Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Giovanni Dantoni

Sul diverso comportamento di una omografia rispetto alle quadriche che essa trasforma in sè

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 6, nº 1 (1937), p. 11-27

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1937_2_6_1_11_0>

SUL DIVERSO COMPORTAMENTO DI UNA OMOGRAFIA RISPETTO ALLE QUADRICHE CHE ESSA TRASFORMA IN SÈ

di GIOVANNI DANTONI (Pisa).

1. - Sia

$$x_i = \sum_{k=0}^{n} a_{ik} x_k' \qquad (i=0, 1, 2,\ldots, n) \tag{1}$$

una sostituzione lineare in $n+1$ variabili, a determinante $A = |a_{ik}| \neq 0$.

Il FROBENIUS ([1]) ha dimostrato che:

condizione necessaria e sufficiente affinchè la (1) trasformi in sè almeno una forma quadratica simmetrica ed a discriminante non nullo $F = \sum_{i,k=0}^{n} c_{ik} x_i x_k$, è che i divisori elementari del determinante

$$D(\varrho) = \begin{vmatrix} a_{00}-\varrho & a_{01} & \ldots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11}-\varrho & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n0} & a_{n1} & \ldots & a_{nn}-\varrho \end{vmatrix}$$

siano a coppie di egual grado ed annullantisi per valori reciproci di ϱ, eccetto quelli che si annullano per $\varrho = \pm 1$ ed hanno esponente dispari. In forma geometrica il teorema di FROBENIUS può enunciarsi nel seguente modo:

condizione necessaria e sufficiente affinchè l'omografia

$$x_i \equiv \sum_{k=0}^{n} b_{ik} x_k' \qquad (i=0, 1, 2,\ldots, n) \tag{2}$$

trasformi in sè almeno una quadrica $F=0$ non specializzata di S_n ([2]), è che

---

([1]) FROBENIUS: *Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen*, Crelle, 84, p. 41.

([2]) A meno che non sia detto espressamente, nel presente lavoro considereremo sempre sostituzioni, forme, omografie e quadriche di S_n, a determinante $\neq 0$. Nelle (2), il simbolo $\equiv$ indica che i numeri $x_0, x_1,\ldots, x_n$, sono eguali ai numeri $\sum_{k=0}^{n} b_{ik} x_k'$ $(i=0, 1, 2,\ldots, n)$ a meno di un fattore di proporzionalità non nullo.

esista un numero σ tale che i divisori elementari della sostituzione:

$$(3) \qquad x_i = \sigma \sum_{k=0}^{n} b_{ik} x_k'$$

soddisfino alle condizioni sopra dette.

Ricordiamo che, se la sostituzione (3) trasforma in sè la forma F, si ha

$$|\sigma b_{ik}| = \pm 1$$

e la (3) si chiama *propria* o *impropria* [3] secondo che $|\sigma b_{ik}|$ vale $+1$ o -1. Ora *se n è pari*, il segno di $|\sigma b_{ik}|$ non ha nessuna importanza per l'omografia (2). Infatti insieme alla (3) anche la sostituzione che si ottiene da questa cambiando σ in $-\sigma$, trasforma la forma F in sè. E poichè, per n pari, è $|\sigma b_{ik}| = -|-\sigma b_{ik}|$, si hanno due sostituzioni lineari, una propria e l'altra impropria, che trasformano la stessa forma in sè e corrispondono alla stessa omografia.

Così non è *se n è dispari*. In questo caso l'omografia (2) si chiama di *1ª specie* o di *2ª specie* [4] secondo che $|\sigma b_{ik}|$ vale $+1$ oppure -1.

C. SEGRE ha dimostrato che un'omografia di 1ª specie che trasforma in sè la quadrica F muta ciascuno dei due sistemi di $S_{\frac{n-1}{2}}$ contenuti in F in sè stesso, mentre un'omografia di 2ª specie che trasforma in sè F permuta i due sistemi di $S_{\frac{n-1}{2}}$ [5].

La distinzione delle omografie di S_n (n dispari) in 1ª e 2ª specie, va riferita alle omografie che trasformano in sè una data V^2_{n-1} e non a quelle che trasformano in sè almeno una V^2_{n-1}; vedremo infatti che esistono omografie di S_n che trasformano in sè una V^2_{n-1} non specializzata conservando ciascuno dei suoi sistemi di $S_{\frac{n-1}{2}}$ e nello stesso tempo trasformano in sè una altra V^2_{n-1} non specializzata permutandone i sistemi di $S_{\frac{n-1}{2}}$; esistono cioè omografie che sono di 1ª specie rispetto ad una quadrica e di 2ª specie rispetto ad un'altra.

Questo equivale a dire che in S_n (n dispari qualunque), esistono omografie (2) per le quali è possibile determinare due numeri σ_1 e σ_2, tali che le sostituzioni

$$x_i = \sigma_1 \sum_{k=0}^{n} b_{ik} x_k' \quad \text{e} \quad x_i = \sigma_2 \sum_{k=0}^{n} b_{ik} x_k' \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

---

[3] FROBENIUS, loc. cit., p. 35.

[4] C. SEGRE: *Ricerche sulle omografie e correlazioni....*, Mem. Acc. Torino, 37 (2), 1885, p. 9.

[5] C. SEGRE, loc. cit., p. 11.

soddisfino alle condizioni del teorema di FROBENIUS, e tali inoltre che sia

$$|\sigma_1 b_{ik}| = +1 \quad \text{e} \quad |\sigma_2 b_{ik}| = -1.$$

Un esempio è dato dalla omografia di S_3:

$$x_1 \equiv ix_1', \qquad x_2 \equiv -ix_2', \qquad x_3 \equiv x_3', \qquad x_4 \equiv -x_4',$$

la quale trasforma in sè le quadriche $x_1x_3 - x_2x_4 = 0$ e $x_3^2 + x_4^2 - x_1x_2 = 0$ ed è di prima specie rispetto alla 1ª e di 2ª specie rispetto alla seconda.

Il § 1 del presente lavoro è dedicato alla determinazione delle omografie che godono di questa doppia proprietà (teor. A). Nel n.° 5 come corollario se ne deduce che, se $n+1=2^r$ (r intero, positivo) le omografie di 1ª specie rispetto ad una quadrica e di 2ª specie rispetto ad un'altra, sono tutte e sole le omografie cicliche di ordine $n+1$ con soli $n+1$ punti uniti.

Nel § 2, osservato che le quadriche (non specializzate) unite in una omografia di S_n (n qualunque), se esistono, si distribuiscono in un numero finito di sistemi lineari, si caratterizzano le omografie le cui quadriche unite e non specializzate si distribuiscono in più di un sistema lineare (teor. B); nel n.° 8 si determina il numero dei detti sistemi lineari e nel n.° 9 se ne deduce che, se $n+1$ è un numero primo le uniche omografie le cui quadriche unite e non specializzate si distribuiscono in più di un sistema lineare sono le cicliche di ordine $n+1$ con solo $n+1$ punti uniti.

§ 1.

2. - Sia

$$x_i = \mu \sum_{=0}^{n} a_{ik} x_k' \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

un'omografia di uno spazio ad n dimensioni con n dispari, non degenere, che trasformi in sè la quadrica $F = \sum_{i,k=0}^{n} c_{ik} x_i x_k = 0$ non specializzata, e sia di 1ª specie rispetto ad F. Sarà allora possibile dare a μ un valore tale che la sostituzione (4) trasformi in sè la forma F. Senza per nulla limitare i nostri ragionamenti possiamo supporre $\mu = 1$. Sarà allora $|a_{ik}| = 1$.

Supponiamo ora che l'omografia (4) trasformi in sè anche un'altra quadrica $\Phi = \sum_{i,k=0}^{n} \gamma_{ik} x_i x_k = 0$ non specializzata di S_n e sia di 2ª specie rispetto a questa. Esisterà allora un numero σ tale che la sostituzione:

$$x_i = \sigma \sum a_{ik} x_k' \tag{4'}$$

trasformi in sè la forma Φ; inoltre sarà $|\sigma a_{ik}| = -1$ e quindi $\sigma^{n+1} = -1$. Posto:

$$D(\varrho) = \begin{vmatrix} a_{00}-\varrho & a_{01} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11}-\varrho \dots & & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nn}-\varrho \end{vmatrix}, \qquad \Delta(\varrho) = \begin{vmatrix} \sigma a_{00}-\varrho & \sigma a_{01} & \dots & \sigma a_{0n} \\ \sigma a_{10} & \sigma a_{11}-\varrho \dots & & \sigma a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma a_{n0} & \sigma a_{n1} & \dots & \sigma a_{nn}-\varrho \end{vmatrix}$$

si vede subito che se ϱ' è una radice di $D(\varrho)=0$ e se a ϱ' corrisponde in $D(\varrho)=0$ il gruppo caratteristico $(e_1, e_2, \dots, e_t)$, allora $\sigma\varrho'$ è una radice di $\Delta(\varrho)=0$ e ad essa corrisponde in $\Delta(\varrho)=0$ lo stesso gruppo caratteristico $(e_1, e_2, \dots, e_t)$.

Sia k il più piccolo intero positivo per cui $\sigma^k = -1$. Essendo $\sigma^{n+1} = -1$ ed $n+1$ pari sarà $\frac{n+1}{k}$ dispari e k pari. Possiamo quindi porre $\frac{n+1}{k} = 2l+1$ (l intero $\geqslant 0$) e $k=2h$ (h intero >0), cioè

$$n+1 = (2l+1)2h \tag{5}$$

Dalla definizione di k segue facilmente che σ^2 è una radice primitiva k-ma di $+1$.

a). Consideriamo i numeri

$$(A) \qquad 1 \quad \frac{1}{\sigma^2} \quad \sigma^2 \quad \frac{1}{\sigma^4} \dots \quad \sigma^{2(h-1)} \quad \frac{1}{\sigma^{2h}}$$

$$(B) \qquad \sigma \quad \frac{1}{\sigma} \quad \sigma^3 \quad \frac{1}{\sigma^3} \dots \quad \sigma^{2(h-1)+1} \quad \frac{1}{\sigma^{2(h-1)+1}}.$$

Dalle cose dette segue che i numeri (A) sono tutte le radici k-me di $+1$ e i numeri (B) sono le radici k-me di -1.

Supponiamo che $D(\varrho)=0$ ammetta uno dei numeri (A) per radice e sia per esempio σ^2 col gruppo caratteristico:

$$(e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, e_3^{(1)}, \dots, e_{t_1}^{(1)}) \tag{6}$$

Per quanto si è detto $\Delta(\varrho)=0$ ammetterà la radice $\varrho=\sigma^3$ col gruppo caratteristico (6). Per il teorema di FROBENIUS $\Delta(\varrho)=0$ ammetterà anche la radice $\varrho=\frac{1}{\sigma^3}$ col gruppo caratteristico (6); ma allora $D(\varrho)=0$ ammetterà la radice $\varrho=\frac{1}{\sigma^4}$ col gruppo caratteristico (6). Così continuando si vede che $D(\varrho)=0$ ammette per radici tutti i numeri (A) scritti a destra di σ^2 ed a ciascuna di esse corrisponde lo stesso gruppo caratteristico $(e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, e_3^{(1)}, \dots, e_{t_1}^{(1)})$.

Inoltre, sempre nell'ipotesi che l'equazione $D(\varrho)=0$ ammetta la radice σ^2 col gruppo caratteristico (6), si ha che per il teorema di FROBENIUS essa ammette la radice $\frac{1}{\sigma^2}$ col gruppo caratteristico (6). Allora, per l'osservazione fatta sopra, la $\Delta(\varrho)=0$ ammette la radice $\frac{1}{\sigma}$ col gruppo caratteristico (6); ne segue che la $\Delta(\varrho)=0$ ammette la radice σ col gruppo caratteristico (6) e quindi la $D(\varrho)=0$ ammette la radice 1 col gruppo caratteristico (6). Resta così provato che, se $D(\varrho)=0$ ammette la radice σ^2 col gruppo caratteristico (6), essa ammette per radici tutti i numeri (A) scritti a sinistra di σ^2 e ciascuna col gruppo caratteristico (6).

Si può quindi affermare che se $D(\varrho)=0$ ammette una radice k-ma di $+1$, essa le ammette tutte e con lo stesso gruppo caratteristico.

Si noti che poichè fra i numeri (A) c'è $+1$, per il teorema di FROBENIUS, i numeri *pari* $e_{i_1}^{(1)}$ $(i_1=1, 2, \ldots, t_1)$ debbono comparire a coppie.

b). Consideriamo i numeri (B) e (A) disposti nel seguente ordine:

$$\begin{array}{cccccccc} \frac{1}{\sigma} & \sigma & \frac{1}{\sigma^3} & \sigma^3 \ldots & \sigma^{2(h-1)-1} & \frac{1}{\sigma^{2(h-1)+1}} & \sigma^{2(h-1)+1} \\ 1 & \sigma^2 & \frac{1}{\sigma^2} & \sigma^4 \ldots & \sigma^{2(h-1)} & \frac{1}{\sigma^{2(h-1)}} & \sigma^{2h}. \end{array}$$

Con ragionamento identico a quello fatto in *a*) si prova che, se $D(\varrho)=0$ ammette una radice k-ma di -1 col gruppo caratteristico $(e_1^{(2)}, e_2^{(2)}, \ldots, e_{t_2}^{(2)})$, essa le ammette tutte e con lo stesso gruppo caratteristico. Inoltre $\Delta(\varrho)=0$ ammetterà tutte le radici k-me di $+1$ col gruppo caratteristico $(e_1^{(2)}, e_2^{(2)}, \ldots, e_{t_2}^{(2)})$ e poichè fra queste c'è la radice $+1$ i numeri *pari* di detto gruppo debbono comparire a coppie.

c). Sia ϱ_3 un numero distinto dalle radici k-me di $+1$ e -1; consideriamo i numeri:

$$\begin{array}{cccccccccc} \varrho_3 & \frac{1}{\varrho_3\sigma^2} & \varrho_3\sigma^2 & \frac{1}{\varrho_3\sigma^4}\ldots & \varrho_3\sigma^{2h} & \frac{1}{\varrho_3\sigma^{2h+2}}\ldots & \varrho_3\sigma^{4h-2} & \frac{1}{\varrho_3\sigma^{4h}} \\ \varrho_3\sigma & \frac{1}{\varrho_3\sigma} & \varrho_3\sigma^3 & \frac{1}{\varrho_3\sigma^3}\ldots & \varrho_3\sigma^{2h+1} & \frac{1}{\varrho_3\sigma^{2h+1}}\ldots & \varrho_3\sigma^{4h-1} & \frac{1}{\varrho_3\sigma^{4h-1}}. \end{array}$$

I numeri della prima riga sono le radici dell'equazione

$$(\varrho^k-\varrho_3^k)\left(\varrho^k-\frac{1}{\varrho_3^k}\right)=0 \tag{7}$$

e i numeri della seconda riga sono le radici dell'equazione

$$(\varrho^k+\varrho_3^k)\left(\varrho^k+\frac{1}{\varrho_3^k}\right)=0.$$

Col solito ragionamento si prova che se $D(\varrho)=0$ ammette una radice della equazione (7) col gruppo caratteristico $(e_1^{(3)}, e_2^{(3)}, e_3^{(3)}, \ldots, e_{t_3}^{(3)})$, essa le ammette tutte e con lo stesso gruppo caratteristico.

Si continui così fino ad esaurire tutte le radici dell'equazione $D(\varrho)=0$. Il ragionamento fatto, prova che:

d). Condizione necessaria affinchè una omografia Ω trasformi in sè due quadriche $F=0$, $\Phi=0$ e sia di 1ª specie rispetto ad F e di 2ª rispetto a Φ, è che:

I) *i divisori elementari della sua equazione caratteristica si possano* *distribuire in gruppi dello stesso numero* $k=\frac{n+1}{2l+1}$, *con* l *intero positivo o nullo, tali che quelli dello stesso gruppo siano di eguale grado e si annullino per valori di* ϱ *proporzionali alle radici* k*-me di* $+1$;

II) *i gruppi si possano distribuire in coppie aventi per elementi divisori elementari dello stesso grado ed annullantisi per valori reciproci di* ϱ, *eccetto quelli che contengono divisori elementari di grado impari annullantisi per le radici* k*-me di* ± 1 [6].

3. - La condizione trovata al n.° 2, d) è anche sufficiente. Infatti sia Ω una omografia che vi soddisfi. Scegliamo nelle sue equazioni il fattore di proporzionalità in modo che i divisori elementari della equazione caratteristica della corrispondente sostituzione:

$$x_i=\sum_{k=0}^{n} a_{ik}x_k' \qquad (i=0, 1, 2,\ldots, n) \tag{8}$$

si possano distribuire in gruppi di k come è detto al n.° 2, d).

Sia σ una radice primitiva $2k$-ma di $+1$; allora sarà $\sigma^k=-1$, e σ^2 sarà una radice primitiva k-ma di $+1$. Inoltre, poichè $n+1$ è pari, dalla relazione $n+1=k(2l+1)$ segue che k è pari; poniamo $k=2h$ con h intero positivo.

Per l'ipotesi fatta, i divisori elementari dell'equazione caratteristica $D(\varrho)=0$ della (8) si distribuiscono in un quadro del tipo:

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{llll} (\varrho-1)^{e^{(1)}_{i_1}} & (\varrho-\sigma^2)^{e^{(1)}_{i_1}} \;\ldots & (\varrho-\sigma^{4h-2})^{e^{(1)}_{i_1}} & (i_1=1, 2,\ldots, t_1)\\ (\varrho-\sigma)^{e^{(2)}_{i_2}} & (\varrho-\sigma^3)^{e^{(2)}_{i_2}} \;\ldots & (\varrho-\sigma^{4h-1})^{e^{(2)}_{i_2}} & (i_2=1, 2,\ldots, t_2)\\ (\varrho-\varrho_3)^{e^{(3)}_{i_3}} & (\varrho-\varrho_3\sigma^2)^{e^{(3)}_{i_3}} \ldots & (\varrho-\varrho_3\sigma^{4h-2})^{e^{(3)}_{i_3}} & (i_3=1, 2,\ldots, t_3)\\ \left(\varrho-\frac{1}{\varrho_3}\right)^{e^{(3)}_{i_3}} & \left(\varrho-\frac{1}{\varrho_3\sigma^2}\right)^{e^{(3)}_{i_3}} \ldots & \left(\varrho-\frac{1}{\varrho_3\sigma^{4h-2}}\right)^{e^{(3)}_{i_3}} & \ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots & & & \end{array}\right.$$

dove ϱ_3 indica una radice di $D(\varrho)=0$, diversa dalle radici k-me di ± 1.

Sempre per l'ipotesi fatta, i numeri *pari* $e^{(1)}_{i_1}$, $e^{(2)}_{i_2}$, debbono comparire a coppie. Ricordando che $\sigma^{2k}=1$, dall'esame del quadro (9) segue che i divisori elementari

---

[6] In questo enunciato è sottinteso che la distribuzione dei divisori elementari dell'equazione caratteristica dell'omografia Ω in gruppi di k come è detto in I) e II), deve poter avvenire per un opportuno valore del fattore di proporzionalità μ che compare nelle equazioni di Ω: $x_i=\mu\sum a_{ik}x_k'$.

Noi abbiamo dimostrato che una tale distribuzione si può fare quando si dà a μ un valore $\bar\mu$ tale che la sostituzione $x_i=\bar\mu\sum a_{ik}x_k'$ trasformi in sè la forma F.

della equazione caratteristica della (8) si possono distribuire in coppie dello stesso grado ed annullantisi per valori reciproci di ϱ, eccetto quelli di grado impari che si annullano per $\varrho = \pm 1$. La (6) soddisfa cioè alle condizioni del teorema di FROBENIUS e quindi trasforma in sè almeno una forma quadratica F a determinante non nullo.

Sia ε una qualunque radice $2k$-ma di $+1$; consideriamo la sostituzione

$$x_i = \varepsilon \sum a_{ik} x_k' \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n) \tag{10}$$

Per un'osservazione fatta in principio al n.° 2, i divisori elementari del determinante caratteristico della (10) si possono ottenere dal quadro (9) moltiplicando tutte le radici per ε. Sono cioè i seguenti:

$$\left\{\begin{array}{llll} (\varrho-\varepsilon)^{e^{(1)}_{i_1}} & (\varrho-\varepsilon\sigma^2)^{e^{(1)}_{i_1}} & \ldots & (\varrho-\varepsilon\sigma^{4h-2})^{e^{(1)}_{i_1}} \\ (\varrho-\varepsilon\sigma)^{e^{(2)}_{i_2}} & (\varrho-\varepsilon\sigma^3)^{e^{(2)}_{i_2}} & \ldots & (\varrho-\varepsilon\sigma^{4h-1})^{e^{(2)}_{i_2}} \\ (\varrho-\varrho_3\varepsilon)^{e^{(3)}_{i_3}} & (\varrho-\varrho_3\varepsilon\sigma^2)^{e^{(3)}_{i_3}} & \ldots & (\varrho-\varrho_3\varepsilon\sigma^{4h-2})^{e^{(3)}_{i_3}} \\ \left(\varrho-\dfrac{\varepsilon}{\varrho_3}\right)^{e^{(3)}_{i_3}} & \left(\varrho-\dfrac{\varepsilon}{\varrho_3\sigma^2}\right)^{e^{(3)}_{i_3}} & \ldots & \left(\varrho-\dfrac{\varepsilon}{\varrho_3\sigma^{4h-2}}\right)^{e^{(3)}_{i_3}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right. \tag{11}$$

Le radici che compaiono nella 1ª, 2ª, 3ª, 4ª,.... riga del quadro (11) sono, rispettivamente, le radici k-me di ± 1, ∓ 1, $\pm \varrho_3^k$, $\pm \dfrac{1}{\varrho_3^k}$,...., dove va scelto il segno superiore se $\varepsilon^k = +1$, l'inferiore se $\varepsilon^k = -1$.

Ne segue che i divisori elementari della prima riga sono a coppie di egual grado ed annullantisi per valori reciproci di ϱ, eccetto quelli che si annullano per $\varrho = \pm 1$. Questi ultimi esistono (nella 1ª riga) se $\varepsilon^k = +1$, non esistono se $\varepsilon^k = -1$. Supponiamo che esistano; allora, poichè i numeri pari $e^{(1)}_{i_1}$ $(i_1 = 1, 2, \ldots, t_1)$ sono a coppie, si ha che i detti divisori elementari (della prima riga) annullantisi per $\varrho = \pm 1$ sono a coppie di egual grado eccetto quelli di grado impari.

Un analogo ragionamento vale per la 2ª riga.

Infine ad ogni divisore elementare della 3ª riga se ne può fare corrispondere uno della 4ª, dello stesso grado ed annullantesi per il valore reciproco della radice per cui si annulla il primo. Continuando così per le altre coppie di righe eventualmente esistenti, si prova che la sostituzione (10) soddisfa alle condizioni del teorema di FROBENIUS e quindi trasforma in sè almeno una forma Φ a determinante non nullo. Inoltre se si sceglie ε in modo che sia $\varepsilon^k = -1$, poichè $n+1 = k(2l+1)$ si ha $|\varepsilon a_{ik}| = \varepsilon^{n+1} |a_{ik}| = -|a_{ik}|$ e quindi l'omografia Ω è di specie diversa rispetto ad F e Φ.

4. - Il teorema dimostrato si può anche enunciare nella seguente forma:

TEOREMA *A*. - *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una omografia* $x_i \equiv \sum_{k=0}^{n} a_{ik} x_k'$ *di un* S_n, *con* n *dispari, trasformi in sè almeno due* V_{n-1}^2 *non specializzate e sia di specie diversa rispetto ad esse, è che:*

I) *gli spazi di punti uniti si distribuiscano in gruppi di* $k = \frac{n+1}{2l+1}$, *con* l *intero positivo o nullo, tali che quelli dello stesso gruppo abbiano la stessa caratteristica ed appartengano ad uno spazio su cui l'omografia subordinata sia ciclica di ordine* k.

II) *I gruppi si distribuiscano in coppie corrispondenti a radici reciproche e di egual caratteristica* (7).

III) *Nelle caratteristiche* $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$, $(e_1', e_2', \ldots, e_s')$ *degli spazi dei due gruppi corrispondenti alle radici* k*-me di* ± 1, *i numeri e pari debbono comparire a coppie.*

In particolare, *se l'omografia è generale* la condizione III) si elimina automaticamente, perchè tutti i divisori elementari sono lineari. Inoltre la condizione che gli spazi di ciascun gruppo e le coppie di spazi corrispondenti a radici reciproche abbiano eguale caratteristica, si può sostituire con la condizione che detti spazi abbiano la stessa dimensione. Si ha cioè:

Corollario 1°. - Condizione necessaria e sufficiente affinchè un'omografia *generale* $x_i \equiv \sum_{k=0}^{n} a_{ik} x_k'$ di uno spazio S_n di dimensione dispari trasformi in sè almeno due V_{n-1}^2 non specializzate e sia di specie diversa rispetto ad esse, è che:

I') gli spazi di punti uniti si distribuiscano in gruppi di $k = \frac{n+1}{2l+1}$, con l intero positivo o nullo, tali che quelli dello stesso gruppo siano *della stessa dimensione* ed appartengano ad uno spazio su cui l'omografia subordinata sia ciclica di ordine k.

II') I gruppi si distribuiscano in coppie formate di spazi *della stessa dimensione* e corrispondenti a radici reciproche.

Se poi l'omografia trasforma già in sè una V_{n-1}^2 non specializzata, dal teorema A si elimina la condizione II), e quella relativa alla caratteristica degli spazi del gruppo corrispondente alle radici k-me di $+1$, in quanto l'omografia soddisfa già al teorema di FROBENIUS; si ha cioè:

Corollario 2°. - Condizione necessaria e sufficiente affinchè un'omografia $x_i \equiv \sum_{k=0}^{n} a_{ik} x_k'$ di S_n (n dispari) che trasforma in sè almeno una quadrica F non

(7) Eccetto, si capisce, i gruppi corrispondenti alle radici k-me di $+1$ e di -1 i quali coincidono con quelli corrispondenti alle radici reciproche. Vedi anche la nota (6).

specializzata, trasformi in sè anche un'altra quadrica Φ e sia di specie diversa rispetto ad F e Φ è che:

I'') gli spazi di punti uniti si possano distribuire in gruppi di $k=\frac{n+1}{2l+1}$ con l intero positivo o nullo, tali che quelli dello stesso gruppo abbiano la stessa caratteristica ed appartengano ad uno spazio su cui l'omografia subordinata sia ciclica di ordine k.

II'') Nella caratteristica $(e_1', e_2', \ldots, e_s')$ degli spazi del gruppo corrispondente alle radici k-me di -1 i numeri *e pari* debbono comparire a coppie.

Infine riunendo i risultati del corollario 1° e 2° si ha:

Corollario 3°. - *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un'omografia generale Ω di S_n (n dispari) che trasforma in sè una V_{n-1}^2 non specializzata, ne trasformi in sè anche un'altra e sia di specie diversa rispetto ad esse, è che gli spazi di punti uniti si possano distribuire in gruppi di $k=\frac{n+1}{2l+1}$, con l intero positivo o nullo, della stessa dimensione e tali che nello spazio congiungente ciascun gruppo la Ω subordini una omografia ciclica di ordine k.*

5. - Dal teorema A, per $l=0$ e quindi $k=n+1$ si ha che l'omografia è ciclica di ordine $n+1$ con soli $n+1$ punti uniti. Viceversa, scritte le equazioni di una tale omografia nella forma $x_j=e^{r\frac{2\pi}{n+1}i}x_j'$ $(r, j=0, 1, 2, \ldots, n)$, si vede che per $k=n+1$ sono verificate le condizioni del teorema A. Quindi:

a) *le omografie cicliche di ordine $n+1$ di un S_n (n dispari qualunque) con soli $n+1$ punti uniti, trasformano in sè almeno due quadriche F e Φ non specializzate, e sono di specie diversa rispetto ad esse.*

Inoltre se $n+1=2^m$ $(m>0)$ si ha necessariamente $k=n+1$ e quindi:

b) *Negli spazi di dimensione 2^m-1 $(m>0)$ le omografie che trasformano in sè almeno due quadriche non specializzate F e Φ e sono di specie diversa rispetto ad esse, sono tutte e sole quelle cicliche di ordine 2^m con soli 2^m punti uniti.*

In particolare nella retta $(n=1)$ le dette omografie sono tutte e sole le involuzioni; nello spazio ordinario $(n=3)$ sono tutte e sole quelle cicliche di 4° ordine con soli 4 punti uniti; ecc.

6. - La determinazione delle nostre omografie non presenta difficoltà alcuna. Per esempio sia $n=5$.

I valori possibili di l sono: 0 ed 1; si ha quindi $k=6$ oppure $k=2$.

Per $k=6$ si ottengono le omografie cicliche di 6° ordine con 6 soli punti uniti.

Per $k=2$ si hanno i casi:

$$D(\varrho)=(\varrho^2-1)^2(\varrho^2+1)\,; \qquad D(\varrho)=(\varrho^2+1)^3\,;$$
$$D(\varrho)=(\varrho^2+1)(\varrho^2-\varrho_3^2)\left(\varrho^2-\frac{1}{\varrho_3^2}\right).$$

Nel primo caso si hanno i divisori elementari:

$$(\varrho-1),\quad (\varrho+1)\,; \qquad (\varrho-1),\quad (\varrho+1)\,; \qquad (\varrho-i),\quad (\varrho+i)\,;$$

e quindi si ottengono omografie di tipo [8] [(11)(11)11].

Nel secondo caso:

$$(\varrho-i)^3, \qquad (\varrho+i)^3\,;$$

oppure:

$$(\varrho-i),\quad (\varrho+i)\,; \qquad (\varrho-i),\quad (\varrho+i)\,; \qquad (\varrho-i),\quad (\varrho+i);$$

e si ottengono, rispettivamente, omografie dei due tipi [33], [(111)(111)].

Nel terzo caso:

$$(\varrho-i),\quad (\varrho+i)\,; \qquad (\varrho-\varrho_3),\quad (\varrho+\varrho_3)\,; \qquad \left(\varrho-\frac{1}{\varrho_3}\right),\quad \left(\varrho+\frac{1}{\varrho_3}\right);$$

e quindi si ottengono omografie di tipo [111111].

§ 2.

7. - Ripetendo il ragionamento dei n.^{i} 2, 3 con lievissime modifiche si trovano interessanti proprietà dei sistemi di quadriche trasformate in sè da un'omografia di un S_n (n qualunque).

Osserviamo anzitutto che, mentre le forme quadratiche (a determinante diverso da zero oppure nullo) trasformate in sè da una sostituzione lineare formano un un unico sistema lineare, le quadriche (specializzate o no) trasformate in sè da una omografia si distribuiscono in uno o più sistemi lineari completi.

Basta interpretare le quadriche di S_n come punti di un opportuno S_m; una omografia Ω di S_n si può allora pensare come un'omografia Ω' di S_m, e i punti uniti di Ω' sono le quadriche trasformate in sè da Ω.

Per esempio nel piano le coniche (degeneri o no) trasformate in sè dall'omografia:

$$X_1\equiv X_1'+X_2', \qquad X_2\equiv X_2'+X_3', \qquad X_3\equiv X_3'$$

sono tutte e sole quelle del fascio $\lambda(2X_1X_3-X_2^2+X_2X_3)+\mu X_3^2=0$, mentre quelle

[8] Notazione di C. SEGRE.

trasformate in sè dall'omografia:

$$X_1 \equiv X_1', \qquad X_2 \equiv e^{\frac{2\pi}{3}i} X_2', \qquad X_3 \equiv e^{\frac{4\pi}{3}} X_3'$$

sono tutte e sole quelle dei tre fasci:

$$\lambda X_1 X_2 + \mu X_3^2 = 0, \qquad \lambda X_1 X_3 + \mu X_2^2 = 0, \qquad \lambda X_2 X_3 + \mu X_1^2 = 0.$$

Proponiamoci di caratterizzare le omografie di un S_n (n qualunque) le cui quadriche unite non specializzate si distribuiscono in più sistemi lineari completi: Σ_1, Σ_2,....

a) Siano:

$$x_i = \mu \sum_{k=0}^{n} a_{ik} x_k' \qquad (i = 0, 1, 2, ..., n) \tag{12}$$

le equazioni di una tale omografia Γ. Determiniamo il fattore di proporzionalità μ in modo che la corrispondente sostituzione trasformi in sè una forma F di Σ_1; per semplicità indichiamo ancora con a_{ik} i coefficienti di questa sostituzione:

$$x_i = \sum_{k=0}^{n} a_{ik} x_k' \qquad (i = 0, 1, 2, ..., n). \tag{12'}$$

La (12') trasforma in sè tutte le forme del sistema lineare Σ_1. Infatti sia $G=0$ una quadrica di Σ_1 distinta da $F=0$; la (12') trasformerà la forma G in τG (τ fattore costante non nullo), perchè l'omografia (12) trasforma in sè le quadriche del sistema Σ_1 e $G=0$ appartiene a Σ_1. Allora la sostituzione (12') trasformerà ogni forma $H=F+\lambda G$ nella forma $H'=F+\lambda\tau G$ qualunque sia il valore del parametro λ. E poichè la quadrica $H=0$ appartiene al sistema lineare Σ_1, le quadriche $H=0$ e $H'=0$ debbono coincidere per λ qualunque. Ne segue che deve essere $\tau=1$, e quindi la (12') trasforma in sè la forma G.

Poichè l'omografia (12) trasforma in sè anche le quadriche del sistema lineare Σ_2, esisterà un numero σ tale che la sostituzione:

$$x_i = \sigma \sum_{k=0}^{n} a_{ik} x_k' \qquad (i = 0, 1, 2, ..., n) \tag{12''}$$

trasformi in sè una forma di Σ_2 e quindi, per l'osservazione fatta sopra, tutte le forme di Σ_2.

Ricordando che i determinanti $|a_{ik}|$ e $|\sigma a_{ik}|$ assumono i valori $+1$ o -1 (indipendentemente), dalla relazione $|\sigma a_{ik}| = \sigma^{n+1} |a_{ik}|$ si ha $\sigma^{n+1} = +1$ oppure $\sigma^{n+1} = -1$.

Sia k il minimo intero positivo per cui $\sigma^k = +1$ oppure -1; ne segue facilmente che k è un divisore di $n+1$ [9].

---

[9] Poichè $\sigma^{n+1} = \pm 1$ si ha $k \leqslant n+1$; dividendo $n+1$ per k e chiamando q il quoziente ed r il resto, si ha $n+1 = kq + r$. Ne segue $\sigma^{n+1} = (\sigma^k)^q \sigma^r$, da cui $\sigma^r = +1$ oppure $\sigma^r = -1$; e poichè $r < k$, per la definizione di k deve essere $r = 0$.

Se fosse $k=1$, sarebbe $\sigma=+1$ oppure $\sigma=-1$ e quindi la sostituzione (12′) trasformerebbe in sè tanto le forme di Σ_1 che quelle di Σ_2. Ma allora, detta F_1 una qualunque forma di Σ_1 ed F_2 una qualunque forma di Σ_2, la sostituzione (12′) trasformerebbe in sè tutte le forme del fascio $F_1+\lambda F_2$. Cioè la nostra omografia (12) trasformerebbe in sè le quadriche del sistema lineare congiungente Σ_1 e Σ_2; e ciò è assurdo perchè, per ipotesi, i sistemi lineari di quadriche Σ_1 e Σ_2 sono distinti e completi.

Infine dalla definizione di k segue facilmente che σ^2 è una radice primitiva k-ma di $+1$.

Ora se k è pari ($k=2h$), sarà $\sigma^k=-1$ e si può ripetere letteralmente il ragionamento fatto al n.° 2, *a*), *b*), *c*). Se k è dispari ($k=2h+1$) si ripeta il ragionamento del n.° 2, *a*) per i numeri:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & \frac{1}{\sigma^2} & \sigma^2 & \frac{1}{\sigma^4}\cdots\cdots & \sigma^{2(h-1)} & \frac{1}{\sigma^{2h}} & \sigma^{2h} \\ \sigma & \frac{1}{\sigma} & \sigma^3 & \frac{1}{\sigma^3}\cdots\cdots & \sigma^{2(h-1)+1} & \frac{1}{\sigma^{2(h-1)+1}} & \sigma^{2h+1} \end{array}$$

ed il ragionamento del n.° 2 *b*) per i numeri:

$$\begin{array}{cccccccc} \frac{1}{\sigma} & \sigma & \frac{1}{\sigma^3} & \sigma^3\cdots\cdots & \sigma^{2(h-1)-1} & \frac{1}{\sigma^{2(h-1)+1}} & \sigma^{2(h-1)+1} & \frac{1}{\sigma^{2h+1}} \\ 1 & \sigma^2 & \frac{1}{\sigma^2} & \sigma^4\cdots\cdots & \sigma^{2(h-1)} & \frac{1}{\sigma^{2(h-1)}} & \sigma^{2h} & \frac{1}{\sigma^{2h}}. \end{array}$$

Procedendo analogamente per *c*) si viene a provare che per la nostra omografia (12) sono verificate le condizioni I) e II) del n.° 2, *d*), in cui però k rappresenta solo un divisore di $n+1$, maggiore di 1 ([10]).

b). La proprietà s'inverte ragionando come al n.° 3. C'è solo da osservare che qui il numero k può essere pari o dispari; nel primo caso ($k=2h$) il ragionamento del n.° 3 si può ripetere letteralmente. Nel secondo caso ($k=2h+1$) ai divisori elementari del quadro (9) bisogna aggiungere la colonna:

$$(\varrho-\sigma^{4h})^{e_{i_1}^{(1)}}, \quad (\varrho-\sigma^{4h+1})^{e_{i_2}^{(2)}}, \quad (\varrho-\varrho_3\sigma^{4h})^{e_{i_3}^{(3)}}, \quad \left(\varrho-\frac{1}{\varrho_3\sigma^{4h}}\right)^{e_{i_3}^{(3)}}, \ldots$$

Così si prova che, detta ε una qualunque radice $2k$-ma di $+1$, le sostituzioni $x_i=\sum a_{ik}x_k'$, $x_i=\varepsilon\sum a_{ik}x_k'$ soddisfano al teorema di FROBENIUS. Siano Σ_1 e Σ_2 i più ampi sistemi lineari di forme (degeneri o no) trasformate in sè da queste due sostituzioni. La nostra omografia Γ trasforma in sè le quadriche dei due sistemi lineari Σ_1 e Σ_2; le quali quadriche sono generalmente non specializzate perchè le due sostituzioni scritte sopra soddisfano al teorema di

([10]) Cioè k non è soggetto alla limitazione $k=\frac{n+1}{2l+1}$ del n.° 2, *d*).

FROBENIUS. Inoltre è facile vedere che, se si sceglie $\varepsilon \neq \pm 1$, i sistemi lineari di quadriche Σ_1 e Σ_2 non hanno alcun elemento in comune e tanto Σ_1 che Σ_2 non sono contenuti in sistemi lineari più ampi di quadriche unite in Γ ([11]). Ne segue il:

TEOREMA *B*. - *Condizione necessaria e sufficiente affinchè le quadriche (non specializzate) unite in una omografia* $x_i \equiv \sum_{k=0}^{n} a_{ik} x_k'$ *si distribuiscano in più sistemi lineari completi è che:*

I) *gli spazi di punti uniti si distribuiscano in gruppi di* k *tali che quelli dello stesso gruppo abbiano la stessa caratteristica ed appartengano ad uno spazio su cui l'omografia subordinata sia ciclica di ordine* k, *essendo* k *un divisore di* $n+1$ *maggiore di* 1.

II) *I gruppi si distribuiscano in coppie corrispondenti a radici reciproche e di egual caratteristica* ([12]).

III) *Nelle caratteristiche* $(e_1, e_2, e_3, \ldots, e_r)$, $(e_1', e_2', e_3', \ldots, e_s')$ *degli spazi dei due gruppi corrispondenti alle radici* k*-me di* ± 1, *i numeri e pari debbono comparire a coppie.*

Analogamente a quanto si è visto per il teorema *A*, se la omografia è *generale* si elimina la condizione III); se l'omografia *trasforma già in sè una quadrica non specializzata*, si elimina la condizione II) e quella relativa alla caratteristica degli spazi del gruppo corrispondente alle radici k-me di $+1$; infine si ha:

Corollario. - Condizione necessaria e sufficiente affinchè le quadriche (non specializzate) unite in una omografia, generale e che trasforma almeno una quadrica (non specializzata) in sè, si distribuiscano in più sistemi lineari completi è che gli spazi di punti uniti si possano distribuire in gruppi di k *della stessa dimensione e tali che nello spazio congiungente ciascun gruppo l'omografia subordinata sia ciclica di ordine* k; *essendo* k *un divisore di* $n+1$, *maggiore di* 1.

8. - Ritornando al caso generale, sia Γ una omografia che soddisfa alle condizioni del teorema *B*. Indichiamo con K il più grande divisore di $n+1$ per cui sono soddisfatte le dette condizioni. Dico che:

([11]) Se $F=0$ fosse una quadrica (degenere o no) appartenente tanto a Σ_1 che a Σ_2, allora la forma F sarebbe trasformata in sè dalle due sostituzioni: $x_i = \sum a_{ik} x_k'$ e $x_i = \varepsilon \sum a_{ik} x_k'$; ma se la forma F è trasformata in sè dalla prima sostituzione, la seconda la trasforma in $\varepsilon^2 F$, e quindi dovrebbe essere $\varepsilon = \pm 1$.

Se poi il sistema lineare Σ_1 di quadriche fosse contenuto in uno più ampio Σ_1' formato di quadriche unite nella omografia (12), allora la (12') trasformerebbe in sè le forme di Σ_1' e quindi Σ_1 non sarebbe il più ampio sistema lineare di forme trasformate in sè dalla sostituzione (12'). Analogamente per Σ_2.

([12]) Vedi nota ([7]).

Le quadriche (non specializzate) trasformate in sè da Γ si distribuiscono in K sistemi lineari.

Infatti, conservando le notazioni del numero precedente, siano le (12) le equazioni di Γ. Sappiamo (n.° 7, *b*)) che le k sostituzioni lineari Γ_r:

$$x_j = e^{r\frac{2\pi}{2K}i} \sum_{k=0}^{n} a_{jk} x_k' \qquad (r=0, 1, 2, \ldots, K-1) \tag{13}$$

soddisfano tutte alle condizioni del teorema di FROBENIUS. Consideriamo i più ampi sistemi lineari di forme quadratiche Σ_0, $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_{K-1}$ trasformate in sè, rispettivamente, da Γ_0, $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{K-1}$. L'omografia Γ trasforma in sè le quadriche dei K sistemi lineari definiti da Σ_0, $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_{K-1}$.

Le quadriche di uno qualunque Σ_r di questi sistemi lineari non possono essere tutte specializzate perchè Γ_r soddisfa alle condizioni del teorema di FROBENIUS; inoltre due qualunque di essi, Σ_r e Σ_s, non possono avere una quadrica in comune, altrimenti sarebbe $e^{r\frac{2\pi}{2K}i} = \pm e^{s\frac{2\pi}{2K}i}$, cioè $e^{2(r-s)\frac{2\pi}{2K}i} = 1$, e poichè $|r-s| < K$ sarebbe $r=s$. Infine nessuno dei sistemi lineari Σ_r di quadriche può essere contenuto in uno più ampio formato di quadriche unite in Γ (cfr. n.° 7, 3ª nota).

Dopo ciò, per provare la nostra proposizione, basterà dimostrare che fuori dei K sistemi lineari Σ_r non può esistere alcuna quadrica $F=0$, non specializzata ed unita in Γ. Infatti, supponiamo che esista; vi sarà allora un numero ε tale che la sostituzione $\Gamma_\varepsilon : x_i = \varepsilon \sum a_{ik} x_k'$, trasforma in sè la forma F. Sarà inoltre $\varepsilon^{n+1} = \pm 1$ (cfr. n.° 7, *a*)) e detto k_1 il più piccolo intero positivo per cui $\varepsilon^{k_1} = +1$ oppure -1, sarà k_1 un divisore di $n+1$. Dal n.° 7 *a*) segue che i divisori elementari della sostituzione Γ_0 soddisfano alle condizioni I), II) del n.° 2, *d*) rispetto a k_1.

Dalla definizione di K segue $k_1 \leq K$. Ora se k_1 è un divisore di K, sarà $\varepsilon^{2k} = 1$ e la sostituzione Γ_ε coincide con una delle Γ_r oppure con una delle $x_j = -e^{r\frac{2\pi}{2K}i} \sum a_{jk} x_k'$. In entrambi i casi però la forma F appartiene ad uno dei K sistemi lineari Σ_r considerati.

Se k_1 non è un divisore di K, chiamiamo m il m. c. d. di k_1 e K. Sia $(\varrho - \bar{\varrho})^a$ un divisore elementare dell'equazione caratteristica $D(\varrho) = 0$ della sostituzione Γ_0. In $D(\varrho) = 0$ vi saranno i divisori elementari

$$\left(\varrho - \bar{\varrho} e^{r\frac{2\pi}{K}i}\right)^a \qquad (r=0, 1, 2, \ldots, K-1)$$

ed insieme ad ognuno di questi vi saranno, per l'osservazione precedente, i divisori elementari

$$\left(\varrho - \bar{\varrho} e^{r\frac{2\pi}{K}i} e^{s\frac{2\pi}{k_1}i}\right)^a \qquad (s=0, 1, 2, \ldots, k_1-1).$$

Ora, poichè moltiplicando in tutti i modi possibili le radici K-me di $+1$ per le radici k_1-me di $+1$ si ottengono le radici di ordine $v=\frac{Kk_1}{m}$ di $+1$, si può dire che se, in $D(\varrho)=0$ c'è la radice $\bar{\varrho}$ ci sono tutte quelle dell'equazione $\varrho^v-\bar{\varrho}^v=0$, ed a ciascuna di queste corrisponde lo stesso gruppo caratteristico. Inoltre, poichè Γ_0 soddisfa al teorema di FROBENIUS, se $\bar{\varrho}\neq\pm 1$ insieme ad essa, in $D(\varrho)=0$, c'è la radice $\frac{1}{\bar{\varrho}}$ con lo stesso gruppo caratteristico e quindi ci sono anche tutte le radici di $\varrho^v-\frac{1}{\bar{\varrho}^v}=0$, ciascuna col gruppo caratteristico di $\bar{\varrho}$.

Sia $(e_1, e_2, \ldots, e_t)$ il gruppo caratteristico corrispondente alle radici v-me di $+1$. Poichè fra queste c'è la radice $+1$ e Γ_0 soddisfa al teorema di FROBENIUS, i numeri pari e_j $(j=1, 2, \ldots, t)$ debbono comparire a coppie.

Sia $(e_1', e_2', \ldots, e_u')$ il gruppo caratteristico corrispondente alle radici v-me di -1. Osserviamo che uno almeno dei due numeri $\frac{K}{m}$ e $\frac{k_1}{m}$ è dispari; sia $\frac{k_1}{m}=2h+1$. Fra le radici v-me di -1 c'è $e^{\pi\frac{2h+1}{v}i}=e^{\frac{\pi}{K}i}$ che è radice K-ma di -1; quindi i numeri pari del gruppo $(e_1', e_2', \ldots, e_u')$ debbono comparire a coppie. Analogamente se $\frac{k_1}{m}$ è pari e $\frac{K}{m}$ è dispari ([13]).

Questo ragionamento prova che i divisori elementari di $D(\varrho)=0$ soddisfano alle condizioni I) e II) del n.° 2, *d*) anche rispetto al divisore $v(>1)$ di $n+1$. E poichè $v>K$, questo è assurdo per la definizione di K.

9. - Dal numero precedente segue:

a) *le quadriche non specializzate, unite in una omografia di* S_n (*n qualunque*) *si distribuiscono al più in* $n+1$ *sistemi lineari.*

b). *Tutte e sole le omografie di* S_n *le cui quadriche unite non specializzate si distribuiscono in* $n+1$ *sistemi lineari, sono le cicliche di ordine* $n+1$ *con solo* $n+1$ *punti uniti.*

Se è $K=n+1$ si ha un solo gruppo di $n+1$ spazi e quindi questi spazi sono punti e l'omografia è ciclica di ordine $n+1$; viceversa, ogni omografia ciclica di ordine $n+1$ soddisfa alle condizioni del teorema *B*, per $K=n+1$.

c). *Se* $n+1$ *è un numero primo, le quadriche unite non specializzate in una qualunque omografia di* S_n, *se esistono, si distribuiscono in un unico sistema lineare oppure l'omografia è ciclica di ordine* $n+1$ *con solo* $n+1$ *punti uniti.*

Infatti in questo caso il solo valore possibile di K è $n+1$.

d). *Sia* $n+1$ *un numero pari*; indichiamo ancora con K il numero dei

---

([13]) Poniamo $\frac{K}{m}=2h'+1$; fra le radici v-me di -1 c'è $e^{\pi\frac{2h'+1}{v}i}=e^{\frac{\pi}{k_1}i}$ che è una radice k_1-ma di -1. Ora i divisori elementari della equazione $D(\varrho)=0$ soddisfano alle condizioni I) e II) del n.° 2, *d*), anche rispetto a k_1, come si è osservato sopra. Ne segue che anche in questo caso i numeri pari del gruppo $(e_1', e_2', \ldots, e_u')$ debbono comparire a coppie.

sistemi lineari in cui si distribuiscono le quadriche non specializzate, unite in una data omografia Γ di S_n. Si ha:

1°) *se* $\frac{n+1}{K}$ *è pari, la* Γ *è della stessa specie rispetto a tutte le quadriche dei* K *sistemi lineari.* Infatti si ha $\left[e^{r\frac{2\pi}{2K}i}\right]^{n+1}=1$ (vedi n.° 8, (13)).

2°) *se* $\frac{n+1}{K}$ *è dispari e quindi* K *è pari, allora per le quadriche di* $\frac{K}{2}$ *sistemi lineari la* Γ *è di 1ª specie e per le quadriche degli altri* $\frac{K}{2}$ *sistemi lineari è di 2ª specie.* Infatti in questo caso si ha $\left[e^{r\frac{2\pi}{2K}i}\right]^{n+1}=+1$ oppure -1 secondo che r è pari o dispari.

10. - La determinazione delle omografie le cui quadriche unite non specializzate si distribuiscono in più di un sistema lineare non presenta difficoltà. Per esempio se $n=1$, 2, 4 si ricade nel caso *c*).

Se $n=3$, si ha $K=4$ oppure $K=2$; nel 1° caso si trovano le cicliche del 4° ordine con solo 4 punti uniti e nel 2° caso si trovano quelle aventi per divisori elementari:

$$(\varrho-\bar{\varrho}),\quad (\varrho+\bar{\varrho}),\quad \left(\varrho-\frac{1}{\bar{\varrho}}\right),\quad \left(\varrho+\frac{1}{\bar{\varrho}}\right),\qquad (\text{con } \bar{\varrho}^4\neq 1)$$

che sono del tipo [1111]; e le biassiali armoniche.

Se $n=5$ si ha: $k=6$, 2, 3. Nei primi due casi si ritrovano le omografie del n.° 6, e nel caso $k=3$ si trovano quelle aventi per divisori elementari:

$$(\varrho-\bar{\varrho}),\ \left(\varrho-\bar{\varrho}e^{\frac{2\pi}{3}i}\right),\ \left(\varrho-\bar{\varrho}e^{\frac{4\pi}{3}i}\right),\ \left(\varrho-\frac{1}{\bar{\varrho}}\right),\ \left(\varrho-\frac{1}{\bar{\varrho}e^{\frac{2\pi}{3}i}}\right),\ \left(\varrho-\frac{1}{\bar{\varrho}e^{\frac{4\pi}{3}i}}\right),\ (\text{con } \bar{\varrho}^6\neq 1)$$

che sono del tipo [111111]; e le omografie cicliche del 3° ordine con tre rette di punti uniti.

11. - I teoremi A e B e relativi corollari si estendono immediatamente alle omografie permutabili con una reciprocità non degenere. Basta ricordare che:

1°) una reciprocità di S_n si può rappresentare mediante una forma bilineare R a discriminante diverso da zero, in due serie di n variabili.

2°) Se la sostituzione $x_i=\sum_{k=0}^{n} a_{ik}x_k'$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$ trasforma in sè una forma bilineare R a discriminante non nullo, si ha $|a_{ik}|=\pm 1$.

3°) Condizione necessaria e sufficiente affinchè una sostituzione trasformi in sè almeno una forma bilineare R è che i divisori elementari della sua equazione caratteristica siano a coppie di eguale grado ed annullantisi per valori reciproci, eccetto quelli che si annullano per ± 1 ([14]).

([14]) FROBENIUS, loc. cit., p. 34.

Un'omografia (12) di S_n (n dispari) che trasforma in sè almeno una reciprocità non degenere R si chiama di 1ª specie o di 2ª specie rispetto ad R, secondo che, scelto il fattore di proporzionalità μ in modo che la sostituzione (12′) trasformi in sè la R, risulta $|a_{ik}| = +1$ oppure -1 ([15]).

I teoremi A e B divengono:

TEOREMA A'. - Condizione necessaria e sufficiente affinchè un'omografia: $x_i \equiv \sum_{k=0}^{n} a_{ik} x_k'$ di S_n (n dispari) trasformi in sè almeno due reciprocità e sia di specie diversa rispetto ad esse, è che:

I) gli spazi di punti uniti si distribuiscano in gruppi di $k = \frac{n+1}{2l+1}$ con l intero positivo o nullo, tali che quelli dello stesso gruppo abbiano la stessa caratteristica ed appartengano ad uno spazio su cui l'omografia subordinata sia ciclica di ordine k.

II) I gruppi si distribuiscano in coppie corrispondenti a radici reciproche e di eguale caratteristica ([16]).

TEOREMA B'. - Condizione necessaria e sufficiente affinchè le reciprocità non degeneri permutabili con una data omografia: $x_i \equiv \sum_{k=0}^{n} a_{ik} x_k'$ si distribuiscano in almeno due sistemi lineari, è che si possa determinare il fattore di proporzionalità ed un divisore k (>1) di $n+1$, in modo che:

I) gli spazi di punti uniti si distribuiscano in gruppi di k tali che quelli dello stesso gruppo abbiano la stessa caratteristica ed appartengano ad uno spazio su cui l'omografia subordinata sia ciclica di ordine k, essendo k un divisore di $n+1$ maggiore di 1.

II) I gruppi si distribuiscano in coppie corrispondenti a radici reciproche e di egual caratteristica.

È da notare che, data una quadrica non specializzata di S_n (n dispari) esistono sempre omografie di 1ª e di 2ª specie che la trasformano in sè, mentre lo stesso non si può dire per le reciprocità ([17]).

([15]) In un prossimo lavoro esamineremo il significato geometrico di questa distinzione.

([16]) Vedi nota ([7]).

([17]) Vedi FROBENIUS: *Ueber die schiefe Invariante*, ecc. Crelle, 86, pp. 47-48.