. SCHNIRELMANN la notevolissima proposizione

Esiste K tale che $G(n) \leq K$.

Qual'è il minimo valore \bar{G} della costante K per cui vale questa proposizione? L. SCHNIRELMANN non l'ha determinato, tuttavia ha fatto un passo in questo senso. Posta la proposizione precedente nella forma equivalente

(1) Veramente la classica congettura di GOLDBACH è espressa da (2) e (3) quando in (1) si ammettono anche addendi della forma $p = 1$; anche in questa forma leggermente più debole (2) e (3) permangono congetture e, seguendo l'uso moderno, supponiamo p primo (quindi ≥ 2).

Esistono K_1 e K_2 tali che per $n > K_1$ è $G(n) \leq K_2$,

ci possiamo chiedere quale sia il minimo valore S (costante di SCHNIRELMANN) delle costanti K_2 per le quali esista l'opportuna K_1 ; in altre parole, ci possiamo chiedere quale sia il numero S tale che: ogni intero razionale abbastanza grande si può ripartire nella somma di al più S numeri primi, mentre esistono infiniti interi razionali positivi che non si possono ripartire nella somma di al più $S-1$ numeri primi; cioè, ci possiamo chiedere quale sia il numero

$$S = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} G(n), \quad (3 \leq S \leq \overline{G}).$$

La ricerca di L. SCHNIRELMANN e, al seguito di questa, altre recentissime ⁽²⁾ sono destinate a questo problema, che è fondamentale per la valutazione di \overline{G} . Le varie tappe si possono riassumere nel modo seguente

$$S \leq 800.000 \quad (\text{L. SCHNIRELMANN, 1930}),$$

$$S \leq 2208 \quad (\text{N. P. ROMANOFF, 1935}),$$

$$S \leq 71 \quad (\text{H. HEILBRONN-E. LANDAU-P. SCHERK, 1936}).$$

Più precisamente l'ultimo risultato si può enunciare così: « Ogni intero n abbastanza grande ammette almeno una partizione del tipo

$$n = p' + p'' + \dots + p^{(68)} + v, \quad 0 \leq v \leq 1019 \text{ »}$$

(ed essendo $2 \leq v+2 \leq 1021$, $1 \leq G(v+2) \leq 3$, passando da n a $n+2$ ricaviamo $S \leq 71$).

Il lavoro di H. HEILBRONN-E. LANDAU-P. SCHERK [5] procede, con accurata raffinatezza, sulla base del classico *metodo di BRUN-SCHNIRELMANN* ⁽³⁾ innestandovi un'idea di N. P. ROMANOFF e facendo uso di una proposizione di A. KHINTCHINE.

Noi, riprendendo tale lavoro e introducendo alcune modificazioni nella parte che riguarda il classico *metodo di BRUN*, dimostreremo che

$$S \leq 67,$$

cioè

TEOREMA (A). - *Ogni intero abbastanza grande si può rappresentare come somma di al più 67 numeri primi.*

Le modificazioni in parola si basano sulle due seguenti osservazioni che per ora ci limitiamo ad accennare:

⁽²⁾ Per notizie su questo argomento, con obiezioni ai lavori precedenti, rimandiamo il lettore alla memoria H. HEILBRONN-E. LANDAU-P. SCHERK [5] che noi prendiamo come base, essendoci stato impossibile vedere i lavori russi. I numeri entro [] si riferiscono alla bibliografia collocata alla fine di questa introduzione.

⁽³⁾ Vedi E. LANDAU [8].

1°). Nel procedimento di V. BRUN conviene « fare i passi di lunghezza decrescente » (4).

2°). Detta $S^{(n)}$ la funzione simmetrica elementare di grado n dei numeri $\frac{1}{p}$ con $\alpha < p \leq \alpha^\theta$ ($\theta > 1$), per il fatto che la serie $\sum_p \frac{1}{p^2}$ converge, abbiamo

$$S^{(n)} = \frac{(S^{(1)})^n}{n!} + o(1) \quad (n \text{ e } \theta \text{ fissi, } \alpha \rightarrow +\infty)$$

e questa relazione viene da noi usata per limitare inferiormente la funzione $S^{(n)}$, in unione a quella consueta

$$S^{(n)} \leq \frac{(S^{(1)})^n}{n!}$$

che la limita superiormente.

Nella Parte II di questa memoria esponiamo una rappresentazione del fecondo metodo di V. BRUN (5) notomizzandolo e suddividendo i suoi strumenti secondo la loro natura (di analisi combinatoria, di algebra, di aritmetica); apparirà chiaramente come la sua radice si trovi in una proposizione di natura combinatoria. Questa esposizione risulta opportuna, perchè il nostro scopo è di impiccolire il valore di certe costanti a cui il metodo conduce, introducendo al momento giusto le modificazioni accennate; inoltre essa apparisce pronta per eventuali più generali applicazioni.

E noi, seguendo l'esempio di H. RADEMACHER [10], come facemmo in [11], ne abbiamo fatta applicazione allo studio aritmetico della successione dei valori interi assunti da un polinomio (a valori interi), e abbiamo ottenuto, tra l'altro, proposizioni che migliorano risultati noti, col precisare confini per certe costanti di cui era nota l'esistenza oppure col restringere confini preesistenti.

I risultati conseguiti si trovano esposti nella Parte I^a e discendono da alcuni teoremi generali (i Teoremi I, II, III, IV) le cui dimostrazioni sono svolte nella Parte III.

In questa *Introduzione* ci limitiamo a citare, oltre al Teorema (A) (che ci ha fornito l'occasione di questa ricerca), i seguenti

TEOREMA (B). - *In ogni progressione aritmetica*

$$ax + b \quad (x = 1, 2, 3, \dots), \quad ((a, b) = 1)$$

(4) Per orientare sul significato di questa locuzione grossolana diremo che i « passi » sono misurati dai numeri $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ definiti al n.° 1 (vedi (1.4)). Una accurata indagine sulle ragioni del successo conseguito in TH. ESTERMANN [3] rispetto alle ricerche precedenti, ci mostra che esso è dovuto all'accorgimento del « primo passo più lungo dei successivi ». Noi abbiamo già applicato in [11] tale accorgimento, e qui siamo indotti, in modo naturale, a graduare la lunghezza per alcuni passi iniziali.

(5) Ci siamo largamente serviti delle esposizioni precedenti: V. BRUN [1], [2], H. RADEMACHER [10], E. LANDAU [7] pp. 71-78, [8], TH. ESTERMANN [3], G. RICCI [11], H. HEILBRONN-E. LANDAU-P. SCHERK [5].

1°) *esistono infiniti interi n composti con al più due fattori primi (uguali o distinti), tutti maggiori di $n^{\frac{1}{3}}$;*

2°) *esistono infiniti interi n composti con al più tre fattori primi, tutti distinti e tutti maggiori di $n^{\frac{1}{4}}$.*

Questo teorema si accosta a quello classico di P. G. L.-DIRICHLET; il suo interesse consiste nel fatto che la sua dimostrazione richiede esclusivamente mezzi elementari e che inoltre esso rientra come caso particolare nel seguente Teorema (C). Il Teorema (B) segna un progresso sui risultati conseguiti nel tentare di dimostrare elementarmente il classico teorema della progressione aritmetica (5 fattori primi V. BRUN (1919) [1] p. 26, 3 fattori primi H. RADEMACHER (1924) [10], 4 fattori primi distinti G. RICCI (1933) [11] p. 446).

TEOREMA (C). - *Sia $D \cdot F(x)$ un polinomio in x di grado g a coefficienti interi, primitivo, irriducibile, e sia D il suo divisore fisso ⁽⁶⁾. Nella successione di interi*

$$F(1), F(2), F(3), \dots$$

1°) *ne esistono infiniti $F(n)$ composti con al più $3g-1$ fattori primi (uguali o distinti), tutti maggiori di $n^{\frac{1}{3}}$;*

2°) *ne esistono infiniti $F(n)$ composti con al più*

$$\left[\frac{2sg-1}{s-g} \right], \quad (g+1 \leq s \leq 3g)$$

fattori primi (uguali o distinti), tutti maggiori di $n^{\frac{s-g}{2s}}$, ciascun fattore primo figurando con un esponente $< s$.

Detto $B(\xi; F(x))$ il numero degl'interi $n \leq \xi$ pei quali sono soddisfatte le condizioni in 1°), è

$$a_1 \frac{\xi}{\log \xi} < B(\xi; F(x)) < a_2 \frac{\xi}{\log \xi}, \quad \text{per } \xi > a_3$$

(a_1, a_2, a_3 dipendenti soltanto da $F(x)$); lo stesso vale per le condizioni in 2°).

Anche questo teorema migliora risultati precedenti: $4g-1$ fattori primi (H. RADEMACHER [10]), $[3,025g]$ fattori primi, $\left[\frac{sg^{2,025}}{s-g} \right]$ fattori primi (uguali o distinti) ciascuno con un esponente $< s$ (G. RICCI [11]).

Citiamo infine anche il seguente risultato

⁽⁶⁾ Ricordiamo che D divide $g!$. Ad esempio: per $D \cdot F(x) = x^3 + x + 14$ è $D = 2$, per $D \cdot F(x) = x(x-1)\dots(x-g+1) = g! \binom{x}{g}$ è $D = g!$, $F(x) = \binom{x}{g}$.

TEOREMA (D). - Siano

$$m \neq 0, a > 0, b > 0 \text{ interi, } N > 0 \text{ intero pari.}$$

Denotiamo con $Z(\xi)$ il numero degl'interi x soddisfacenti alle seguenti condizioni

1°) $0 < x \leq \xi,$

2°) x è composto con al più a fattori primi (uguali o distinti) ciascuno maggiore di $x^{\frac{1}{a+1}},$

3°) $x+2m$ è composto con al più b fattori primi (uguali o distinti) ciascuno maggiore di $x^{\frac{1}{b+1}}.$

Denotiamo con $W(N)$ il numero delle partizioni

$$N = A + B \quad (A, B \text{ interi positivi})$$

nelle quali A è composto con al più a fattori primi, ciascuno maggiore di $N^{\frac{1}{a+1}}$ e B è composto con al più b fattori primi, ciascuno maggiore di $N^{\frac{1}{b+1}}.$

Per

$$(a=6, b=6) \text{ (TH. ESTERMANN [3])}$$

$$(a=5, b=7), \quad (a=4, b=9), \quad (a=3, b=15), \quad (a=2, b=366)$$

risulta

$$\frac{\xi}{\log^2 \xi} = O(Z(\xi)), \quad Z(\xi) = O\left(\frac{\xi}{\log^2 \xi}\right) \quad \text{per } \xi \rightarrow +\infty$$

$$\frac{N}{\log^2 N} = O(W(N)). \quad \text{per } N \rightarrow +\infty$$

Questa proposizione per $a=b=1$, tolte evidentemente le condizioni supplementari, prende la forma delle due classiche congetture di GOLDBACH e dei numeri primi gemelli ($m=1$).

La validità di una proposizione di questo tipo fu dimostrata la prima volta da V. BRUN [1919] [2] ($a=b=9$); successivamente si ebbe per $a=b=7$ H. RADEMACHER (1924) [10], per $a=b=6$ TH. ESTERMANN (1932) [3].

BIBLIOGRAFIA

- [1]. V. BRUN: *Le crible d'Ératosthène et le théorème de Goldbach*. [Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 168 (1919, 1.º sem.), pp. 544-546], e anche [Videnskap Skrifter, I. Mat. Nat. Klasse, 1920, n.º 3, Kristiania].
- [2]. — *La série $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{29} + \frac{1}{31} + \dots$ est convergente ou finie* [Bulletin des Sciences Mathématiques, t. 43 (1919), pp. 100-104, 124-128].
- [3]. TH. ESTERMANN: *Eine neue Darstellung und neue Anwendungen der Viggo-Brunnschen Methode* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, 168 Bd. (1932), pp. 106-116].
- [4]. H. HEILBRONN: *Über die Verteilung der Primzahlen in Polynomen* [Mathematische Annalen, 104 Bd. (1931), pp. 794-799].
- [5]. H. HEILBRONN-E. LANDAU-P. SCHERK: *Alle grossen ganzen Zahlen lassen sich als Summe von höchstens 71 Primzahlen darstellen*. [Časopis pro pěstování Matematiky a Fysiky, 65 (1936), pp. 117-140].
- [6]. E. LANDAU: *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* [Leipzig, 1909].
- [7]. — *Vorlesungen über Zahlentheorie* [Leipzig, 1927].
- [8]. — *Die Goldbachsche Vermutung und der Schnirelmannsche Satz* [Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1930, pp. 255-276].
- [9]. T. NAGEL: *Généralisation d'un théorème de Tchebycheff* [Journal de Mathématiques, 8º s., t. 4 (1921), pp. 343-356].
- [10]. H. RADEMACHER: *Beiträge zur Viggo Brunnschen Methode in der Zahlentheorie* [Abhandlungen Math. Sem. Hamburg, 3 Bd. (1924), pp. 12-30].
- [11]. G. RICCI: *Ricerche aritmetiche sui polinomi* [Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. 57 (1933), pp. 433-475].

PARTE I.

Risultati.

1. - **Notazioni e definizioni.** — Ogni somma vuota di termini significa 0; ogni prodotto vuoto di fattori significa 1.

$C=0,5772\dots$ è la costante di EULER-MASCHERONI.

p_1, p_2, p_3, \dots è la successione crescente degl'interi primi razionali.

Sia

$$F(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_gx^g \quad (g \geq 1, a_g > 0)$$

un polinomio in x di grado $g \geq 1$, a valori interi (quindi a coefficienti razionali) e divisore fisso 1, e sia D il minimo comune multiplo dei denominatori dei coefficienti a_0, a_1, \dots, a_g (il polinomio $DF(x)$ risulta a coefficienti interi primitivo con divisore fisso D ; ricordiamo che D divide $g!$ e quindi $g!a_g \geq 1$).

Sia inoltre

$$(1.1) \quad DF(x) = D_1F_1(x) \cdot D_2F_2(x) \cdot \dots \cdot D_fF_f(x) \quad (f \geq 1)$$

la decomposizione del polinomio $DF(x)$ nei suoi f fattori irriducibili a coefficienti interi e primitivi $D_1F_1(x), D_2F_2(x), \dots, D_fF_f(x)$, che supponiamo *distinti*, dei gradi g_1, g_2, \dots, g_f e divisori fissi rispettivi D_1, D_2, \dots, D_f . I polinomi $F_1(x), F_2(x), \dots, F_f(x)$ risultano a valori interi e inoltre abbiamo

$$(1.2) \quad g = g_1 + g_2 + \dots + g_f, \quad D = D_0D_1 \dots D_f \quad (D_0 \text{ intero } \leq g!) \quad (?).$$

Denotiamo con Δ il discriminante di $DF(x)$; $\Delta \neq 0$.

Denotiamo con $h(m)$ il numero delle radici distinte secondo (mod m) della congruenza

$$(1.3) \quad F(x) \equiv 0 \pmod{m}$$

(per $m \geq 2$ risulta $0 \leq h(m) < m$).

Se $f \geq 2$ e p divide ambedue gl'interi $F_i(x_0)$ e $F_j(x_0)$ ($i \neq j$) esso divide anche il risultante dei due polinomi $D_iF_i(x), D_jF_j(x)$; si conclude che per $f \geq 2$ esiste un p' conveniente (dipendente da $F(x)$) tale che ogni $p > p'$ divide al più uno solo degl'interi $F_1(x_0), F_2(x_0), \dots, F_f(x_0)$ qualunque sia l'intero x_0 .

Definizione di $\tau(f)$, σ , $\bar{\sigma}$, μ_F .

Consideriamo la successione non crescente (e definitivamente costante)

$$(\Theta) \quad \theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_{a+1}, \dots \quad (a \geq 0)$$

(?) Per esempio:

$$DF(x) = x(x+1), \quad D = 2, \quad F_1(x) = x, \quad F_2(x) = x+1, \quad D_0 = 2, \quad D_1 = 1, \quad D_2 = 1.$$

con

$$(1.4) \quad \theta_1 \geq \theta_2 \geq \theta_3 \geq \dots \geq \theta_a \geq \theta_{a+1} = \theta_{a+2} = \dots = \theta > 0$$

dove θ soddisfa alle condizioni

$$(1.5) \quad e^\theta \left(\frac{\theta e}{2}\right)^2 < 1 < e^\theta$$

(e con questo le serie

$$\sum_{b=1}^{\infty} \frac{(\theta^2 e^\theta)^b b^{2b}}{(2b+1)!}, \quad \sum_{b=1}^{\infty} \frac{(\theta^2 e^\theta)^b b^{2b-1}}{(2b)!}$$

risultano ambedue convergenti, poichè

$$\frac{(\theta^2 e^\theta)^b b^{2b}}{(2b+1)!} < \frac{(\theta^2 e^\theta)^b b^{2b-1}}{(2b)!} < \left(\frac{4}{e^2}\right)^b \frac{1}{b} \cdot \frac{b^{2b}}{(2b)!} < \left(\frac{4}{e^2}\right)^b \frac{1}{b} \cdot \frac{b^{2b} e^{2b}}{(2b)^{2b} \sqrt{4\pi b}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi b^{\frac{3}{2}}}}.$$

Poniamo

$$(1.6) \quad \tau(f) = \tau(f, \Theta) = \sum_{b=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_b}{f}\right) = \\ = \sum_{b=1}^{a-1} \exp\left(-\frac{\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_b}{f}\right) + \frac{\exp\left(-\frac{\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_a}{f}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{\theta}{f}\right)},$$

$$(1.7) \quad E(a, \Theta) = \begin{cases} 1 & \text{per } a=0 \\ \sum_{i=0}^{2a} (-1)^i \sum_{J(a,i)} \frac{\theta_1^i \theta_2^i \dots \theta_a^i}{j_1! j_2! \dots j_a!} & \text{per } a>0, \end{cases}$$

$$(1.8) \quad \bar{E}(a, \Theta) = \begin{cases} 1 & \text{per } a=0 \\ \sum_{i=0}^{2a-1} (-1)^i \sum_{\bar{J}(a,i)} \frac{\theta_1^i \theta_2^i \dots \theta_a^i}{j_1! j_2! \dots j_a!} & \text{per } a>0, \end{cases}$$

dove $j \geq 0$ e i campi $J(a, i)$, $\bar{J}(a, i)$ sono definiti per $a > 0$ dalle condizioni seguenti

$$(1.9) \quad \begin{cases} J(a, i) \equiv \begin{cases} j_1 + j_2 + \dots + j_a = i \\ j_1 + j_2 + \dots + j_r \leq 2r \end{cases} & \text{per } 1 \leq r < a \\ \bar{J}(a, i) \equiv \begin{cases} j_1 + j_2 + \dots + j_a = i \\ j_1 + j_2 + \dots + j_r \leq 2r - 1 \end{cases} & \text{per } 1 \leq r < a, \end{cases}$$

$$(1.10) \quad \begin{cases} \sigma = \sigma(a, \Theta) = e^{\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_a} \left\{ E(a, \Theta) + \frac{\theta_1^2 \theta_2^2 \dots \theta_a^2}{\theta^{2a-1} e^{a\theta}} \sum_{b=a+1}^{\infty} \beta_b \right\} & (a \geq 0) \\ \beta_b = \frac{b^{2b}}{(2b+1)!} (\theta^2 e^\theta)^b, \end{cases}$$

$$(1.11) \quad \begin{cases} \bar{\sigma} = \bar{\sigma}(a, \Theta) = e^{\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_a} \left\{ \bar{E}(a, \Theta) - \frac{\theta_1 \theta_2^2 \dots \theta_a^2}{\theta^{2a-1} e^{a\theta}} \sum_{b=a+1}^{\infty} \bar{\beta}_b \right\} & (a \geq 0) \\ \bar{\beta}_b = \begin{cases} \frac{\theta^2 e^\theta}{2} & \text{per } b=1 \\ (\theta^2 e^\theta)^b \left(\frac{b^{2b-1}}{(2b)!} - \frac{1}{2^b} \left\{ \frac{1}{b} + \frac{5}{6} (b-2) + \frac{7}{20} (b-2)(b-3) \right\} \right) & \text{per } b>1. \end{cases} \end{cases}$$

È noto che ⁽⁸⁾

$$(1.12) \quad \prod_{p \leq \xi} \left(1 - \frac{h(p)}{p}\right) \sim \frac{\mu_F}{\log^f \xi} \quad \text{per } \xi \rightarrow +\infty \quad (\text{T. NAGEL})$$

dove μ_F è un numero dipendente soltanto da $F(x)$.

2. - Calcoli numerici. — Calcoliamo particolari valori numerici delle funzioni

$$\tau(f, \Theta), \quad \sigma(a, \Theta), \quad \bar{\sigma}(a, \Theta),$$

assumendo $a=3$; valori numerici che ci saranno utili per trarre le nostre conclusioni.

Per la funzione $\tau(f, \Theta)$ assegnata in (1.6) abbiamo

$$\begin{aligned} \tau(1) &= \tau(1, \Theta) = e^{-\theta_1} + e^{-(\theta_1+\theta_2)} + e^{-(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}(1 - e^{-\theta})^{-1} \\ \tau(2) &= \tau(2, \Theta) = e^{-\frac{1}{2}\theta_1} + e^{-\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)} + e^{-\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}(1 - e^{-\frac{1}{2}\theta})^{-1} \quad \text{ecc.} \end{aligned}$$

Assumendo

$$(2.1) \quad \theta_1 = 0,70, \quad \theta_2 = 0,58, \quad \theta_3 = 0,54, \quad \theta = 0,532$$

risulta

$$(2.2) \quad \tau(1) = \tau(1, \Theta) < 1,168, \quad \tau(2) = \tau(2, \Theta) < 2,9555.$$

Assumendo

$$(2.3) \quad \theta_1 = 0,90, \quad \theta_2 = 0,56, \quad \theta_3 = 0,52, \quad \theta = 0,50$$

risulta

$$(2.4) \quad \tau(1) = \tau(1, \Theta) < 0,9898, \quad \tau(2) = \tau(2, \Theta) < 2,7994, \quad \tau(3) = \tau(3, \Theta) < 4,7223.$$

La funzione $\sigma(a, \Theta)$, assegnata in (1.10), prende per $a=3$ la forma

$$\sigma(3, \Theta) = e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3} \left\{ E(3, \Theta) + \frac{\theta_1^2 \theta_2^2 \theta_3^2}{\theta^5 e^{3\theta}} \sum_{b=4}^{\infty} \beta_b \right\},$$

e per la sua valutazione osserviamo

$$\begin{aligned} \sum_{b=7}^{\infty} \beta_b &< \sum_{b=7}^{\infty} (\theta^2 e^{\theta})^b \left(\frac{e^{\theta}}{4}\right)^b \frac{1}{4\sqrt{\pi} b^{\frac{3}{2}}} < \frac{1}{4\sqrt{7\pi}} \sum_{b=7}^{\infty} \frac{\lambda^b}{b} \quad \left(\text{con } \lambda = \frac{\theta^2 e^{\theta+2}}{4}\right) \\ &< \frac{1}{4\sqrt{7\pi}} \int_6^{\infty} \frac{\lambda^u}{u} du = \frac{1}{4\sqrt{7\pi}} \int_{6 \log \frac{1}{\lambda}}^{\infty} \frac{e^{-v}}{v} dv, \\ \sum_{b=4}^{\infty} \beta_b &< \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 + \frac{1}{4\sqrt{7\pi}} \int_{6 \log \frac{1}{\lambda}}^{\infty} \frac{e^{-v}}{v} dv; \end{aligned}$$

⁽⁸⁾ Per questa proposizione vedi n.° 27. Come esempio: per $F(x) = ax + b$, $(a, b) = 1$ e per $F(x) = x^2 + 1$ abbiamo rispettivamente (nozioni classiche!)

$$\mu_F = e^{-C} \prod_{p|a} \frac{p}{p-1}, \quad \mu_F \sim \prod_{\substack{p \leq \xi \\ p \equiv 1 \pmod{4}}} \left(1 - \frac{2}{p}\right) \cdot \frac{\log \xi}{2}.$$

dalle definizioni (1.7) e (1.9) risulta

$$E(3, \Theta) = \sum_{i=0}^6 (-1)^i \sum_{J(3, i)} \dots = \sum_{i=0}^6 (-1)^i E_3^{(i)}$$

dove

$$\begin{aligned} E_3^{(0)} &= 1 \\ E_3^{(1)} &= \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \\ E_3^{(2)} &= \frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)^2 \\ E_3^{(3)} &= \frac{1}{6} \{ (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)^3 - \theta_1^3 \} \\ E_3^{(4)} &= \frac{1}{24} \{ (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)^4 - \theta_1^4 - 4\theta_1^3(\theta_2 + \theta_3) \} \\ E_3^{(5)} &= \frac{1}{120} \{ (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)^5 - \theta_1^5 - 5\theta_1^4(\theta_2 + \theta_3) - 10\theta_1^3(\theta_2 + \theta_3)^2 - \\ &\quad - \theta_2^3(\theta_2^2 + 5\theta_1\theta_2 + 10\theta_1^2) \} \\ E_3^{(6)} &= \frac{\theta_3^2}{720} \{ 15\theta_1^2(6\theta_2^2 + 4\theta_2\theta_3 + \theta_3^2) + 6\theta_1(10\theta_2^3 + 10\theta_2^2\theta_3 + 5\theta_2\theta_3^2 + \theta_3^3) + \\ &\quad + (15\theta_2^4 + 20\theta_2^3\theta_3 + 15\theta_2^2\theta_3^2 + 6\theta_2\theta_3^3 + \theta_3^4) \}. \end{aligned}$$

Assumendo come in (2.1)

$$\theta_1 = 0,70, \quad \theta_2 = 0,58, \quad \theta_3 = 0,54, \quad \theta = 0,532$$

risulta

$$e^{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3} < 6,171859$$

$$E(3, \Theta) < 0,186722$$

$$\frac{\theta_1^2 \theta_2^2 \theta_3^2}{\theta^5 e^{3\theta}} < 0,228639$$

$$\sum_{b=4}^{\infty} \beta_b < 0,0404263$$

$$(2.5) \quad \sigma = \sigma(3, \Theta) < 1,20948.$$

La funzione $\bar{\sigma}(a, \Theta)$ assegnata in (1.11) prende per $a=3$ la forma analoga

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(3, \Theta) = e^{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3} \left\{ \bar{E}(3, \Theta) - \frac{\theta_1 \theta_2^2 \theta_3^2}{\theta^5 e^{3\theta}} \sum_{b=4}^{\infty} \bar{\beta}_b \right\}$$

e per la sua valutazione osserviamo

$$\begin{aligned} \sum_{b=8}^{\infty} \bar{\beta}_b &< \sum_{b=8}^{\infty} (\theta^2 e^{\theta})^b \left(\frac{e^2}{4}\right)^b \frac{1}{2\sqrt{\pi} b^{\frac{3}{2}}} < \frac{1}{2\sqrt{8\pi}} \int_{7 \log \frac{1}{\lambda}}^{\infty} \frac{e^{-v}}{v} dv & \left(\lambda = \frac{\theta^2 e^{\theta+2}}{4} \right) \\ \sum_{b=4}^{\infty} \bar{\beta}_b &< \bar{\beta}_4 + \bar{\beta}_5 + \bar{\beta}_6 + \bar{\beta}_7 + \frac{1}{2\sqrt{8\pi}} \int_{7 \log \frac{1}{\lambda}}^{\infty} \frac{e^{-v}}{v} dv; \end{aligned}$$

dalle definizioni (1.8) e (1.9) risulta

$$\bar{E}(3, \Theta) = \sum_{i=0}^5 (-1)^i \sum_{\bar{J}(3, i)} \dots = \sum_{i=0}^5 (-1)^i \bar{E}_3^{(i)}$$

dove

$$\begin{aligned} \bar{E}_3^{(0)} &= 1 \\ \bar{E}_3^{(1)} &= \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \\ \bar{E}_3^{(2)} &= \frac{1}{2} \{ (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)^2 - \theta_1^2 \} \\ \bar{E}_3^{(3)} &= \frac{1}{6} \{ (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)^3 - \theta_1^3 - 3\theta_1^2(\theta_2 + \theta_3) \} \\ \bar{E}_3^{(4)} &= \frac{\theta_3}{24} \{ 4\theta_1(3\theta_2^2 + 3\theta_2\theta_3 + \theta_3^2) + 2\theta_2(2\theta_2^2 + 3\theta_2\theta_3 + 2\theta_3^2) + \theta_3^3 \} \\ \bar{E}_3^{(5)} &= \frac{\theta_3^2}{120} \{ 5\theta_1(6\theta_2^2 + 4\theta_2\theta_3 + \theta_3^2) + 5\theta_2(2\theta_2^2 + 2\theta_2\theta_3 + \theta_3^2) + \theta_3^3 \}. \end{aligned}$$

Assumendo come in (2.3)

$$\theta_1 = 0,90, \quad \theta_2 = 0,56, \quad \theta_3 = 0,52, \quad \theta = 0,50$$

risulta

$$\begin{aligned} e^{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3} &> 7,24274 \\ \bar{E}(3, \Theta) &> 0,0122847 \\ \frac{\theta_1 \theta_2^2 \theta_3^2}{\theta^5 e^{3\theta}} &< 0,5449213 \\ \sum_{b=4}^{\infty} \bar{\beta}_b &< 0,0223742 \\ (2.6) \quad \bar{\sigma} = \bar{\sigma}(3, \Theta) &> 0,00066 (> 0). \end{aligned}$$

3. - TEOREMA I. - Denotiamo con $A(z, \xi)$ il numero degli interi x , per quali sono soddisfatte le condizioni seguenti

1°) $z < x \leq z + \xi$,

2°) ogni divisore primo di $F(x)$ è maggiore di p_t ,

3°) ogni eventuale divisore quadrato di $F(x)$ è maggiore di p_r^2 ⁽⁹⁾.

Fissato $\varepsilon > 0$ arbitrario, esiste un numero $\gamma = \gamma(\varepsilon, F, \Theta)$ dipendente soltanto da ε, F, Θ tale che per

$$(3.1) \quad r \geq t \geq \gamma(\varepsilon, F, \Theta)$$

risulta

$$(3.2) \quad (\bar{\sigma} - \varepsilon) \mu_F \frac{\xi}{\log^f p_t} - p_r p_t^{2r(f)+\varepsilon} < A(z, \xi) < (\bar{\sigma} + \varepsilon) \mu_F \frac{\xi}{\log^f p_t} + p_r^2 p_t^{2r(f)+\varepsilon}.$$

Osservazione. - I membri estremi di questa limitazione sono indipendenti da z .

⁽⁹⁾ È ovvio che si fa eccezione del divisore quadrato 1. Questa eccezione resta sottintesa anche per tutto il seguito.

4. - **Conseguenze del Teorema I.** — Il Teorema I si presenta in una forma molto generale e da esso possiamo trarre proposizioni interessanti, le quali non sono altro che suoi aspetti particolari.

Ci limitiamo qui ad enunciarne alcune.

TEOREMA. - Sia $\omega > 0$. Denotiamo con $C_\omega(\xi; F(x))$ il numero degl'interi x , con $0 < x \leq \xi$, pei quali ogni divisore primo di $F(x)$ è maggiore di x^ω .
Risulta

$$\overline{\lim}_{\xi \rightarrow +\infty} C_\omega(\xi; F(x)) \frac{\log^f \xi}{\xi} \leq \begin{cases} \frac{\sigma \mu_F}{\omega^f} & \text{per } 0 < \omega \leq \frac{1}{2(1 + \tau(f))} \\ 2^f(1 + \tau(f))^f \sigma \mu_F & \text{per } \omega > \frac{1}{2(1 + \tau(f))}. \end{cases}$$

Dimostrazione. - Poichè

$$\overline{\lim}_{\xi \rightarrow +\infty} C_\omega(\xi; F(x)) \frac{\log^f \xi}{\xi}$$

è funzione non crescente di ω , e il secondo membro è funzione continua di ω , basta evidentemente dimostrare il teorema per

$$0 < \omega < \frac{1}{2(1 + \tau(f))}.$$

Sia $\eta > 0$; poniamo $p_r = p_t \leq \xi^{(1-\eta)\omega} < p_{t+1}$. Da (3.2) ricaviamo

$$\begin{aligned} C_\omega(\xi; F(x)) &\leq \xi^{1-\eta} + A([\xi^{1-\eta}], \xi - [\xi^{1-\eta}]) \leq \\ &\leq \xi^{1-\eta} + (\sigma + \varepsilon) \mu_F \frac{\xi}{\log^f p_t} + p_r^2 p_t^{2\tau(f)+\varepsilon} \leq \\ &\leq \xi^{1-\eta} + \frac{(\sigma + \varepsilon) \mu_F}{(1-\eta)^f \omega^f} \frac{\xi}{\log^f \xi} + \xi^{(1-\eta)\omega(2+2\tau(f)+\varepsilon)+o(1)}. \end{aligned}$$

Da cui

$$C_\omega(\xi; F(x)) \frac{\log^f \xi}{\xi} \leq \frac{\log^f \xi}{\xi^\eta} + \frac{(\sigma + \varepsilon) \mu_F}{(1-\eta)^f \omega^f} + \xi^{(1-\eta)\omega(2+2\tau(f)+\varepsilon)+o(1)-1} \log^f \xi.$$

Per l'arbitrarietà di ε e di η possiamo assumere $(1-\eta)\omega(2+2\tau(f)+\varepsilon) < 1$, e ne segue l'asserto.

In particolare si ha

TEOREMA. - Sia $F(x)$ irriducibile. Denotiamo con $\pi(\xi; F(x))$ il numero degl'interi x , con $0 < x \leq \xi$, pei quali $F(x)$ risulta primo. Allora

$$\overline{\lim}_{\xi \rightarrow +\infty} \pi(\xi; F(x)) \frac{\log \xi}{\xi} \leq 2(1 + \tau(1)) \sigma \mu_F.$$

I valori calcolati (n.º 2, (2.2) e (2.5)) $\tau(1) < 1,168$, $\sigma < 1,210$ ci danno

$$\overline{\lim}_{\xi \rightarrow +\infty} \pi(\xi; F(x)) \frac{\log \xi}{\xi} < \frac{29}{4} \mu_F.$$

Si precisa così un teorema di H. HEILBRONN [4] che afferma

$$\pi(\xi; F(x)) = O\left(\frac{\xi}{\log \xi}\right).$$

Dal Teorema I seguono immediatamente i Teoremi (B) e (C) dell'Introduzione. Ci limitiamo a considerare il Teorema (C) come più generale; anzi la parte 1° del Teorema (C) è contenuta come caso particolare nella successiva parte 2° poichè facendo in questa $s=3g$ risulta

$$\frac{s-g}{2s} = \frac{1}{3}, \quad \left[\frac{2sg-1}{s-g} \right] = 3g-1,$$

e ci limiteremo a dimostrare questa parte 2°).

Per la limitazione a destra basta invocare il primo teorema di questo numero, col porre in esso $\omega = \frac{s-g}{2s}$; dalla definizione di $C_\omega(\xi; F(x))$ segue immediatamente (essendo $F(x)$ irriducibile è da porre $f=1$)

$$B(\xi; F(x)) \leq C_\omega(\xi; F(x)) < a_2 \frac{\xi}{\log \xi}, \quad \text{per } \xi \geq \xi_0 \text{ (conveniente).}$$

Veniamo a dimostrare la limitazione a sinistra. Poichè, per $\xi \geq \xi_1$ conveniente, da $0 < x \leq \xi$ segue $|F(x)| < F(\xi) < (a_g + 1)\xi^g$, ci conviene assumere nella formulazione del Teorema I

$$p_t \leq (a_g + 1)\xi^{\frac{s-g}{2s}} < p_{t+1}, \quad p_r \leq (a_g + 1)\xi^{\frac{g}{s}} < p_{r+1}$$

e allora risulta evidentemente $B(\xi; F(x)) \geq A(0, \xi)$ e la questione è ricondotta a limitare di sotto la funzione $A(0, \xi)$. Dalle posizioni precedenti abbiamo

$$p_r p_t^{2\tau(1)+\varepsilon} \leq (a_g + 1)^{4+2\tau(1)+\varepsilon} \xi^{4-\kappa},$$

dove

$$\frac{g}{s} + \frac{s-g}{2s} (2\tau(1) + \varepsilon) = \frac{g}{s} + \left(1 - \frac{g}{s}\right) \left(\tau(1) + \frac{\varepsilon}{2}\right) = 1 - \left(1 - \tau(1) - \frac{\varepsilon}{2}\right) \left(1 - \frac{g}{s}\right) = 1 - \kappa.$$

Per $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo è $\kappa > 0$, poichè $\tau(1) < 0,99$ (vedi (2.4)), $1 - \frac{g}{s} \geq \frac{1}{g+1} > 0$. Essendo

$$\log p_t = \frac{s-g}{2s} \log \xi + o(1),$$

dal Teorema I risulta

$$A(0, \xi) > (\bar{\sigma} - \varepsilon) \mu_F \frac{\xi}{\frac{s-g}{2s} \log \xi + o(1)} - \xi^{4-\kappa}$$

da cui, per l'arbitrarietà di ε , segue l'asserto poichè $\bar{\sigma} > 0$, $\kappa > 0$.

Dal Teorema I ricaviamo anche la proposizione seguente che ci limitiamo ad enunciare ⁽¹⁰⁾.

TEOREMA. - *Siano*

$$a_1x + b_1, \quad a_2x + b_2, \dots, \quad a_fx + b_f \quad ((a_i, b_i) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, f)$$

⁽¹⁰⁾ Vedi G. RICCI [11], p. 445.

f progressioni aritmetiche distinte ($f \geq 1$) ciascuna colla ragione e il termine iniziale primi tra loro; sia D il divisore fisso del polinomio

$$(a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \dots (a_fx + b_f)$$

e poniamo

$$a_1x + b_1 = d_1P_1, \quad a_2x + b_2 = d_2P_2, \dots, \quad a_fx + b_f = d_fP_f,$$

con $d_1d_2 \dots d_f = D$.

Il numero degl'interi positivi $x \leq \xi$ pei quali ciascuno degli f interi P_1, P_2, \dots, P_f si compone di al più $[1 + 2\tau(f)]$ fattori primi (uguali o distinti) tutti maggiori di $\xi^{\frac{1}{1+2\tau(f)}}$ ha l'ordine di grandezza $\frac{\xi}{\log^f \xi}$.

Lo stesso ordine di grandezza ha altresì il numero degl'interi positivi $x \leq \xi$ pei quali ciascuno degli f interi P_1, P_2, \dots, P_f si compone di al più $[4\tau(f)]$ fattori primi tutti distinti e tutti maggiori di $\xi^{\frac{1}{4\tau(f)}}$.

Per $f=1, 2, 3, \dots$ si ottiene rispettivamente dai valori (2.4)

$$[1 + 2\tau(f)] = 2, 6, 14, \dots \quad [4\tau(f)] = 3, 11, 18, \dots$$

Ricaviamo anche le proposizioni seguenti:

TEOREMA. - Denotiamo con $T(\xi)$ il numero dei coefficienti binomiali $\binom{x}{g}$ con $0 < x \leq \xi$ composti di al più $g[1 + 2\tau(g)]$ fattori primi (uguali o distinti) tutti maggiori di $\xi^{\frac{1}{1+2\tau(g)}}$ (oppure: composti di al più $g[4\tau(g)]$ fattori primi tutti distinti e tutti maggiori di $\xi^{\frac{1}{4\tau(g)}}$).

Esistono tre numeri a_1, a_2, a_3 , dipendenti soltanto da g pei quali

$$a_1 \frac{\xi}{\log^g \xi} < T(\xi) < a_2 \frac{\xi}{\log^g \xi} \quad \text{per } \xi \geq a_3.$$

TEOREMA. - Sia $F(x)$ di grado g , irriducibile, a valori interi e divisore fisso 1; consideriamo gl'interi

$$(4.1) \quad F(x+1), \quad F(x+2), \dots, \quad F(x+[x^\theta]) \quad 0 < \theta \leq 1.$$

Per $x \geq \xi_0$ conveniente, fra gl'interi (4.1) se ne trova almeno uno composto con al più $[2,98g/\theta]$ fattori primi (uguali o distinti) tutti maggiori di $x^{\frac{\theta}{2,98}}$.

Se $\frac{g}{\theta} < s \leq \left[\frac{2,98g}{\theta} \right]$, per $x \geq \xi_1$ conveniente, fra gl'interi (4.1) se ne trova almeno uno composto con al più $\left[\frac{1,98sg}{s\theta - g} \right]$ fattori primi (uguali o distinti) tutti maggiori di $x^{\frac{1,98s}{s\theta - g}}$ e ciascuno ripetuto al più $s-1$ volte.

Nel caso particolare $g=1, \theta = \frac{1}{2}$ otteniamo:

Per $x \geq \xi_0$ conveniente, fra gl'interi

$$a(x+1)+b, \quad a(x+2)+b, \dots, \quad a(x+[\sqrt{x}])+b \quad (a, b=1)$$

ne esiste almeno uno composto con al più 5 fattori primi uguali o distinti tutti maggiori di $x^{\frac{1}{5}}$ ⁽¹⁾; e ne esiste almeno uno privo di divisori cubici e composto con al più 11 fattori primi tutti maggiori di $x^{\frac{1}{11}}$.

Nel caso particolare $g=2, \theta=\frac{1}{2}$ otteniamo:

Per $x \geq \xi_0$ conveniente, fra gl'interi ay^2+by+c ($y=x+1, x+2, \dots, x+[\sqrt{x}]$) ne esiste almeno uno composto con al più 5 fattori primi (uguali o distinti).

5. - TEOREMA II. — Sia $N > 0$ intero e $D(N)$ l'intero (divisore di $(2g)!$) per il quale il polinomio

$$H(x) = \frac{F(x)F(x-N)}{D(N)}$$

risulta a valori interi e divisore fisso 1. Denotiamo con $h_N(m)$ il numero delle radici distinte della congruenza

$$H(x) \equiv 0 \pmod{m}.$$

Denotiamo con $B(z, \xi)$ il numero degl'interi x pei quali sono soddisfatte le condizioni seguenti

1°) $z < x \leq z + \xi,$

2°) ogni divisore primo di $H(x)$ è maggiore di $p_t,$

3°) ogni eventuale divisore quadrato di $H(x)$ è maggiore di $p_r^2.$

Fissato $\varepsilon > 0$ arbitrario, esiste un numero $\gamma = \gamma(\varepsilon, F, \Theta)$ dipendente soltanto da ε, F, Θ tale che per

$$r \geq t \geq \gamma(\varepsilon, F, \Theta)$$

risulta

$$B(z, \xi) \begin{cases} > \xi(\sigma - \varepsilon) \prod_{p \leq p_t} \left(1 - \frac{h_N(p)}{p}\right) - p_r p_t^{2r(f)+\varepsilon} \\ < \xi(\sigma + \varepsilon) \prod_{p \leq p_t} \left(1 - \frac{h_N(p)}{p}\right) + p_r^2 p_t^{2r(f)+\varepsilon}. \end{cases}$$

6. - Conseguenze del Teorema II.

TEOREMA. - Sia $F(x)$ irriducibile. Poniamo

$$z_1 + z_2 = N \quad (z_1 > 0, z_2 > 0), \quad F(z_1) = d_1 P, \quad F(z_2) = d_2 Q, \quad d_1 d_2 = D(N).$$

⁽¹⁾ Vedi V. BRUN [1], p. 24; ivi si trova questa proposizione per 11 fattori primi.

Per $N \geq N_0$ conveniente esistono coppie (z_1, z_2) tali che ciascuno dei due interi P, Q risulta composto con al più $[6,6g]$ fattori primi uguali o distinti tutti maggiori di $N^{\frac{1}{2}}$ (oppure: risulta composto con al più $\left[\frac{5,6gs}{s-g}\right]$ fattori primi uguali o distinti maggiori di $N^{\frac{s-g}{5,6gs}}$, ciascuno ripetuto al più $s-1$ volte, dove $g+1 \leq s \leq 6,6g$).

Questo teorema si ricava dal Teorema II con una dimostrazione analoga a quella che ha servito per ricavare il Teorema (C) dal Teorema I (vedi n.° 4). La sola novità è costituita dall'osservazione

$$0 < h(p) \leq h_N(p) \leq 2h(p)$$

$$1 - \frac{h_N(p)}{p} \geq 1 - \frac{2h(p)}{p} = \left(1 - \frac{h(p)}{p}\right)^2 \left\{1 - \left(\frac{h(p)}{p-h(p)}\right)^2\right\}$$

ed essendo il prodotto infinito $\prod \left\{1 - \left(\frac{h(p)}{p-h(p)}\right)^2\right\}$ convergente, risulta (vedi 1.12)

$$\frac{1}{\log^2 p_t} = O\left(\prod_{p \leq p_t} \left(1 - \frac{h_N(p)}{p}\right)\right).$$

Si assuma quindi $\xi = N$, ecc.

Per $F(x) = x$, N pari, $s=2$ risulta $\left[\frac{5,6gs}{s-g}\right] = 11$ e perveniamo al seguente

TEOREMA. - Ogni intero N pari, maggiore di un conveniente N_0 , si può ripartire nella somma di due interi positivi ciascuno composto con al più 11 fattori primi tutti distinti e tutti maggiori di $N^{\frac{1}{2}}$.

7. - Per dimostrare il Teorema (A) ci sarà utile la proposizione seguente che ricaviamo come conseguenza del Teorema II.

TEOREMA. - Sia

$$j = p_1 p_2 \dots p_v \geq 2, \quad (a, j) = 1.$$

Denotiamo con q gl'interi liberi da quadrati e primi con j .

Poniamo

$$\varphi(j) = (p_1 - 1)(p_2 - 2) \dots (p_v - 1), \quad (\text{indicatore di EULER})$$

$$\beta(j) = \prod_{p > p_v} \frac{1 - \frac{2}{p}}{\left(1 - \frac{1}{p}\right)^2},$$

$$\psi(q) = \prod_{p|q} (p-2).$$

Denotiamo con $L(N)$ il numero degl'interi positivi $x \leq N$ tali che il prodotto

$$H(x) = (jx+a)(jx+a-jN)$$

si compone di divisori primi tutti maggiori di $N^{\frac{1}{2}}$.

Risulta

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow +\infty} \frac{L(N)}{\log^2 N} \sum_{q|N} \frac{1}{\psi(q)} \leq 16e^{-2C} \frac{j^2 \beta(j)}{\varphi^2(j)} (1 + \tau(2))^2 \sigma.$$

Dimostrazione. - Poniamo nel Teorema II

$$F(x) = jx + \alpha, \quad z = 0, \quad \xi = N, \quad p_r = p_t \leq N^{\frac{1}{2(1+\tau(2)+\varepsilon)}} < p_{t+1}.$$

Risulta

$$h_N(p) = \begin{cases} 0 & \text{per } p \leq p_v \\ 1 & \text{per } p > p_v, \quad p|N \\ 2 & \text{per } p > p_v, \quad p \nmid N, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \prod_{p \leq p_t} \left(1 - \frac{h_N(p)}{p}\right) &= \prod_{\substack{p_v < p \leq p_t \\ p|N}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \prod_{\substack{p_v < p \leq p_t \\ p \nmid N}} \left(1 - \frac{2}{p}\right) = \\ &= \prod_{p_v < p \leq p_t} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \prod_{\substack{p_v < p \leq p_t \\ p \nmid N}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \prod_{\substack{p_v < p \leq p_t \\ p \nmid N}} \frac{1 - \frac{2}{p}}{\left(1 - \frac{1}{p}\right)^2} = \\ &= \prod_{\substack{p_v < p \leq p_t \\ p|N}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \prod_{p_v < p \leq p_t} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \prod_{p_v < p \leq p_t} \frac{1 - \frac{2}{p}}{\left(1 - \frac{1}{p}\right)^2} \prod_{\substack{p_v < p \leq p_t \\ p \nmid N}} \frac{\left(1 - \frac{1}{p}\right)^2}{\left(1 - \frac{2}{p}\right)} = \\ &= \prod_{p_v < p \leq p_t} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \cdot \prod_{\substack{p_v < p \leq p_t \\ p \nmid N}} \frac{1 - \frac{2}{p}}{\left(1 - \frac{1}{p}\right)^2} \cdot \prod_{\substack{p_v < p \leq p_t \\ p \nmid N}} \left(1 + \frac{1}{p-2}\right). \end{aligned}$$

Si conclude

$$\prod_{p \leq p_t} \left(1 - \frac{h_N(p)}{p}\right) \sim \frac{j^2}{\varphi^2(j)} \beta(j) e^{-2C} \sum_{q|N} \frac{1}{\psi(q)} \cdot \frac{1}{\log^2 p_t}.$$

Essendo per la scelta di p_t

$$\log N \sim 2(1 + \tau(2) + \varepsilon) \log p_t \quad \text{per } N \rightarrow +\infty$$

risulta

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow +\infty} \frac{B(0, N)}{\log^2 N} \sum_{q|N} \frac{1}{\psi(q)} \leq (1 + \eta) 16e^{-2C} \frac{j^2 \beta(j)}{\varphi^2(j)} (1 + \tau(2))^2 \sigma$$

con $\eta \rightarrow 0$ per $\varepsilon \rightarrow 0$. Questa limitazione vale a maggior ragione se in luogo di $B(0, N)$ si sostituisce $L(N)$, essendo evidentemente $L(N) \leq B(0, N)$. Data l'arbitrarietà di ε il teorema risulta dimostrato.

8. - TEOREMA III. - Fissato $\omega \geq 0$, sia

$$\omega = \frac{\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_{d-1} + \lambda \theta_d}{f} \quad (d \geq 1, 0 \leq \lambda < 1)$$

$$\log p_v \leq e^{-\omega} \log p_t < \log p_{v+1}.$$

Conserviamo le notazioni del Teorema II.

Denotiamo con $C(z, \xi)$ il numero degl'interi x pei quali sono soddisfatte le condizioni seguenti

- 1°) $z < x \leq z + \xi$,
- 2°) ogni divisore primo di $F(x)$ è maggiore di p_t ,
- 3°) ogni divisore primo di $F(x-N)$ è maggiore di p_v ,
- 4°) ogni eventuale divisore quadrato di $H(x)$ è maggiore di p_r^2 .

Fissato $\varepsilon > 0$ arbitrario, esiste un numero $\gamma = \gamma(\varepsilon, F, \Theta, \omega)$ dipendente soltanto da $\varepsilon, F, \Theta, \omega$ tale che per

$$r \geq t \geq \gamma(\varepsilon, F, \Theta, \omega)$$

risulta

$$C(z, \xi) \begin{cases} > \xi(\bar{\sigma} - \varepsilon) \frac{\log^f p_v}{\log^f p_t} \prod_{p \leq p_v} \left(1 - \frac{h_N(p)}{p}\right) - p_r p_t^{2\bar{\tau} + \varepsilon}, \\ < \xi(\bar{\sigma} + \varepsilon) \frac{\log^f p_v}{\log^f p_t} \prod_{p \leq p_v} \left(1 - \frac{h_N(p)}{p}\right) + p_r^2 p_t^{2\bar{\tau} + \varepsilon}, \end{cases}$$

dove abbiamo posto

$$\bar{\tau} = \sum_{i=1}^{d-1} \exp\left(-\frac{\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_i}{f}\right) + \exp\left(-\frac{\omega}{2}\right) \sum_{i=d}^{\infty} \exp\left(-\frac{\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_i}{f}\right).$$

9. - Conseguenze del Teorema III.

Da questo teorema ricaviamo subito il Teorema (D) (vedi Introduzione). Tanto per fissare le idee, dimostriamo per esempio:

$$\frac{N}{\log^2 N} = O(W(N)).$$

Assumiamo $F(x) = x$, $z = 0$, $\xi = N$ pari, $p_r = p_t$; allora risulta $f = 1$, $D(N) = 1$, $H(x) = x(x-N)$, $1 \leq h_N(p) \leq 2$ e anche

$$C(0, N) \geq N(\bar{\sigma} - \varepsilon) \frac{\log p_v}{\log p_t} \cdot \frac{1}{2} \prod_{2 < p \leq p_v} \left(1 - \frac{2}{p}\right) - p_t^{1+2\bar{\tau} + \varepsilon}.$$

Da questa limitazione, tenendo conto che

$$\frac{1}{\log^2 p_v} = O\left(\prod_{2 < p \leq p_v} \left(1 - \frac{2}{p}\right)\right), \quad \frac{\log p_v}{\log p_t} = e^{-\omega} + o(1) \quad \text{per } t \rightarrow +\infty$$

e assumendo $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo da avere $\bar{\sigma} - \varepsilon > 0$ otteniamo

$$\frac{N}{\log^2 p_v} = O(C(0, N) + p_t^{1+2\bar{\tau} + \varepsilon}).$$

Adesso siamo ricondotti a scegliere opportunamente $\omega \geq 0$ costante, $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo e p_t come funzione di N : basterà che una tale scelta sia fatta in guisa da avere

$$p_t^{1+2\bar{\tau}+2\varepsilon} \leq N < p_{t+1}^{1+2\bar{\tau}+2\varepsilon}$$

$$[1+2\bar{\tau}] = [1+2\bar{\tau}+2\varepsilon] \leq a, \quad [e^\omega(1+2\bar{\tau})] = [e^\omega(1+2\bar{\tau}+2\varepsilon)] \leq b.$$

Infatti per ogni tale scelta risulta evidentemente

$$p_t^{1+2\bar{\tau}+\varepsilon} = o\left(\frac{N}{\log^2 N}\right) \text{ per } N \rightarrow +\infty, \quad p_v \leq N,$$

e, riflettendo sulle definizioni di $C(0, N)$ e $W(N)$, anche

$$C(0, N) \leq W(N).$$

Si conclude

$$\frac{N}{\log^2 N} \leq \frac{N}{\log^2 p_v} = O\left(C(0, N) + o\left(\frac{N}{\log^2 N}\right)\right) = O(C(0, N)) = O(W(N)),$$

cioè l'asserto.

La possibilità della scelta di ε , quando siano soddisfatte tutte le altre condizioni, è evidente. Per scendere al caso numerico assumiamo come al n.º 2 (2.3)

$$\theta_1 = 0,90, \quad \theta_2 = 0,56, \quad \theta_3 = 0,52, \quad \theta_4 = \theta_5 = \dots = \theta = 0,50$$

e con questo risulta (vedi (2.6)) $\bar{\sigma}(3, \Theta) > 0$. I diversi valori di ω con i quali si conclude li scegliamo come segue

1º) $\omega = 0$,

$$d = 1, \quad \lambda = 0, \quad \bar{\tau} = \tau(2) < 2,8 \quad (\text{vedi (2.4)}), \quad a = 6, \quad b = 6.$$

2º) $\omega = \log \frac{4}{3}$,

$$0 < \omega < \theta_1, \quad d = 1,$$

$$\bar{\tau} = e^{-\frac{1}{2}\omega} \left\{ e^{-\frac{1}{2}\theta_1} + e^{-\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)} + e^{-\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2+\theta_3)} (1 - e^{-\frac{1}{2}\theta})^{-1} \right\},$$

$$\bar{\tau} < 2,43, \quad a = 5, \quad b = 7.$$

3º) $\omega = \log 2$,

$$0 < \omega < \theta_1, \quad d = 1, \quad \bar{\tau} \text{ si esprime come nel caso precedente,}$$

$$\bar{\tau} < 1,98, \quad a = 4, \quad b = 9.$$

4º) $\omega = \log 4$,

$$\theta_1 < \omega < \theta_1 + \theta_2, \quad d = 2,$$

$$\bar{\tau} = e^{-\theta_1} + e^{-\frac{1}{2}\omega} \left\{ e^{-\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)} + e^{-\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2+\theta_3)} (1 - e^{-\frac{1}{2}\theta})^{-1} \right\},$$

$$\bar{\tau} < 1,49, \quad a = 3, \quad b = 15.$$

$$5^o) \omega = 5,21 < \log 183,1,$$

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + 6\theta < \omega < \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + 7\theta, \quad d=9,$$

$$\bar{\tau} = e^{-\theta_1} + e^{-(\theta_1+\theta_2)} + e^{-(\theta_1+\theta_2+\theta_3)} \frac{1 - e^{-6\theta}}{1 - e^{-\theta}} + \frac{e^{-\frac{1}{2}(\omega + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + 6\theta)}}{1 - e^{-\frac{1}{2}\theta}},$$

$$\bar{\tau} < 1, \quad a=2, \quad b=366.$$

10. - TEOREMA IV (L. SCHNIRELMANN, N. P. ROMANOFF, H. HEILBRONN-E. LANDAU-P. SCHERK). - *Sia*

$$j = p_1 p_2 \dots p_v$$

$$\varrho(j) = \prod_{p > p_v} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3} \right)$$

$$k = \left[\frac{16}{3} e^{-2C} \varrho(j) (1 + \tau(2))^2 \sigma \right] + 1.$$

Ogni intero abbastanza grande ammette almeno una partizione del tipo

$$(10.1) \quad n = p' + p'' + \dots + p^{(2k)} + w, \quad 0 \leq w \leq jk - 1.$$

Osservazione. - Il nostro lavoro è stato indirizzato a costruire nuove più convenienti forme per le funzioni σ e $\tau(2)$ (vedi n.° 1, (1.6), (1.10)); nel senso che un'opportuna scelta dei parametri ci desse un valore più piccolo per il prodotto $(1 + \tau(2))^2 \sigma$ in guisa da impiccolire l'intero k . Inoltre i valori numerici ottenuti ci hanno consigliato di impiccolire anche $\varrho(j)$ coll'assumere $j=210$ anzichè $j=30$ come in H. HEILBRONN-E. LANDAU-P. SCHERK [5].

Calcoli numerici. - Assumiamo

$$j = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$$

Risulta

$$\frac{16}{3} e^{-2C} < 1,6813, \quad \varrho(j) < 1,003$$

e coi valori (2.2) e (2.5) calcolati al n.° 2

$$(1 + \tau(2))^2 \sigma < 18,9227,$$

da cui

$$k = 32.$$

La partizione (10.1) è dunque della forma

$$n = p' + p'' + \dots + p^{(64)} + w, \quad 0 \leq w \leq 6719.$$

Poichè ogni intero $w+2$ si può rappresentare come somma di al più tre numeri primi, ne segue il Teorema (A) dell'Introduzione.