

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

MAURO PICONE

**Nuovi indirizzi di ricerca nella teoria e nel calcolo delle soluzioni di
talune equazioni lineari alle derivate parziali della fisica-matematica**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e série, tome 5,
n° 3-4 (1936), p. 213-288*

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1936_2_5_3-4_213_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1936, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NUOVI INDIRIZZI DI RICERCA NELLA TEORIA E NEL CALCOLO DELLE SOLUZIONI DI TALUNE EQUAZIONI LINEARI ALLE DERIVATE PARZIALI DELLA FISICA-MATEMATICA (*)

di MAURO PICONE (Roma) (1).

Introduzione.

La necessità di pervenire a determinazioni quantitative nei compiti assegnati dall'alta Tecnica all'Istituto per le Applicazioni del Calcolo, ha, di mano in mano, condotto i matematici di questo Istituto a tentare nuovi metodi d'indagine dei problemi, taluni anche classici, relativi all'integrazione delle equazioni lineari alle derivate parziali della Fisica-matematica, che quei compiti pongono e impongono. Manca spesso in tali problemi ogni possibilità di riferimento alle condizioni classiche d'esistenza e d'unicità della soluzione, onde occorrono anche nuove ricerche puramente esistenziali atte a sorreggere il ragionamento e a correggere eventualmente l'intuito del Fisico nella costruzione dello schema matematico del fenomeno in istudio. È facile dunque prevedere che, bene spesso, i matematici dell'Istituto dovranno accontentarsi di pervenire a quelle precisazioni analitiche dei problemi proposti che, rese di pubblica ragione, potranno consentirne l'ingresso nel dominio delle ricerche di matematica pura.

Invitato dall'amico LEONIDA TONELLI a parlare alla Scuola Normale Superiore di Pisa delle ricerche analitiche che si presentano all'Istituto per le Applicazioni del Calcolo, ho avuto l'onore di intrattenere il mio uditorio, composto di illustri maestri e di valorosi discepoli (2), sopra un mio metodo generale d'integrazione delle equazioni lineari alle derivate parziali, di qualsivoglia ordine ed in quante si vogliano variabili indipendenti, che può dare in moltissimi casi notevoli e l'effettivo calcolo numerico della soluzione e degli eventuali autovalori e una rappresentazione della soluzione stessa particolarmente adatta a verificarne

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(1) Memoria riassunta in due conferenze tenute alla R. Scuola Normale Superiore di Pisa i giorni 11 e 12 maggio 1935 - XIII.

(2) Mi è sommamente grato rivolgere qui pubbliche grazie ai Colleghi di Pisa, proscrittori della tradizione matematica pisana, per la benevolenza con cui m'han consentito che la mia voce risuonasse ancora una volta fra le vetuste mura del glorioso Palazzo dei Cavalieri, ove io pure — ed è questo il mio vanto — fui scolaro.

l'esistenza, nonchè le relazioni fondamentali per un fecondo studio del comportamento della soluzione all'infinito o nelle vicinanze di punti isolati della frontiera del suo campo di regolarità.

Dette x_1, x_2, \dots, x_r le coordinate di punto in uno spazio euclideo a r dimensioni e posto

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_r^2},$$

il metodo indicato può, in particolare, applicarsi a equazioni del tipo:

$$(1) \quad a_0 \Delta^n u + a_1 \Delta^{n-1} u + \dots + a_{n-1} \Delta u + a_n u = f,$$

nella funzione incognita u , ove i coefficienti a_0, a_1, \dots, a_n sono costanti. Casi particolari classici sono forniti dalle equazioni:

$$\begin{aligned} \Delta u &= f, & \Delta u + \lambda u &= f, \\ \Delta \Delta u &= f, & \Delta \Delta u + a \Delta u + \lambda u &= f, \\ \Delta \Delta \Delta u &= f, \end{aligned}$$

che reggono i problemi della termostatica, dell'elettrostatica, dell'idrodinamica, dell'equilibrio e delle vibrazioni delle membrane e delle piastre, dell'equilibrio dei corpi elastici, ecc.

Nel presente scritto sviluppo, con una certa ampiezza, le idee esposte succintamente alla Scuola Normale. In una prima parte espongo il metodo generale d'integrazione, enunciando, in generalissimi problemi, le ipotesi nelle quali il metodo può applicarsi e i teoremi concernenti le relative condizioni necessarie o sufficienti di esistenza e di unicità della soluzione. In una seconda parte applico il metodo generale allo studio della particolare celebre equazione

$$(2) \quad \Delta^n u = 0 \quad (n > 1),$$

alla cui teoria sono indissolubilmente legati i nomi italiani di ALMANZI, BOGGIO, LAURICELLA, TEDONE, VOLTERRA ⁽³⁾.

Alla messe già ricca di risultati appartenenti a questa teoria il metodo ne apporta altri che ritengo nuovi e indica altresì una quantità di nuovi interessanti problemi al cui studio ho inteso di attrarre i miei giovani uditori della Scuola Normale. Si appalesa così, per esempio, la possibilità di una sistematica estensione di *tutti* i risultati della teoria delle funzioni armoniche a quella delle funzioni *n-iperarmoniche*, verificanti cioè l'equazione (2) per un indice $n > 1$, comunque fissato ⁽⁴⁾.

⁽³⁾ E cade qui a proposito il rilevare che LAURICELLA, TEDONE e VOLTERRA furono allievi della Scuola Normale.

⁽⁴⁾ Nella teoria delle funzioni olomorfe di due variabili complesse x e y ($x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$) la quale, anche da noi, principalmente per opera del SEVERI e del CACCIOP-

* * *

Il teorema della media di GAUSS trova, per esempio, un'elegante estensione (ben nota per $n=2$). Il teorema che una successione di funzioni armoniche in un campo A , uniformemente convergente in ogni dominio limitato contenuto in A , ha per limite una funzione armonica in A , riuscendo convergenti al medesimo modo tutte le successioni formate dalle derivate parziali di qualsivoglia ordine dei termini della data successione, si estende col teorema seguente:

Una successione di funzioni n -iperarmoniche in un campo A , che, con quelle che da essa si deducono per derivazione parziale dei suoi termini, fino all'ordine $n-1$ incluso, è uniformemente convergente in ogni dominio limitato contenuto in A , ha per limite una funzione essa pure n -iperarmonica in A , riuscendo convergenti al medesimo modo tutte le successioni che da quella si deducono per derivazione parziale dei suoi termini, d'ordine comunque elevato.

Del teorema che una funzione continua in un dominio limitato e armonica nell'interno assume il suo minimo ed il suo massimo valore sulla frontiera del dominio, è assai presumibile, come mi ha indicato il mio valoroso discepolo e collaboratore Prof. CARLO MIRANDA, la seguente estensione:

Una funzione continua in un dominio limitato e regolare D , con le sue derivate parziali fino a quelle incluse d'ordine $n-1$, n -iperarmonica nell'interno di D , che abbia identicamente nulle sulla frontiera di D tutte le derivate normali, fino a quella inclusa d'ordine $n-1$, assume il suo minimo ed il suo massimo valore in D sulla frontiera di D ⁽⁵⁾.

Il teorema di PICARD sul comportamento all'infinito delle funzioni armoniche intere in due variabili, trova la seguente estensione:

Se $u(x, y)$ è funzione n -iperarmonica intera, avente cioè tutto il piano (x, y) per campo di regolarità e se, per un certo polinomio $P(x, y)$ di grado ν ,

POLI, ha oggi la più rigogliosa ripresa, il nome di funzioni *biarmoniche* è dato alle parti reali di quelle funzioni, concepite come funzioni delle quattro variabili reali x_1, x_2, y_1, y_2 . Io ritengo, col SEVERI, opportuno riservare a queste tal nome e perciò mi permetto di proporre — seguendo un suggerimento datomi dal Prof. CASTELNUOVO, del quale molto lo ringrazio — che le soluzioni dell'equazione $\Delta^n u = 0$, per $n > 1$, anzichè essere designate, com'è stato fatto finora, col nome di funzioni *n -armoniche*, siano dette funzioni *n -iperarmoniche*. Sol che si rifletta un istante, si troveranno, nella terminologia classica, precedenti atti a giustificare tale proposta.

⁽⁵⁾ Se un polinomio $u(x)$, di grado $2n-1$, ha nulle agli estremi dell'intervallo (a, b) le derivate fino a quella inclusa d'ordine $n-1$, la sua derivata prima si decompone nel prodotto $c(x-a)^{n-1}(x-b)^{n-1}$, con c costante, essa conserva dunque segno costante nell'intervallo (a, b) , e ciò dimostra il teorema enunciato nel testo, nel caso particolare delle funzioni n -iperarmoniche di una variabile x .

si ha, al tendere del punto (x, y) all'infinito, definitivamente $u(x, y) \leq P(x, y)$, oppure $u(x, y) \geq P(x, y)$, la $u(x, y)$ riesce un polinomio il cui grado non supera il maggiore fra i due numeri $2n-2$ e v . In particolare, essa riesce un polinomio al più di grado $2n-2$ quando sia superiormente od inferiormente limitata.

* * *

Ho creduto opportuno di cimentare il nuovo metodo riprendendo con esso l'analisi dei classici elementari problemi della costruzione di una funzione in due variabili (in tre variabili) bi-iperarmonica nell'interno di un cerchio o di una corona circolare (di una sfera o di uno strato sferico) per la quale siano prescritti sulla frontiera del dominio i valori di essa e della sua derivata normale. I risultati ottenuti sono degni di nota.

Considerando, per esempio, le funzioni bi-iperarmoniche in due variabili x e y , il problema concerne il cerchio T di centro O e di raggio R , del piano (x, y) . Diremo ϱ e θ le coordinate polari in questo piano col polo in O e $f(\theta)$ e $g(\theta)$ le funzioni di θ che forniscono i valori prescritti, sulla circonferenza di T , rispettivamente, alla funzione u , bi-iperarmonica nell'interno di T , e alla sua derivata u_ϱ . Ebbene, il metodo conduce *immediatamente* al teorema d'unicità e alla classica formola risolutiva di LAURICELLA:

$$(3) \quad u(aR, \theta) = \frac{(1-a^2)^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{2[1-a \cos(\tau-\theta)]f(\tau)}{[1+a^2-2a \cos(\tau-\theta)]^2} - \frac{Rg(\tau)}{1+a^2-2a \cos(\tau-\theta)} \right\} d\tau,$$

$$\varrho = aR, \quad 0 \leq a < 1,$$

nella sola ipotesi della continuità in T della u e della sua derivata u_ϱ ⁽⁶⁾, che ha di conseguenza la continuità delle assegnate funzioni periodiche (di periodo 2π) $f(\theta)$ e $g(\theta)$ ⁽⁷⁾.

Ma la formola (3) fornisce, per $a < 1$, cioè nell'interno di T , una ben determinata funzione bi-iperarmonica, nella sola ipotesi della sommabilità di $f(\theta)$ e

⁽⁶⁾ La continuità di u_ϱ va intesa, ovviamente, nel dominio rettangolare $0 \leq \varrho \leq R$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, rappresentativo del cerchio T , nel piano di coordinate cartesiane ϱ e θ .

⁽⁷⁾ Si osservi come tale formola consenta un'immediata verifica, per il cerchio, del presunto teorema generale di MIRANDA sul massimo e sul minimo in un dominio di una funzione bi-iperarmonica. Detta c una costante, si ha invero da essa

$$c - u(aR, \theta) = \frac{(1-a^2)^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{2[1-a \cos(\tau-\theta)][c-f(\tau)]}{[1+a^2-2a \cos(\tau-\theta)]^2} + \frac{Rg(\tau)}{1+a^2-2a \cos(\tau-\theta)} \right\} d\tau,$$

e quindi

$$u(aR, \theta) \leq c, \quad \text{se } f(\tau) \leq c \text{ e } g(\theta) \geq 0,$$

$$u(aR, \theta) \geq c, \quad \text{se } f(\tau) \geq c \text{ e } g(\theta) \leq 0.$$

di $g(\theta)$ nell'intervallo $(0, 2\pi)$, ed è ben spontaneo il proporsi, in tale ipotesi, per il secondo membro della (3) e per la sua derivata rispetto a ϱ , studii analoghi a quelli ben noti già compiuti per l'integrale di POISSON, allo scopo anche di stabilire le più generali condizioni, per la $f(\theta)$ e per la $g(\theta)$, nelle quali si possa assicurare, a mezzo della (3), l'esistenza della soluzione del problema considerato, nelle quali si abbia cioè

$$(4) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 1} u(\alpha R, \theta) = f(\theta), \quad \lim_{\alpha \rightarrow 1} u_{\varrho}(\alpha R, \theta) = g(\theta),$$

uniformemente al variare di θ . Non constandomi che detti studi siano stati mai intrappresi nell'indicata generalità, io ho voluto qui iniziarli. Ed ecco i risultati, tutti facilmente ottenibili, nelle varie espressioni della u , fornite dal metodo, ai quali ho voluto limitarmi ⁽⁸⁾:

a). Se $f(\theta)$ è continua per un certo valore θ_0 di θ , in un intorno del quale $g(\theta)$ è limitata, si ha:

$$(5) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 1} u(\alpha R, \theta_0) = f(\theta_0).$$

b). Se $f(\theta)$ è assolutamente continua nell'intervallo $(0, 2\pi)$, e la sua derivata $f'(\theta)$ ha una discontinuità di prima specie in θ_0 , essendo $g(\theta)$ ivi continua, si ha, insieme alla (5),

$$(6) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 1} u_{\varrho}(\alpha R, \theta_0) = g(\theta_0) - \frac{f'(\theta_0^+) - f'(\theta_0^-)}{\pi}.$$

c). Se $f(\theta)$ è assolutamente continua nell'intervallo $(0, 2\pi)$ e $f'(\theta)$ e $g(\theta)$ sono continue in un dominio limitato D dell'asse θ , sussistono entrambe le relazioni di limite (4), ed uniformemente al variare di θ in ogni dominio interno a D .

Riesce dunque accertata, in base alla formola risolutiva (3), l'esistenza della soluzione del posto problema se, all'ipotesi della continuità di $f(\theta)$ e di $g(\theta)$ sull'intera circonferenza, si aggiunge quella della continuità, del pari sull'intera circonferenza, della derivata $f'(\theta)$ di $f(\theta)$ ⁽⁹⁾. Intanto, come abbiamo affermato, nella sola

⁽⁸⁾ Con lievi modificazioni del procedimento adottato si perviene anche alle proposizioni:

a'). Se f ha in θ_0 una discontinuità di prima specie, ed in un intorno di θ_0 la g è limitata, si ha:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} u(\alpha R, \theta_0) = \frac{1}{2} [f(\theta_0^+) + f(\theta_0^-)].$$

b'). Nelle stesse ipotesi, se, per un certo δ positivo, la f riesce assolutamente continua in ciascuno dei due intervalli $(\theta_0 - \delta, \theta_0)$ e $(\theta_0, \theta_0 + \delta)$, e f' e g hanno pur esse in θ_0 discontinuità di prima specie, si ha:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} u_{\varrho}(\alpha R, \theta_0) = \frac{1}{2} [g(\theta_0^+) + g(\theta_0^-)] - \frac{1}{\pi} [f'(\theta_0^+) - f'(\theta_0^-)].$$

⁽⁹⁾ Con l'espressione di u fornita dalla (3) del testo, nella nota: *Integrazione dell'equazione $\Delta^2(\Delta^2 u) = 0$ in un campo circolare*. [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino,

ipotesi della continuità in T di u e di u_ϱ , la u non può esser data che dalla formula (3), ma essa, secondo il teorema *b*), non fornisce una soluzione del problema se $f(\theta)$ è assolutamente continua, con una derivata $f'(\theta)$ dotata di effettive discontinuità di prima specie. Si ha dunque il teorema:

d). *Assegnate le funzioni $f(\theta)$ e $g(\theta)$ continue e periodiche (di periodo 2π), se $f(\theta)$ è assolutamente continua e la sua derivata $f'(\theta)$ è dotata di effettive discontinuità di prima specie, non esiste una funzione u , continua nel cerchio T , con la sua derivata u_ϱ , bi-iperarmonica nell'interno di T , tale che essa e questa derivata assumano sulla circonferenza di T rispettivamente i valori $f(\theta)$ e $g(\theta)$. E se $f'(\theta)$ è generalmente continua, con sole discontinuità di prima specie, ne esiste una continua in T , la cui derivata u_ϱ è continua in ogni dominio contenuto in T che escluda i punti, della circonferenza di T , di discontinuità di $f'(\theta)$, e per la quale, per ogni θ_0 , sussistono le relazioni di limite (5) e (6).*

Considerando ora le funzioni bi-iperarmoniche in tre variabili, il problema concerne la sfera T di centro in O e di raggio R . Detta $\omega(O)$ la superficie sferica di raggio *uno* e di centro in O , per ogni punto M dello spazio diciamo ϱ la distanza \overline{OM} e P il punto d'incontro del raggio vettore \overrightarrow{OM} con la superficie $\omega(O)$. Ogni funzione del punto M può concepirsi come funzione di ϱ e del punto P , ed il problema può così enunciarsi: Assegnate due funzioni $f(P)$ e $g(P)$ sulla $\omega(O)$, costruire una funzione $u(\varrho, P)$, continua in T con la sua derivata u_ϱ , che verifichi le condizioni al contorno

$$\lim_{\varrho \rightarrow R} u(\varrho, P) = u(R, P) = f(P), \quad \lim_{\varrho \rightarrow R} u_\varrho(\varrho, P) = u_\varrho(R, P) = g(P).$$

Le funzioni assegnate $f(P)$ e $g(P)$ debbono, di necessità, esser continue, ed il nuovo metodo conduce *immediatamente* al teorema d'unicità e alla classica formula risolutiva del VOLTERRA, nelle sole ipotesi poste dal problema. Quanto

vol. 31 (1895-1896), p. 1010], il LAURICELLA verificò l'esistenza della soluzione del problema nell'ipotesi che $g(\theta)$ sia continua e $f(\theta)$ abbia derivata seconda limitata. Successivamente l'HADAMARD, nella memoria: *Sur l'équilibre des plaques élastiques circulaires libres ou appuyées et celui de la sphère isotrope*. [Annales de l'École Normale supérieure, tome 18 de la troisième série (1901), p. 327], valendosi della stessa espressione di u , aggiunse, nell'ipotesi che f e g siano funzioni continue, che entrambe le relazioni di limite (4) del testo sussistono per ogni valore di θ in cui f possiede derivata determinata e finita, è cioè differenziabile. La dimostrazione dell'HADAMARD non è esente da un'obiezione, che può però facilmente rimuoversi e d'altra parte allo stesso risultato si perviene col nostro procedimento [cfr. la nota (20)]. Si può dunque affermare l'esistenza della soluzione del problema nell'ipotesi che g sia ovunque continua e f differenziabile. Però alla uniformità, al variare di θ , di entrambe le relazioni di limite (4), cioè all'esistenza della soluzione del problema della quale si è dimostrata l'unicità, si perviene se si suppone uniforme, al variare di θ , la differenziabilità di f , ciò che ha di conseguenza la continuità, da noi appunto ammessa, della derivata f' .

però alla verifica dell'esistenza della soluzione, detta formola la consente se per la $f(P)$ si fa l'ulteriore ipotesi che essa sia la traccia sulla $\omega(O)$ di una funzione $f(M)$ del punto M , che, in un certo dominio dello spazio, nel cui interno giaccia la $\omega(O)$, sia finita e continua con le sue derivate parziali del prim' ordine.

Per la corona circolare, nel piano, o per lo strato sferico, nello spazio, si ottengono, del pari *immediatamente*, i teoremi d'unicità e le formole risolutive ⁽⁴⁰⁾ per il considerato problema, nella sola ipotesi della continuità di u e di u_ρ nella corona o nello strato e quanto alla verifica dell'esistenza della soluzione essa subito si consegue da queste formole, nelle stesse condizioni per le funzioni assegnate ottenute per il cerchio o per la sfera, in grazia di un procedimento che, già da varii anni, nei miei *Appunti d'Analisi superiore* ⁽⁴¹⁾ trovasi impiegato per i problemi analoghi relativi alle funzioni armoniche.

PARTE PRIMA

Generalità ed ipotesi fondamentali.

§ 1. - Procedimento d'integrazione in un iperstrato.

1. - **Posizione del problema generale.** — Una porzione T dello spazio euclideo a $r+1$ dimensioni, di assi coordinati $x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}$, sarà detto un *iperstrato*, se, indicate con $\rho, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$, certe $r+1$ variabili reali, esistono $r+1$ funzioni analitiche di queste variabili:

$$(1) \quad x_k = x_k(\rho, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r) \quad (k=1, 2, \dots, r+1),$$

tali che il punto $(x_1, x_2, x_r, \dots, x_{r+1})$ descrive T al variare del punto $P(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$ in un dominio A , limitato o no, dello spazio $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$ e, indipendentemente da P , di ρ nell'intervallo aperto (ρ', ρ'') , esso pure limitato o no. Designeremo del pari con T l'ipercilindro dello spazio $(\rho, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$ luogo dei punti per cui $P(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$ è in A e $\rho' < \rho < \rho''$.

Vogliamo occuparci dell'integrazione in un iperstrato T delle equazioni differenziali lineari alle derivate parziali, in una sola funzione incognita

$$u(x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}) \equiv u(\rho, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r),$$

⁽⁴⁰⁾ Già date, nel piano, dall'ALMANSI, nell'ipotesi che le funzioni prescritte al contorno, espresse mediante la comune anomalia θ dei punti delle circonferenze limitanti la corona, siano, ciascuna, sviluppabili in serie di FOURIER nell'argomento θ . Cfr. ALMANSI: *Sull'integrazione dell'equazione $\Delta^{2n} = 0$* [Annali di Matematica pura ed applicata, vol. II della s. III (1898)]; SUPINO: *Il problema elastico nella corona circolare e il calcolo degli archi* [Nuovo Cimento (1925)].

⁽⁴¹⁾ Rondinella (Napoli, 1936). Questo libro sarà in seguito citato con « *Appunti* ».

tali che, nelle variabili $\varrho, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$, assumano la forma

$$(2) \quad E[u] \equiv E_0[u] + E_1 \left[\frac{\partial u}{\partial \varrho} \right] + \dots + E_n \left[\frac{\partial^n u}{\partial \varrho^n} \right] = B(\varrho, P),$$

ove $E_k[v]$ designa una qualsivoglia combinazione lineare di una funzione $v(\varrho, P)$ e delle sue derivate parziali rispetto alle sole variabili $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$, fino ad un certo ordine p_k , a coefficienti funzioni continue del punto (ϱ, P) . Il massimo ordine di derivazione parziale, della u rispetto a ϱ , che compare nella (2) è n , laddove l'ordine dell'equazione è dato dal massimo dei numeri $p_0, p_1 + 1, p_2 + 2, \dots, p_n + n$. Detto m il massimo dei numeri p_0, p_1, \dots, p_n , l'ordine dell'equazione (2) è dunque $m + n$.

Diremo che un aggregato $\{u\}$ di funzioni u , reali o complesse, definite in un comune insieme T , è *lineare*, se una qualsivoglia continuazione lineare, a coefficienti costanti, di funzioni dell'aggregato, appartiene sempre a questo. Un funzionale L , definito per le funzioni di un aggregato lineare $\{u\}$, sarà detto *distributivo* se, comunque si scelgano le funzioni u_1, u_2, \dots, u_ν di $\{u\}$ e le costanti c_1, c_2, \dots, c_ν , si ha sempre

$$L \left[\sum_{k=1}^{\nu} c_k u_k \right] = \sum_{k=1}^{\nu} c_k L[u_k].$$

Siano assegnati:

La funzione continua $B(\varrho, P)$, definita nell'iperstrato T ;

un aggregato lineare $\{u\}$ di funzioni continue del punto (ϱ, P) , definite in T , per ciascuna delle quali le derivate che compaiono nel primo membro della (2) — nonché tutte le precedenti da cui queste possono provenire — sono finite e continue in T ;

n funzionali distributivi

$$L_1, L_2, \dots, L_n,$$

definiti in $\{u\}$, ed operanti su ϱ , ed un certo numero ν di altri funzionali

$$A_1, A_2, \dots, A_\nu,$$

pur essi distributivi e definiti in $\{u\}$, ma operanti sul punto P ;

n funzioni

$$f_1(P), f_2(P), \dots, f_n(P),$$

del solo punto P , definite nel dominio A .

Noi considereremo il seguente

PROBLEMA GENERALE. - *Si vuol costruire una funzione dell'aggregato lineare $\{u\}$ che verifichi l'equazione (2) e le $n + \nu$ condizioni:*

$$(3) \quad L_k[u(\varrho, P)] = f_k(P), \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

$$(4) \quad A_k[u(\varrho, P)] = 0, \quad (k=1, 2, \dots, \nu).$$

2. - **Ipotesi fondamentale e proprietà integrali della soluzione.** — Enunciamo subito l'ipotesi nella quale noi considereremo il problema, la quale, con le sue parti *a*), *b*) e *c*), e specialmente con l'ultima, conferirà ad esso — come vedremo — la necessaria concretezza.

IPOTESI FONDAMENTALE. - *a*). *Esiste un sistema:*

$$[\varphi^{(s)}(P)] \equiv \varphi^{(0)}(P), \quad \varphi^{(1)}(P), \dots, \quad \varphi^{(s)}(P), \dots,$$

di funzioni, reali o complesse, del solo punto *P*, ed appartenenti all'aggregato $\{u\}$, completo in *A*, ed ivi ortogonale e normale, per ciascuna delle quali si ha:

$$A_k[\varphi^{(s)}P] = 0 \quad (k=1, 2, \dots, \nu);$$

b) per ogni funzione dell'aggregato $\{u\}$ e per ogni ϱ dell'intervallo aperto (ϱ', ϱ'') i prodotti

$$u(\varrho, P)\overline{\varphi^{(s)}(P)}, \quad L_k[u(\varrho, P)]\overline{\varphi^{(s)}(P)} \quad (1^2)$$

riescono funzioni di *P* sommabili in *A* e la funzione

$$\int_A u(\varrho, P)\overline{\varphi^{(s)}(P)}dP,$$

è pur essa dell'aggregato $\{u\}$ e si ha:

$$L_k \left[\int_A u(\varrho, P)\overline{\varphi^{(s)}(P)}dP \right] = \int_A L_k[u(\varrho, P)]\overline{\varphi^{(s)}(P)}dP;$$

c) per ogni funzione dell'aggregato $\{u\}$, per la quale risulti

$$A_k[u(\varrho, P)] = 0 \quad (k=1, 2, \dots, \nu),$$

comunque si fissi ϱ nell'intervallo (ϱ', ϱ'') , il prodotto

$$E[u]\overline{\varphi^{(s)}(P)}$$

riesce funzione di *P* sommabile in *A* e si ha:

$$(5) \quad \int_A E[u]\overline{\varphi^{(s)}(P)}dP = \sum_{h=0}^n \alpha_h^{(s)}(\varrho) \frac{d^h}{d\varrho^h} \int_A u(\varrho, P)\overline{\varphi^{(s)}(P)}dP,$$

ove le $\alpha_h^{(s)}(\varrho)$ sono ben determinate funzioni continue della ϱ .

Ne discendono facilmente quelle che chiameremo le *proprietà integrali* delle soluzioni della (2). Posto

$$u^{(s)}(\varrho) = \int_A u(\varrho, P)\overline{\varphi^{(s)}(P)}dP,$$

(1²) Con $\overline{\varphi}$ designamo la coniugata di φ .

note che siano le $w^{(s)}(\varrho)$, in virtù della supposta completezza in A del sistema ortogonale e normale $[\varphi^{(s)}]$, si avrà, per ogni ϱ dell'intervallo (ϱ', ϱ'') ,

$$u(\varrho, P) = \sum_{s=0}^{\infty} w^{(s)}(\varrho) \varphi^{(s)}(P),$$

con la convergenza in media, in A , della serie. Il problema è dunque ricondotto al calcolo delle $w^{(s)}(\varrho)$. Dall'equazione

$$E[u] - B(\varrho, P) = 0,$$

supposta verificata, si trae, per ogni indice s ,

$$\int_A \{E[u] - B(\varrho, P)\} \overline{\varphi^{(s)}}(P) dP = 0,$$

cioè, in virtù della proprietà $c)$ dell'ipotesi fondamentale, posto

$$b^{(s)}(\varrho) = \int_A B(\varrho, P) \overline{\varphi^{(s)}}(P) dP,$$

si ha

$$(6) \quad \sum_{h=0}^n a_h^{(s)}(\varrho) \frac{d^h w^{(s)}}{d\varrho^h} = b^{(s)}(\varrho).$$

Detto $w^{(s)}$ un particolare integrale dell'equazione differenziale lineare ordinaria, d'ordine n ,

$$(7) \quad \sum_{h=0}^n a_h^{(s)}(\varrho) \frac{d^h v}{d\varrho^h} = b^{(s)}(\varrho),$$

e $v_1^{(s)}(\varrho), v_2^{(s)}(\varrho), \dots, v_n^{(s)}(\varrho)$, un fissato sistema di n integrali fondamentali per l'associata equazione omogenea, si deduce dalla (6),

$$(8) \quad u^{(s)}(\varrho) = c_1 v_1^{(s)}(\varrho) + c_2 v_2^{(s)}(\varrho) + \dots + c_n v_n^{(s)}(\varrho) + w^{(s)}(\varrho),$$

si ottengono cioè, come conseguenza dell'ipotesi fondamentale, le seguenti

PROPRIETÀ INTEGRALI DELLE SOLUZIONI DELLA $E[u] = B$. — Per ogni soluzione u della (2), appartenente all'aggregato $\{u\}$ e verificante le (4), sussistono, per ogni indice s ($s=0, 1, 2, \dots$) le proprietà integrali:

$$\int_A u(\varrho, P) \overline{\varphi^{(s)}}(P) dP = c_1 v_1^{(s)}(\varrho) + c_2 v_2^{(s)}(\varrho) + \dots + c_n v_n^{(s)}(\varrho) + w^{(s)}(\varrho),$$

ove c_1, c_2, \dots, c_n sono costanti e $w^{(s)}(\varrho), v_h^{(s)}(\varrho)$ ($h=1, 2, \dots, n$), particolari note funzioni della sola ϱ .

3. - Condizioni necessarie d'esistenza e calcolo della soluzione. Funzione di Green. — Per le funzioni $v_k^{(s)}, w^{(s)}$, supposte appartenenti all'aggregato $\{u\}$, porremo

$$L_h[v_k^{(s)}(\varrho)] = I_{hk}^{(s)}, \quad L_h[w^{(s)}(\varrho)] = I_h^{(s)},$$

porremo pure

$$L_h[u^{(s)}(\varrho)] = f_h^{(s)}.$$

Ora, ricorrendo alla definizione di $u^{(s)}(\varrho)$, in virtù della proprietà *b*) dell'ipotesi fondamentale, dalle (3), supposte verificate, si trae

$$f_h^{(s)} = \int_A f_h(P) \bar{\varphi}^{(s)}(P) dP,$$

e quindi che il prodotto $f_h(P) \bar{\varphi}^{(s)}(P)$ deve risultare sommabile su A , e che le quantità $f_h^{(s)}$ sono note. Dalle (8), operando su ambo i membri col funzionale L_h , si deduce

$$(9) \quad \sum_{k=1}^n l_{hk}^{(s)} c_k = f_h^{(s)} - l_h^{(s)}, \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

Se tale sistema di n equazioni lineari, nelle n incognite c_1, c_2, \dots, c_n , vale sempre, per ogni indice s , a determinare tali incognite, dette $c_1^{(s)}, c_2^{(s)}, \dots, c_n^{(s)}$ le loro determinazioni, posto

$$u^{(s)}(\varrho) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(s)} v_k^{(s)}(\varrho) + w^{(s)}(\varrho), \quad (s = 0, 1, \dots),$$

il problema non può possedere più di una soluzione fornita dalla serie

$$(10) \quad u(\varrho, P) = \sum_{s=0}^{\infty} u^{(s)}(\varrho) \varphi^{(s)}(P),$$

che può ben riguardarsi atta al calcolo della $u(\varrho, P)$.

Se il determinante

$$D^{(s)} = \| l_{hk}^{(s)} \|$$

dei coefficienti delle (9) è, per ogni indice s , diverso da zero, e se l'equazione alle derivate parziali assegnata è omogenea, $B(\varrho, P) \equiv 0$, si può assumere $w^{(s)}(\varrho) \equiv 0$, con che riesce $l_h^{(s)} = 0$, ed allora, indicato con $D_h^{(s)}(\varrho)$ il determinante che si ottiene da $D^{(s)}$ sostituendo agli elementi della sua h^{ma} riga orizzontale, ordinatamente le funzioni $v_1^{(s)}(\varrho), v_2^{(s)}(\varrho), \dots, v_n^{(s)}(\varrho)$, la (10) fornisce l'elegante *formola risolutiva del problema*:

$$(11) \quad u(\varrho, P) = \sum_{s=0}^{\infty} \varphi^{(s)}(P) \int_A \left[f_1(Q) \frac{D_1^{(s)}(\varrho)}{D^{(s)}} + f_2(Q) \frac{D_2^{(s)}(\varrho)}{D^{(s)}} + \dots + f_n(Q) \frac{D_n^{(s)}(\varrho)}{D^{(s)}} \right] \bar{\varphi}^{(s)}(Q) dQ,$$

la quale può, eventualmente, avere significato, come lo hanno i singoli termini della serie in cui essa consiste, nella sola ipotesi della sommabilità su A dei prodotti $f_1 \bar{\varphi}^{(s)}, f_2 \bar{\varphi}^{(s)}, \dots, f_n \bar{\varphi}^{(s)}$.

L'equazione assegnata non sia omogenea e sia invece

$$f_1(P) \equiv f_2(P) \equiv \dots \equiv f_n(P) \equiv 0.$$

La (10) fornisce allora

$$u(\varrho, P) = \sum_{s=0}^{\infty} \left(w^{(s)}(\varrho) - \sum_{h=1}^n l_h^{(s)} \frac{D_h^{(s)}(\varrho)}{D^{(s)}} \right) \varphi^{(s)}(P).$$

La funzione $w^{(s)}(\varrho)$, come integrale particolare della (7), ha un'espressione del tipo

$$\begin{aligned} w^{(s)}(\varrho) &= \int_{\varrho'}^{\varrho''} K^{(s)}(\varrho, \tau) b^{(s)}(\tau) d\tau = \int_{\varrho'}^{\varrho''} K^{(s)}(\varrho, \tau) d\tau \int_A B(\tau, Q) \bar{\varphi}^{(s)}(Q) dQ = \\ &= \int_T B(\tau, Q) K^{(s)}(\varrho, \tau) \bar{\varphi}^{(s)}(Q) d\tau dQ, \end{aligned}$$

ove $K^{(s)}(\varrho, \tau)$ è una ben determinata funzione di ϱ e di τ , dipendente soltanto dai coefficienti $a_h^{(s)}(\varrho)$, definita al variare di ϱ e di τ nell'intervallo (ϱ', ϱ'') . Si supponga ora che esista una ben determinata funzione $C_h^{(s)}(\tau)$ per la quale riesca

$$(12) \quad l_h^{(s)} = L_h[w^{(s)}(\varrho)] = L_h \int_{\varrho'}^{\varrho''} K^{(s)}(\varrho, \tau) b^{(s)}(\tau) d\tau = \int_{\varrho'}^{\varrho''} C_h^{(s)}(\tau) b^{(s)}(\tau) d\tau,$$

si avrà

$$l_h^{(s)} = \int_T B(\tau, Q) C_h^{(s)}(\tau) \bar{\varphi}^{(s)}(Q) d\tau dQ,$$

e la $u(\varrho, P)$ assumerà l'espressione

$$u(\varrho, P) = \sum_{s=0}^{\infty} \varphi^{(s)}(P) \int_T B(\tau, Q) \left(K^{(s)}(\varrho, \tau) - \sum_{h=1}^n \frac{C_h^{(s)}(\tau) D_h^{(s)}(\varrho)}{D^{(s)}} \right) \bar{\varphi}^{(s)}(Q) d\tau dQ,$$

la quale, posto

$$(13) \quad G(\varrho, P; \tau, Q) = \sum_{s=0}^{\infty} \left(K^{(s)}(\varrho, \tau) - \sum_{h=1}^n \frac{C_h^{(s)}(\tau) D_h^{(s)}(\varrho)}{D^{(s)}} \right) \varphi^{(s)}(P) \bar{\varphi}^{(s)}(Q),$$

può, almeno formalmente, scriversi

$$u(\varrho, P) = \int_T G(\varrho, P; \tau, Q) B(\tau, Q) d\tau dQ.$$

Per il problema considerato, nell'ulteriore ipotesi dell'esistenza delle funzioni $C_h^{(s)}(\tau)$ per le quali valgono le (12), può dunque anche ricercarsi una *funzione di Green*, data dalla serie (13). La (11) può, pur essa, almeno formalmente, scriversi:

$$u(\varrho, P) = \sum_{h=1}^n \int_A G_h(\varrho, P; Q) f_h(Q) dQ,$$

ove

$$G_h(\varrho, P; Q) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{D_h^{(s)}(\varrho)}{D^{(s)}} \varphi^{(s)}(P) \overline{\varphi}^{(s)}(Q),$$

e pertanto la formola risolutiva del problema di integrare la (2) con le condizioni (3) e (4), può assumere, nelle ipotesi indicate, anche il seguente classico tipo:

$$u(\varrho, P) = \sum_{h=1}^n \int_A G_h(\varrho, P; Q) f_h(Q) dQ + \int_T G(\varrho, P; \tau, Q) B(\tau, Q) d\tau dQ.$$

Può darsi che per qualche valore σ dell'indice s , il sistema (9) non valga a determinare le c_k , cioè che il determinante $D^{(\sigma)}$ riesca nullo. In tal caso sono, ovviamente, condizioni necessarie d'esistenza per la soluzione del problema quelle di compatibilità del sistema di equazioni lineari (9), le quali consisteranno in un certo numero di equazioni integrali lineari che devono essere verificate dalle $f_h(P)$. Esistono soluzioni, non identicamente nulle in T , del problema proposto nell'ipotesi che esso sia *omogeneo*, nell'ipotesi cioè che sia

$$B(\varrho, P) \equiv f_1(P) \equiv f_2(P) \equiv \dots \equiv f_n(P) \equiv 0?$$

In tale ipotesi si può porre $w^{(\sigma)}(\varrho) \equiv 0$, ed il sistema (9) si riduce omogeneo per ogni s , onde segue che le indicate soluzioni possono esistere soltanto se, per qualche indice s , il determinante $D^{(s)}$ si annulla. Se ciò avviene per il valore σ dell'indice s , detto $c_1^{(\sigma)}, c_2^{(\sigma)}, \dots, c_n^{(\sigma)}$ un sistema di valori, non tutti nulli, delle c , soddisfacenti, per $s = \sigma$, al sistema (9) ridotto omogeneo, si ha che la funzione

$$u(\varrho, P) = [c_1^{(\sigma)} v_1^{(\sigma)}(\varrho) + c_2^{(\sigma)} v_2^{(\sigma)}(\varrho) + \dots + c_n^{(\sigma)} v_n^{(\sigma)}(\varrho)] \varphi^{(\sigma)}(P),$$

è una soluzione, non identicamente nulla, del problema omogeneo.

4. - **Ricerca e calcolo degli autovalori.** — Se nei coefficienti dell'equazione (2) entra un parametro λ , diconsi *autovalori* di λ quei valori di λ per ciascuno dei quali esiste una soluzione, non identicamente nulla in T , del considerato problema, supposto omogeneo, la quale dicesi, a sua volta, *autosoluzione* appartenente al considerato autovalore.

Ovviamente, se le ipotesi fatte sono verificate per ogni valore del parametro λ , le $l_{hk}^{(\sigma)}$ risulteranno certe funzioni $l_{hk}^{(\sigma)}(\lambda)$ di λ , ed in virtù di quanto abbiamo dianzi stabilito possiamo asserire che la totalità degli autovalori è fornita dalle radici di ciascuna delle infinite equazioni:

$$(14) \quad D^{(\sigma)}(\lambda) \equiv \| l_{hk}^{(\sigma)}(\lambda) \| = 0, \quad (s=0, 1, 2, \dots).$$

Se λ_0 è un autovalore, radice dell'equazione (14) per $s = \sigma$, detto $c_1^{(\sigma)}, c_2^{(\sigma)}, \dots, c_n^{(\sigma)}$,

un sistema di valori non tutti nulli soddisfacenti al sistema di equazioni lineari omogenee

$$\sum_{k=1}^n l_{hk}^{(o)}(\lambda_0) c_k = 0, \quad (h = 1, 2, \dots, n),$$

la funzione

$$[c_1^{(o)} v_1^{(o)}(\varrho) + c_2^{(o)} v_2^{(o)}(\varrho) + \dots + c_n^{(o)} v_n^{(o)}(\varrho)] \varphi^{(o)}(P),$$

è un' autosoluzione appartenente al considerato autovalore λ_0 ; il numero di tali funzioni, linearmente indipendenti in T , cioè il *ranko* dell'autovalore, è dunque almeno eguale al complemento ad n della caratteristica del determinante $D^{(o)}(\lambda_0)$.

5. - Condizioni sufficienti d'esistenza. — Quali condizioni basta richiedere alla serie al secondo membro della (10), affinché essa, nelle ipotesi fatte ed in quella che il sistema (9) riesca compatibile per ogni indice s , fornisca effettivamente una soluzione del problema? Si può rispondere con un semplice criterio nel caso che l'aggregato $\{u\}$ sia *chiuso d'ordine $m+n$* e contenga tutti i prodotti $w^{(s)}(\varrho)\varphi^{(s)}(P)$, $v_k^{(s)}(\varrho)\varphi^{(s)}(P)$ ed i funzionali A_k e L_k siano *continui d'ordine $m+n$* , al più.

Diciamo che un aggregato $\{u\}$, di funzioni u definite in un insieme T , è *chiuso d'ordine N* , se, essendo $U_1, U_2, \dots, U_s, \dots$ una qualsivoglia successione di funzioni di $\{u\}$, che converga uniformemente in ogni dominio limitato contenuto in T , la funzione limite appartiene all'aggregato, tutte le volte che si abbia, in ogni dominio limitato contenuto in T , anche la convergenza uniforme della successione delle derivate parziali delle U_s , fino a quelle incluse d'ordine N . Dicendo, semplicemente, che l'aggregato è *chiuso*, intenderemo dire che è chiuso d'ordine zero.

Diciamo che un funzionale L , definito per le funzioni di un aggregato $\{u\}$, è *continuo d'ordine zero*, o, semplicemente, *continuo*, se, essendo $U_1, U_2, \dots, U_s, \dots$ e U funzioni di $\{u\}$, tutte le volte che sia

$$\lim_{s \rightarrow \infty} U_s = U,$$

uniformemente in ogni dominio limitato contenuto in T , riesce pure

$$\lim_{s \rightarrow \infty} L[U_s] = L[U];$$

diciamo che L è *continuo d'ordine N* se a tale relazione di limite si perviene a patto di ammettere la convergenza uniforme, in ogni dominio limitato contenuto in T , delle successioni delle derivate parziali delle U_s , fino a quelle incluse di ordine N .

Se, ora, il sistema (9) riesce compatibile per ogni indice s , detto $c_1^{(s)}, c_2^{(s)}, \dots, c_n^{(s)}$ un qualsivoglia sistema di valori delle c_k che lo soddisfi, tale che la serie al secondo membro della (10), con tutte quelle che da essa si deducono per derivazione parziale termine a termine, fino all'ordine $m+n$ incluso, riesca uniformemente convergente in ogni dominio limitato contenuto in T , verificheremo subito

che la $u(\varrho, P)$, fornita dalla serie, appartenente certo all'aggregato $\{u\}$, supposto chiuso d'ordine $m+n$, è intanto una soluzione dell'equazione alle derivate parziali (2), che, nell'ipotesi che il funzionale distributivo A_k ($k=1, 2, \dots, \nu$) sia continuo, al più d'ordine $m+n$, soddisfa le condizioni $A_k u=0$. Per tale continuità di A_k si ha, in primo luogo,

$$A_k u(\varrho, P) = \sum_{s=0}^{\infty} u^{(s)}(\varrho) A_k \varphi^{(s)}(P) = 0.$$

Per ogni ϱ dell'intervallo (ϱ', ϱ'') porremo

$$U(\varrho, P) = E \left[\sum_{s=0}^{\infty} u^{(s)}(\varrho) \varphi^{(s)}(P) \right] - B(\varrho, P),$$

e si ha

$$(15) \quad \int_A U(\varrho, P) \bar{\varphi}^{(\sigma)}(P) dP = \int_A E \left[\sum_{s=0}^{\infty} u^{(s)}(\varrho) \varphi^{(s)}(P) \right] \bar{\varphi}^{(\sigma)}(P) dP - b^{(\sigma)}(\varrho),$$

ed in virtù della proprietà *c*) dell'ipotesi fondamentale e della (6),

$$(16) \quad \int_A U(\varrho, P) \bar{\varphi}^{(\sigma)}(P) dP = \\ = \sum_{h=1}^n a_h^{(\sigma)}(\varrho) \frac{d^h}{d\varrho^h} \int_A \bar{\varphi}^{(\sigma)}(P) \left(\sum_{s=0}^{\infty} u^{(s)}(\varrho) \varphi^{(s)}(P) \right) dP - b^{(\sigma)}(\varrho) = \\ = \sum_{h=1}^n a_h^{(\sigma)}(\varrho) \frac{d^h u^{(\sigma)}}{d\varrho^h} - b^{(\sigma)}(\varrho) = 0,$$

onde segue, data la completezza del sistema $[\varphi^{(s)}]$, che $U(\varrho, P) \equiv 0$, per ogni ϱ , cioè, in secondo luogo, che $u(\varrho, P)$ è soluzione della (2).

Se, in terzo luogo, le funzioni assegnate $f_h(P)$ sono suscettibili, ciascuna, di uno sviluppo in serie di FOURIER, nel sistema $[\varphi^{(s)}(P)]$, convergente in A , e se i funzionali distributivi L_h sono continui d'ordine $m+n$, al più, la $u(\varrho, P)$, fornita dalla serie (10), verifica anche le condizioni $L_h u(\varrho, P) = f_h(P)$, e pertanto essa è proprio una soluzione del problema proposto. Si ha inverso

$$L_h u(\varrho, P) = \sum_{s=0}^{\infty} \varphi^{(s)}(P) L_h u^{(s)}(\varrho) = \sum_{s=0}^{\infty} \varphi^{(s)}(P) \left[\sum_{k=1}^n l_{hk}^{(s)} c_k^{(s)} + l_h^{(s)} \right] = \\ = \sum_{s=0}^{\infty} f_h^{(s)} \varphi^{(s)}(P) = f_h(P).$$

Riepilogando, si ha dunque il teorema:

I. *Nelle ipotesi fatte e nelle notazioni adottate, condizione necessaria affinché il problema proposto abbia soluzioni è che, per ogni indice s , il*

sistema (9) di equazioni lineari, nelle n incognite c_1, c_2, \dots, c_n , sia compatibile. Se il determinante dei coefficienti di tale sistema è diverso da zero per ogni s , il problema non può possedere più di una soluzione, fornita dalla serie (10). Soddisfatta la sopradetta condizione necessaria, sono condizioni sufficienti per la risolubilità del problema, a mezzo della serie (10), le seguenti: che l'aggregato lineare $\{u\}$ contenga i prodotti $w^{(s)}(\varrho)\varphi^{(s)}(P)$, $v_k^{(s)}(\varrho)\varphi^{(s)}(P)$ e sia chiuso d'ordine $m+n$, che gli assegnati funzionali distributivi L_k e Λ_k siano continui d'ordine $m+n$, al più, che le assegnate funzioni $f_k(P)$ siano, ciascuna, sviluppabili in serie di Fourier nel sistema $[\varphi^{(s)}]$, che, per ogni indice s , si possa scegliere un sistema $c_1^{(s)}, c_2^{(s)}, \dots, c_n^{(s)}$, soluzione del sistema di equazioni (9), in modo che la serie (10), con tutte quelle che se ne deducono per derivazione parziale, termine a termine, fino all'ordine $m+n$ incluso, siano uniformemente convergenti in ogni dominio limitato contenuto in T .

Sussistono, com'è facile convincersi, anche in generale, condizioni sufficienti di risolubilità del problema meno restrittive di quelle indicate nel teorema ottenuto, le quali però hanno il pregio di conferire ad esso un enunciato assai semplice.

Si assumano ora, come più piace, le costanti $c_k^{(s)}$ nella combinazione

$$v^{(s)}(\varrho) = c_1^{(s)}v_1^{(s)}(\varrho) + c_2^{(s)}v_2^{(s)}(\varrho) + \dots + c_n^{(s)}v_n^{(s)}(\varrho),$$

e si ponga, per un numero intero e positivo N , comunque fissato,

$$V(\varrho, P) = E \left[\sum_{s=0}^N v^{(s)}(\varrho)\varphi^{(s)}(P) \right];$$

si ha allora, per ogni indice σ [cfr. le (15) e (16)],

$$\int_A V(\varrho, P)\bar{\varphi}^{(\sigma)}(P)dP = 0,$$

e quindi che $V(\varrho, P) \equiv 0$, cioè che la combinazione

$$\sum_{s=0}^N [c_1^{(s)}v_1^{(s)}(\varrho) + c_2^{(s)}v_2^{(s)}(\varrho) + \dots + c_n^{(s)}v_n^{(s)}(\varrho)]\varphi^{(s)}(P),$$

comunque si prendano le costanti $c_1^{(s)}, c_2^{(s)}, \dots, c_n^{(s)}$, è una soluzione dell'equazione omogenea $E[u] = 0$. E pertanto che:

II. *Nelle ipotesi fatte e nelle notazioni adottate, i prodotti $v_k^{(s)}(\varrho)\varphi^{(s)}(P)$ sono, comunque si scelgano gl'indici k e s , particolari soluzioni dell'equazione omogenea $E[u] = 0$, si ha cioè*

$$\sum_{h=0}^n \frac{d^h v_h^{(s)}(\varrho)}{d\varrho^h} E_h[\varphi^{(s)}] = 0.$$

6. - Un teorema concernente l'ipotesi fondamentale. — Per la proprietà *c*), la più cospicua fra quelle postulate dall'ipotesi fondamentale, giova, nelle applicazioni, tener presente un teorema che andiamo a stabilire. Si abbia un numero p di operatori alle derivate parziali, rispetto alle variabili $\varrho, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$,

$$E_1, E_2, \dots, E_p,$$

del tipo di E , godente ciascuno della proprietà *c*), rispettivamente degli ordini $m_1 + n_1, m_2 + n_2, \dots, m_p + n_p$, e degli ordini n_1, n_2, \dots, n_p rispetto a ϱ , i cui coefficienti siano continui nell'insieme T , con le loro derivate parziali fino a quelle incluse d'ordine $(m_1 + n_1 + m_2 + n_2 + \dots + m_p + n_p)q$, ove q è un certo numero, intero e positivo, e si abbia, per ogni u dell'aggregato $\{u\}$ per cui sia $\Lambda_k[u]=0$ ($k=1, 2, \dots, \nu$),

$$(17) \quad \int_A E_h[u]\bar{\varphi}^{(s)}(P)dP = D_{hs} \left[\int_A u\bar{\varphi}^{(s)}dP \right],$$

con

$$D_{hs} \equiv \sum_{k=0}^{n_h} a_{hk}^{(s)}(\varrho) \frac{d^k}{d\varrho^k}, \quad (h=1, 2, \dots, p),$$

ove i coefficienti $a_{hk}^{(s)}(\varrho)$ riescono finiti e continui nell'intervallo (ϱ', ϱ'') , insieme alle loro derivate, fino a quelle incluse d'ordine $n_1 + n_2 + \dots + n_p$. Ebbene, sussiste allora il seguente teorema:

III. Se ciascuno degli operatori E_1, E_2, \dots, E_p verifica la proprietà *c*) e se per ogni funzione u di $\{u\}$ per la quale è $\Lambda_k[u]=0$ ($k=1, 2, \dots, \nu$), anche $E_h[u]$ è di $\{u\}$ e riesce $\Lambda_k E_h[u]=0$ ($k=1, 2, \dots, \nu$; $h=1, 2, \dots, p$), comunque si assumano le funzioni $c_{k_1 k_2 \dots k_p}(\varrho)$ continue nell'intervallo (ϱ', ϱ'') , per l'operatore

$$E \equiv \sum_{k_1, k_2, \dots, k_p}^{0 \dots q} c_{k_1 k_2 \dots k_p}(\varrho) E_1^{k_1} E_2^{k_2} \dots E_p^{k_p},$$

si verifica, del pari, la proprietà *c*). E se per una funzione u di $\{u\}$ sussistono le (17), si avrà per essa

$$\int_A E[u]\bar{\varphi}^{(s)}dP = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_p}^{0 \dots q} c_{k_1 k_2 \dots k_p}(\varrho) D_{1s}^{k_1} D_{2s}^{k_2} \dots D_{ps}^{k_p} \left[\int_A u\bar{\varphi}^{(s)}dP \right].$$

Ed invero, se nelle (17), poniamo $E_{h'}[u]$ in luogo di u si ricava:

$$\int_A E_h E_{h'}[u]\bar{\varphi}^{(s)}dP = D_{hs} \left[\int_A E_{h'}[u]\bar{\varphi}^{(s)}dP \right] = D_{hs} D_{h's} \left[\int_A u\bar{\varphi}^{(s)}dP \right].$$

§ 2. - Esempi di problemi per i quali si applica
il procedimento generale d'integrazione.

7. - Problemi in due variabili indipendenti. — Sia T la striscia del piano (ϱ, θ) definita dalle limitazioni:

$$\theta' \leq \theta \leq \theta'', \quad \varrho' < \varrho < \varrho'',$$

e l'operatore

$$E \equiv \sum_{h=0}^m \sum_{k=0}^n c_{hk}(\varrho) \frac{\partial^{h+k}}{\partial \theta^h \partial \varrho^k},$$

abbia coefficienti dipendenti soltanto da ϱ , laddove i funzionali $A_1[u]$, $A_2[u]$, ..., $A_r[u]$ consistano nei seguenti

$$(18) \quad \left[\frac{\partial^h u}{\partial \theta^h} \right]_{\theta=\theta''} - \left[\frac{\partial^h u}{\partial \theta^h} \right]_{\theta=\theta'}, \quad (h=0, 1, 2, \dots, m-1).$$

Posto

$$\tau = \theta'' - \theta', \quad \varphi^{(s)}(\theta) = e^{is \frac{2\pi}{\tau} \theta},$$

per ogni funzione u di $\{u\}$, verificante le $A_h[u]=0$, si trova:

$$\begin{aligned} \int_{\theta'}^{\theta''} E[u] e^{-is \frac{2\pi}{\tau} \theta} d\theta &= \sum_{h=0}^m \sum_{k=0}^n c_{hk}(\varrho) \frac{\partial^k}{\partial \varrho^k} \int_{\theta'}^{\theta''} \frac{\partial^h u}{\partial \theta^h} e^{-is \frac{2\pi}{\tau} \theta} d\theta = \\ &= \sum_{h=0}^m \sum_{k=0}^n c_{hk}(\varrho) \frac{\partial^k}{\partial \varrho^k} \left\{ \left(is \frac{2\pi}{\tau} \right)^h \int_{\theta'}^{\theta''} u(\varrho, \theta) e^{-is \frac{2\pi}{\tau} \theta} d\theta \right\} = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{d^k u^{(s)}}{d\varrho^k} \sum_{h=0}^m \left(is \frac{2\pi}{\tau} \right)^h c_{hk}(\varrho), \end{aligned}$$

e si ha dunque

$$\int_{\theta'}^{\theta''} E[u] e^{-is \frac{2\pi}{\tau} \theta} d\theta = \sum_{k=0}^n \alpha_k^{(s)}(\varrho) \frac{d^k u^{(s)}}{d\varrho^k},$$

con

$$\alpha_k^{(s)}(\varrho) = \sum_{h=0}^m \left(is \frac{2\pi}{\tau} \right)^h c_{hk}(\varrho);$$

la proprietà $c)$ è dunque valida col sistema ortogonale e completo

$$e^{is \frac{2\pi}{\tau} \theta} \quad (s = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots),$$

per le cui funzioni si ha sempre $A_h e^{is \frac{2\pi}{\tau} \theta} = 0$.

Sia, come secondo esempio, T la striscia del piano (ϱ, θ) definita dalle limitazioni:

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad \varrho' < \varrho < \varrho'',$$

e l'operatore

$$E \equiv \sum_{h=0}^m \sum_{k=0}^n c_{hk}(\varrho) \frac{\partial^{2h+k}}{\partial \theta^{2h} \partial \varrho^k},$$

con coefficienti dipendenti soltanto da ϱ , contenga solo derivazioni d'ordine pari rispetto a θ , laddove i funzionali $A_k[u]$ consistano nei seguenti

$$\left[\frac{\partial^{2h} u}{\partial \theta^{2h}} \right]_{\theta=0}, \quad \left[\frac{\partial^{2h} u}{\partial \theta^{2h}} \right]_{\theta=\pi}, \quad (h=0, 1, \dots, m-1).$$

Posto allora

$$\varphi^{(s)}(\theta) = \text{sen } s\theta, \quad (s=1, 2, \dots),$$

per ogni funzione u di $\{u\}$ verificante le $A_k[u]=0$, si trova

$$\begin{aligned} \int_0^\pi E[u] \text{sen } s\theta d\theta &= \sum_{h=0}^m \sum_{k=0}^n c_{hk}(\varrho) \frac{\partial^k}{\partial \varrho^k} \int_0^\pi \frac{\partial^{2h} u}{\partial \theta^{2h}} \text{sen } s\theta d\theta = \\ &= \sum_{h=0}^m \sum_{k=0}^n c_{hk}(\varrho) \frac{d^k}{d\varrho^k} \left[(-1)^h s^{2h} \int_0^\pi u(\varrho, \theta) \text{sen } s\theta d\theta \right] = \\ &= \sum_{k=0}^n \alpha_k^{(s)}(\varrho) \frac{d^k u^{(s)}}{d\varrho^k}, \end{aligned}$$

con

$$\alpha_k^{(s)}(\varrho) = \sum_{h=0}^m (-1)^h s^{2h} c_{hk}(\varrho).$$

La proprietà c è dunque verificata col sistema ortogonale $[\text{sen } s\theta]$, completo nell'intervallo $(0, \pi)$, per le cui funzioni si ha sempre $A_k \text{sen } s\theta = 0$.

Ad un caso particolare del primo esempio, molto importante per le applicazioni, si perviene quando si voglia integrare in una corona circolare T del piano cartesiano (x, y) , con centro nell'origine O delle coordinate, un'equazione del tipo:

$$(19) \quad \sum_{k=0}^n a_k (\sqrt{x^2 + y^2})^k \Delta^k u = B(x, y),$$

ove

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Dette ϱ e θ le coordinate polari, di polo in O , detti ϱ' ($\varrho' \geq 0$) il raggio minore e ϱ'' ($\varrho'' \leq +\infty$) il raggio maggiore della corona circolare T , si ha:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho},$$

ed il problema consiste nell'integrazione dell'equazione

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k(\varrho) \left(\frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \right)^k u = B(\varrho, \theta),$$

nella striscia T del piano (ϱ, θ) definita dalle limitazioni:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad \varrho' < \varrho < \varrho''.$$

Volendo, per esempio, richiedere alla u di essere finita e continua nella corona circolare T del piano (x, y) , con tutte le sue derivate fino a quelle incluse d'ordine $2n$, ne seguiranno, di necessità le condizioni per la u

$$A_k[u] \equiv \left[\frac{\partial^k u}{\partial \theta^k} \right]_{\theta=2\pi} - \left[\frac{\partial^k u}{\partial \theta^k} \right]_{\theta=0} = 0, \quad (k=0, 1, \dots, 2n-1).$$

E si rientra dunque nel primo esempio particolare. Nello studio dell'equilibrio o delle vibrazioni delle membrane o delle piastre si perviene ad equazioni che sono, tutte, caso particolare della seguente:

$$(20) \quad E[u] \equiv \sum_{k=0}^n \alpha_k \Delta^k u = B(\varrho, \theta),$$

coi coefficienti α_k costanti. È interessante osservare come, in questo caso particolare importante, si possa pervenire, a mezzo delle funzioni di BESSEL, alle proprietà integrali delle soluzioni della (20):

$$(21) \quad \int_0^{2\pi} u(\varrho, \theta) e^{-is\theta} d\theta = c_1 v_1^{(s)}(\varrho) + c_2 v_2^{(s)}(\varrho) + \dots + c_{2n} v_{2n}^{(s)}(\varrho) + w^{(s)}(\varrho),$$

le quali, come abbiamo visto, consentono il calcolo della u astretta a verificare ulteriori condizioni del tipo

$$L_k u(\varrho, \theta) = f_k(\theta) \quad (k=1, 2, \dots, 2n).$$

e, come vedremo nella seconda parte con la trattazione di un caso particolare classico, sono altresì feconde di moltissimi risultati della teoria delle soluzioni della (20).

Si può supporre $\alpha_n=1$. Dette $-a_1, -a_2, \dots, -a_n$ le radici, reali o complesse, dell'equazione algebrica

$$\Delta^n + \alpha_{n-1} \Delta^{n-1} + \dots + \alpha_1 \Delta + \alpha_0 = 0,$$

si ha

$$E = \sum_{k=0}^n \alpha_k \Delta^k = (\Delta + a_1)(\Delta + a_2) \dots (\Delta + a_n),$$

ma

$$\int_0^{2\pi} (\Delta u + a_k u) e^{-is\theta} d\theta = \frac{d^2 u^{(s)}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du^{(s)}}{d\rho} + \left(a_k - \frac{s^2}{\rho^2} \right) u^{(s)},$$

con

$$u^{(s)}(\rho) = \int_0^{2\pi} u(\rho, \theta) e^{-is\theta} d\theta,$$

e pertanto, indicando con D_{ks} l'operatore besseliano

$$\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \left(a_k - \frac{s^2}{\rho^2} \right),$$

si trova, in forza del teorema III del paragrafo precedente,

$$\int_0^{2\pi} E[u] e^{-is\theta} d\theta = D_{1s} D_{2s} \dots D_{ns} u^{(s)},$$

e quindi, posto

$$\int_0^{2\pi} B(\rho, \theta) e^{-is\theta} d\theta = b^{(s)}(\rho),$$

l'equazione (20) fornisce:

$$(22) \quad D_{1s} D_{2s} \dots D_{ns} u^{(s)} = b^{(s)}(\rho).$$

Ora, dette $J_{|s|}$ e $Y_{|s|}$ rispettivamente le funzioni di BESSEL e di NEUMANN d'ordine $|s|$, l'equazione omogenea:

$$D_{ks} v \equiv \frac{d^2 v}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dv}{d\rho} + \left(a_k - \frac{s^2}{\rho^2} \right) v = 0,$$

ha, per $a_k \neq 0$, gl'integrali fondamentali

$$V_{1k}^{(s)} = J_{|s|}(\sqrt{a_k} \rho), \quad V_{2k}^{(s)} = Y_{|s|}(\sqrt{a_k} \rho), \quad (s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

per $a_k = 0$ e $s \neq 0$,

$$V_{1k}^{(s)} = \rho^{|s|}, \quad V_{2k}^{(s)} = \rho^{-|s|}, \quad (s = \pm 1, \pm 2, \dots),$$

per $a_k = s = 0$,

$$V_{1k}^{(0)} = 1, \quad V_{2k}^{(0)} = \log \rho.$$

Posto, in ogni caso,

$$W_k^{(s)}(\rho, \tau) = \frac{V_{1k}^{(s)}(\tau) V_{2k}^{(s)}(\rho) - V_{2k}^{(s)}(\tau) V_{1k}^{(s)}(\rho)}{V_{1k}^{(s)}(\tau) \frac{d}{d\tau} V_{2k}^{(s)}(\tau) - V_{2k}^{(s)}(\tau) \frac{d}{d\tau} V_{1k}^{(s)}(\tau)},$$

dette $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}, \dots$, costanti arbitrarie e fissato a piacere un punto ρ_0 del-

l'intervallo (ϱ', ϱ'') , dalla (22) si trae successivamente

$$\begin{aligned}
 D_{2s}D_{3s}\dots D_{ns}u^{(s)} &= c_{11}V_{11}^{(s)}(\varrho) + c_{12}V_{12}^{(s)}(\varrho) + \int_{\varrho_0}^{\varrho} W_1^{(s)}(\varrho, \tau)b^{(s)}(\tau)d\tau, \\
 D_{3s}D_{4s}\dots D_{ns}u^{(s)} &= c_{21}V_{21}^{(s)}(\varrho) + c_{22}V_{22}^{(s)}(\varrho) + c_{11} \int_{\varrho_0}^{\varrho} W_2^{(s)}(\varrho, \tau)V_{11}^{(s)}(\tau)d\tau + \\
 &\quad + c_{12} \int_{\varrho_0}^{\varrho} W_2^{(s)}(\varrho, \tau)V_{12}^{(s)}(\tau)d\tau + \int_{\varrho_0}^{\varrho} W_2^{(s)}(\varrho, \tau) \int_{\varrho_0}^{\tau} W_1^{(s)}(\tau, \tau')b^{(s)}(\tau')d\tau', \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

onde con n successive quadrature si perviene ad esprimere la $u^{(s)}$ precisamente com'è indicato dalla (21), le funzioni $v_k^{(s)}(\varrho)$ e $w^{(s)}(\varrho)$ riuscendo ben note. Nelle funzioni

$$v_k^{(s)}(\varrho)e^{is\theta}, \quad (k=1, 2, \dots, 2n; s=0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

si hanno (teorema II) tanti integrali particolari, linearmente indipendenti in T , dell'equazione omogenea $\sum a_k \Delta^k u = 0$.

8. - Proprietà integrali per le funzioni armoniche e iperarmoniche in due variabili. — Si trova subito, in particolare, che le soluzioni dell'equazione:

$$(23_1) \quad \Delta u = 0,$$

godono [cfr. « *Appunti* », formole (24) di p. 278], nella corona circolare $\varrho' < \varrho < \varrho''$, delle proprietà integrali

$$(24_1) \quad \left\{ \begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} u(\varrho, \theta)d\theta &= c_1^{(0)} + c_2^{(0)} \log \varrho, \\
 \int_0^{2\pi} u(\varrho, \theta)e^{-is\theta}d\theta &= c_1^{(s)}\varrho^{|s|} + \frac{c_2^{(s)}}{\varrho^{|s|}}, \quad \text{per } |s| \geq 1,
 \end{aligned} \right.$$

quelle dell'equazione

$$(23_2) \quad \Delta \Delta u = 0,$$

delle seguenti

$$(24_2) \quad \left\{ \begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} u(\varrho, \theta)d\theta &= c_1^{(0)} + c_2^{(0)} \log \varrho + (c_3^{(0)} + c_4^{(0)} \log \varrho)\varrho^2, \\
 \int_0^{2\pi} u(\varrho, \theta)e^{\mp i\theta}d\theta &= c_1^{(\pm 1)}\varrho + \frac{c_2^{(\pm 1)}}{\varrho} + \left(c_3^{(\pm 1)}\varrho + c_4^{(\pm 1)} \frac{\log \varrho}{\varrho} \right)\varrho^2, \\
 \int_0^{2\pi} u(\varrho, \theta)e^{-is\theta}d\theta &= c_1^{(s)}\varrho^{|s|} + \frac{c_2^{(s)}}{\varrho^{|s|}} + \left(c_3^{(s)}\varrho^{|s|} + \frac{c_4^{(s)}}{\varrho^{|s|}} \right)\varrho^2, \quad \text{per } |s| \geq 2,
 \end{aligned} \right.$$

ed in generale, quelle dell'equazione

$$(23_n) \quad \Delta^n u = 0,$$

dalle seguenti (24_n)

$$\int_0^{2\pi} u(\varrho, \theta) d\theta = c_1^{(0)} + c_2^{(0)} \log \varrho + (c_3^{(0)} + c_4^{(0)} \log \varrho) \varrho^2 + \dots + (c_{2n-1}^{(0)} + c_{2n}^{(0)} \log \varrho) \varrho^{2n-2},$$

$$\int_0^{2\pi} u(\varrho, \theta) e^{\mp i\theta} d\theta = c_1^{(\pm 1)} \varrho + \frac{c_2^{(\pm 1)}}{\varrho} + \left(c_3^{(\pm 1)} \varrho + c_4^{(\pm 1)} \frac{\log \varrho}{\varrho} \right) \varrho^2 + \dots +$$

$$+ \left(c_{2n-1}^{(\pm 1)} \varrho + c_{2n}^{(\pm 1)} \frac{\log \varrho}{\varrho} \right) \varrho^{2n-2},$$

$$\int_0^{2\pi} u(\varrho, \theta) e^{\mp 2i\theta} d\theta = c_1^{(\pm 2)} \varrho^2 + \frac{c_2^{(\pm 2)}}{\varrho^2} + \left(c_3^{(\pm 2)} \varrho^2 + \frac{c_4^{(\pm 2)}}{\varrho^2} \right) \varrho^2 +$$

$$+ \left(c_5^{(\pm 2)} \varrho^2 + c_6^{(\pm 2)} \frac{\log \varrho}{\varrho^2} \right) \varrho^4 + \dots + \left(c_{2n-1}^{(\pm 2)} \varrho^2 + c_{2n}^{(\pm 2)} \frac{\log \varrho}{\varrho^2} \right) \varrho^{2n-2},$$

.....

$$\int_0^{2\pi} u(\varrho, \theta) e^{\mp i(n-1)\theta} d\theta = c_1^{[\pm(n-1)]} \varrho^{n-1} + \frac{c_2^{[\pm(n-1)]}}{\varrho^{n-1}} + \left(c_3^{[\pm(n-1)]} \varrho^{n-1} + \frac{c_4^{[\pm(n-1)]}}{\varrho^{n-1}} \right) \varrho^2 + \dots +$$

$$+ \left(c_{2n-3}^{[\pm(n-1)]} \varrho^{n-1} + \frac{c_{2n-2}^{[\pm(n-1)]}}{\varrho^{n-1}} \right) \varrho^{2n-4} + \left(c_{2n-1}^{[\pm(n-1)]} \varrho^{n-1} + c_{2n}^{[\pm(n-1)]} \frac{\log \varrho}{\varrho^{n-1}} \right) \varrho^{2n-2},$$

$$\int_0^{2\pi} u(\varrho, \theta) e^{-is\theta} d\theta = c_1^{(s)} \varrho^{|s|} + \frac{c_2^{(s)}}{\varrho^{|s|}} + \left(c_3^{(s)} \varrho^{|s|} + \frac{c_4^{(s)}}{\varrho^{|s|}} \right) \varrho^2 + \dots + \left(c_{2n-1}^{(s)} \varrho^{|s|} + \frac{c_{2n}^{(s)}}{\varrho^{|s|}} \right) \varrho^{2n-2},$$

per $|s| \geq n$,

le $c_h^{(k)}$ designando costanti reali o complesse.

Sono dunque esempi particolari di funzioni bi-iperarmoniche:

$$\log \varrho, \quad \varrho^2 \log \varrho, \quad \varrho \log \varrho e^{\pm i\theta},$$

$$e^{\pm 2i\theta}$$

$$\varrho^{|s|} e^{is\theta}, \quad \varrho^{|s|+2} e^{is\theta}, \quad \varrho^{-|s|} e^{is\theta}, \quad \varrho^{2-|s|} e^{is\theta},$$

esempi particolari di funzioni n -iperarmoniche:

$$\log \varrho, \quad \varrho^2 \log \varrho, \dots, \quad \varrho^{2n-6} \log \varrho, \quad \varrho^{2n-4} \log \varrho, \quad \varrho^{2n-2} \log \varrho,$$

$$\varrho \log \varrho e^{\pm i\theta}, \quad \varrho^3 \log \varrho e^{\pm i\theta}, \dots, \quad \varrho^{2n-5} \log \varrho e^{\pm i\theta}, \quad \varrho^{2n-3} \log \varrho e^{\pm i\theta},$$

$$\varrho^2 \log \varrho e^{\pm 2i\theta}, \quad \varrho^4 \log \varrho e^{\pm 2i\theta}, \dots, \quad \varrho^{2n-4} \log \pm 2i\theta,$$

.....

$$\varrho^{n-2} \log \varrho e^{\pm(n-2)i\theta}, \quad \varrho^n \log \varrho e^{\pm(n-2)i\theta},$$

$$\varrho^{n-1} \log \varrho e^{\pm(n-1)i\theta},$$

$$e^{\pm 2i\theta}, \quad e^{\pm 4i\theta}, \dots, \quad e^{\pm 2(n-1)i\theta},$$

$$\varrho^{|s|} e^{is\theta}, \quad \varrho^{|s|+2} e^{is\theta}, \dots, \quad \varrho^{|s|+2n-2} e^{is\theta},$$

$$\varrho^{-|s|} e^{is\theta}, \quad \varrho^{2-|s|} e^{is\theta}, \dots, \quad \varrho^{2n-2-|s|} e^{is\theta}.$$

9. - **Problemi in tre variabili indipendenti.** — Si voglia integrare in uno strato sferico T , dello spazio (x, y, z) , limitato da due sfere di raggi ϱ' e ϱ'' ($\varrho' < \varrho''$, $\varrho' \geq 0$, $\varrho'' \leq +\infty$), con centro nell'origine O , un'equazione del tipo:

$$(25) \quad E[u] \equiv \sum_{k=0}^n a_k (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \Delta^k u = B(x, y, z),$$

ove

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Dette ϱ, θ, φ le coordinate polari di polo O e asse z (ϱ raggio vettore, θ longitudine, φ colatitudine), si ha:

$$\Delta = \frac{1}{\varrho^2 \operatorname{sen} \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\operatorname{sen} \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\varrho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho^2 \frac{\partial}{\partial \varrho} \right).$$

Designi $Y_s(\theta, \varphi)$ una funzione sferica d'ordine s ; avendosi per essa, identicamente,

$$\frac{1}{\operatorname{sen} \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\operatorname{sen} \varphi \frac{\partial Y_s}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \varphi} \frac{\partial^2 Y_s}{\partial \theta^2} + s(s+1) Y_s = 0,$$

possiamo scrivere che:

$$\begin{aligned} (\Delta u) Y_s \varrho^2 \operatorname{sen} \varphi = & \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\operatorname{sen} \varphi \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} Y_s - u \frac{\partial Y_s}{\partial \varphi} \right) \right] + \frac{1}{\operatorname{sen} \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial u}{\partial \theta} Y_s - u \frac{\partial Y_s}{\partial \theta} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho^2 \frac{\partial u}{\partial \varrho} \right) Y_s \operatorname{sen} \varphi - s(s+1) Y_s u \operatorname{sen} \varphi, \end{aligned}$$

e quindi, integrando rispetto a θ , fra 0 e 2π ,

$$\begin{aligned} \varrho^2 \int_0^{2\pi} (\Delta u) Y_s \operatorname{sen} \varphi d\theta = & \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\operatorname{sen} \varphi \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} Y_s - u \frac{\partial Y_s}{\partial \varphi} \right) \right] d\theta + \\ & + \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho^2 \frac{\partial}{\partial \varrho} \int_0^{2\pi} u Y_s \operatorname{sen} \varphi d\theta \right) - s(s+1) \int_0^{2\pi} u Y_s \operatorname{sen} \varphi d\theta, \end{aligned}$$

ed integrando ora, rispetto a φ , fra 0 e π , detta $\omega(O)$ la superficie sferica di centro O e raggio *uno* e posto $d\omega = \operatorname{sen} \varphi d\varphi d\theta$, si ottiene

$$\iint_{\omega(O)} (\Delta u) Y_s d\omega = \left(\frac{d^2}{d\varrho^2} + \frac{2}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} - \frac{s(s+1)}{\varrho^2} \right) \iint_{\omega(O)} u Y_s d\omega.$$

Si ha dunque (teor. III)

$$\iint_{\omega(O)} E[u] Y_s d\omega = \sum_{k=0}^n a_k(\varrho) \left(\frac{d^2}{d\varrho^2} + \frac{2}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} - \frac{s(s+1)}{\varrho^2} \right)^k \iint_{\omega(O)} u Y_s d\omega,$$

e risulta pertanto verificata la proprietà *c*) dell'ipotesi fondamentale rispetto al sistema completo $[Y_s]$ delle funzioni sferiche, che possiamo supporre ortogonali.

Ne seguono, per ogni soluzione u della (25), che, nello strato sferico T , appartenga all'aggregato $\{u\}$, le proprietà integrali enunciate dal teorema: *Ad ogni funzione sferica $Y_s(P)$ d'ordine s , corrispondono $2n$ costanti c_1, c_2, \dots, c_{2n} per le quali si ha:*

$$(26) \quad \iint_{\omega(O)} u Y_s d\omega = c_1 v_1^{(s)}(\varrho) + c_2 v_2^{(s)}(\varrho) + \dots + c_{2n} v_{2n}^{(s)}(\varrho) + w^{(s)}(\varrho),$$

le funzioni $v_1^{(s)}(\varrho), v_2^{(s)}(\varrho), \dots, v_{2n}^{(s)}(\varrho), w^{(s)}(\varrho)$ della sola ϱ , riuscendo ben determinate e dipendenti soltanto dall'ordine s della funzione sferica.

Con le funzioni

$$v_k^{(s)}(\varrho) Y_s(\theta, \varphi) \quad (k=1, 2, \dots, 2n; s=0, 1, 2, \dots),$$

si hanno tanti integrali particolari dell'equazione (25) supposta omogenea.

Verificata l'ipotesi fondamentale e quella che le funzioni $v_k^{(s)}(\varrho)$ e $w^{(s)}(\varrho)$ appartengano all'aggregato $\{u\}$, si perviene alla formola risolutiva (10), nell'ipotesi che il sistema di equazioni lineari (9) risulti compatibile per ogni indice s . Giova però, nel caso attuale, dare un'ulteriore trattazione a tale formola. Denotando con P e Q due punti variabili sulla superficie $\omega(O)$, con $\gamma(P, Q)$ l'angolo (fra 0 e π) dei due raggi vettori \vec{OP} e \vec{OQ} , comunque si fissi ϱ nell'intervallo (ϱ', ϱ'') , ogni soluzione della (25) è suscettibile dello sviluppo in serie:

$$u(\varrho, P) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{2s+1}{4\pi} \iint_{\omega(O)} u(\varrho, Q) X_s[\cos \gamma(P, Q)] d\omega(Q),$$

ove $X_s(x)$ è il polinomio di LEGENDRE di grado s , e pertanto, per il calcolo della u , occorre soltanto conoscere gl'integrali:

$$\iint_{\omega(O)} u(\varrho, Q) X_s[\cos \gamma(P, Q)] d\omega(Q), \quad (s=0, 1, 2, \dots).$$

Ora le proprietà integrali (26) forniscono:

$$(27) \quad \iint_{\omega(O)} u(\varrho, Q) X_s[\cos \gamma(P, Q)] d\omega(Q) = \sum_{k=1}^{2n} c_k^{(s)}(P) v_k^{(s)}(\varrho) + w^{(s)}(\varrho, P),$$

ove le $c_k^{(s)}(P)$, e le $w^{(s)}(\varrho, P)$ per ogni ϱ , riescono funzioni sferiche d'ordine s , le ultime ben determinate e le prime da determinarsi in base alle condizioni

$$L_h[u(\varrho, P)] = f_h(P), \quad (h=1, 2, \dots, 2n),$$

le quali, in virtù delle (27) e della proprietà *b)* dell'ipotesi fondamentale, forniscono, per ogni s , le $2n$ equazioni:

$$(28) \quad \iint_{\omega(O)} f_h(Q) X_s[\cos \gamma(P, Q)] d\omega(Q) = \sum_{k=1}^{2n} c_k^{(s)}(P) L_h[v_k^{(s)}(\varrho)] + L_h[w^{(s)}(\varrho, P)].$$

$$\text{Posto} \quad l_{hk}^{(s)} = L_h[v_k^{(s)}(\varrho)], \quad l_h^{(s)}(P) = L_h[w^{(s)}(\varrho, P)],$$

le $l_{hk}^{(s)}$ risultano costanti ben determinate e le $l_h^{(s)}(P)$ funzioni sferiche d'ordine s , pur esse ben determinate. Se il determinante $D^{(s)} \equiv \|l_{hk}^{(s)}\|$ è, per ogni s , diverso da zero, detto $D_h^{(s)}$ il determinante che si ottiene da $D^{(s)}$ sostituendo, agli elementi della riga h^{ma} , ordinatamente le funzioni $v_1^{(s)}, v_2^{(s)}, \dots, v_{2n}^{(s)}$, si ricava, dalle (27), con la risoluzione delle (28) rispetto alle $c_k^{(s)}(P)$,

$$\begin{aligned} \iint_{\omega(O)} u(\varrho, Q) X_s[\cos \gamma(P, Q)] d\omega(Q) = \\ = \sum_{h=1}^{2n} \iint_{\omega(O)} f_h(Q) \frac{D_h^{(s)}(\varrho)}{D^{(s)}} X_h[\cos \gamma(P, Q)] d\omega(Q) + w^{(s)}(\varrho, P) - \sum_{h=1}^{2n} l_h^{(s)}(P) \frac{D_h^{(s)}(\varrho)}{D^{(s)}}, \end{aligned}$$

e si perviene quindi alla formola risolutiva del problema:

$$(29) \quad u(\varrho, P) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{2s+1}{4\pi} \sum_{h=1}^{2n} \iint_{\omega(O)} f_h(Q) \frac{D_h^{(s)}(\varrho)}{D^{(s)}} X_h[\cos \gamma(P, Q)] d\omega(Q) + \\ + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{2s+1}{4\pi} \left[w^{(s)}(\varrho, P) - \sum_{h=1}^{2n} l_h^{(s)}(P) \frac{D_h^{(s)}(\varrho)}{D^{(s)}} \right],$$

la quale, nel caso che la (25) sia omogenea, si riduce alla seguente

$$(30) \quad u(\varrho, P) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{2s+1}{4\pi} \sum_{h=1}^{2n} \iint_{\omega(O)} f_h(Q) \frac{D_h^{(s)}(\varrho)}{D^{(s)}} X_h[\cos \gamma(P, Q)] d\omega(Q),$$

laddove la formola

$$(31) \quad u(\varrho, P) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{2s+1}{4\pi} \left[w^{(s)}(\varrho, P) - \sum_{h=1}^{2n} l_h^{(s)}(P) \frac{D_h^{(s)}(\varrho)}{D^{(s)}} \right]$$

è risolutiva del problema nel caso dell'omogeneità delle condizioni $L_h u = f_h$, nel caso cioè che tutte le f_h siano identicamente nulle.

Dalla (31) si può, volendo, subito ricavare un'elegante espressione formale della funzione di GREEN per l'attuale problema, nelle ulteriori ipotesi formulate al n.º 3.

Se, in particolare, i coefficienti $a_k(\varrho)$ di $E[u] \equiv \sum a_k \Delta^k u$ sono costanti, si possono ottenere, con n successive quadrature, a mezzo delle funzioni di BESSEL, le funzioni $v_h^{(s)}$ delle proprietà integrali (26). Supposto $a_n = 1$, si ha

$$E = (\Delta + a_1)(\Delta + a_2) \dots (\Delta + a_n),$$

donde, posto

$$D_{ks} = \frac{d^2}{d\varrho^2} + \frac{2}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} + \left(a_k - \frac{s(s+1)}{\varrho^2} \right), \\ b^{(s)}(\varrho) = \iint_{\omega(O)} B Y_s d\omega, \quad u^{(s)}(\varrho) = \iint_{\omega(O)} u Y_s d\omega,$$

segue dalla (25)

$$(32) \quad D_{1s} D_{2s} \dots D_{ns} u^{(s)} = b^{(s)}(\varrho).$$

Ora, detta J_μ la funzione di BESSEL di parametro μ , l'equazione omogenea $D_{ks} v = 0$ ha, per $a_k \neq 0$, gl'integrali fondamentali

$$V_{1k}^{(s)}(\varrho) = \frac{1}{\sqrt{\varrho}} J_{s+\frac{1}{2}}(\sqrt{a_k \varrho}), \quad V_{2k}^{(s)}(\varrho) = \frac{1}{\sqrt{\varrho}} J_{-s-\frac{1}{2}}(\sqrt{a_k \varrho}),$$

$$(s=0, 1, 2, \dots),$$

e per $a_k = 0$,

$$V_{1k}^{(s)}(\varrho) = \varrho^s, \quad V_{2k}^{(s)}(\varrho) = \frac{1}{\varrho^{s+1}}, \quad (s=0, 1, 2, \dots),$$

e pertanto, precisamente come al n.° 7, mediante n successive quadrature si deducono dalle (32) le (26).

10. - Proprietà integrali per le funzioni armoniche e iperarmoniche in tre variabili. — In particolare, per le soluzioni dell'equazione

$$(33_n) \quad \Delta^n u = 0,$$

si perviene [per $n=1$, cfr. « *Appunti* », formole (6) di pag. 223] alle seguenti proprietà integrali

$$(34_n) \quad \iint_{\omega(O)} u Y_s d\omega = c_1^{(s)} \varrho^s + \frac{c_2^{(s)}}{\varrho^{s+1}} + \left(c_3^{(s)} \varrho^s + \frac{c_4^{(s)}}{\varrho^{s+1}} \right) \varrho^2 + \dots + \left(c_{2n+1}^{(s)} \varrho^s + \frac{c_{2n}^{(s)}}{\varrho^{s+1}} \right) \varrho^{2n-2},$$

$$(s=0, 1, 2, \dots).$$

Sono dunque esempi particolari di funzioni n -iperarmoniche:

$$Y_1(\theta, \varphi), \quad Y_3(\theta, \varphi), \dots, \quad Y_{2n-3}(\theta, \varphi),$$

$$\varrho^s Y_s(\theta, \varphi), \quad \varrho^{s+2} Y_s(\theta, \varphi), \dots, \quad \varrho^{s+2n-2} Y_s(\theta, \varphi),$$

$$\varrho^{-s-1} Y_s(\theta, \varphi), \quad \varrho^{-s+1} Y_s(\theta, \varphi), \dots, \quad \varrho^{2n-3-s} Y_s(\theta, \varphi),$$

$$(s=0, 1, 2, \dots),$$

ove $Y_s(\theta, \varphi)$ designa la più arbitraria funzione sferica d'ordine s .

PARTE SECONDA

Teoria e problemi delle funzioni iperarmoniche.

§ 3. - Sulle funzioni iperarmoniche in due variabili indipendenti.

11. - Analiticità delle funzioni iperarmoniche. — Indicato con n un numero intero, maggiore d'uno, una funzione u delle due variabili reali x e y , sarà detta n -iperarmonica in un campo T , se essa è ivi, in ogni punto, continua con

le sue derivate parziali, fino a quelle incluse d'ordine $2n$, e verifica l'equazione:

$$\Delta^n u \equiv \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2\nu} \partial y^{2n-2\nu}} = 0.$$

Sono ben note, e del resto di facile verifica, le proprietà di tali funzioni espresse dai seguenti teoremi:

IV. *Se $u(x, y) \equiv u(P)$ è armonica in T , il prodotto $\Pi_k(x, y)u$, ove $\Pi_k(x, y)$ è, in x e y , un qualsivoglia polinomio di grado k , è funzione $(k+1)$ -iperarmonica in T , se u è n -iperarmonica, lo stesso prodotto è funzione $(k+n)$ -iperarmonica. Se M è un qualsivoglia punto del piano, il prodotto $\Pi_k(\overline{MP^2}) \cdot u(P)$, ove $\Pi_k(\varrho)$ è un arbitrario polinomio di grado k in ϱ , è, in T , funzione $(k+1)$ oppure $(k+n)$ -iperarmonica secondochè u è armonica o n -iperarmonica.*

V. *Sia O un punto del piano, comunque fissato, che assumiamo come polo di coordinate polari ϱ e θ , si ha che per qualsivoglia indice ν , secondochè u è armonica o n -iperarmonica, la funzione*

$$\varrho^\nu \frac{\partial^\nu u}{\partial \varrho^\nu},$$

è armonica o n -iperarmonica.

VI. *Se $u(\varrho, \theta)$ è n -iperarmonica in T , la funzione di ϱ' e di θ :*

$$\varrho'^{2n-2} u\left(\frac{R^2}{\varrho'}, \theta\right)$$

è n -iperarmonica nel campo T' trasformato di T per inversione di polo O e di potenza R^2 .

Sia $u(\varrho, \theta)$ n -iperarmonica nella corona circolare $T(\varrho' < \varrho < \varrho'')$, con $\varrho' \geq 0$ e $\varrho'' \leq +\infty$. Comunque si fissi ϱ nell'interno dell'intervallo (ϱ', ϱ'') , la $u(\varrho, \theta)$ e le derivate $u_{\varrho^\nu}(\varrho, \theta)$, per $\nu=1, 2, \dots, 2n-1$, riescono funzioni di θ sviluppabili in serie di FOURIER, assolutamente ed uniformemente convergenti. Si avrà pertanto:

$$u_{\varrho^\nu}(\varrho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} e^{is\theta} \int_0^{2\pi} u_{\varrho^\nu}(\varrho, \tau) e^{-is\tau} d\tau \quad (\nu=0, 1, 2, \dots, 2n-1),$$

ove, per ogni ϱ interno all'intervallo (ϱ', ϱ'') , le serie al secondo membro convergono al detto modo. Dette $R_{ns}(\varrho)$ le funzioni di ϱ fornite dei secondi membri delle proprietà integrali (24_n), si ha dunque il teorema dello sviluppo di Laurent:

VII. *Se una funzione $u(\varrho, \theta)$ è n -iperarmonica nella corona circolare $T(\varrho' < \varrho < \varrho'')$, essa e le sue derivate parziali rispetto a ϱ , almeno fino a quelle d'ordine $2n-1$ incluso, sono suscettibili del seguente sviluppo in serie*

$$(35_n) \quad u_{\varrho^\nu}(\varrho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d^\nu}{d\varrho^\nu} R_{ns}(\varrho) \right) e^{is\theta},$$

assolutamente ed uniformemente convergente per ogni fissato ϱ interno all'intervallo (ϱ', ϱ'') , ove l'espressione delle funzioni $R_{ns}(\varrho)$ è fornita dai secondi membri delle proprietà integrali (24_n). Tali funzioni $R_{ns}(\varrho)$, cioè le $2n$ costanti $c_k^{(s)}$ ($k=1, 2, \dots, 2n$), riescono univocamente determinate dalle equazioni:

$$R_{ns}(\varrho) = \int_0^{2\pi} u(\varrho, \tau) e^{-is\tau} d\tau, \quad (s = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots).$$

Per esempio, per una funzione $u(\varrho, \theta)$, bi-iperarmonica nella corona circolare $T(\varrho' < \varrho < \varrho'')$, si hanno gli sviluppi in serie di LAURENT:

$$(35_2) \quad u(\varrho, \theta) = a_0 + b_0 \varrho^2 + a \log \varrho + \beta \varrho^2 \log \varrho + \\ + \left(a_1 \varrho + b_1 \varrho^3 + c_1 \frac{1}{\varrho} + \mu_1 \varrho \log \varrho \right) e^{i\theta} + \\ + \left(a_{-1} \varrho + b_{-1} \varrho^3 + c_{-1} \frac{1}{\varrho} + \mu_{-1} \varrho \log \varrho \right) e^{-i\theta} + \\ + \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \binom{(2)}{s} [a_s' \varrho^{|s|} + b_s' \varrho^{|s|+2} + a_s'' \varrho^{-|s|} + b_s'' \varrho^{2-|s|}] e^{is\theta},$$

$$(35_2') \quad u_\varrho(\varrho, \theta) = 2b_0 \varrho + a \frac{1}{\varrho} + \beta(2\varrho \log \varrho + \varrho) + \\ + \left[a_1 + 3b_1 \varrho^2 - c_1 \frac{1}{\varrho^2} + \mu_1(1 + \log \varrho) \right] e^{i\theta} + \\ + \left[a_{-1} + 3b_{-1} \varrho^2 - c_{-1} \frac{1}{\varrho^2} + \mu_{-1}(1 + \log \varrho) \right] e^{-i\theta} + \\ + \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \binom{(2)}{s} [|s| a_s' \varrho^{|s|-1} + (|s| + 2) b_s' \varrho^{|s|+1} - \\ - |s| a_s'' \varrho^{-|s|-1} + (2 - |s|) b_s'' \varrho^{1-|s|}] e^{is\theta}, \dots,$$

ove l'apice (2) apposto al \sum indica che nella somma devono escludersi i termini il cui indice s ha valore assoluto minore di 2. Le costanti $a_s', b_s', a_s'', b_s'', a_0, b_0, a, \beta, a_1, b_1, c_1, \mu_1, a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}, \mu_{-1}$, riescono, ciascuna, ben determinate.

La u sia n -iperarmonica in un certo campo Γ e siano: M un punto di Γ , $\delta(M)$ la distanza ($\leq +\infty$) di M dalla frontiera di Γ , $T(M)$ il cerchio di centro in M e di raggio $\delta(M)$. Espressa la u in coordinate polari ϱ e θ , col polo in M , sussistono, per $\varrho < \delta(M)$, le proprietà integrali (24_n). Ma si ha

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} u(\varrho, \theta) d\theta = 2\pi u(M), \\ \lim_{\varrho \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} u(\varrho, \theta) e^{-is\theta} d\theta = u(M) \int_0^{2\pi} e^{-is\theta} d\theta = 0, \quad \text{per } |s| \geq 1,$$

e devono pertanto, ai secondi membri delle (24_n) esser nulli, con $c_2^{(0)}$, tutti i coeffi-

cienti delle varie funzioni di ϱ che non sono infinitesime con ϱ . Se osserviamo poi che per qualsivoglia indice k ($\leq 2n-2$) di derivazione devono essere finiti sia il minimo che il massimo limite, per $\varrho \rightarrow 0$, dell'integrale

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^k}{\partial \varrho^k} u(\varrho, \theta) \right) e^{is\theta} d\theta,$$

se ne deduce anche che negli indicati secondi membri devono altresì esser nulli i coefficienti di tutte le funzioni di ϱ che contengono $\log \varrho$ a fattore.

Si osservi ancora la proposizione:

Se n è una qualsivoglia funzione dotata, nel campo Γ , di tutte le derivate parziali finite e continue, fino a quelle incluse d'ordine ν ($\nu \geq 1$), posto, per $\varrho < \delta(M)$,

$$u^{(s)}(\varrho) = \int_0^{2\pi} u(\varrho, \theta) e^{is\theta} d\theta,$$

si ha, se $\nu + s$ è un numero dispari, oppure se $\nu < |s|$,

$$\left[\frac{d^\nu u^{(s)}}{d\varrho^\nu} \right]_{\varrho=0} = 0.$$

È infatti

$$\frac{d^\nu u^{(s)}}{d\varrho^\nu} = \int_0^{2\pi} \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} \right)^\nu u(\varrho, \theta) e^{is\theta} d\theta,$$

e quindi

$$\left[\frac{d^\nu u^{(s)}}{d\varrho^\nu} \right]_{\varrho=0} = \sum_{h+k=\nu} \frac{\nu!}{h! k!} u_{x^h y^k}(M) \int_0^{2\pi} (\cos \theta)^h (\sin \theta)^k e^{is\theta} d\theta,$$

ora se $\nu + s$ è un numero dispari, oppure se $\nu < |s|$, riesce sempre

$$\int_0^{2\pi} (\cos \theta)^h (\sin \theta)^k e^{is\theta} d\theta = 0.$$

Ne segue che nei secondi membri delle (24_n), neppure per i valori di $|s| \leq 2n-2$ possono presentarsi termini con potenze di ϱ ad esponente positivo minore di $|s|$.

Si ha dunque il teorema:

VIII. *Se M è un punto di un campo Γ ove la funzione u è n -iperarmonica, detta $\delta(M)$ la distanza di M dalla frontiera di Γ , ed esprimendo la u in coordinate polari ϱ e θ , di polo in M , sussistono, per $\varrho < \delta(M)$, le seguenti proprietà integrali:*

$$(36_n) \quad \int_0^{2\pi} u(\varrho, \theta) e^{-is\theta} d\theta = (c_0^{(s)} + c_1^{(s)} \varrho^2 + \dots + c_{n-1}^{(s)} \varrho^{2n-2}) \varrho^{|s|},$$

laddove la serie

$$(37_n) \quad u(\varrho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} (c_0^{(s)} + c_1^{(s)}\varrho^2 + \dots + c_{n-1}^{(s)}\varrho^{2n-2})\varrho^{|s|}e^{is\theta},$$

e le $2n-1$ che da questa si deducono per derivazione parziale termine a termine, rispetto a ϱ , fino all'ordine $2n-1$ incluso, per ogni $\varrho < \delta(M)$, convergono assolutamente ed uniformemente.

Fissato un arbitrario valore $\varrho < \delta(M)$, scegliamo, del pari arbitrariamente, n valori $\varrho_0 < \varrho_1 < \dots < \varrho_{n-1}$, tutti maggiori di ϱ e minori di $\delta(M)$. Sussiste, ovviamente, la convergenza delle n serie:

$$(38) \quad S_h = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} (c_0^{(s)} + c_1^{(s)}\varrho_h^2 + \dots + c_{n-1}^{(s)}\varrho_h^{2n-2})\varrho^{|s|}, \quad (h=0, 1, \dots, n-1).$$

Per il determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \varrho_0^2 & \dots & \varrho_0^{2(n-1)} \\ 1 & \varrho_1^2 & \dots & \varrho_1^{2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \varrho_{n-1}^2 & \dots & \varrho_{n-1}^{2(n-1)} \end{vmatrix}$$

diciamo D_{hk} il complemento algebrico dell'elemento ϱ_h^{2k} , diviso per il determinante stesso, dalle (38) si ricava

$$\sum_{s=-\infty}^{+\infty} c_k^{(s)}\varrho^{|s|} = \sum_{h=0}^{n-1} D_{hk}S_h,$$

e si deduce pertanto la convergenza delle n serie di potenze:

$$\sum_{s=-\infty}^{+\infty} c_k^{(s)}\varrho^{|s|}, \quad (k=0, 1, \dots, n-1).$$

Posto

$$u_k(\varrho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} c_k^{(s)}\varrho^{|s|}e^{is\theta},$$

tali $u_n(\varrho, \theta)$ risultano dunque funzioni armoniche nell'interno del cerchio $T(M)$ e dalla (37_n) si trae la decomposizione di ALMANSI [loc. cit. (1^o)]

$$(39) \quad u(\varrho, \theta) = u_0(\varrho, \theta) + \varrho^2 u_1(\varrho, \theta) + \dots + \varrho^{2n-2} u_{n-1}(\varrho, \theta).$$

Si ha, più completamente, il teorema:

IX. *Se la funzione u è n -iperarmonica nell'interno del cerchio $T(M)$, di centro in $M(x_0, y_0)$ e di raggio $\delta(M)$, dette ϱ e θ le coordinate polari di polo in M , esistono n ben determinate funzioni u_0, u_1, \dots, u_{n-1} , armoniche nell'interno di $T(M)$, per le quali sussiste la formola (39) di decomposizione in somma della u . Lo sviluppo in serie (37), con tutte le serie*

che da quella si deducono per derivazione parziale termine a termine, rispetto a ϱ e a θ , d'ordine comunque elevato, è uniformemente ed assolutamente convergente in ogni dominio limitato interno a T , ed al medesimo modo converge ogni serie i cui termini siano addendi di egual posto di quelli della serie (37). Detto sviluppo, in coordinate cartesiane x e y , si scrive:

$$u(x, y) = \sum_{s=0}^{\infty} [II_{s_0}(x-x_0, y-y_0) + [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]II_{s_1}(x-x_0, y-y_0) + \dots + [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^{n-1}II_{s, n-1}(x-x_0, y-y_0)],$$

ove $II_{s_0}, II_{s_1}, \dots, II_{s, n-1}$ sono ben determinati polinomi armonici omogenei di grado s , negli argomenti $x-x_0, y-y_0$.

Occorre solo dimostrare l'unicità ⁽¹³⁾ delle funzioni armoniche u_0, u_1, \dots, u_{n-1} della formola di decomposizione (39). Se $u_k(\varrho, \theta)$ è funzione armonica nell'interno di $T(M)$, si ha, per ogni $\varrho < \delta(M)$,

$$\int_0^{2\pi} u_k(\varrho, \theta) e^{-is\theta} d\theta = c_k^{(s)} \varrho^{|s|},$$

onde segue dalla (39)

$$[c_0^{(s)} + c_1^{(s)} \varrho^2 + \dots + c_{n-1}^{(s)} \varrho^{2(n-1)}] \varrho^{|s|} = \int_0^{2\pi} u(\varrho, \theta) e^{-is\theta} d\theta,$$

ciò che determina le costanti $c_0^{(s)}, c_1^{(s)}, \dots, c_{n-1}^{(s)}$ e quindi le funzioni armoniche u_0, u_1, \dots, u_{n-1} .

Conseguenza immediata del teorema IX è il seguente ben noto:

X. *Le funzioni iperarmoniche sono analitiche.*

12. - Sulla rappresentazione delle funzioni iperarmoniche a mezzo delle armoniche. — La ricordata analiticità delle funzioni iperarmoniche consente di introdurre per queste la nozione di *campo di regolarità*, secondo la definizione: L'insieme aperto A si dirà il campo di regolarità per una funzione iperarmonica u , se: 1°) esso è internamente connesso; 2°) la funzione u è iperarmonica in A ; 3°) non esiste alcun insieme aperto internamente connesso, contenente A e non coincidente con A , ove sia possibile definire una funzione iperarmonica che coincida con u in A . Le *funzioni iperarmoniche intere* sono quelle che hanno per

⁽¹³⁾ Tale unicità è stata recentemente dimostrata, per tutt'altra via, da MIRON NICOLESCO: *Sur l'unicité de la représentation des fonctions harmoniques d'ordre p , au moyen des fonctions harmoniques d'ordre un*. [Bulletin mathématique de la société roumaine des sciences, tome 37 (1935)].

campo di regolarità l'intero piano. Il teorema IX permette d'asserire che: Ogni funzione n -iperarmonica intera è la somma di una serie procedente per polinomiali n -iperarmonici, dei gradi $2(n-1)$, $2(n-1)+1, \dots, 2(n-1)+s, \dots$, la quale, in ogni dominio limitato del piano, è assolutamente ed uniformemente convergente, con tutte le serie che da essa si deducono per derivazione parziale termine a termine d'ordine comunque elevato.

Una funzione si dirà *iperarmonica all'infinito* se, essendo essa iperarmonica, il suo campo di regolarità è illimitato ed ha frontiera limitata.

Sia u una funzione n -iperarmonica con campo di regolarità A , del quale diremo P il punto variabile. Abbiamo dimostrato che, per ogni punto M di A , è possibile determinare (in modo unico) n funzioni di P , armoniche, $u_0(M, P)$, $u_1(M, P), \dots, u_{n-1}(M, P)$, per le quali, detta $\delta(M)$ la distanza ($\leq \infty$) di M dalla frontiera di A , nell'interno del cerchio $T(M)$ di centro in M e di raggio $\delta(M)$, è valida la formola di decomposizione in somma:

$$(40) \quad u(P) = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{MP}^{2k} u_k(M, P).$$

Indicato con $A_k(M)$ il campo di regolarità della funzione u_k , si ha ovviamente che il campo:

$$B(M) = A_0(M) \cdot A_1(M) \cdot \dots \cdot A_{n-1}(M),$$

contiene il cerchio $T(M)$ ed è contenuto in A e che la formola di decomposizione (40) sussiste in tutto $B(M)$. Ebbene, si deve ad ALMANSI [loc. cit. (10)] l'osservazione che, detto $C(M)$ l'insieme aperto luogo dei punti P di A , per i quali il segmento rettilineo MP è tutto contenuto in A , tale insieme riesce contenuto in $B(M)$. Si ha cioè il teorema:

XI. *La formola di decomposizione (40) sussiste nell'insieme aperto $C(M)$, luogo dei punti P , del campo A di regolarità della u , per i quali il segmento MP è tutto contenuto in A .*

Vogliamo di questo teorema dare una semplice dimostrazione che fornisce, altresì, il calcolo — per quadrature — delle funzioni armoniche u_0, u_1, \dots, u_{n-1} della decomposizione. Introduciamo, al solito, il sistema di coordinate polari ϱ e θ , di polo in M , e cominciamo dall'osservare che, comunque si assegni il numero intero e positivo ν e la costante α di parte reale maggiore di -1 , la funzione

$$v(\varrho, \theta) = \frac{1}{\varrho^{\alpha+\nu+1}} \int_0^{\varrho} (\varrho-r)^{\nu} r^{\alpha} u(r, \theta) dr,$$

riesce analitica in $C(M)$. Ebbene, tale funzione è anche ivi iperarmonica. Basterà verificarlo nel cerchio $T(M)$, in cui sussiste lo sviluppo (37_n), dal quale si deduce che per la v vale, in $T(M)$, uno sviluppo in serie dello stesso tipo, convergente

al medesimo modo. Teniamo pure presente che per ogni funzione v , dotata delle derivate parziali prime e seconde, e per ogni costante α , sussiste l'eguaglianza:

$$\Delta(\varrho^\alpha v) = \alpha^2 \varrho^{\alpha-2} \cdot v + 2\alpha \varrho^{\alpha-1} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varrho} + \varrho^\alpha \cdot \Delta v.$$

Ora, per il teorema IX, si ha entro $T(M)$

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \sum_{k=0}^{n-1} u_{0k} \varrho^{2k}, \quad \Delta u = \sum_{k=0}^{n-2} u_{1k} \varrho^{2k}, \dots, \quad \Delta^h u = \sum_{k=0}^{n-h-1} u_{hk} \varrho^{2k}, \dots, \\ \Delta^{n-2} u = u_{n-2,0} + u_{n-2,1} \varrho^2, \quad \Delta^{n-1} u = u_{n-1,0}, \end{array} \right.$$

con le $u_{hk}(\varrho, \theta)$ funzioni armoniche. Dalla $(h+1)^{\text{ma}}$ di queste eguaglianze, operando con Δ su ambo i membri si ricava

$$\Delta^{h+1} u = \sum_{k=1}^{n-h-1} 4k^2 \varrho^{2k-2} \left(u_{hk} + \frac{\varrho}{k} \frac{\partial u_{hk}}{\partial \varrho} \right),$$

e pertanto, in forza dell'unicità delle u_{hk} ,

$$(42) \quad u_{n+1, k-1} = 4k^2 \left(u_{hk} + \frac{\varrho}{k} \frac{\partial u_{hk}}{\partial \varrho} \right), \quad (k=1, 2, \dots, n-h-1),$$

onde

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{hk} = \frac{1}{4k\varrho^k} \int_0^\varrho r^{k-1} u_{n+1, k-1}(r, \theta) dr, \quad (k=1, 2, \dots, n-h-1), \\ u_{h0} = \Delta^h u - \sum_{k=1}^{n-h-1} \frac{\varrho^k}{4k} \int_0^\varrho r^{k-1} u_{n+1, k-1}(r, \theta) dr. \end{array} \right.$$

Se le $u_{n+1, k}$ ($k=0, 1, \dots, n-h-2$) fossero prolungate in tutto $C(M)$, dalle (43) si ricaverebbe il prolungamento delle u_{hk} ($k=0, 1, \dots, n-h-1$) del pari in tutto $C(M)$. Ma la $u_{n-1, 0} = \Delta^{n-1} u$ è analitica in tutto $C(M)$, onde segue, per ricorrenza, il prolungamento ed il calcolo, in tutto $C(M)$, delle u_{hk} ($k=0, 1, \dots, n-1$). Si trova:

$$\begin{aligned} u_{0, n-1} &= \frac{n-1}{[(n-1)!]^2 (4\varrho)^{n-1}} \int_0^\varrho (\varrho-r)^{n-2} \Delta^{n-1} u(r, \theta) dr, \\ u_{0, n-2} &= \frac{n-2}{[(n-2)!]^2 (4\varrho)^{n-2}} \int_0^\varrho (\varrho-r)^{n-3} \Delta^{n-2} u(r, \theta) dr - \\ &\quad - \frac{(n-1)\varrho}{[(n-1)!]^2 (4\varrho)^{n-1}} \int_0^\varrho (\varrho-r)^{n-2} [\varrho + (n-2)r] \Delta^{n-1} u(r, \theta) dr, \dots \quad (14). \end{aligned}$$

(14) Cfr. BOGGIO: *Sulle funzioni di Green d'ordine m.* [Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. XX (1905), pp. 110-113].

Ma si può, di più, facilmente dimostrare il teorema :

XII. *Se il campo A è semplicemente connesso la formola di decomposizione (40) sussiste, in tutto A , comunque vi si assuma il punto M .*

Per dimostrarlo non c'è che da ripetere il ragionamento or ora fatto, che conduce alla costruzione delle funzioni armoniche $u_{00}, u_{01}, \dots, u_{0, n-1}$ in tutto A , non appena si sia stabilito, conformemente alla relazione (42) intercedente fra le funzioni armoniche $u_{h+1, k-1}$ e u_{hk} , che: *Comunque si assegni un intero positivo k e, in un campo A semplicemente connesso, una funzione armonica v e un punto M , dette ϱ e θ le coordinate polari di polo in M , esiste sempre in A una ed una sola funzione armonica u , per la quale riesce:*

$$(44) \quad \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho^k u) = \varrho^{k-1} v.$$

L'unicità di u è stata già dimostrata nella porzione $C(M)$ di A , e ciò implica, ovviamente, l'unicità anche in A . Per la costruzione di una funzione armonica u verificante la (44), limitandoci com'è sufficiente a considerare il caso che v sia reale, assumiamo la funzione $f(z)$, della variabile complessa $z = \varrho e^{i\theta}$, olomorfa in A , che ha per parte reale v e la funzione $g(z)$, olomorfa essa pure in A , nulla in M , che ha per derivata $f(z)z^{h-1}$, ebbene, posto

$$u = \text{parte reale } \frac{g(z)}{z^k},$$

si ha una funzione armonica in A , ed è subito verificato che sussiste la (44). Risulta invero

$$\frac{1}{e^{i\theta}} \frac{\partial}{\partial \varrho} g(z) = f(z)z^{k-1},$$

cioè

$$\frac{1}{e^{ik\theta}} \frac{\partial}{\partial \varrho} g(z) = f(z)\varrho^{k-1},$$

e quindi

$$\frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\text{parte reale } \frac{g(z)}{e^{ik\theta}} \right) = \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho^k \cdot \text{parte reale } \frac{g(z)}{z^k} \right) = \varrho^{k-1} v \quad (45).$$

Ovviamente, il procedimento ora seguito consente di affermare che la possibilità di una decomposizione, del tipo della (40), nel campo A , semplicemente connesso, sussiste anche se si assume il punto M fuori di A , soltanto che, allora, non si avrà, in generale, l'unicità delle funzioni armoniche u_0, u_1, \dots, u_{n-1} , e non sarà facile, forse, fissarne il grado di indeterminazione.

Offre interesse la ricerca di eventuali possibilità di estendere il campo nel

(15) Comunicato il teorema XII al Prof. L. SOBRERO, mio valoroso collaboratore all'Istituto per le Applicazioni del Calcolo, egli ha dato del teorema una diversa dimostrazione, nel campo reale, che sarà pubblicata.

quale è possibile una decomposizione in somma — di tipo analogo a quella fornita dalla (40), con un *noto* grado di indeterminazione degli addendi — della funzione n -iperarmonica u . Altre possibilità di tal genere sono state indicate dall'ALMANSI nella memoria citata in ⁽¹⁶⁾, alle quali però sfuggono sempre i campi di connessione multipla, se si eccettua, per le funzioni bi-iperarmoniche, il caso della corona circolare, per il quale, fissato il punto M nel centro della corona, l'ALMANSI legittima la presunzione che valga la formola

$$u(P) = (px + qy) \log \overline{MP} + u_0(P) + \overline{MP}^2 u_1(P),$$

con p e q costanti e $u_0(P)$ e $u_1(P)$ armoniche nella corona ⁽¹⁶⁾. Ora effettivamente ciò si può dimostrare in tutto rigore. Per enunciare il teorema generale, che sussiste al riguardo per una qualsivoglia funzione n -iperarmonica, è opportuno ricordare (cfr. « *Appunti* », p. 279) che per una funzione $u(\varrho, \theta)$, armonica nella corona circolare $T(\varrho' < \varrho < \varrho'')$ vale la seguente formola di decomposizione (di POINCARÉ)

$$u(\varrho, \theta) = a + \beta \log \varrho + u'(\varrho, \theta) + u''(\varrho, \theta),$$

ove a e β sono costanti ben determinate e u' e u'' sono funzioni armoniche, pur esse ben determinate, la prima regolare nell'interno del cerchio $\varrho = \varrho''$ ed infinitesima nel centro di questo e la seconda regolare all'esterno del cerchio $\varrho = \varrho'$ ed infinitesima all'infinito. Diremo la u' *la componente della u infinitesima nel centro della corona* e la u'' *la componente della u infinitesima all'infinito*.

Ricordiamo pure che una funzione armonica e regolare nell'interno di un cerchio (di raggio finito o infinito) è ivi sviluppabile (cfr. « *Appunti* », p. 279) in serie, assolutamente ed uniformemente convergente in ogni dominio limitato interno al cerchio, di polinomi armonici omogenei Π_0, Π_1, \dots , rispettivamente dei gradi $0, 1, \dots$; ebbene il polinomio $\Pi_0 + \Pi_1 + \dots + \Pi_n$ sarà detto il *polinomio armonico di grado n componente della u* .

Ciò ricordato e premesso, ecco un teorema che, fra l'altro, consente la rappresentazione di una funzione n -iperarmonica, in una corona circolare, a mezzo di funzioni armoniche:

XIII. *Se la funzione $u(x, y) \equiv u(\varrho, \theta)$ è n -iperarmonica nella corona circolare $T(\varrho' < \varrho < \varrho'')$ ($\varrho' \geq 0, \varrho'' \leq +\infty$), col centro nell'origine O delle coordinate, le serie (35_n) , con tutte quelle che da esse si deducono per derivazione parziale termine a termine, d'ordine comunque elevato, sono*

⁽¹⁶⁾ Sia A il più arbitrario campo piano ove una funzione u è n -iperarmonica e L un insieme di punti dello stesso piano, composto di un numero finito di certe linee poligonali, tale che il campo $B = A - L$ riesca semplicemente connesso. Fissato nel piano il punto M , è possibile in B , come abbiamo visto, una decomposizione della u del tipo della (40), ma, in generale, le funzioni armoniche u_k non potranno essere analiticamente prolungate in tutto A .

assolutamente ed uniformemente convergenti, in ogni dominio limitato, interno alla corona. Ogni serie i cui termini sono addendi di egual posto dei termini di una serie (35_n) contenente soltanto potenze di ϱ ad esponente positivo (ad esponente negativo) converge al medesimo modo in ogni dominio limitato situato nell'interno del cerchio $\varrho = \varrho''$ (all'esterno del cerchio $\varrho = \varrho'$). Esistono, e riescono ben determinati, $n-1$ polinomi armonici $\Pi_1^{(0)}(x, y), \Pi_2^{(0)}(x, y), \dots, \Pi_{n-1}^{(0)}(x, y)$, rispettivamente dei gradi 1, 2, ..., $n-1$, tutti nulli in O , per modo che valga in T la decomposizione:

$$(45) \quad u = [\Pi_{n-1}^{(0)}(x, y) + \varrho^2 \Pi_{n-2}^{(0)}(x, y) + \dots + \varrho^{2(n-2)} \Pi_1^{(0)}(x, y)] \log \varrho + \\ + u_0 + \varrho^2 u_1 + \dots + \varrho^{2(n-1)} u_{n-1},$$

con u_0, u_1, \dots, u_{n-1} funzioni armoniche nell'interno di T . Alle componenti armoniche, infinitesime in O , delle funzioni u_0, u_1, \dots, u_{n-2} si possono arbitrariamente assegnare i polinomi armonici componenti rispettivamente dei gradi $n-1, n-2, \dots, 1$, in seguito a che tutte le funzioni u_0, u_1, \dots, u_{n-1} riescono ben determinate ⁽¹⁷⁾.

Ci limiteremo ad esporre la dimostrazione, non semplice, del teorema nel caso di una funzione w , bi-iperarmonica nella corona T , pervenendo dunque alla formula di decomposizione:

$$(46) \quad w = (px + qy) \log \varrho + u + \varrho^2 v = (\mu_1 e^{i\theta} + \mu_{-1} e^{-i\theta}) \varrho \log \varrho + u + \varrho^2 v,$$

con p e q costanti ben determinate ($2\mu_1 = p - iq, 2\mu_{-1} = p + iq$) e u e v funzioni armoniche in T , pur esse ben determinate, non appena alla componente armonica, infinitesima in O , della u si prescriba il polinomio armonico componente di primo grado.

Cominciamo dal verificare l'asserito grado d'indeterminazione degli addendi della decomposizione (46). Dette u' e v' le componenti armoniche, infinitesime in O , di u e di v , e u'' e v'' quelle infinitesime all'infinito, sussistono gli sviluppi:

$$u' = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} {}^{(1)} a_s' \varrho^{|s|} e^{is\theta}, \quad v' = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} {}^{(1)} b_s' \varrho^{|s|} e^{is\theta}, \\ u'' = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} {}^{(1)} a_s'' \varrho^{-|s|} e^{is\theta}, \quad v'' = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} {}^{(1)} b_s'' \varrho^{-|s|} e^{is\theta},$$

⁽¹⁷⁾ Dall'unicità dei polinomi $\Pi_k^{(0)}$ discende che una eguaglianza del tipo

$$0 = \sum_{k=1}^{n-1} \Pi_k^{(0)}(x, y) \varrho^{2(n-1-k)} \log \varrho + u_0 + \varrho^2 u_1 + \dots + \varrho^{2(n-1)} u_{n-1},$$

con u_0, u_1, \dots, u_{n-1} funzioni armoniche, non può aver luogo in una corona circolare $T(\varrho' < \varrho < \varrho'')$ altro che nel caso in cui i polinomi armonici $\Pi_k^{(0)}$ siano tutti identicamente

valevoli, i primi per $\varrho < \varrho''$ e i secondi per $\varrho > \varrho'$, e si ha:

$$u = \alpha + \beta \log \varrho + u' + u'', \quad v = \gamma + \delta \log \varrho + v' + v'',$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ costanti determinate. Ora, per ogni ϱ interno all'intervallo (ϱ', ϱ'') si ricavano dalla (46) le equazioni

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma \varrho^2 + \beta \log \varrho + \delta \varrho^2 \log \varrho &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(\varrho, \theta) d\theta, \\ \mu_1 \varrho \log \varrho + (a_1' + b_2'') \varrho + b_1' \varrho^3 + a_1'' \frac{1}{\varrho} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(\varrho, \theta) e^{-i\theta} d\theta, \\ \mu_{-1} \varrho \log \varrho + (a'_{-1} + b''_{-1}) \varrho + b'_{-1} \varrho^3 + a''_{-1} \frac{1}{\varrho} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(\varrho, \theta) e^{i\theta} d\theta, \\ a_s' \varrho^{|s|} + b_s' \varrho^{2+|s|} + a_s'' \varrho^{-|s|} + b_s'' \varrho^{2-|s|} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(\varrho, \theta) e^{-is\theta} d\theta, \quad |s| \geq 2, \end{aligned}$$

le quali, assegnate arbitrariamente le costanti a_1' e a'_{-1} , assegnato cioè il polinomio armonico componente di primo grado

$$(a_1' e^{i\theta} + a'_{-1} e^{-i\theta}) \varrho,$$

della u' , valgono, ovviamente, a determinare tutte le costanti $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu_1, b_1'', b_1', a_1'', \mu_{-1}, b''_{-1}, b'_{-1}, a''_{-1}, a_s', b_s', a_s'', b_s''$ ($|s| \geq 2$) e quindi tutti gli addendi della decomposizione (46).

Per dimostrare ora gli altri fatti affermati dal teorema, consideriamo gli sviluppi (35₂) e (35₂') per due arbitrari valori r e R interni all'intervallo (ϱ', ϱ'') e supponiamo $r < R$. Indichiamo con h_s e k_s i coefficienti di $e^{is\theta}$ rispettivamente negli sviluppi (35₂) e (35₂') per $\varrho = r$ e con H_s e K_s quelli negli stessi sviluppi per $\varrho = R$. Si ha, per $|s| \geq 2$,

$$(47) \quad \left\{ \begin{aligned} a_s' r^{|s|} + b_s' r^{|s|+2} + a_s'' r^{-|s|} + b_s'' r^{2-|s|} &= h_s, \\ |s| a_s' r^{|s|-1} + (|s|+2) b_s' r^{|s|+1} - |s| a_s'' r^{-|s|-1} + (2-|s|) b_s'' r^{1-|s|} &= k_s, \\ a_s' R^{|s|} + b_s' R^{|s|+2} + a_s'' R^{-|s|} + b_s'' R^{2-|s|} &= H_s, \\ |s| a_s' R^{|s|-1} + (|s|+2) b_s' R^{|s|+1} - |s| a_s'' R^{-|s|-1} + (2-|s|) b_s'' R^{1-|s|} &= K_s, \end{aligned} \right.$$

e la convergenza delle serie

$$\sum_{s=-\infty}^{+\infty} |h_s|, \quad \sum_{s=-\infty}^{+\infty} |k_s|, \quad \sum_{s=-\infty}^{+\infty} |H_s|, \quad \sum_{s=-\infty}^{+\infty} |K_s|.$$

nulli. [Cfr. la dimostrazione non semplice di tale circostanza che, per il caso bi-iperarmonico, trovasi alla fine del n.° 7 della memoria dell'ALMANSI citata in (10)].

Ponendo $q = r/R$, $\alpha_s' = \alpha_s' R^{|s|}$, $\beta_s' = \beta_s' R^{|s|+2}$, $\alpha_s'' = \alpha_s'' r^{-|s|}$, $\beta_s'' = \beta_s'' r^{2-|s|}$, le (47) si scrivono:

$$(48) \quad \begin{cases} q^{|s|} \alpha_s' + q^{|s|+2} \beta_s' + \alpha_s'' + \beta_s'' = h_s, \\ |s| q^{|s|} \alpha_s' + (|s| + 2) q^{|s|+2} \beta_s' - |s| \alpha_s'' + (2 - |s|) \beta_s'' = r k_s, \\ \alpha_s' + \beta_s' + q^{|s|} \alpha_s'' + q^{|s|-2} \beta_s'' = H_s, \\ |s| \alpha_s' + (|s| + 2) \beta_s' - |s| q^{|s|} \alpha_s'' + (2 - |s|) q^{|s|-2} \beta_s'' = R K_s; \end{cases}$$

questo sistema di equazioni può essere risoluto rispetto alle α_s' , β_s' , α_s'' , β_s'' poichè il determinante dei coefficienti vale

$$\delta^{(s)} = 4[(1 - q^{2|s|})^2 - s^2 q^{2|s|-2} (1 - q^2)^2] > 0.$$

Ora è $\lim_{s \rightarrow \infty} \delta^{(s)} = 4$, e perciò possibile determinare un numero N tale che per $|s| \geq N$ riesca $\delta^{(s)} > 1$. Ne segue facilmente, per $|s| \geq N$, la maggiorazione

$$|\alpha_s'|, |\beta_s'|, |\alpha_s''|, |\beta_s''| < 9(|s| + 2)^2 (|h_s| + |H_s| + r|k_s| + R|K_s|),$$

e quindi che le serie

$$\sum_{s=-\infty}^{+\infty} \binom{N}{s} |\alpha_s'| \varrho^{|s|}, \quad R^2 \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \binom{N}{s} |\beta_s'| \varrho^{|s|}, \quad \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \binom{N}{s} |\alpha_s''| \varrho^{-|s|}, \quad r^2 \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \binom{N}{s} |\beta_s''| \varrho^{-|s|},$$

riescono, le prime due, maggiorate dalla seguente

$$9 \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \binom{N}{s} (|s| + 2)^2 (|h_s| + |H_s| + r|k_s| + R|K_s|) \left(\frac{\varrho}{R}\right)^{|s|},$$

e le rimanenti dalla

$$9 \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \binom{N}{s} (|s| + 2)^2 (|h_s| + |H_s| + r|k_s| + R|K_s|) \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{|s|}.$$

Si ha dunque l'assoluta convergenza delle serie

$$\sum_{s=-\infty}^{+\infty} \alpha_s' \varrho^{|s|} e^{is\theta}, \quad \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \beta_s' \varrho^{|s|} e^{is\theta}, \quad \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \alpha_s'' \varrho^{-|s|} e^{is\theta}, \quad \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \beta_s'' \varrho^{-|s|} e^{is\theta},$$

le prime due per ogni $\varrho < R$ e le rimanenti per ogni $\varrho > r$. Ma r e R sono due arbitrari valori interni all'intervallo (ϱ', ϱ'') , onde segue la dimostrazione di tutti i fatti asseriti dal teorema.

13. - Decomposizione al modo di Poincaré delle funzioni iperarmoniche. — Dal teorema XIII si può immediatamente dedurre per le funzioni iperarmoniche in una corona circolare una decomposizione in somma che può considerarsi l'estensione a queste funzioni della decomposizione, già ricordata, di POINCARÉ, per le funzioni armoniche. Osserviamo anzitutto alcune proprietà per le funzioni

n -iperarmoniche all'infinito, ivi convergenti. Fissato ad arbitrio un punto M del piano, dette ϱ e θ le coordinate polari di polo in M , $\delta(M)$ la massima distanza di M dalla frontiera del campo di regolarità della funzione $u(\varrho, \theta)$, n -iperarmonica all'infinito ed ivi convergente, per ogni $\varrho > \delta(M)$ sussistono le proprietà integrali (24_n) nei secondi membri delle quali devono mancare, per la prima, i termini che non sono convergenti all'infinito e per le rimanenti quelli che non sono infinitesimi. Ne segue, in particolare, il teorema:

XIV. *Se una funzione è n -iperarmonica e convergente all'infinito, la media dei valori che essa assume sopra ogni circonferenza che contenga, nel suo interno, tutta la frontiera del campo di regolarità della funzione stessa, fornisce il valore al quale essa converge all'infinito.*

Dal teorema XIII si deduce poi il seguente:

XV. *Se u è funzione n -iperarmonica e convergente all'infinito, all'esterno di ogni cerchio $T(M)$ di centro M , che contenga nel suo interno tutta la frontiera del campo di regolarità della u , sussiste la seguente decomposizione in somma:*

$$(49) \quad u = u_0 + \varrho^2 u_1 + \dots + \varrho^{2n-2} u_{n-1},$$

ove u_0, u_1, \dots, u_{n-1} sono ben determinate funzioni armoniche all'esterno di T , la prima delle quali converge all'infinito al valore verso cui converge la u e ogni u_k (con $k \geq 1$) è ivi infinitesima d'ordine $\geq 2k+1$.

Si ha:

$$\Delta u = \sum_{k=1}^{n-1} 4k^2 \varrho^{2k-2} \left(u_k + \frac{\varrho}{k} \frac{\partial u_k}{\partial \varrho} \right),$$

onde segue che $\Delta^h u$ è una funzione $(n-h)$ -iperarmonica infinitesima all'infinito. Se, inoltre, la frontiera del campo A di regolarità della u è un continuo, riflettendo che, allora, ogni funzione armonica in A , infinitesima all'infinito d'ordine $\geq 2k+1$, riesce sempre la parte reale di una funzione $f(z)$, olomorfa in A , per la quale il prodotto $f(z)z^{k-1}$ è dotato di funzione primitiva, pur essa olomorfa in A , si può asserire (cfr. teorema XII) che la formola di decomposizione (49) è valida in tutto A .

Sia ora $u(x, y) \equiv u(\varrho, \theta)$ una funzione n -iperarmonica nella corona circolare $T(\varrho' < \varrho < \varrho'')$, con centro nell'origine O delle coordinate. Sussiste in T la decomposizione (45) e si ha:

$$u_k = \alpha_k + \beta_k \log \varrho + u_k' + u_k'',$$

con u_k' e u_k'' armoniche, la prima regolare nell'interno del cerchio $\varrho = \varrho''$ ed infinitesima nel centro di questa, e la seconda regolare all'esterno del cerchio $\varrho = \varrho'$ ed infinitesima all'infinito. Sia

$$u_k' = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \alpha'_{ks} \varrho^{|s|} e^{is\theta}, \quad u_k'' = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \alpha''_{ks} \varrho^{-|s|} e^{is\theta},$$

e si ponga

$$\Pi_0 = \beta_{n-1}, \quad \Pi_{n-1-k} = \beta_k + \Pi_{n-1-k}^{(0)}, \quad u'' = u_0'' + \sum_{k=1}^{n-1} \varrho^{2k} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} a''_{ks} \varrho^{-|s|} e^{is\theta},$$

si trarrà dalla (45)

$$u = \sum_{k=0}^{n-1} \Pi_k(x, y) \varrho^{2(n-1-k)} \log \varrho + \alpha_0 + u_0' + \sum_{k=1}^{n-1} \varrho^{2k} (a_k + u_k') + u'' + \sum_{k=1}^{n-1} \varrho^{2k} \sum_{s=-2k}^{2k} a''_{ks} \varrho^{-|s|} e^{is\theta},$$

ove $\Pi_k(x, y)$ è un polinomio armonico di grado k e u'' è funzione n -iperarmonica, regolare all'esterno del cerchio $\varrho = \varrho'$ ed infinitesima all'infinito. Ma si ha:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \varrho^{2k} \sum_{s=-2k}^{2k} a''_{ks} \varrho^{-|s|} e^{is\theta} &= \sum_{k=1}^{n-1} \varrho^{2k} \sum_{s=-k}^k a''_{ks} \varrho^{-|s|} e^{is\theta} + \sum_{k=1}^{n-1} \varrho^{2k} \sum_{s=-2k}^{2k} a''_{ks} \varrho^{-|s|} e^{is\theta}, \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{s=-k}^k a''_{ks} \varrho^{2(k-|s|)} \varrho^{|s|} e^{is\theta} + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{s=-2k}^{2k} a''_{ks} \varrho^{2k-|s|} e^{is\theta}, \end{aligned}$$

laddove

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{s=-k}^k a''_{ks} \varrho^{2(k-|s|)} \varrho^{|s|} e^{is\theta},$$

riesce un polinomio n -iperarmonico, infinitesimo per $\varrho \rightarrow 0$, e

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{s=-2k}^{2k} a''_{ks} \varrho^{2k-|s|} e^{is\theta} = \sum_{k=0}^{n-2} \varrho^k \sum_{h=k+1}^{n-1} (\mu_{hk} e^{i(2h-k)\theta} + \nu_{hk} e^{-i(2h-k)\theta}),$$

una funzione n -iperarmonica, regolare in tutto il piano *privato* dell'origine e *non* convergente all'infinito. Posto, pertanto,

$$a = \alpha_0, \quad u' = u_0' + \sum_{k=1}^{n-1} \varrho^{2k} (a_k + u_k') + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{s=-k}^k a''_{ks} \varrho^{2(k-|s|)} \varrho^{|s|} e^{is\theta},$$

si trova la formola di decomposizione:

$$(50) \quad u = a + \sum_{k=0}^{n-1} \Pi_k(x, y) \varrho^{2(n-1-k)} \log \varrho + \sum_{k=0}^{n-2} \varrho^k \sum_{h=k+1}^{n-1} (\mu_{hk} e^{i(2h-k)\theta} + \nu_{hk} e^{-i(2h-k)\theta}) + u' + u'',$$

con a , μ_{hk} , ν_{hk} costanti e u' funzione n -iperarmonica, regolare nell'interno del cerchio $\varrho = \varrho''$ ed infinitesima nel centro di questo.

Assunta la formola di decomposizione (50), col solito procedimento di integrazione rispetto a θ nell'intervallo $(0, 2\pi)$ di ambo i membri della (50) stessa,

moltiplicati per $e^{is\theta}$ ($s = \dots, -1, 0, 1, \dots$), si constata facilmente l'unicità delle costanti a , μ_{hk} , ν_{hk} , dei polinomi armonici $\Pi_k(x, y)$ e delle funzioni n -iperarmoniche u' e u'' , la prima regolare nell'interno del cerchio $\varrho = \varrho''$ ed infinitesima nel centro di questa, e la seconda regolare all'esterno del cerchio $\varrho = \varrho'$ ed infinitesima all'infinito. E si ha dunque il teorema:

XVI. *Comunque si assegni una funzione u , n -iperarmonica nella corona circolare $T(\varrho' < \varrho < \varrho'')$, riescono ben determinati n polinomi armonici $\Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-1}$, rispettivamente dei gradi $0, 1, \dots, n-1$ e $n(n-1)+1$ costanti a , a_{hk} , b_{hk} ($k=0, 1, \dots, n-2$; $h=k+1, k+2, \dots, n-1$), per modo che in T valga la decomposizione:*

$$(51) \quad u = a + \sum_{k=0}^{n-1} \Pi_k(x, y) \varrho^{2(n-1-k)} \log \varrho + \\ + \sum_{k=0}^{n-2} \varrho^k \sum_{h=k+1}^{n-1} (a_{hk} \cos [(2h-k)\theta] + b_{hk} \sin [(2h-k)\theta]) + u' + u'',$$

con u' e u'' funzioni n -iperarmoniche, pur esse ben determinate, la prima regolare nell'interno del cerchio $\varrho = \varrho''$ ed infinitesima nel centro di questa e la seconda regolare all'esterno del cerchio $\varrho = \varrho'$ ed infinitesima all'infinito.

In particolare, se u è bi-iperarmonica, si ha:

$$u = a + (a + \beta x + \gamma y + \delta \varrho^2) \log \varrho + a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta + u' + u'',$$

se u è tri-iperarmonica

$$u = a + [\Pi_2(x, y) + \Pi_1(x, y) \varrho^2 + \delta \varrho^4] \log \varrho + (a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta) + \\ + (a_4 \cos 4\theta + b_4 \sin 4\theta) + (a_3 \cos 3\theta + b_3 \sin 3\theta) \varrho + u' + u''.$$

Sia ora A il più arbitrario insieme aperto semplicemente connesso, e B_1, B_2, \dots, B_p , p fissati continui limitati, contenuti in A e a due a due privi di punti comuni, e sia u una funzione n -iperarmonica nell'insieme aperto

$$A' = A - B_1 - B_2 - \dots - B_p.$$

È spontaneo domandarsi se, conformemente alla teoria delle funzioni armoniche (cfr. « *Appunti* », p. 293), scelti i punti M_1, M_2, \dots, M_p , rispettivamente in B_1, B_2, \dots, B_p , valga, per la u , in A' , una formola di decomposizione del tipo:

$$u(P) = \sum_{r=1}^p \log \overline{M_r P} \sum_{k=0}^{n-1} \Pi_{r,k}(x, y) \overline{M_r P}^{2(n-1-k)} + \\ + \sum_{r=1}^p \sum_{k=0}^{n-2} \overline{M_r P}^k \sum_{h=k+1}^{n-1} \{ a_{hk}^{(r)} \cos [(2h-k)(\bar{x}, \vec{M}_r P)] + b_{hk}^{(r)} \sin [(2h-k)(\bar{x}, \vec{M}_r P)] \} + \\ + u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_p,$$

ove $II_{nk}(x, y)$ sono polinomi armonici di grado k , $a_{hk}^{(v)}$ e $b_{hk}^{(v)}$ costanti, u_0 è funzione n -iperarmonica in A e u_k nel complementare di B_k e convergente all'infinito.

Intendo qui soltanto di porre tale questione, della quale è ben manifesta l'importanza nelle applicazioni. Per l'indagine relativa si devono, indubbiamente, avvicinare i nostri a taluni classici procedimenti già largamente sfruttati in altre direzioni della teoria.

14. - Sui problemi di determinazione delle funzioni iperarmoniche nell'interno di un cerchio o di un generale dominio regolare. — Siano u una funzione n -iperarmonica, con campo di regolarità A , M un punto di A , $\delta(M)$ la distanza di M dalla frontiera di A . Assunto il sistema di coordinate polari ϱ e θ , di polo in M , sussistono, per ogni $\varrho < \delta(M)$, le proprietà integrali (36_n), dalle quali, per $s=0$, si ricava:

$$(52) \quad \int_0^{2\pi} u(\varrho, \theta) d\theta - 2\pi u(M) = c_1 \varrho^2 + c_2 \varrho^4 + \dots + c_{n-1} \varrho^{2n-2}.$$

Osserviamo che, per qualsivoglia indice k di derivazione, si può porre

$$\frac{\varrho^k}{k!} \frac{d^k}{d\varrho^k} \varrho^v = \binom{v}{k} \varrho^v,$$

onde segue dalla (52), derivando successivamente k volte

$$(52_k) \quad \frac{\varrho^k}{k!} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^k u(\varrho, \theta)}{\partial \varrho^k} d\theta = \binom{2}{k} c_1 \varrho^2 + \binom{4}{k} c_2 \varrho^4 + \dots + \binom{2n-2}{k} c_{n-1} \varrho^{2n-2},$$

e pertanto, se dalla (52) e dalle (52₁), (52₂), ..., (52_{n-1}) eliminiamo le quantità $c_1 \varrho^2, c_2 \varrho^4, \dots, c_{n-1} \varrho^{2n-2}$ si ottiene la seguente eguaglianza:

$$(53) \quad \begin{vmatrix} \int_0^{2\pi} u(\varrho, \theta) d\theta - 2\pi u(M) & 1 & 1 \dots & 1 \\ \frac{\varrho}{1!} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u(\varrho, \theta)}{\partial \varrho} d\theta & \binom{2}{1} & \binom{4}{1} \dots & \binom{2n-2}{1} \\ \frac{\varrho^2}{2!} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u(\varrho, \theta)}{\partial \varrho^2} d\theta & \binom{2}{2} & \binom{4}{2} \dots & \binom{2n-2}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varrho^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^{n-1} u(\varrho, \theta)}{\partial \varrho^{n-1}} d\theta & \binom{2}{n-1} & \binom{4}{n-1} \dots & \binom{2n-2}{n-1} \end{vmatrix} = 0,$$

che è da riguardarsi un'estensione alle funzioni n -iperarmoniche di quella esprime il teorema della media di GAUSS. Sviluppando il determinante si ha, per

esempio, per le funzioni bi-iperarmoniche, com'è noto,

$$u(M) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[u(\varrho, \theta) - \frac{\varrho}{2} \frac{\partial u(\varrho, \theta)}{\partial \varrho} \right] d\theta,$$

per le funzioni tri-iperarmoniche

$$u(M) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[u(\varrho, \theta) - \frac{5}{8} \varrho \frac{\partial u(\varrho, \theta)}{\partial \varrho} + \frac{1}{8} \varrho^2 \frac{\partial^2 u(\varrho, \theta)}{\partial \varrho^2} \right] d\theta, \dots$$

Derivando la (52) $2n-1$ volte si trova:

$$(54) \quad \int_0^{2\pi} \frac{\partial^{2n-1} u(\varrho, \theta)}{\partial \varrho^{2n-1}} d\theta = 0,$$

e derivando la (53) k volte:

$$(55) \quad \int_0^{2\pi} \left[q_0^{(k)} \frac{\partial^k u}{\partial \varrho^k} + q_1^{(k)} \varrho \frac{\partial^{k+1} u}{\partial \varrho^{k+1}} + \dots + q_{n-1}^{(k)} \varrho^{n-1} \frac{\partial^{k+n-1} u}{\partial \varrho^{k+n-1}} \right] d\theta = 0,$$

ove $q_0^{(k)}, q_1^{(k)}, \dots, q_{n-1}^{(k)}$ sono certe frazioni numeriche. Quest'ultima, per $k \geq n$, si riduce alla

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^{k+n-1} u(\varrho, \theta)}{\partial \varrho^{k+n-1}} d\theta = 0,$$

che si ottiene anche dalla (54) derivandola $k-n$ volte. E si pone ora, conformemente alla teoria delle funzioni armoniche, la questione, solo in parte recentemente trattata ⁽¹⁸⁾:

La proprietà integrale (53) o la (54) oppure una delle (55), è forse, con l'aggiunta di talune ipotesi qualitative, caratteristica per le funzioni n -iperarmoniche?

Mentre che per la determinazione di una funzione n -iperarmonica in una corona circolare occorre dare, in accordo con la teoria generale, i valori, in funzione di θ , di $2n$ funzionali distributivi $L_k u(\varrho, \theta)$, operanti su ϱ , le proprietà integrali (36_n) ci suggeriscono che i problemi di determinazione per le funzioni n -iperarmoniche nell'interno del cerchio T , devono porsi al modo seguente:

Assegnati: un aggregato lineare $\{u\}$, di funzioni u , di ϱ e θ , definite nell'interno del cerchio T di centro in O e di raggio R ($\leq +\infty$), al quale aggregato appartengano anche tutte le potenze di ϱ ad esponente non negativo; n funzionali distributivi L_0, L_1, \dots, L_{n-1} , definiti in $\{u\}$; n fun-

(18) Importante per le applicazioni.

zioni $f_0(\theta), f_1(\theta), \dots, f_{n-1}(\theta)$ dell'anomalia θ , definite nell'intervallo $(0, 2\pi)$, costruire una funzione n -iperarmonica nell'interno di T , che appartenga ad $\{u\}$ e soddisfi le n equazioni:

$$L_k u(\varrho, \theta) = f_k(\theta) \quad (k=0, 1, \dots, n-1).$$

Supposta verificata l'ipotesi fondamentale, rispetto al sistema $[e^{is\theta}]$, si avranno, per la determinazione delle costanti $c_k^{(s)}$, ai secondi membri delle (36_n), le equazioni:

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k^{(s)} L_n \varrho^{|s|+2k} = \int_0^{2\pi} f_k(\theta) e^{-is\theta} d\theta, \quad (h=0, 1, \dots, n-1).$$

Se il determinante $D^{(s)} \equiv \|L_n \varrho^{|s|+2k}\|$ è per ogni s , diverso da zero, detto $D_k^{(s)}(\varrho)$ il determinante che da quello si ottiene sostituendo agli elementi della h -ma riga, ordinatamente, le funzioni $\varrho^{|s|}, \varrho^{|s|+2}, \dots, \varrho^{|s|+2n-2}$, si perviene (cfr. n.º 3) alla formola risolutiva del problema:

$$(56) \quad u(\varrho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \left[f_0(\tau) \frac{D_1^{(s)}(\varrho)}{D^{(s)}} + f_1(\tau) \frac{D_2^{(s)}(\varrho)}{D^{(s)}} + \dots + f_{n-1}(\tau) \frac{D_n^{(s)}(\varrho)}{D^{(s)}} \right] e^{-is(\tau-\theta)} d\tau.$$

La (54) ci dice, per esempio, che, in un tale problema, non si possono arbitrariamente prescrivere alla u i valori della sua derivata normale d'ordine $2n-1$, sulla circonferenza di T , e la (55) ci dice che non si possono arbitrariamente prescrivere, su detta circonferenza, i valori di n successive derivate normali a cominciare da un qualsivoglia fissato ordine non inferiore ad uno.

In ciò che precede è ovviamente contenuta la soluzione del notissimo problema della determinazione di una funzione bi-iperarmonica nell'interno del cerchio T , per la quale si prescrivono sulla circonferenza i valori di essa e della sua derivata normale. Nella nostra terminologia il problema va posto al modo seguente:

L'aggregato $\{u\}$ è quello delle funzioni $u(\varrho, \theta)$ che, in tutto il cerchio T , sono continue con la derivata u_ϱ ; i funzionali L_0 e L_1 hanno la definizione seguente

$$L_0 u(\varrho, \theta) = \lim_{\varrho \rightarrow R} u(\varrho, \theta) = u(R, \theta), \quad L_1 u(\varrho, \theta) = \lim_{\varrho \rightarrow R} u_\varrho(\varrho, \theta) = u_\varrho(R, \theta).$$

Si vuol costruire una funzione u bi-iperarmonica nell'interno di T , appartenente all'aggregato $\{u\}$, che verifichi le due condizioni:

$$(57) \quad \lim_{\varrho \rightarrow R} u(\varrho, \theta) = f(\theta), \quad \lim_{\varrho \rightarrow R} u_\varrho(\varrho, \theta) = g(\theta),$$

ove $f(\theta)$ e $g(\theta)$ sono funzioni assegnate.

Tali funzioni devono, necessariamente, essere finite e continue nell'intervallo $(0, 2\pi)$ e verificare le condizioni $f(0) = f(2\pi)$, $g(0) = g(2\pi)$. In tale ipotesi,

posto $\alpha = \varrho/R$, sussiste, per essere sempre $D^{(s)} \neq 0$, la formola risolutiva del problema, subito fornita dalla (56):

$$(58) \quad u(aR, \theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \left(f(\tau) \left| \frac{\alpha^{|s|}}{|s|} \frac{\alpha^{|s|+2}}{|s|+2} \right| + Rg(\tau) \left| \frac{1}{\alpha^{|s|}} \frac{1}{\alpha^{|s|+2}} \right| \right) e^{-is(\tau-\theta)} d\tau.$$

La serie ora scritta, con tutte quelle che da essa si deducono per derivazione parziale termine a termine, d'ordine comunque elevato, converge assolutamente ed uniformemente in ogni dominio interno a T , e pertanto, anche in base alla teoria generale del n.º 5, essa fornisce una funzione bi-iperarmonica nell'interno di T . È, questa funzione, una soluzione del problema? La teoria del n.º 5 consente già di rispondere affermativamente nell'ipotesi che $f(\theta)$ e $g(\theta)$ siano, sulla circonferenza di T , finite e continue, la prima con le sue derivate fino a quella inclusa del 6º ordine, e la seconda con le sue derivate fino a quella inclusa del 5º ordine. Ed inverò, in tali ipotesi, si ha, *in tutto* T , la convergenza assoluta ed uniforme della serie (58) e di tutte quelle che da essa si deducono per derivazione parziale termine a termine, fino al quarto ordine incluso, e si ha pure la sviluppabilità in serie di FOURIER di $f(\theta)$ e di $g(\theta)$. Ma dimostreremo che:

XVII. *La serie (58) fornisce la soluzione del problema nella sola ipotesi che $g(\theta)$ sia, sulla circonferenza di T , finita e continua e che $f(\theta)$ lo sia con la sua derivata prima $f'(\theta)$.*

Comunque si assumano le funzioni $f(\theta)$ e $g(\theta)$, sommabili nell'intervallo $(0, 2\pi)$, la serie al secondo membro della (58), con tutte quelle che da essa si deducono per derivazione parziale termine a termine, d'ordine arbitrario h rispetto a ϱ e k rispetto a θ , converge assolutamente ed uniformemente in ogni dominio interno al cerchio T . I moduli dei termini delle serie che così si ottengono riescono, infatti, per $a < 1$, maggiorati dai corrispondenti delle seguenti

$$\frac{1}{4\pi R^h} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} |s|^k (|s|+2)^h \alpha^{|s|} \left[(|s|+2) \int_0^{2\pi} |f(\tau)| d\tau + R \int_0^{2\pi} |g(\tau)| d\tau \right].$$

Si ha dunque sempre, con la (58), una funzione bi-iperarmonica nell'interno di T . Ci proponiamo, comunque si fissi θ , di studiare i limiti di $u(aR, \theta)$ e di $u_{\varrho}(aR, \theta)$ al tendere di a verso *uno*. Nella (58) compaiono le serie

$$\sum_{s=-\infty}^{+\infty} \alpha^{|s|} e^{-is(\tau-\theta)}, \quad \sum_{s=-\infty}^{+\infty} |s| \alpha^{|s|} e^{-is(\tau-\theta)}, \quad \sum_{s=-\infty}^{+\infty} |s|^2 \alpha^{|s|} e^{-is(\tau-\theta)},$$

le quali, posto $l^2 = 1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\tau - \theta)$, hanno, per $\alpha < 1$, rispettivamente, le somme

$$\frac{1 - \alpha^2}{l^2}, \quad 2\alpha \frac{d}{d\tau} \frac{\text{sen}(\tau - \theta)}{l^2}, \quad -\frac{d^2}{d\tau^2} \frac{1 - \alpha^2}{l^2},$$

e pertanto la (58) fornisce:

$$(59) \quad u(aR, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \frac{1-a^2}{l^2} d\tau + \\ + \frac{\alpha(1-a^2)}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \frac{d}{d\tau} \frac{\text{sen}(\tau-\theta)}{l^2} d\tau - \frac{R(1-a^2)}{4\pi\alpha} \int_0^{2\pi} g(\tau) \frac{1-a^2}{l^2} d\tau = \\ = \frac{(1-a^2)^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} [2[1-a \cos(\tau-\theta)]f(\tau) - Rl^2 g(\tau)] \frac{d\tau}{l^4}$$

$$(60) \quad Ru_\theta(aR, \theta) = \frac{1-a^2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \frac{d}{d\tau} \frac{\text{sen}(\tau-\theta)}{l^2} d\tau - \frac{(1-a^2)^2}{4\pi\alpha} \int_0^{2\pi} f(\tau) \frac{d^2}{d\tau^2} \frac{1}{l^2} d\tau + \\ + \frac{\alpha R}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\tau) \frac{1-a^2}{l^2} d\tau - \frac{R(1-a^2)}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\tau) \frac{d}{d\tau} \frac{\text{sen}(\tau-\theta)}{l^2} d\tau.$$

Prolungheremo la definizione di $f(\theta)$ e di $g(\theta)$ in tutto l'asse θ ponendo $f(\theta) = f(\theta')$, $g(\theta) = g(\theta')$, ove θ' è quel ben determinato valore, non negativo e minore di 2π , per il quale $\theta - \theta'$ è un multiplo di 2π . Si avranno così in $f(\theta)$ e $g(\theta)$ due funzioni periodiche, di periodo 2π , sommabili in ogni dominio limitato dell'asse θ e si può dimostrare subito il teorema:

XVIII. *Se f è continua per un certo valore θ , in un intorno del quale g è limitata, si ha:*

$$(61) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 1} u(aR, \theta) = f(\theta).$$

Se si fa appello alla ben nota teoria dell'integrale di POISSON è subito visto, considerando il secondo membro della (59), che tutto si riduce a dimostrare che, posto

$$I = (1-a^2) \int_0^{2\pi} f(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\text{sen}(\tau-\theta)}{l^2} d\tau,$$

risulta $\lim_{\alpha \rightarrow 1} I(\alpha) = 0$. Si ha, comunque si scelga σ positivo e minore di π ,

$$I = (1-a^2) \int_{-\pi}^{\pi} [f(\theta+\tau) - f(\theta)] \frac{d}{d\tau} \frac{\text{sen } \tau}{1+a^2-2a \cos \tau} d\tau = \\ = (1-a^2) \int_{-\sigma}^{\sigma} [f(\theta+\tau) - f(\theta)] \frac{d}{d\tau} \frac{\text{sen } \tau}{1+a^2-2a \cos \tau} d\tau + \\ + (1-a^2) \left[\int_{\sigma}^{\pi} (\dots) d\tau + \int_{-\pi}^{-\sigma} (\dots) d\tau \right],$$

e pertanto, se, scelto arbitrariamente il numero positivo ε , si determina σ in modo che, per $|\tau| < \sigma$, riesca $|f(\theta + \tau) - f(\theta)| < \varepsilon$, si ricava

$$|I| \leq 2\varepsilon(1-a^2) \int_0^\pi \left| \frac{d}{d\tau} \frac{\operatorname{sen} \tau}{1+a^2-2a \cos \tau} \right| d\tau + \frac{8H}{\operatorname{sen}^2 \sigma} (1-a),$$

ove

$$H = 2\pi |f(\theta)| + \int_0^{2\pi} |f(\tau)| d\tau.$$

Ora la funzione $\frac{(1-a^2)\operatorname{sen} \tau}{1+a^2-2a \cos \tau}$, per ogni $a < 1$, è nulla per $\tau=0$ e per $\tau=\pi$, è crescente per $\cos \tau > 2a/(1+a^2)$ e decrescente per $\cos \tau < 2a/(1+a^2)$, assume il valore 1 per $\cos \tau = 2a/(1+a^2)$, onde segue

$$(1-a^2) \int_0^\pi \left| \frac{d}{d\tau} \frac{\operatorname{sen} \tau}{1+a^2-2a \cos \tau} \right| d\tau = 2, \quad |I| \leq 4\varepsilon + \frac{8H}{\operatorname{sen}^2 \sigma} (1-a),$$

e quindi $|I| < 5\varepsilon$, non appena a sia tanto prossimo ad *uno* da risultare $8H(1-a)/\operatorname{sen}^2 \sigma < \varepsilon$ (19). Si ha pure che:

XIX. *Se f è assolutamente continua in ogni intervallo finito e la sua derivata f' ha una discontinuità di prima specie per un certo valore θ , essendo g ivi continua, sussiste, insieme alla (61), la relazione di limite:*

$$(62) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 1} u_\alpha(aR, \theta) = g(\theta) - \frac{f'(\theta^+) - f'(\theta^-)}{\pi}.$$

Detto J il secondo addendo del secondo membro della (60) e tenendo presente la teoria dell'integrale di POISSON e quanto abbiamo or ora dimostrato, tutto si riduce a far vedere che:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} J = - \frac{f'(\theta^+) - f'(\theta^-)}{\pi}.$$

(19) Ma, posto

$$l^2 = 1 + a^2 - 2a \cos \tau,$$

si ha

$$\int_0^\pi d \frac{\operatorname{sen} \tau}{l^2} = \int_{-\pi}^0 d \frac{\operatorname{sen} \tau}{l^2} = 0,$$

e quindi

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} I(\alpha \rightarrow 1) = 0,$$

anche quando la f abbia in θ una discontinuità di prima specie, e ciò conduce alla proposizione a' enunciata nella nota (8).

Si ha, posto $l^2 = 1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \tau$,

$$\begin{aligned} J &= \frac{(1-\alpha^2)^2}{4\pi\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} f'(\theta + \tau) \frac{d}{d\tau} \frac{1}{l^2} d\tau = \\ &= \frac{(1-\alpha^2)^2}{4\pi\alpha} \left[\int_0^{\pi} f'(\theta + \tau) \frac{d}{d\tau} \frac{1}{l^2} d\tau - \int_0^{\pi} f'(\theta - \tau) \frac{d}{d\tau} \frac{1}{l^2} d\tau \right] = \\ &= \frac{(1-\alpha^2)^2}{4\pi\alpha} \left[\int_0^{\pi} [f'(\theta + \tau) - f'(\theta^+)] \frac{d}{d\tau} \frac{1}{l^2} d\tau - \int_0^{\pi} [f'(\theta - \tau) - f'(\theta^-)] \frac{d}{d\tau} \frac{1}{l^2} d\tau \right] - \\ &\quad - \frac{f'(\theta^+) - f'(\theta^-)}{\pi}, \end{aligned}$$

e se, fissato arbitrariamente un numero ε positivo, si sceglie σ in modo che, per $0 < \tau < \sigma$, riesca $|f'(\theta \pm \tau) - f'(\theta^{\pm})| < \varepsilon$, si trova:

$$\left| \frac{(1-\alpha^2)^2}{4\pi\alpha} \int_0^{\pi} [f'(\theta \pm \tau) - f'(\theta^{\pm})] \frac{d}{d\tau} \frac{1}{l^2} d\tau \right| < \frac{\varepsilon}{\pi} + K \frac{(1-\alpha^2)^2}{\sin^4 \sigma},$$

ove

$$K = \frac{1}{2} |f'(\theta^{\pm})| + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'(\tau)| d\tau \quad (2^0).$$

Nelle dimostrazioni dei teoremi XVIII e XIX è contenuta quella del seguente:

XX. *Se $f(\theta)$ è assolutamente continua in ogni intervallo finito e $f'(\theta)$ e $g(\theta)$ sono continue in un dominio limitato D dell'asse θ , sussistono*

(2⁰) La f abbia in θ una discontinuità di prima specie e, per un certo δ positivo, sia assolutamente continua in entrambi gli intervalli $(\theta, \theta + \delta)$ e $(\theta - \delta, \theta)$. Posto

$$J_{\delta} = \frac{(1-\alpha^2)^2}{4\pi\alpha} \int_{-\delta}^{\delta} f'(\theta + \tau) d \frac{1}{l^2},$$

si ha

$$\lim (J - J_{\delta})(\alpha \rightarrow 1) = 0,$$

e se f' ha in θ , essa pure, una discontinuità di prima specie,

$$\begin{aligned} J_{\delta} &= \frac{(1-\alpha^2)^2}{4\pi\alpha} \left[\int_0^{\delta} [f'(\theta + \tau) - f'(\theta^+)] d \frac{1}{l^2} - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\delta} [f'(\theta - \tau) - f'(\theta^-)] d \frac{1}{l^2} + [f'(\theta^+) - f'(\theta^-)] \left[\frac{1}{l^2} \right]_{\theta}^{\delta} \right], \\ &\quad \lim_{\alpha \rightarrow 1} \left(\frac{(1-\alpha^2)^2}{4\pi\alpha} \left[\frac{1}{l^2} \right]_{\theta}^{\delta} \right) = - \frac{1}{\pi}, \end{aligned}$$

e, se anche g ha in θ una discontinuità di prima specie, ciò conduce, in base alla (60) del

entrambe le relazioni di limite (57), uniformemente al variare di θ in ogni dominio interno a D .

Si ha dunque, in particolare, il teorema XVII. È da aspettarsi che il metodo seguito possa estendersi per dimostrare il seguente ben presumibile teorema generale:

XXI. *Se $f_0(\theta), f_1(\theta), \dots, f_{n-1}(\theta)$ sono n funzioni assegnate, essendo la $f_k(\theta)$ ($k=0, 1, \dots, n-1$) continua sulla circonferenza del cerchio T , con tutte le sue derivate, fino a quella inclusa d'ordine $n-1-k$, esiste ed è unica una funzione, n -iperarmonica nell'interno di T , continua in T con le sue derivate $u_\rho, u_{\rho^2}, \dots, u_{\rho^{n-1}}$, la quale verifichi le n equazioni*

$$\left[\frac{\partial^k u}{\partial \rho^k} \right]_{\rho=R} = f_k(\theta) \quad (k=0, 1, \dots, n-1).$$

La teoria generale del n.º 5 (§ 1) consentirebbe subito di dimostrare il teorema qualora si supponesse $f_k(\theta)$ continua con tutte le sue derivate fino a quella inclusa d'ordine $3n-k$, ed è perciò spontaneo domandarsi se il teorema generale XXI possa, a differenza del teorema XVII, sussistere in ipotesi più ridotte di derivabilità delle funzioni assegnate. Per rispondere si potrebbe sottoporre ad uno studio approfondito la formola risolutiva del problema a cui concerne quel teorema, alla quale, ricordiamolo, il nostro procedimento consente *immediatamente* di pervenire nella sola ipotesi della continuità delle funzioni assegnate. Essa [cfr. formola (56)], per qualsivoglia valore di n , si scrive:

$$(63) \quad u(aR, \theta) = \frac{1}{2\pi \cdot v_n} \sum_{k=0}^{n-1} R^k \int_0^{2\pi} f_k(\tau) \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \delta_k^{(s)}(a) e^{-is(\tau-\theta)} d\tau,$$

ove

$$v_n = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} (n-1)! (n-2)! \dots 2! 1!$$

è il valore del determinante wronskiano, preso per $a=1$, delle funzioni $\alpha^{|\delta|}, \alpha^{|\delta|+2}, \dots, \alpha^{|\delta|+2(n-1)}$, e $\delta_k^{(s)}(a)$ è il determinante che da quello si ottiene quando si sostituisca

testo e alla nota (19), alla proposizione b') enunciata nella nota (8). In base alla (60) si ha pure che: *Se f e g hanno in θ una discontinuità di prima specie, condizione necessaria e sufficiente affinché riesca:*

$$\lim_{a \rightarrow 1} u_\rho(aR, \theta) = \frac{1}{2} [g(\theta^+) + g(\theta^-)],$$

è che si abbia:

$$\lim_{a \rightarrow 1} \left[(1-a)^2 \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta + \tau) \frac{d^2}{d\tau^2} \frac{1}{l^2} d\tau \right] = 0.$$

È subito visto che tale condizione è verificata se f è differenziabile in θ , e ciò conduce, in particolare, al teorema di HADAMARD indicato nella nota (9).

al primo, secondo, ..., n^{mo} elemento della riga k^{ma} ordinatamente le funzioni stesse $\alpha^{|s|}$, $\alpha^{|s|+2}$, ..., $\alpha^{|s|+2(n-1)}$. Le serie

$$\sum_{s=-\infty}^{+\infty} \delta_k^{(s)}(a) e^{-is(\tau-\theta)},$$

che compaiono nella (63), possono, per $a < 1$, facilmente sommarsi. Esse sono infatti combinazioni lineari di serie del tipo:

$$\sum_{s=-\infty}^{+\infty} |s|^p a^{|s|} e^{-is(\tau-\theta)},$$

ove p indica un numero intero non negativo, ed una tale serie, posto

$$l^2 = 1 + a^2 - 2a \cos(\tau - \theta), \quad \mathfrak{D} = a \frac{\partial}{\partial a},$$

ha per somma:

$$\mathfrak{D}^p \frac{1-a^2}{l^2}.$$

E così, per $n=2$, si trova

$$(63_2) \quad u(aR, \theta) = \frac{1}{4\pi} \left[\int_0^{2\pi} f_0(\tau) \left(\frac{2}{l^2} + a \frac{\partial}{\partial a} \frac{1-a^2}{l^2} \right) (1-a^2) d\tau - R \int_0^{2\pi} f_1(\tau) \frac{(1-a^2)^2}{l^2} d\tau \right],$$

per $n=3$,

$$(63_3) \quad u(aR, \theta) = \\ = \frac{1}{16\pi} \left[\int_0^{2\pi} f_0(\tau) \left(\frac{8}{l^2} + (3-a^2)a \frac{\partial}{\partial a} \frac{1-a^2}{l^2} + (1-a^2)a \frac{\partial}{\partial a} a \frac{\partial}{\partial a} \frac{1-a^2}{l^2} \right) (1-a^2) d\tau - \right. \\ \left. - R \int_0^{2\pi} f_1(\tau) \left(\frac{5-a^2}{l^2} + 2a \frac{\partial}{\partial a} \frac{1-a^2}{l^2} \right) (1-a^2)^2 d\tau + R^2 \int_0^{2\pi} f_2(\tau) \frac{(1-a^2)^3}{l^2} d\tau \right], \text{ ecc.}$$

Un altro attraente problema è quello di stabilire l'estensione delle proprietà integrali espresse dalla (55), che può anche scriversi:

$$\int_C \left[g_0^{(k)}(s) \frac{d^k u}{d\lambda^k} + g_1^{(k)}(s) \frac{d^{k+1} u}{d\lambda^{k+1}} + \dots + g_{n-1}^{(k)}(s) \frac{d^{k+n-1} u}{d\lambda^{k+n-1}} \right] ds = 0,$$

— designando C una curva regolare semplice e chiusa, tutta contenuta in un dominio semplicemente connesso del campo di regolarità della u , λ la normale interna alla C , s l'arco di C , $g_0^{(k)}$, $g_1^{(k)}$, ..., $g_{n-1}^{(k)}$ certe funzioni di s , dipendenti unicamente dalla curva — date nel caso particolare che C sia un cerchio. Per esempio, se u è bi-iperarmonica, dalle relazioni integrali classiche per queste funzioni, si deduce che, detta $g(s)$ la curvatura di C , si ha:

$$\int_C \left(\frac{d^3 u}{d\lambda^3} - g(s) \frac{d^2 u}{d\lambda^2} - g^2(s) \frac{du}{d\lambda} + \frac{d^2 g}{ds^2} u \right) ds = 0,$$

e si tratta dunque di eliminare, da questa relazione, la u e la $\frac{du}{d\lambda}$, oppure la u e la $\frac{d^3u}{d\lambda^3}$.

15. - Un teorema concernente la convergenza delle successioni di funzioni iperarmoniche. — Dalla formola (58) subito discende il seguente teorema di maggiorazione:

XXII. *Se la funzione $u(x, y)$ è bi-iperarmonica nell'interno della circonferenza C , di centro in O e di raggio R , ed in tutto il cerchio T limitato da C è continua con la sua derivata $du/d\lambda$, rispetto alla normale λ alla C , per il valore in O della derivata parziale $\partial^s u / \partial x^h \partial y^k$, di un ordine qualsiasi $s \geq 2$, sussiste la seguente formola di maggiorazione:*

$$(64) \quad \left| \left[\frac{\partial^s u}{\partial x^h \partial y^k} \right]_0 \right| \leq \frac{2(s!)}{R^s} \left(s \max_C |u| + R \max_C \left| \frac{du}{d\lambda} \right| \right) \quad (2^1).$$

Detta θ l'anomalia rispetto al centro O di C , posto $f(\theta) = u$ su C , $g(\theta) = du/d\lambda$ su C (λ normale interna alla C), la formola (58), per ogni punto (x, y) interno a C , fornisce:

$$u(x, y) = \frac{1}{4\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{R^s} \int_0^{2\pi} [(s+2)f(\theta) + Rg(\theta)][(x+iy)^s e^{-is\theta} + (x-iy)^s e^{is\theta}] d\theta - \\ - \frac{1}{4\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^2+y^2}{R^{s+2}} \int_0^{2\pi} [sf(\theta) + Rg(\theta)][(x+iy)^s e^{-is\theta} + (x-iy)^s e^{is\theta}] d\theta,$$

e quindi, comunque si fissi $s \geq 2$,

$$\sum_{h+k=s}^{0,s} h, k \left[\frac{\partial^s u}{\partial x^h \partial y^k} \right]_0 \frac{x^h}{h!} \frac{y^k}{k!} = \\ = \frac{1}{4\pi R^s} \int_0^{2\pi} [(s+2)f(\theta) + Rg(\theta)][(x+iy)^s e^{-is\theta} + (x-iy)^s e^{is\theta}] d\theta - \\ - \frac{x^2+y^2}{4\pi R^s} \int_0^{2\pi} [(s-2)f(\theta) + Rg(\theta)][(x+iy)^{s-2} e^{-i(s-2)\theta} + (x-iy)^{s-2} e^{i(s-2)\theta}] d\theta,$$

donde, eguagliando i coefficienti dei monomii $x^h y^k$ nei due membri, segue, con facili maggiorazioni, precisamente la (64). Notevole corollario del teorema ora dimostrato è il seguente:

XXIII. *Le funzioni della successione $u_1(x, y), u_2(x, y), \dots, u_p(x, y), \dots$, siano bi-iperarmoniche nel campo A e tale successione, con le altre due delle derivate parziali del prim'ordine, rispetto a x e rispetto a y , sia unifor-*

(2¹) Con $\max_C f$ indichiamo il massimo valore su C di una funzione f definita su C .

memente convergente in ogni dominio limitato contenuto in A . Allora: 1°) la funzione limite u è pur essa bi-iperarmonica in A ; 2°) comunque si fissi il numero naturale s , la successione $\left[\frac{\partial^s u_p}{\partial x^h \partial y^k}\right]$ riesce pur essa uniformemente convergente in ogni dominio limitato contenuto in A .

Sia D un qualsivoglia dominio limitato contenuto in A , $2R$ la distanza fra le frontiere di D e di A , $D(R)$ il dominio luogo dei punti di A aventi da D distanza non superiore a R . Comunque si scelga un punto M in D , il cerchio T di centro in M e di raggio R è totalmente contenuto in $D(R)$, e, detta C la circonferenza di T , si ha, per due qualsivogliano indici p e q ,

$$\left| \left[\frac{\partial^s (u_p - u_q)}{\partial x^h \partial y^k} \right]_M \right| \leq \frac{2(s!)}{R^s} \left[s \max_C |u_p - u_q| + R \max_C \left| \frac{d(u_p - u_q)}{d\lambda} \right| \right],$$

λ designando la normale a C , e quindi

$$\begin{aligned} & \left| \left[\frac{\partial^s u_p}{\partial x^h \partial y^k} \right]_M - \left[\frac{\partial^s u_q}{\partial x^h \partial y^k} \right]_M \right| \leq \\ & \leq \frac{2(s!)}{R^s} \left(s \max_{D(R)} |u_p - u_q| + R \max_{D(R)} \left| \frac{\partial u_p}{\partial x} - \frac{\partial u_q}{\partial x} \right| + R \max_{D(R)} \left| \frac{\partial u_p}{\partial y} - \frac{\partial u_q}{\partial y} \right| \right), \end{aligned}$$

ciò che, in forza delle ipotesi del teorema, dimostra la uniforme convergenza in D della successione $[\partial^s u_p / \partial x^h \partial y^k]$. La funzione limite u è pertanto dotata, in ogni punto di A , delle derivate parziali $\partial^s u / \partial x^h \partial y^k$ e si ha:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\partial^s u_p}{\partial x^h \partial y^k} = \frac{\partial^s u}{\partial x^h \partial y^k}, \quad \Delta \Delta u = \lim_{p \rightarrow \infty} (\Delta \Delta u_p) = 0.$$

Ovviamente, una formola di maggiorazione analoga alla (64) deve sussistere per qualsivoglia funzione n -iperarmonica, il secondo membro sarà una certa combinazione lineare, con coefficienti dipendenti soltanto da s e da R , dei massimi sulla circonferenza C dei moduli della u e delle derivate di essa, rispetto alla normale λ , fino a quella inclusa d'ordine $n-1$. Ne segue il teorema generale di convergenza enunciato nel secondo paragrafo dell'introduzione.

16. - Sui problemi regolari di determinazione delle funzioni iperarmoniche all'esterno di un cerchio o di un dominio regolare. — L'esterno di un cerchio, di centro O e di raggio R , è una corona circolare $T(R < \rho < +\infty)$, e pertanto un problema di determinazione di una funzione n -iperarmonica $u(\rho, \theta)$ all'esterno di un cerchio sarà, in generale, determinato, se in esso si assegnano, in funzione dell'anomalia θ , i valori di $2n$ funzionali distributivi $L_k u(\rho, \theta)$ ($k=1, 2, \dots, 2n$) operanti su ρ . Un problema di determinazione di una funzione n -iperarmonica $u(\rho, \theta)$ all'esterno di un cerchio si dirà *regolare* se, prescrivendo esso un certo comportamento della u , all'infinito, e i valori, in funzione di θ , di soli n funzionali distributivi $L_k u(\rho, \theta)$ ($k=1, 2, \dots, n$), operanti su ρ , riesce in generale determinato. È subito visto, in base alle proprietà integrali, che:

XXIV. *Comunque si assegnino le funzioni $f_0(\theta), f_1(\theta), \dots, f_{n-1}(\theta)$, continue sulla circonferenza del cerchio T , di centro in O e di raggio R , il problema di determinare una funzione $u(\varrho, \theta)$, n -iperarmonica all'esterno di T , continua, con le sue derivate $u_\varrho, u_{\varrho^2}, \dots, u_{\varrho^{n-1}}$, nel dominio T' luogo dei punti non interni a T , che verifichi le n equazioni*

$$\left[\frac{\partial^k u}{\partial \varrho^k} \right]_{\varrho=R} = f_k(\theta) \quad (k=0, 1, \dots, n-1),$$

e la condizione che il rapporto

$$(65) \quad \frac{u(\varrho, \theta)}{\varrho^{n-1}}$$

riesca limitato nel detto dominio T' , è regolare. Esso è anzi sempre determinato.

L'esistenza della soluzione può essere dimostrata nella ulteriore ipotesi che la $f_k(\theta)$ ($k=0, 1, \dots, n-1$) sia, sulla circonferenza di T , continua con tutte le sue derivate fino a quella inclusa d'ordine $n-1-k$. Limitandoci, al solito, a considerare il caso delle funzioni bi-iperarmoniche, la condizione che il rapporto $u(\varrho, \theta)/\varrho$ risulti limitato nel dominio T' ha di immediata conseguenza che le proprietà integrali della u , per $\varrho > R$, si scrivono:

$$(66) \quad \begin{cases} \int_0^{2\pi} u(\varrho, \theta) d\theta = a_0 + b_0 \log \varrho, \\ \int_0^{2\pi} u(\varrho, \theta) e^{is\theta} d\theta = a_s \frac{1}{\varrho^{|s|}} + b_s \frac{1}{\varrho^{|s|-2}}, \quad |s| \geq 1. \end{cases}$$

Posto $R/\varrho = \alpha$, le equazioni

$$(67) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 1} u\left(\frac{R}{\alpha}, \theta\right) = f(\theta), \quad \lim_{\alpha \rightarrow 1} u_\varrho\left(\frac{R}{\alpha}, \theta\right) = g(\theta),$$

forniscono per la u , in base alle (66), l'unica determinazione:

$$(68) \quad \begin{aligned} u\left(\frac{R}{\alpha}, \theta\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) d\tau - \frac{R \log \alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\tau) d\tau + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} (1) \int_0^{2\pi} \left(-f(\tau) \left| \frac{\alpha^{|s|}}{|s|} \frac{\alpha^{|s|-2}}{|s|-2} \right| + Rg(\tau) \left| \frac{1}{\alpha^{|s|}} \frac{1}{\alpha^{|s|-2}} \right| \right) e^{-is(\tau-\theta)} d\tau = \\ &= \frac{1-\alpha^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \frac{d\tau}{l^2} + \frac{1-\alpha^2}{2\pi\alpha} \int_0^{2\pi} f(\tau) \frac{d}{d\tau} \frac{\text{sen}(\tau-\theta)}{l^2} d\tau + R \frac{(1-\alpha^2)^2}{4\pi\alpha^2} \int_0^{2\pi} g(\tau) \frac{d\tau}{l^2} - \\ &- \frac{R}{4\pi} \left(\log \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} - 1 \right) \int_0^{2\pi} g(\tau) d\tau = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(1-a^2)^2}{4\pi a^2} \int_0^{2\pi} (2a[\cos(\tau-\theta) - a]f(\tau) + Rl^2g(\tau)) \frac{d\tau}{l^4} - \\
 &- \frac{R}{4\pi} \left(\log a^2 + \frac{1}{a^2} - 1 \right) \int_0^{2\pi} g(\tau) d\tau, \\
 & \quad l^2 = 1 + a^2 - 2a \cos(\tau - \theta),
 \end{aligned}$$

alla quale, nella sua seconda espressione, si applica senz'altro l'analisi del n.° 14, per dimostrare che, nella supposta continuità di $f(\theta)$, $f'(\theta)$ e $g(\theta)$, sussistono le (67), uniformemente al variare di θ , laddove è immediata la constatazione che:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\frac{\alpha}{R} u \left(\frac{R}{\alpha}, \theta \right) \right] = \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \left[\frac{u(\varrho, \theta)}{\varrho} \right] = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} [f(\tau) + Rg(\tau)] \cos(\tau - \theta) d\tau,$$

e pertanto che, comunque si prescriva il numero positivo ε , si ha definitivamente, al tendere di ϱ all'infinito,

$$\left| \frac{u(\varrho, \theta)}{\varrho} \right| < \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} |f(\tau) + Rg(\tau)| d\tau + \varepsilon.$$

Ovviamente, sostituendo, nel problema considerato, alla condizione che il rapporto $u(\varrho, \theta)/\varrho^{n-1}$ risulti limitato in T' , l'altra più restrittiva che la funzione $u(\varrho, \theta)$ sia convergente all'infinito, si ha ancora un problema determinato, comunque si assegnino le funzioni $f_0(\theta)$, $f_1(\theta)$, ..., $f_{n-1}(\theta)$, ma è interessante osservare che, allora, la soluzione non esiste se dette funzioni non verificano talune condizioni quantitative. Limitandoci alla considerazione del problema per le funzioni bi-iperarmiche, le relative proprietà integrali, nell'ipotesi della convergenza di $u(\varrho, \theta)$ all'infinito, si scrivono, per $\varrho > R$,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} u(\varrho, \theta) d\theta &= 2\pi u(\infty), & \int_0^{2\pi} u(\varrho, \theta) e^{\mp i\theta} d\theta &= \frac{a^{(\pm 1)}}{\varrho}, & \int_0^{2\pi} u(\varrho, \theta) e^{\mp 2i\theta} d\theta &= \frac{a^{(\pm 2)}}{\varrho^2}, \\
 \int_0^{2\pi} u(\varrho, \theta) e^{-is\theta} d\theta &= \frac{a^{(s)}}{\varrho^{|s|}} + \frac{b^{(s)}}{\varrho^{|s|-2}}, & \text{per } |s| &\geq 3,
 \end{aligned}$$

e dalle prime tre seguono le relazioni:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial u(\varrho, \theta)}{\partial \varrho} d\theta = \int_0^{2\pi} \left[u(\varrho, \theta) + \varrho \frac{\partial u(\varrho, \theta)}{\partial \varrho} \right] e^{\mp i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \left[2u(\varrho, \theta) + \varrho \frac{\partial u(\varrho, \theta)}{\partial \varrho} \right] e^{\mp 2i\theta} d\theta = 0,$$

le quali, per $\varrho \rightarrow R$, forniscono le indicate condizioni quantitative che devono necessariamente essere verificate dalle funzioni $f(\theta)$ e $g(\theta)$ che forniscono i valori rispettivamente assegnati alla u e alla u_ϱ sulla circonferenza di T :

$$\int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} [f(\theta) + Rg(\theta)] e^{\mp i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} [2f(\theta) + Rg(\theta)] e^{\mp 2i\theta} d\theta = 0.$$

Soddisfatte queste condizioni, il problema non può possedere che la soluzione fornita dalla formola:

$$\begin{aligned}
 u(\varrho, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-2}^2 a^{|s|} \int_0^{2\pi} f(\tau) e^{-is(\tau-\theta)} d\tau + \\
 &+ \frac{1}{4\pi} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \left(-f(\tau) \left| \frac{a^{|s|}}{|s|} \frac{a^{|s|-2}}{|s|-2} \right| + Rg(\tau) \left| \frac{1}{a^{|s|}} \frac{1}{a^{|s|-2}} \right| \right) e^{-is(\tau-\theta)} d\tau = \\
 &= \frac{1-a^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \frac{d\tau}{l^2} + \frac{1-a^2}{2\pi a} \int_0^{2\pi} f(\tau) \frac{d}{d\tau} \frac{\sin(\tau-\theta)}{l^2} d\tau + R \frac{(1-a^2)^2}{4\pi a^2} \int_0^{2\pi} g(\tau) \frac{d\tau}{l^2} = \\
 &= \frac{(1-a^2)^2}{4\pi a^2} \int_0^{2\pi} (2a[\cos(\tau-\theta) - a]f(\tau) + Rl^2g(\tau)) \frac{d\tau}{l^4},
 \end{aligned}$$

alla quale, nella sua seconda espressione, si applica senz'altro l'analisi del n.º 14, per dimostrare che, nella supposta continuità di f , f' e g , sussistono le (67), uniformemente al variare di θ , laddove lo sviluppo in serie mette in evidenza che

$$\lim_{\varrho \rightarrow \infty} u(\varrho, \theta) = \lim_{a \rightarrow 0} u\left(\frac{R}{a}, \theta\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) d\tau.$$

Con ciò che precede riesce legittimata la presunzione che il problema di determinazione di una funzione $u(P)$ n -iperarmonica, in un campo A luogo dei punti esterni ad una curva regolare C , semplice e chiusa, continua con le sue prime $n-1$ derivate normali su C , alla quale si voglia affatto arbitrariamente prescrivere i valori su C , di essa e di queste derivate normali, deve porsi imponendo alla u l'ulteriore condizione che il rapporto $u(P)/\overline{OP}^{n-1}$, per un fissato punto O interno alla C , si conservi limitato in A . La convergenza all'infinito della u non può aversi, come abbiamo visto nel caso particolare che la C sia una circonferenza, senza che quei valori verificchino certe condizioni quantitative e sarebbe certo interessante stabilire, in generale, quali esse siano.

17. - Sul problema classico di determinazione di una funzione iperarmonica in una corona circolare. — Assegnati due numeri positivi r e R ($r < R$) e assunto nel piano il solito sistema di coordinate polari ϱ e θ , di polo in O , sia T la corona circolare $r \leq \varrho \leq R$. Il problema classico di determinazione di una funzione n -iperarmonica nell'interno della corona T è il seguente:

Date 2n funzioni $f_0(\theta), f_1(\theta), \dots, f_{n-1}(\theta), F_0(\theta), F_1(\theta), \dots, F_{n-1}(\theta)$, costruire una funzione $u(\varrho, \theta)$, n -iperarmonica nell'interno della corona T , continua in tutto T con le sue derivate rispetto a ϱ fino a quella inclusa d'ordine $n-1$, che verifichi le 2n equazioni:

$$(69) \quad \left[\frac{\partial^k u}{\partial \varrho^k} \right]_{\varrho=r} = f_k(\theta), \quad \left[\frac{\partial^k u}{\partial \varrho^k} \right]_{\varrho=R} = F_k(\theta), \quad (k=0, 1, \dots, n-1).$$

Le funzioni assegnate f_k e F_k devono, di necessità, essere continue e periodiche, di periodo 2π , ed in tale ipotesi il metodo generale (cfr. n.º 3) consente immediatamente di scrivere la formola risolutiva, poichè il determinante al n.º 3 indicato con $D^{(s)}$ riesce, per ogni s , diverso da zero. Tale formola, comunque si assumano le funzioni f_k e F_k , sommabili nell'intervallo $(0, 2\pi)$, fornisce sempre una funzione n -iperarmonica nell'interno di T , la quale verifica le (69) se si suppongono le f_k e F_k continue con le loro derivate fino a quelle incluse d'ordine $n-1-k$ ($k=0, 1, \dots, n-1$). Constateremo tutto ciò limitandoci a considerare il caso particolare delle funzioni bi-iperarmoniche nell'interno di T , astrette a verificare le quattro equazioni:

$$u(r, \theta) = f(\theta), \quad u_\rho(r, \theta) = g(\theta), \quad u(R, \theta) = F(\theta), \quad u_\rho(R, \theta) = G(\theta).$$

Si ha allora la formola risolutiva:

$$(70) \quad u(\rho, \theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \left(f(\tau) \frac{\delta_1^{(s)}(\rho)}{\delta^{(s)}} + \right. \\ \left. + r g(\tau) \frac{\delta_2^{(s)}(\rho)}{\delta^{(s)}} + F(\tau) \frac{\delta_3^{(s)}(\rho)}{\delta^{(s)}} + R G(\tau) \frac{\delta_4^{(s)}(\rho)}{\delta^{(s)}} \right) e^{-is(\tau-\theta)} d\tau,$$

ove, posto $q=r/R$, $a=\rho/R$, $\beta=r/\rho$, si ha, per $|s| \geq 2$,

$$\delta^{(s)} = (1 - q^2 |s|)^2 - s^2 q^2 |s|^{-2} (1 - q^2)^2,$$

$$\delta_1^{(s)}(\rho) = \begin{vmatrix} q^{|s|} \alpha^{|s|} & q^{|s|} \alpha^{|s|+2} & \beta^{|s|} & q^2 \beta^{|s|-2} \\ |s| q^2 |s|^{-2} & (|s|+2) q^{2|s|} & -|s| q^{-2} & 2 - |s| \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ |s| & |s|+1 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\delta_2^{(s)}(\rho) = \begin{vmatrix} q^{2|s|} & q^{2|s|+2} & 1 & q^2 \\ q^{|s|-2} \alpha^{|s|} & q^{|s|-2} \alpha^{|s|+2} & q^{-2} \beta^{|s|} & \beta^{|s|-2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ |s| & |s|+1 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\delta_3^{(s)}(\rho) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ |s| & |s|+1 & 0 & 1 \\ \alpha^{|s|} & q^{-2} \alpha^{|s|+2} & q^{|s|} \beta^{|s|} & q^{|s|} \beta^{|s|-2} \\ |s| q^2 & |s|+2 & -|s| q^{2|s|+2} & (2 - |s|) q^{2|s|} \end{vmatrix},$$

$$\delta_4^{(s)}(\rho) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ |s| & |s|+1 & 0 & 1 \\ 1 & q^{-2} & q^{2|s|} & q^{2|s|-2} \\ q^2 \alpha^{|s|} & \alpha^{|s|+2} & q^{|s|+2} \beta^{|s|} & q^{|s|+2} \beta^{|s|-2} \end{vmatrix}.$$

È facile vedere che, comunque si assegnino le funzioni f, g, F, G , sommabili nell'intervallo $(0, 2\pi)$, la serie (70), con tutte quelle che da essa si deducono per derivazione parziale termine a termine, d'ordine comunque elevato, converge assolutamente ed uniformemente in ogni dominio T' interno alla corona T . Poichè i singoli termini della serie sono funzioni bi-iperarmoniche basta verificare (n.º 15)

l'asserita convergenza, in ogni dominio T' , della serie stessa e delle altre due (70_ρ) e (70_θ) formate, rispettivamente, con le derivate parziali prime rispetto a ρ e rispetto a θ della detta serie. Si può determinare, dato T' , un numero positivo σ , minore di uno, tale che, al variare del punto (ρ, θ) in T' , riesca $r/\sigma \leq \rho \leq R\sigma$, e quindi $\alpha \leq \sigma$, $\beta \leq \sigma$. D'altra parte, poichè $\lim \delta^{(s)}$ (per $s \rightarrow \infty$) = 1, esisterà un numero positivo N tale che, per $|s| \geq N$, riesca $\delta^{(s)} > 1/2$; se, allora, maggioriamo i determinanti $\delta_1^{(s)}(\rho), \dots, \delta_4^{(s)}(\rho)$, e le loro derivate prime rispetto a ρ , al modo di HADAMARD, si vede facilmente che i termini d'indice s ($|s| \geq N$) delle serie (70), (70_ρ) e (70_θ) vengono, rispettivamente, maggiorati dalle quantità

$$\frac{M}{q^2} (|s|+2)^2 \sigma^{|s|-2}, \quad \frac{M}{rq^2} (|s|+2)^3 \sigma^{|s|-2}, \quad \frac{M}{q^2} (|s|+2)^3 \sigma^{|s|-2},$$

ove

$$M = \frac{8}{\pi} \int_0^{2\pi} (|f(\tau)| + r|g(\tau)| + |F(\tau)| + R|G(\tau)|) d\tau,$$

e ciò dimostra quanto si voleva. È così accertato che la somma $u(\rho, \theta)$ della serie (70) è sempre una funzione bi-iperarmonica nell'interno di T . Quanto al comportamento di $u(\rho, \theta)$, per $\rho \rightarrow r$ oppure per $\rho \rightarrow R$, dimostriamo facilmente il teorema seguente (cfr. « *Appunti* », p. 317):

XXV. *Comunque si assegnino le funzioni f, g, F, G , sommabili nell'intervallo $(0, 2\pi)$, il comportamento della funzione $u(\rho, \theta)$, fornita dalla (70) è, per $\rho \rightarrow R$, identico a quello della funzione $v'(\rho, \theta)$ fornita dal secondo membro della (58), in cui al posto di f e di g si sostituiscono F e G , ed il comportamento di $u_\rho(\rho, \theta)$ è identico a quello di $v'_\rho(\rho, \theta)$. Il comportamento della stessa $u(\rho, \theta)$, per $\rho \rightarrow r$, è identico a quello della funzione $v''(\rho, \theta)$ fornita dal secondo membro della (68), in cui al posto di R si sostituisce r , ed il comportamento di $u_\rho(\rho, \theta)$ è identico a quello di $v''_\rho(\rho, \theta)$. Ne segue l'asserita esistenza della soluzione, fornita dalla (70), del problema considerato per la corona circolare T , nell'ipotesi che f, g, F, G , siano continue con le derivate f' e F' .*

Si ha, invero,

$$u(\rho, \theta) - v'(\rho, \theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \left\{ f(\tau) \frac{\delta_1^{(s)}(\rho)}{\delta^{(s)}} + r g(\tau) \frac{\delta_2^{(s)}(\rho)}{\delta^{(s)}} + \right. \\ \left. + F(\tau) \left(\frac{\delta_3^{(s)}(\rho)}{\delta^{(s)}} - \left| \frac{\alpha^{|s|}}{|s|} \quad \frac{\alpha^{|s|+2}}{|s|+2} \right| \right) + R G(\tau) \left(\frac{\delta_4^{(s)}(\rho)}{\delta^{(s)}} - \left| \frac{1}{\alpha^{|s|}} \quad \frac{1}{\alpha^{|s|+2}} \right| \right) \right\} e^{-is(\tau-\theta)} d\tau.$$

Ciascun termine della serie al secondo membro è, per $\rho = R$, nullo con la sua derivata prima rispetto a ρ , se, dunque, dimostriamo che, comunque si fissi una quantità positiva σ minore di uno e maggiore di q , la detta serie e quella

formata dalle derivate prime rispetto a ϱ dei suoi termini, riescono uniformemente convergenti nella corona circolare T_σ

$$\frac{r}{\sigma} \leq \varrho \leq R = \frac{r}{q},$$

possiamo asserire, conformemente al teorema, che $u-v'$ e $u_\varrho-v'_\varrho$ sono infinitesime per $\varrho \rightarrow R$. Ora si constata infatti facilmente che in T_σ il termine di indice s ($|s| \geq N$), e la derivata prima di questo rispetto a ϱ , sono, in modulo, rispettivamente maggiorati dalle quantità:

$$\frac{M}{q^2} (|s|+2)^3 \sigma^{|s|-2}, \quad \frac{M}{rq^2} (|s|+2)^4 \sigma^{|s|-2},$$

ove

$$M = \frac{8}{\pi} \int_0^{2\pi} [|f(\tau)| + r|g(\tau)| + |F(\tau)| + R|G(\tau)|] d\tau.$$

18. - Sul comportamento di una funzione iperarmonica all'infinito o nell'intorno di un punto singolare isolato. — Le proprietà integrali per le funzioni iperarmoniche forniscono altresì, col teorema XIII, un fecondo fondamento per la completa indagine del comportamento di una funzione iperarmonica nell'intorno di un suo punto singolare isolato o all'infinito. È quello che mostreremo in questo numero, limitandoci però a dare due teoremi le cui dimostrazioni stimiamo ben sufficienti ad accertare la possibilità, col detto fondamento, di una sistematica estensione di tutta la teoria già, per questo riguardo, conseguita per le funzioni armoniche (cfr. « *Appunti* », § 2 del Cap. V).

È ben noto che una tale funzione non può conservarsi limitata in un intorno di un suo punto singolare isolato, laddove l'esempio della funzione bi-iperarmonica

$$e^{2i\theta} = \frac{(x+iy)^2}{x^2+y^2},$$

ci dice che una funzione iperarmonica può ben conservarsi limitata in un intorno di un suo punto singolare isolato, quello della funzione

$$2\varrho e^{i\theta} \log \varrho = (x+iy) \log (x^2+y^2)$$

che essa vi può essere anche continua e quello della funzione

$$2\varrho^2 \log \varrho = (x^2+y^2) \log (x^2+y^2),$$

che può esservi continua con le sue derivate parziali del primo ordine. Ebbene, sussiste il teorema:

XXVI. *Sia M , polo delle coordinate polari ϱ e θ , un punto singolare isolato per la funzione iperarmonica $u(\varrho, \theta)$, della quale diremo C la frontiera del campo di regolarità, e sia $\delta(M)$ ($\leq +\infty$) la distanza di M*

da $C-M$. Se $u(\varrho, \theta)$ diverge per $\varrho \rightarrow 0$, essa diverge logicamente e sussiste anzi, nell'interno del cerchio $T(M)$, di centro in M e di raggio $\delta(M)$, la formola di decomposizione:

$$(71) \quad u = a \log \varrho + v,$$

con a costante e v funzione limitata in ogni dominio limitato interno a $T(M)$. Se u si conserva limitata in un intorno di M ed è n -iperarmonica, sussiste nell'interno di $T(M)$ la formola di decomposizione:

$$u = \sum_{k=0}^{n-1} \Pi_k(x, y) \varrho^{2(n-1-k)} \log \varrho + \sum_{k=0}^{n-2} \varrho^k \sum_{h=k+1}^{n-1} (a_{hk} \cos [(2h-k)\theta] + b_{hk} \sin [(2h-k)\theta]) + v,$$

v essendo funzione n -iperarmonica e regolare nell'interno di $T(M)$, $\Pi_k(x, y)$ un polinomio armonico di grado k , $\Pi_{n-1}(x, y)$ infinitesimo in M , a_k e b_k costanti. Non può avvenire che la u , in un intorno di M , si conservi limitata con tutte le sue derivate parziali fino a quelle incluse d'ordine $2n-2$.

Per semplificare, prenderemo in considerazione una funzione $u(\varrho, \theta)$ bi-iperarmonica, per la quale, dunque, per ogni $\varrho < \delta(M)$, valgono le proprietà integrali (24₂). Sia u divergente per $\varrho \rightarrow 0$ e sia σ un numero positivo tale che, per $\varrho < \sigma$, la $u(\varrho, \theta)$ conservi segno costante. Dalle menzionate proprietà integrali discende, per $\varrho < \sigma$, con le notazioni usate nella (35₂),

$$\left. \begin{aligned} & |a_{\pm 1} \varrho + b_{\pm 1} \varrho^3 + c_{\pm 1} \frac{1}{\varrho} + \mu_{\pm 1} \varrho \log \varrho| \\ & |a_s' \varrho^{|s|} + b_s' \varrho^{|s|+2} + a_s'' \varrho^{-|s|} + b_s'' \varrho^{2-|s|}| \end{aligned} \right\} < \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\varrho, \theta) d\theta = \\ = \varepsilon(a_0 + b_0 \varrho^2 + a \log \varrho + \beta \varrho^2 \log \varrho),$$

ove ε è $+1$ oppure -1 secondochè $u(\varrho, \theta)$ riesce, per $\varrho < \sigma$, positiva oppure negativa. Si ha pertanto $c_{\pm 1} = 0$, $a_s'' = 0$, per $|s| \geq 2$, $b_s'' = 0$, per $|s| \geq 3$, e quindi, in forza del teorema XIII, la (71). Se, per $\varrho < \sigma$, riesce $|u(\varrho, \theta)| < K$, dalle citate proprietà integrali discende, per $\varrho < \sigma$,

$$\left. \begin{aligned} & |a_s' \varrho^{|s|} + b_s' \varrho^{|s|+2} + a_s'' \varrho^{-|s|} + b_s'' \varrho^{2-|s|}| \\ & |a_{\pm 1} \varrho + b_{\pm 1} \varrho^3 + c_{\pm 1} \frac{1}{\varrho} + \mu_{\pm 1} \varrho \log \varrho| \\ & |a_0 + b_0 \varrho^2 + a \log \varrho + \beta \varrho^2 \log \varrho| \end{aligned} \right\} < K,$$

e quindi $a = c_{\pm 1} = 0$, $a_s'' = 0$, per $|s| \geq 2$, $b_s^{(4)} = 0$, per $|s| \geq 3$, e pertanto, in forza del teorema XIII si ha, nell'interno di $T(M)$,

$$(72) \quad u(\varrho, \theta) = \beta \varrho^2 \log \varrho + (px + qy) \log \varrho + a \cos 2\theta + b \sin 2\theta + v(\varrho, \theta),$$

con $v(\varrho, \theta)$ funzione bi-iperarmonica e regolare nell'interno di $T(M)$, e β , p , q ,

a e b costanti. Se, inoltre, riescono limitate, in un intorno di M , le derivate $u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$, traendosi, dalla (72),

$$u_\varrho = \beta\varrho(1 + 2 \log \varrho) + (p \cos \theta + q \sin \theta)(1 + \log \varrho) + v_\varrho,$$

se ne deduce che deve essere $p = q = 0$, ed avendosi allora

$$u_{\varrho\varrho} = \beta(3 + 2 \log \varrho) + v_{\varrho\varrho},$$

se ne deduce che deve pure essere $\beta = 0$. Si ha dunque

$$u = a \cos 2\theta + b \sin 2\theta + v,$$

e la funzione $a \cos 2\theta + b \sin 2\theta$ non può conservare limitate, in un intorno di M , le derivate parziali del prim'ordine, rispetto a x e a y , se non quando sia $a = b = 0$.

Daremo, in secondo luogo, il seguente elegante teorema che è da considerarsi un'estensione delle note proprietà all'infinito delle funzioni armoniche intere stabilite dalla scuola di PICARD.

XXVII. *Se $u(\varrho, \theta)$ è una funzione n -iperarmonica intera e reale e, al tendere di ϱ all'infinito, riesce definitivamente*

$$u(\varrho, \theta) < K\varrho^\alpha,$$

oppure

$$u(\varrho, \theta) > K\varrho^\alpha,$$

K e α designando due costanti, nell'un caso o nell'altro essa si riduce ad un polinomio, e precisamente di grado non superiore a $2n - 2$ se, nel primo caso, è $\alpha \leq 2n - 2$ oppure $K \leq 0$, e nel secondo $\alpha \leq 2n - 2$ oppure $K \geq 0$, di grado non superiore ad α , se, nel primo caso, è $\alpha > 2n - 2$ e $K > 0$ e nel secondo $\alpha > 2n - 2$ e $K < 0$.

Considerando, per esempio, il primo caso, si abbia, $u(\varrho, \theta) < K\varrho^\alpha$, per $\varrho > R$. Porremo allora, per $\varrho > R$,

$$v(\varrho, \theta) \begin{cases} = u(\varrho, \theta), & \text{quando sia } u(\varrho, \theta) \geq 0, \\ = 0, & \text{quando sia } u(\varrho, \theta) < 0, \end{cases}$$

e si avrà, per $\varrho > R$,

$$\begin{aligned} |u(\varrho, \theta)| &= 2v(\varrho, \theta) - u(\varrho, \theta), \\ \left| \int_0^{2\pi} u(\varrho, \theta) e^{-is\theta} d\theta \right| &\leq \int_0^{2\pi} |u(\varrho, \theta)| d\theta = 2 \int_0^{2\pi} v(\varrho, \theta) d\theta - \int_0^{2\pi} u(\varrho, \theta) d\theta, \end{aligned}$$

cioè, in virtù della (36_n),

$$|c_0^{(s)} + c_1^{(s)}\varrho^2 + \dots + c_{n-1}^{(s)}\varrho^{2n-2}| \varrho^{|s|} \leq H\varrho^\alpha - c_0^{(0)} - c_1^{(0)}\varrho^2 - \dots - c_{n-1}^{(0)}\varrho^{2n-2},$$

ove H è zero oppure K , secondochè questo non è oppure è positivo. Ne segue, se $K \leq 0$ oppure $\alpha \leq 2n - 2$,

$$c_k^{(s)} = 0, \quad \text{se } 2k + |s| > 2n - 2 \quad (k = 0, 1, \dots, n - 1),$$

se $K > 0$ e $\alpha > 2n - 2$

$$c_k^{(s)} = 0, \quad \text{se } 2k + |s| > \alpha \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Si ha dunque, in base alla (37_n),

$$u(\varrho, \theta) = \sum_{k,s} c_k^{(s)} \varrho^{2k} \varrho^{|s|} e^{is\theta},$$

ove la sommatoria, se $K \leq 0$ oppure $\alpha \leq 2n - 2$, è estesa ai valori degli indici k e s per cui riesce $k \geq 0$ e $2k + |s| \leq 2n - 2$, e se $K > 0$ e $\alpha > 2n - 2$ è estesa ai valori degli stessi indici per cui riesce $k \geq 0$ e $2k + |s| \leq \alpha$. Ciò dimostra completamente il teorema, nel quale è manifestamente contenuto quello enunciato alla fine del secondo paragrafo dell'Introduzione.

§ 4. - Sulle funzioni iperarmoniche in tre variabili indipendenti.

19. - Analiticità. — Riprenderemo le notazioni introdotte al n.º 9. Indicato con n un numero intero maggiore di uno, una funzione u , delle tre variabili x, y, z , sarà detta n -iperarmonica in un campo T dello spazio (x, y, z) se essa è ivi, in ogni punto, continua con le sue derivate parziali fino a quelle incluse d'ordine $2n$ e verifica l'equazione:

$$\Delta^n u \equiv \sum_{\substack{h,k,l \\ h+k+l=n}} \frac{n!}{h! k! l!} \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2h} \partial y^{2k} \partial z^{2l}} = 0.$$

Sussistono gli analoghi dei teoremi IV e V del n.º 11, laddove il teorema VI va sostituito col seguente:

VI'. Se $u(\varrho, P)$ è n -iperarmonica in T , la funzione di ϱ' e di P :

$$\varrho'^{2n-3} u\left(\frac{R^2}{\varrho'}, P\right),$$

è n -iperarmonica nel campo T' trasformato di T per inversione di polo in O e di potenza R^2 .

La funzione $u(\varrho, P)$ sia n -iperarmonica nello strato sferico $T(\varrho' < \varrho < \varrho'')$, con $\varrho' \geq 0$ e $\varrho'' \leq +\infty$. Comunque si fissi ϱ nell'interno dell'intervallo (ϱ', ϱ'') , la $u(\varrho, P)$ e le derivate $u_\varrho, u_{\varrho^2}, \dots, u_{\varrho^{2n-1}}$ riescono, sulla sfera $\omega(O)$, funzioni del punto P sviluppabili in serie di LAPLACE assolutamente ed uniformemente convergente. Si avrà pertanto:

$$u_{\varrho^v}(\varrho, P) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{2s+1}{4\pi} \iint_{\omega(O)} u_{\varrho^v}(\varrho, Q) X_s[\cos \gamma(P, Q)] d\omega(Q),$$

$$(v = 0, 1, \dots, 2n-1),$$

le serie al secondo membro convergendo al detto modo. Tenendo presenti le proprietà integrali (34_n), si ha pertanto il teorema dello sviluppo di Laurent:

VII'. Se una funzione $u(\varrho, P)$ è n -iperarmonica nello strato sferico

$T(\varrho' < \varrho < \varrho'')$, essa e le sue derivate rispetto a ϱ , almeno fino a quelle d'ordine $2n-1$ incluso, sono suscettibili del seguente sviluppo in serie:

$$(73) \quad u_{\varrho^v}(\varrho, P) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\partial^v}{\partial \varrho^s} \sum_{k=0}^{n-1} \left[c_{2k+1}^{(s)}(P) \varrho^s + \frac{c_{2k+2}^{(s)}(P)}{\varrho^{s+1}} \right] \varrho^{2k},$$

$(v=0, 1, \dots),$

assolutamente ed uniformemente convergente per ogni fissato ϱ interno all'intervallo (ϱ', ϱ'') . Le funzioni $c_{2k+1}^{(s)}(P)$ e $c_{2k+2}^{(s)}(P)$ sono funzioni sferiche d'ordine s definite dall'eguaglianza:

$$\frac{2s+1}{4\pi} \iint_{\omega(O)} u(\varrho, Q) X_s[\cos \gamma(P, Q)] d\omega(Q) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[c_{2k+1}^{(s)}(P) \varrho^s + \frac{c_{2k+2}^{(s)}(P)}{\varrho^{s+1}} \right] \varrho^{2k},$$

che deve sussistere al variare di ϱ nell'interno dell'intervallo (ϱ', ϱ'') .

La u sia n -iperarmonica in un campo A e siano M un punto di tale campo, che assumeremo come origine delle coordinate cartesiane x, y, z e come polo delle coordinate polari ϱ e $P(\theta, \varphi)$, $\delta(M)$ la distanza di M dalla frontiera di A , $T(M)$ la sfera di centro in M e raggio $\delta(M)$. Per ogni $\varrho < \delta(M)$ sussistono le proprietà integrali (34_n). Ma si ha:

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \iint_{\omega(M)} u(\varrho, Q) d\omega(Q) = 4\pi u(M),$$

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \iint_{\omega(M)} u(\varrho, Q) Y_s(Q) d\omega(Q) = u(M) \iint_{\omega(M)} Y_s(Q) d\omega(Q) = 0, \quad \text{per } s \geq 1,$$

e deve pertanto essere $c_2^{(0)}=0$ e, per $s \geq 1$, in tutti i secondi membri delle (34_n) devono essere nulli i coefficienti delle potenze di ϱ ad esponente negativo o nullo. Si avrà dunque, nelle (34_n), $c_{2k+2}^{(s)}=0$, per $s \geq 2k-1$. Se, inoltre, si tien conto che la u , per definizione, possiede, in ogni punto di A e rispetto alle variabili x, y, z , derivate parziali, fino a quelle d'ordine $2n$ incluse, finite e continue, ne segue che nelle (35_n), anche per $s < 2k-1$, devono esser nulli i coefficienti delle potenze di ϱ il cui esponente ha parità diversa da quella di s . Sussiste, invero, la proposizione:

Se u è una qualsivoglia funzione dotata in un campo A di tutte le derivate parziali finite e continue, fino a quelle incluse di un certo ordine ν ($\nu \geq 1$), comunque si fissi un punto M di A , dette ϱ e $P(\theta, \varphi)$ le coordinate polari di polo in M , $\delta(M)$ la distanza di M dalla frontiera di A , posto, per $\varrho < \delta(M)$,

$$u^{(s)}(\varrho) = \iint_{\omega(M)} u(\varrho, P) Y_s(P) d\omega,$$

si ha, se $\nu + s$ è un numero dispari,

$$\left[\frac{d^\nu u^{(s)}}{d\varrho^\nu} \right]_{\varrho=0} = 0.$$

Risulta infatti

$$\frac{d^\nu u^{(s)}}{d\varrho^\nu} = \iint_{\omega(M)} \left(\text{sen } \varphi \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \text{sen } \varphi \text{sen } \theta \frac{\partial}{\partial y} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial z} \right)^\nu u(\varrho, P) Y_s(P) d\omega,$$

e quindi

$$\left[\frac{d^\nu u^{(s)}}{d\varrho^\nu} \right]_{\varrho=0} = \sum_{h+k+l=\nu} \frac{\nu!}{h! k! l!} u_{x^h y^k z^l}(M) \iint_{\omega(M)} (\text{sen } \varphi \cos \theta)^h (\text{sen } \varphi \text{sen } \theta)^k (\cos \varphi)^l Y_s(P) d\omega,$$

ove, se $\nu + s = h + k + l + s$ è dispari, riesce sempre

$$\iint_{\omega(M)} (\text{sen } \varphi \cos \theta)^h (\text{sen } \varphi \text{sen } \theta)^k (\cos \varphi)^l Y_s(P) d\omega = 0.$$

Se ne conclude che le proprietà integrali per la considerata funzione n -iperarmonica $u(\varrho, P)$ si scrivono, per $\varrho < \delta(M)$,

$$(74_n) \quad \iint_{\omega(M)} u(\varrho, P) Y_s(P) d\omega = (c_0^{(s)} + c_1^{(s)} \varrho^2 + \dots + c_{n-1}^{(s)} \varrho^{2n-2}) \varrho^s.$$

Ne seguono osservazioni perfettamente analoghe a quelle del n.º 11.

20. - Sulla rappresentazione delle funzioni iperarmoniche a mezzo delle armoniche. — Tutte le considerazioni del n.º 12, che precedono il teorema XII, si applicano inalterate alle funzioni iperarmoniche in tre variabili, e si ha dunque che:

XI. *Se A è il campo di regolarità di una funzione n -iperarmonica $u(P)$, comunque si assegni in A un punto M , detto $C(M)$ l'insieme aperto luogo dei punti di A per i quali il segmento PM è tutto contenuto in A , esistono e sono ben determinate n funzioni $u_k(M, P)$ ($k=0, 1, \dots, n-1$) armoniche nel punto P , per le quali sussiste in $C(M)$ la formola di decomposizione in somma:*

$$u(P) = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{MP}^{2k} u_k(M, P).$$

Tali funzioni u_k si calcolano con quadrature facilmente esprimibili. È possibile l'estensione del teorema XII? Ci limiteremo a porre tale domanda, laddove potremo enunciare il seguente teorema — la cui dimostrazione si consegue con un'estensione di quella data dal teorema XIII del n.º 12 — che rivela una notevole differenza fra le funzioni iperarmoniche in due variabili e quelle in tre, nei riguardi della rappresentazione in esame.

XIII'. Se la funzione $u(\varrho, P)$ è n -iperarmonica nello strato sferico $T(\varrho' < \varrho < \varrho'')$ ($\varrho' \geq 0$, $\varrho'' \leq +\infty$), col centro nell'origine O delle coordinate, la serie (73), con tutte quelle che da essa si deducono per derivazione parziale termine a termine, d'ordine comunque elevato, è assolutamente ed uniformemente convergente in ogni dominio limitato interno allo strato; ed ogni serie i cui termini sono addendi di egual posto dei termini della serie (73) e che contiene solo potenze di ϱ ad esponente positivo (potenze di ϱ ad esponente negativo), converge al medesimo modo in ogni dominio limitato interno alla sfera $\varrho = \varrho''$ (esterno alla sfera $\varrho = \varrho'$). Esistono e sono ben determinate n funzioni armoniche $u_k(\varrho, P)$ ($k=0, 1, \dots, n-1$) per le quali sussiste in T la formola di decomposizione:

$$u(\varrho, P) = u_0(\varrho, P) + \varrho^2 u_1(\varrho, P) + \dots + \varrho^{2n-2} u_{n-1}(\varrho, P).$$

21. - **Decomposizione al modo di Poincaré.** — In modo identico al caso delle due variabili ne segue immediatamente il teorema:

XVI'. Comunque si assegni una funzione $u(\varrho, P)$, n -iperarmonica nello strato sferico $T(\varrho' < \varrho < \varrho'')$ ($\varrho' \geq 0$ e $\varrho'' \leq +\infty$), esistono e sono ben determinate una costante a e $n(n-1)$ funzioni sferiche $Y_{2h-k-1}^{(k)}(P)$ ($k=0, 1, \dots, 2n-3$; $h = \left[\frac{k}{2}\right] + 1, \left[\frac{k}{2}\right] + 2, \dots, n-1$), designando $\left[\frac{k}{2}\right]$ il massimo intero contenuto in $\frac{k}{2}$ e $2h-k-1$ l'ordine della funzione sferica, per modo che in T valga la decomposizione:

$$u(\varrho, P) = a + \sum_{k=0}^{2n-3} \varrho^k \sum_{h=\left[\frac{k}{2}\right]+1}^{n-1} Y_{2h-k-1}^{(k)}(P) + u'(\varrho, P) + u''(\varrho, P),$$

con u' e u'' funzioni n -iperarmoniche, la prima regolare nell'interno della sfera $\varrho = \varrho''$, ed infinitesima nel centro di questa, la seconda regolare all'esterno della sfera $\varrho = \varrho'$ ed infinitesima all'infinito.

22. - **Sui problemi di determinazione delle funzioni iperarmoniche nell'interno di una sfera o di un dominio regolare.** — Sussistono inalterate, al riguardo, le osservazioni fatte al n.º 14 per le funzioni in due variabili e si pongono gli stessi problemi. Notevole, per esempio, l'estensione del teorema della media di GAUSS, teorema che viene espresso dall'eguaglianza (53), nella quale, gli elementi della prima colonna del determinante, devono ordinatamente sostituirsi coi seguenti:

$$\iint_{\omega(M)} u(\varrho, P) d\omega - 4\pi u(M), \quad \frac{\varrho}{1} \iint_{\omega(M)} \frac{\partial u(\varrho, P)}{\partial \varrho} d\omega, \dots, \quad \frac{\varrho^{n-1}}{(n-1)!} \iint_{\omega(M)} \frac{\partial^{n-1} u(\varrho, P)}{\partial \varrho^{n-1}} d\omega.$$

Le condizioni d'esistenza della soluzione del problema di costruire una funzione, n -iperarmonica entro una sfera, assegnando sulla frontiera i valori della

funzione e delle sue prime $n-1$ derivate normali, richiedono però una nuova analisi che noi andiamo a fare, limitatamente alle funzioni bi-iperarmoniche. Le proprietà integrali consentono intanto immediatamente di affermare che: Assunto il solito sistema di coordinate polari ϱ e $P(\theta, \varphi)$, di polo in O , una funzione $u(\varrho, P)$, bi-iperarmonica nell'interno di una sfera T di centro in O e di raggio R , continua in tutto T con la sua derivata u_ϱ , verificante le equazioni:

$$(75) \quad \lim_{\varrho \rightarrow R} u(\varrho, P) = u(R, P) = f(P), \quad \lim_{\varrho \rightarrow R} u_\varrho(\varrho, P) = u_\varrho(R, P) = g(P),$$

ove $f(P)$ e $g(P)$ sono assegnate funzioni continue sulla superficie sferica $\omega(O)$, è data, se esiste, nell'interno di T , cioè per $\alpha = \varrho/R < 1$, dalla serie [cfr. formola (30)]

$$(76) \quad u(aR, P) = \\ = \frac{1}{8\pi} \sum_{s=0}^{\infty} (2s+1) \iint_{\omega(O)} \left(f(Q) \begin{vmatrix} \alpha^s & \alpha^{s+2} \\ s & s+2 \end{vmatrix} + Rg(Q) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha^s & \alpha^{s+2} \end{vmatrix} \right) X_s[\cos \gamma(P, Q)] d\omega(Q),$$

e ricordando che, posto $l^2 = 1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \gamma(P, Q)$, $\mathfrak{D} = \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}$, si ha

$$(77) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{s=0}^{\infty} (2s+1) \alpha^s X_s[\cos \gamma(P, Q)] = \frac{1-\alpha^2}{l^3}, \\ \sum_{s=0}^{\infty} (2s+1) s^p \alpha^s X_s[\cos \gamma(P, Q)] = \mathfrak{D}^p \frac{1-\alpha^2}{l^3}, \\ \sum_{s=0}^{\infty} (2s+1) \iint_{\omega(O)} f(Q) \alpha^s X_s[\cos \gamma(P, Q)] d\omega(Q) = \iint_{\omega(O)} f(Q) \frac{1-\alpha^2}{l^3} d\omega(Q), \end{array} \right.$$

si ha pure immediatamente la formola

$$(78) \quad u(aR, P) = \\ = \frac{1}{4\pi} \iint_{\omega(O)} f(Q) \frac{1-\alpha^2}{l^3} d\omega + \frac{\alpha(1-\alpha^2)}{8\pi} \iint_{\omega(O)} f(Q) \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1-\alpha^2}{l^3} d\omega - R \frac{(1-\alpha^2)^2}{8\pi} \iint_{\omega(O)} g(Q) \frac{d\omega}{l^3} = \\ = \frac{1}{8\pi} \left[\iint_{\omega(O)} f(Q) \left(\frac{2}{l^3} + \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1-\alpha^2}{l^3} \right) (1-\alpha^2) d\omega - R \iint_{\omega(O)} g(Q) \frac{(1-\alpha^2)^2}{l^3} d\omega \right] = \\ = \frac{(1-\alpha^2)^2}{8\pi} \iint_{\omega(O)} (f(Q)[2-\alpha^2-\alpha \cos \gamma(P, Q)] - Rl^2 g(Q)) \frac{d\omega(Q)}{l^5} \quad (22).$$

(22) Tale ultima espressione di $u(aR, P)$ fu data dal VOLTERRA in una nota del 1895 [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. 31, p. 10] nella quale il Maestro proponeva di utilizzare l'ottenuta ben semplice espressione per ricavare condizioni sufficienti d'esistenza della u . Ciò si fa nel testo nelle pagine che seguono e avrebbero dunque dovuto trascorrere ben quarant'anni prima che quella proposta venisse attuata?

Si noti come la seconda espressione della u data dalla (78) del testo sia perfettamente simile alla (63₂), data per la soluzione del problema analogo nel piano. In generale, per il

Per dare condizioni d'esistenza della u si può fare lo studio dei limiti, per $a \rightarrow 1$, di ciascuno degli integrali al secondo membro di quest'eguaglianza e di quelli al secondo membro della seguente :

$$(79) \quad Ru_\varrho(aR, P) = \frac{aR}{4\pi} \iint_{\omega(O)} g(Q) \frac{1-a^2}{l^3} d\omega - \frac{R}{8\pi} (1-a^2) \iint_{\omega(O)} g(Q) \frac{\partial}{\partial a} \frac{1-a^2}{l^3} d\omega + \\ + \frac{1-a^2}{4\pi} \iint_{\omega(O)} f(Q) \frac{\partial}{\partial a} \frac{1-a^2}{l^3} d\omega + \frac{1-a^2}{8\pi} \iint_{\omega(O)} f(Q) \frac{\partial}{\partial a} \left(a \frac{\partial}{\partial a} \frac{1-a^2}{l^3} \right) d\omega.$$

Tali integrali hanno senso nella sola ipotesi che le $f(Q)$ e $g(Q)$ siano somma-
bili sulla $\omega(O)$ e la (78) fornisce sempre una funzione bi-iperarmonica nell'interno
della sfera T . Per una chiara e rigorosa analisi del comportamento di u e di u_ϱ ,
per $a \rightarrow 1$, noi supporremo che $f(P)$ e $g(P)$ siano la traccia sulla $\omega(O)$ di due
funzioni $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ definite in un dominio T' , dello spazio (x, y, z) , al
quale sia interna la superficie $\omega(O)$. Ad ogni punto P di tale dominio faremo
corrispondere una terna d'assi (ξ_P, η_P, ζ_P) , mutuamente ortogonali, orientata
come la terna (x, y, z) , con l'origine in O , e per la quale l'asse ζ_P abbia la direzione
e il verso del raggio vettore \vec{OP} . Denoteremo con $a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3$
i coseni direttori, rispettivamente di ξ_P, η_P, ζ_P , e supporremo che questi coseni
siano funzioni continue del punto P . Porremo :

$$f(x, y, z) = f[a_1(P)\xi + b_1(P)\eta + c_1(P)\zeta, a_2(P)\xi + b_2(P)\eta + c_2(P)\zeta, \\ a_3(P)\xi + b_3(P)\eta + c_3(P)\zeta] = f^*(P; \xi, \eta, \zeta),$$

ed analogamente

$$g(x, y, z) = \dots = g^*(P; \xi, \eta, \zeta).$$

Ciò posto si può immediatamente dimostrare il teorema :

VIII'. Se in un punto P di $\omega(O)$ la f è continua, su $\omega(O)$, in un in-
torno del quale, su $\omega(O)$, la g è limitata, sussiste la prima delle (75).

considerato problema relativo alle funzioni n -iperarmoniche in tre variabili, si trova la for-
mula risolutiva :

$$u(aR, P) = \frac{1}{4\pi \cdot \nu_n} \sum_{k=0}^{n-1} R^k \iint_{\omega(O)} f_k(Q) \sum_{s=0}^{\infty} \delta_k^{(s)}(a) X_s[\cos \gamma(P, Q)] d\omega(Q),$$

nella quale ν_n e $\delta_k^{(s)}(a)$ hanno il significato loro attribuito nella formola (63) risolutiva del-
l'analogo problema nel piano. In base alle (77) del testo, le serie contenute nella formola
ora scritta possono essere sommate e così, per esempio, per le funzioni tri-iperarmoniche si
ottiene, similmente alla (63),

$$u(aR, P) = \frac{1}{32\pi} \left[\iint_{\omega(O)} f_0(Q) \left(\frac{8}{l^3} + (3-a^2) \mathfrak{D} \frac{1-a^2}{l^3} + (1-a^2) \mathfrak{D}^2 \frac{1-a^2}{l^3} \right) (1-a^2) d\omega(Q) - \right. \\ \left. - R \iint_{\omega(O)} f_1(Q) \left(\frac{5-a^2}{l^3} + 2 \mathfrak{D} \frac{1-a^2}{l^3} \right) (1-a^2)^2 d\omega(Q) + R^2 \iint_{\omega(O)} f_2(Q) \frac{(1-a^2)^3}{l^3} d\omega(Q) \right], \quad \text{ecc.}$$

In base all'espressione di u fornita dal secondo membro della (78) e con riferimento alla nota teoria dell'integrale di POISSON nello spazio, tutto si riduce a dimostrare che, posto

$$I = (1 - a^2) \iint_{\omega(O)} f(Q) \frac{\partial}{\partial a} \frac{1 - a^2}{r^3} d\omega,$$

risulta $\lim I(a \rightarrow 1) = 0$. Ora, effettivamente, se si pone

$$f^*(P; \sqrt{1 - \zeta^2} \cos \theta, \sqrt{1 - \zeta^2} \sin \theta, \zeta) = F(P; \theta, \zeta),$$

si ha

$$\begin{aligned} I &= (1 - a^2) \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^1 F(P; \theta, \zeta) \frac{\partial}{\partial a} \frac{1 - a^2}{(1 + a^2 - 2a\zeta)^{3/2}} d\zeta = \\ &= \frac{1 - a^2}{a} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^1 F(P; \theta, \zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{a(a^2 + 3)\zeta - 3a^2 - 1}{(1 + a^2 - 2a\zeta)^{3/2}} d\zeta = \\ &= \frac{1 - a^2}{a} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^1 [F(P; \theta, \zeta) - f(P)] \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{a(a^2 + 3)\zeta - 3a^2 - 1}{(1 + a^2 - 2a\zeta)^{3/2}} d\zeta, \end{aligned}$$

e pertanto, se, scelto arbitrariamente il numero positivo ε , si determina σ in modo che riesca

$$|F(P; \theta, \zeta) - F(P; \theta, 1)| = |F(P; \theta, \zeta) - f(P)| < \varepsilon, \quad \text{per } 1 - \sigma \leq \zeta < 1,$$

si avrà

$$(80) \quad |I| < 2\pi \frac{1 - a^2}{a} \varepsilon \int_{-1}^1 \left| \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{a(a^2 + 3)\zeta - 3a^2 - 1}{(1 + a^2 - 2a\zeta)^{3/2}} \right| d\zeta + \frac{10H}{a^{5/2}} (1 - a),$$

ove $H = 4\pi |f(P)| + \iint_{\omega(O)} |f(Q)| d\omega$. Ma

$$\frac{1 - a^2}{a} \int_{-1}^1 \left| \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{a(a^2 + 3)\zeta - 3a^2 - 1}{(1 + a^2 - 2a\zeta)^{3/2}} \right| d\zeta = \frac{2}{a} \left[\left(1 + \frac{a^2}{3}\right)^{3/2} - 1 + a^2 \right] < 5,$$

e risulterà pertanto $|I| < (10\pi + 1)\varepsilon$, non appena a sia tanto prossimo ad uno da aversi $10H\sigma^{-5/2}(1 - a) < \varepsilon$.

Ovviamente, se in un dominio D sulla $\omega(O)$ la f è continua e la g è limitata, la dimostrata relazione di limite risulterà uniforme in ogni dominio interno a D . Assai meno semplice è la dimostrazione del teorema seguente che dà condizioni sufficienti d'esistenza della soluzione, del considerato problema di determinazione per una funzione bi-iperarmonica nella sfera T .

XX'. *Se le assegnate funzioni $f(P)$ e $g(P)$ e le derivate parziali del prim'ordine della $f(P)$, sono continue in un dominio T' nel cui interno giace la superficie sferica $\omega(O)$, per la funzione $u(Q, P)$ data dalla (78)*

sussistono, per ogni punto P di $\omega(O)$, entrambe le relazioni di limite (75), ed uniformemente al variare di P .

In base all'espressione di $u_\alpha(\alpha R, P)$ fornita dal secondo membro della (79) e con riferimento alla teoria dell'integrale di POISSON e a quanto abbiamo or ora stabilito tutto si riduce a dimostrare che, posto, per ogni punto P di $\omega(O)$,

$$J = (1 - \alpha^2) \iint_{\omega(O)} f(Q) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1 - \alpha^2}{r^3} \right) d\omega,$$

risulta $\lim J(\alpha \rightarrow 1) = 0$, uniformemente al variare di P . Si ha:

$$\begin{aligned} J &= (1 - \alpha^2) \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^1 F(P; \theta, \zeta) \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\alpha(\alpha^2 + 3)\zeta - 3\alpha^2 - 1}{\alpha(1 + \alpha^2 - 2\alpha\zeta)^{3/2}} d\zeta = \\ &= \frac{1 - \alpha^2}{\alpha^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^1 F(P; \theta, \zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{(9\alpha^2 - \alpha^4)\zeta^2 - (\alpha^5 + 10\alpha^3 + 5\alpha)\zeta + 6\alpha^4 + \alpha^2 + 1}{(1 + \alpha^2 - 2\alpha\zeta)^{5/2}} d\zeta = \\ &= 2\pi \frac{1 - \alpha^2}{\alpha^2} [f(P) - f(P')] - J', \end{aligned}$$

ove P' è il punto diametralmente opposto di P sulla $\omega(O)$ e

$$J' = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^1 F_\zeta(P; \theta, \zeta) v(\zeta) d\zeta,$$

avendo posto

$$v(\zeta) = \frac{1 - \alpha^2}{\alpha^2} \frac{(9\alpha^2 - \alpha^4)\zeta^2 - (\alpha^5 + 10\alpha^3 + 5\alpha)\zeta + 6\alpha^4 + \alpha^2 + 1}{(1 + \alpha^2 - 2\alpha\zeta)^{5/2}},$$

e pertanto tutto si riduce a dimostrare che $\lim J'(\alpha \rightarrow 1) = 0$, uniformemente al variare di P su ω . Dette $F_1(P; \theta, \zeta)$, $F_2(P; \theta, \zeta)$, $F_3(P; \theta, \zeta)$ rispettivamente le derivate parziali f_ξ^* , f_η^* , f_ζ^* , prese per $\xi = (1 - \zeta^2)^{1/2} \cos \theta$, $\eta = (1 - \zeta^2)^{1/2} \sin \theta$, si ha:

$$F_\zeta(P; \theta, \zeta) = -[F_1(P; \theta, \zeta) \cos \theta + F_2(P; \theta, \zeta) \sin \theta] \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} + F_3(P; \theta, \zeta),$$

laddove, uniformemente al variare di P su ω ,

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^1 F_3(P; \theta, 1) v(\zeta) d\zeta &= \lim_{\alpha \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^1 f_\zeta^*(P) v(\zeta) d\zeta = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 1} \left(2\pi f_\zeta^*(P) \int_{-1}^1 v(\zeta) d\zeta \right) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \left[4\pi f_\zeta^*(P) \frac{(1 - \alpha^2)^2}{\alpha^2} \right] = 0, \\ \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^1 [F_1(P; \theta, 1) \cos \theta + F_2(P; \theta, 1) \sin \theta] \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} d\zeta &= \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^1 [f_\xi^*(P) \cos \theta + f_\eta^*(P) \sin \theta] \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} d\zeta = 0, \end{aligned}$$

e pertanto sarà dimostrato quanto abbiamo asserito per l'integrale J' se riusciremo a stabilire che, posto

$$J'' = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^1 [(F_1(P; \theta, 1) - F_1(P; \theta, \zeta))\zeta \cos \theta + (F_2(P; \theta, 1) - F_2(P; \theta, \zeta))\zeta \sin \theta - (F_3(P; \theta, 1) - F_3(P; \theta, \zeta))\sqrt{1-\zeta^2}] \frac{v(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}} d\zeta,$$

si ha $\lim J''$ (per $\alpha \rightarrow 1$) = 0, uniformemente al variare di P su ω . Per la supposta continuità delle derivate F_1, F_2, F_3 , comunque si prescriva un numero positivo ε , è possibile determinarne un altro σ , indipendente da P , in maniera che si abbia

$$\sum_{k=1}^3 |F_k(P; \theta, 1) - F_k(P; \theta, \zeta)| < \varepsilon, \quad \text{per } 1 - \sigma \leq \zeta \leq 1,$$

onde segue

$$(81) \quad |J''| < 2\pi\varepsilon \int_0^1 \frac{|v(\zeta)|}{\sqrt{1-\zeta^2}} d\zeta + 2^8 \cdot 3^2 \cdot \pi^2 L \frac{1-\alpha}{\alpha^2} \frac{1}{\sigma^{5/2}},$$

L designando il massimo modulo su ω , delle derivate parziali f_x, f_y, f_z della f . Si ha, d'altra parte,

$$(82) \quad \int_0^1 \frac{|v(\zeta)|}{\sqrt{1-\zeta^2}} d\zeta < \int_0^1 \frac{|v(\zeta)|}{\sqrt{1-\zeta}} d\zeta,$$

e porremo

$$t(\zeta) = \left(\frac{1-\zeta}{1+\alpha^2-2\alpha\zeta} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$V(\zeta) = \int_1^{\zeta} \frac{v(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau}} = \frac{(1-\alpha^2)(9-\alpha^2)}{4\sqrt{2\alpha\alpha^2}} \log \frac{1-\sqrt{2\alpha t(\zeta)}}{1+\sqrt{2\alpha t(\zeta)}} +$$

$$+ \frac{(1-\alpha)(1+\alpha)^2(5-\alpha)}{2\alpha^2} t(\zeta) + \frac{(1+\alpha)^4}{\alpha} t^3(\zeta).$$

Esiste un certo valore α' positivo e minore di uno tale che, per $\alpha > \alpha'$, la $v(\zeta)$ ha due radici positive ζ_1 e ζ_2 ($\zeta_1 < \zeta_2$) nell'interno dell'intervallo $(0, 1)$, laddove $v(\zeta)$ riesce negativa entro l'intervallo (ζ_1, ζ_2) e positiva fuori. Si ha pertanto:

$$\int_0^1 \frac{|v(\zeta)|}{\sqrt{1-\zeta}} d\zeta = \int_0^{\zeta_1} \frac{v(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta}} d\zeta - \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{v(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta}} d\zeta + \int_{\zeta_2}^1 \frac{v(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta}} d\zeta = -V(0) + 2V(\zeta_1) - 2V(\zeta_2),$$

onde segue, mediante un calcolo piuttosto lungo ma che non offre difficoltà,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \int_0^1 \frac{|v(\zeta)|}{\sqrt{1-\zeta}} d\zeta = 4\sqrt{2}.$$

Possiamo dunque asserire l'esistenza di un certo valore α'' maggiore di α' e

minore di uno, tale che per $\alpha > \alpha''$ entrambi gli integrali (82) risultino, per esempio, inferiori a 6, onde si deduce dalla (81), per $\alpha > \alpha''$,

$$|J''| < 12\pi\epsilon + 2^8 \cdot 3^2 \cdot \pi^2 L \frac{1-\alpha}{\alpha^2} \frac{1}{\sigma^{5/2}},$$

e quindi $|J''| < (12\pi + 1)\epsilon$, non appena si sia preso α tanto prossimo ad uno da risultare $\alpha > \alpha''$, $2^8 \cdot 3^2 \cdot \pi^2 L(1-\alpha)/\alpha^2 \sigma^{5/2} < \epsilon$ (23).

Per quanto riguarda le proprietà integrali che una funzione iperarmonica in tre variabili verifica sulla frontiera di un generale dominio regolare T dello spazio, rileveremo, per esempio, analogamente a quanto abbiamo già fatto nel piano, che per una funzione u bi-iperarmonica nell'interno di T , continua, con le sue derivate normali $du/d\lambda$, $d^2u/d\lambda^2$, $d^3u/d\lambda^3$, sulla frontiera S di T , composta di superficie regolari semplici e chiuse, tali che per ogni punto di ciascuna di esse esista un intorno, sulla superficie, i cui punti riescano funzioni di opportune coordinate curvilinee, finite e continue con tutte le derivate parziali fino a quelle incluse del 4° ordine, sussiste l'eguaglianza:

$$\int_S \left(\frac{d^3u}{d\lambda^3} + H \frac{d^2u}{d\lambda^2} + 2K \frac{du}{d\lambda} - u \Delta_S H \right) d\sigma = 0,$$

ove K , H e $d\sigma$ sono, rispettivamente, la curvatura totale, la curvatura media e l'elemento d'area delle superficie di frontiera e $\Delta_S H$ è il parametro differenziale secondo di BELTRAMI della H su tali superficie.

23. - Un teorema di convergenza. — I risultati e le dimostrazioni del n.º 15 sussistono anche per le funzioni iperarmoniche in tre variabili. Enunceremo, per le funzioni bi-iperarmoniche, il teorema di maggiorazione:

(2') Considerando il secondo membro delle (78) e (79) del testo ed il contenuto della dimostrazione del teorema XVIII', subito si vede che sussiste il seguente:

Condizione necessaria e sufficiente affinché in un punto P di continuità per f e per g , si abbia $\lim u_\rho(\rho, P)(\rho \rightarrow R) = g(P)$ è che risulti $\lim J(\alpha \rightarrow 1) = 0$.

Ora il contenuto del teorema XX' fornisce facilmente che tale condizione è verificata in ogni punto di differenziabilità per la f . Ed invero, in questa ipotesi, si può determinare un numero positivo δ tale che, per $1 - \zeta \leq \delta$, valga la decomposizione

$$F(P; \theta, \zeta) = f(P) + a_1 \sqrt{1 - \zeta^2} \cos \theta + a_2 \sqrt{1 - \zeta^2} \sin \theta + q \sqrt{1 - \zeta},$$

ove a_1 e a_2 sono costanti e $\lim q(\zeta \rightarrow 1) = 0$, uniformemente al variare di θ . Posto

$$J_\delta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_\delta^1 q \sqrt{1 - \zeta} \frac{\partial v}{\partial \zeta} d\zeta,$$

si ha $\lim (J - J_\delta)(\alpha \rightarrow 1) = 0$, e, uniformemente rispetto ad α , $\lim J_\delta(\delta \rightarrow 1) = 0$. Pertanto:

Le relazioni di limite (75) sussistono entrambe in ogni punto P di continuità per g e di differenziabilità per f .

XXII'. Se la funzione $u(x, y, z)$ è bi-iperarmonica nell'interno della superficie sferica Σ di centro in O e di raggio R , ed in tutta la sfera T , limitata da Σ , è continua con la sua derivata $du/d\lambda$, rispetto alla normale λ alla Σ , per il valore in O della derivata parziale $\partial^s u / \partial x^h \partial y^k \partial z^l$, di un ordine qualsivoglia $s \geq 2$ sussiste la seguente formola di maggiorazione:

$$\left| \left[\frac{\partial^s u}{\partial x^h \partial y^k \partial z^l} \right]_O \right| \leq \frac{(s+1)^2 (2s)!}{R^s s!} \left(s \max_{\Sigma} |u| + R \max_{\Sigma} \left| \frac{du}{d\lambda} \right| \right).$$

24. - **Problemi regolari di determinazione all'esterno di una sfera.** — Posto, come nel piano, per una funzione iperarmonica in tre variabili, il concetto di problema di determinazione, *regolare* all'esterno di una sfera, le proprietà integrali di cui gode una funzione n -iperarmonica all'infinito, conducono immediatamente all'analogo del teorema XXIV del n.º 16, ove però alla condizione all'infinito si sostituisca la seguente: *Il rapporto $u(\varrho, P)/\varrho^{n-2}$ deve conservarsi limitato.* Si trova, in particolare, che una funzione $u(\varrho, P)$, bi-iperarmonica all'esterno di una sfera T di centro in O e di raggio R , *limitata* e, nel dominio T' luogo dei punti non interni a T , continua con la sua derivata u_ϱ e tale che essa e questa derivata assumano sulla frontiera di T rispettivamente i valori delle funzioni continue $f(P)$ e $g(P)$, è data, se esiste, dalle formole:

$$\begin{aligned} (83) \quad u\left(\frac{R}{a}, P\right) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\omega(O)} [f(Q) + (1-a)Rg(Q)] d\omega(Q) + \\ &+ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2s+1}{4\pi} \iint_{\omega(O)} \left(-f(Q) \begin{vmatrix} \alpha^{s+1} & \alpha^{s-1} \\ s+1 & s-1 \end{vmatrix} + Rg(Q) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha^{s+1} & \alpha^{s-1} \end{vmatrix} \right) X_s[\cos \gamma(P, Q)] d\omega(Q) = \\ &= \frac{(1-a^2)^2}{8\pi a} \iint_{\omega(O)} \left(f(Q)[1-2a^2+a \cos \gamma(P, Q)] + Rl^2 g(Q) \right) \frac{d\omega(Q)}{l^3} - \\ &- \frac{(1-a)^2}{8\pi a} \iint_{\omega(O)} (f(Q) + Rg(Q)) d\omega(Q), \end{aligned}$$

ove $a = R/\varrho$, $l^2 = 1 + a^2 - 2a \cos \gamma$. A tale formola si applica il procedimento del n.º 22 per dimostrare che, effettivamente, se $f(P)$ e $g(P)$ sono definite in un dominio che contenga nel suo interno la superficie $\omega(O)$ e vi sono continue, la prima di esse essendo inoltre dotata delle derivate parziali del prim'ordine del pari continue, la $u(\varrho, P)$ e le $u_\varrho(\varrho, P)$ assumono sulla frontiera di T rispettivamente i valori $f(P)$ e $g(P)$. Dallo sviluppo in serie al secondo membro della (83) si trae subito, inoltre, che:

$$\lim_{\varrho \rightarrow \infty} u(\varrho, P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\omega(O)} (f(Q) + Rg(Q)) \left(1 + \frac{3}{2} \cos \gamma(P, Q) \right) d\omega(Q),$$

uniformemente al variare di P , e si ha pertanto: Comunque si prescriba il numero positivo ε , riesce, definitivamente, al tendere di ϱ all'infinito,

$$|u(\varrho, P)| < \frac{5}{8\pi} \iint_{\omega(O)} |f(Q) + Rg(Q)| d\omega(O) + \varepsilon;$$

la $u(\varrho, P)$ sarà convergente all'infinito allora e allora soltanto che la combinazione $f(Q) + Rg(Q)$ sia ortogonale, sulla sfera, alle funzioni sferiche del prim'ordine, ed in tal caso essa converge verso il valore

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{\omega(O)} (f(Q) + Rg(Q)) d\omega.$$

Ma vale, in generale, il teorema:

XIV'. *Se u è armonica o iperarmonica all'infinito e vi converge, assunta una qualsivoglia superficie sferica Σ , che contenga nel suo interno la frontiera del campo di regolarità A della u , la media dei valori di $u + R \frac{du}{d\lambda}$ su Σ (λ designando la normale esterna alla Σ) è costante e fornisce il valore all'infinito verso cui converge la u .*

Ed inverò, detti M il centro di Σ , $\delta(M)$ la massima distanza di M dalla frontiera di A , ed assunto un sistema di coordinate polari ϱ e $P(\theta, \varphi)$, di polo in M , si ha, per ogni $\varrho > \delta(M)$,

$$\begin{aligned} \iint_{\omega(M)} u(\varrho, P) d\omega(P) &= 4\pi u(\infty) + \frac{b}{\varrho}, \\ \iint \varrho \frac{\partial u(\varrho, P)}{\partial \varrho} d\omega(P) &= -\frac{b}{\varrho}, \end{aligned}$$

donde, sommando membro a membro, l'asserto.

25. - Sul problema classico di determinazione di una funzione iperarmonica in uno strato sferico. — Tale problema è l'analogo di quello già considerato nel piano (al n.º 17) per la corona circolare. Nel caso delle funzioni bi-iperarmoniche nell'interno dello strato sferico $T(r \leq \varrho \leq R)$ di centro nel polo O delle coordinate polari ϱ e $P(\theta, \varphi)$, continue in tutto T con la derivata u_ϱ , astrette a verificare le quattro equazioni:

$$\begin{aligned} u(r, P) &= f(P), & u_\varrho(r, P) &= g(P), \\ u(R, P) &= F(P), & u_\varrho(R, P) &= G(P), \end{aligned}$$

posto $q = r/R$, si trova, per il determinante $D^{(s)}$ della formola risolutiva (30),

$$D^{(s)} = \frac{1}{q^{2s+1}} [4(1 - q^{2s+1})^2 - (2s + 1)^2 q^{2s-1} (1 - q^2)^2],$$

ed è $D^{(0)} < 0$ e $D^{(s)} > 0$, per $s \geq 1$, onde segue che l'unica possibile soluzione del problema è data dalla formola:

$$(84) \quad u(\varrho, P) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{2s+1}{4\pi} \iint_{\omega(O)} \left(f(Q) \frac{\delta_1^{(s)}(\varrho)}{\delta^{(s)}} + rg(Q) \frac{\delta_2^{(s)}(\varrho)}{\delta^{(s)}} + \right. \\ \left. + F(Q) \frac{\delta_3^{(s)}(\varrho)}{\delta^{(s)}} + RG(Q) \frac{\delta_4^{(s)}(\varrho)}{\delta^{(s)}} \right) X_s[\cos \gamma(P, Q)] d\omega(Q),$$

ove, posto $\alpha = \varrho/R$, $\beta = r/\varrho$, si ha:

$$\delta^{(s)} = 4(1 - q^{2s+1})^2 - (2s+1)^2 q^{2s-1} (1 - q^2)^2,$$

$$\delta_1^{(s)}(\varrho) = \begin{vmatrix} q^{s+1}\alpha^s & q^{s+1}\alpha^{s+2} & \beta^{s+1} & q^2\beta^{s-1} \\ sq^{2s-1} & (s+2)q^{2s+1} & -(s+1)q^{-2} & 1-s \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2s & 2(s+1) & -1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\delta_2^{(s)}(\varrho) = \begin{vmatrix} q^{2s-1} & q^{2s+1} & q^{-2} & 1 \\ q^{s+1}\alpha^s & q^{s+1}\alpha^{s+2} & \beta^{s+1} & q^2\beta^{s-1} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2s & 2(s+1) & -1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\delta_3^{(s)}(\varrho) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2s & 2(s+1) & -1 & 1 \\ \alpha^s & q^{-2}\alpha^{s+2} & q^s\beta^{s+1} & q^s\beta^{s-1} \\ sq^2 & s+2 & -(s+1)q^{2s+3} & (1-s)q^{2s+1} \end{vmatrix},$$

$$\delta_4^{(s)}(\varrho) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2s & 2(s+1) & -1 & 1 \\ q^2 & 1 & q^{2s+3} & q^{2s+1} \\ \alpha^s & q^{-2}\alpha^{s+2} & q^s\beta^{s+1} & q^s\beta^{s-1} \end{vmatrix}.$$

La formola (74) ha significato, nell'interno di T , comunque si assumano le funzioni f, g, F, G , sommabili sulla sfera $\omega(O)$ e fornisce sempre una funzione bi-iperarmonica per la quale sussiste, con dimostrazione simile, il teorema perfettamente analogo al teorema XXV del n.º 17, onde segue che condizione sufficiente affinchè la (84) dia effettivamente la soluzione del considerato problema è che, in un dominio dello spazio al quale sia interna la superficie $\omega(O)$, le funzioni assegnate siano continue e le f e F vi siano dotate di derivate parziali del primo ordine del pari continue.

26. - Sul comportamento di una funzione iperarmonica all'infinito o nell'intorno di un punto singolare isolato. — Con dimostrazione simile si stabilisce il teorema analogo al teorema XXVI del n.º 18:

XXVI. *Sia M , polo delle coordinate polari ϱ e $P(\theta, \varphi)$, un punto singolare isolato per la funzione iperarmonica $u(\varrho, P)$, della quale diremo S la frontiera del campo di regolarità, e sia $\delta(M) (\leq +\infty)$ la distanza di M da $S-M$. Se $u(\varrho, P)$ diverge per $\varrho \rightarrow 0$, essa diverge del prim'ordine, e*

sussiste anzi, nell'interno della sfera $T(M)$, di centro in M e di raggio $\delta(M)$, la decomposizione:

$$u = \frac{a}{\varrho} + v,$$

con a costante e v funzione limitata in ogni dominio limitato interno a $T(M)$. Se u si conserva limitata in un intorno di $T(M)$ ed è n -iperarmonica, sussiste, nell'interno di $T(M)$, la decomposizione:

$$u = \sum_{k=0}^{2n-3} \varrho^k \sum_{h=\left[\frac{k}{2}\right]+1}^{n-1} Y_{2h-k-1}^{(k)}(P) + v,$$

v essendo funzione n -iperarmonica e regolare, nell'interno di $T(M)$, $Y_{2h-k-1}^{(k)}(P)$ funzione sferica d'ordine $2h-k-1$. Non può avvenire che la u , in un intorno di $T(M)$, si conservi limitata con tutte le sue derivate parziali fino a quelle incluse d'ordine $2n-2$.

Per il comportamento all'infinito delle funzioni iperarmoniche intere in tre variabili sussistono, senza modificazione alcuna, il teorema XXVII, dato al n.º 18 per le funzioni in due variabili, e la dimostrazione di esso.

N O T A

(aggiunta dopo licenziate le bozze per la stampa).

L'ultimo fascicolo, pervenuto a Roma (nel maggio 1936), degli « Annales de l'École Normale Supérieure » [t. 52, 1935, fasc. n.º 3] contiene, nelle pp. 183-220, una memoria — dal titolo: *Recherches sur les fonctions polyharmoniques* — dell'esimio matematico romeno MIRON NICOLESCO, nella quale l'estensione alle funzioni iperarmoniche delle proprietà classiche delle funzioni armoniche, conseguita con altri mezzi, è, in parecchie direzioni, più completa di quella da noi qui raggiunta. Tale memoria richiama un'estensione del teorema della media di GAUSS, ottenuta dal NICOLESCO fin dal 1931, ch'egli dimostra essere caratteristica e che gli ha consentito di pervenire al teorema sulle successioni di funzioni n -iperarmoniche senza alcuna ipotesi sulle successioni delle derivate parziali dei primi $n-1$ ordini.

La geniale opera del NICOLESCO su questo argomento è da considerarsi fondamentale per le ulteriori ricerche.

I N D I C E

Introduzione Pag. 213

PARTE PRIMA: *Generalità ed ipotesi fondamentali.*§ 1. - *Procedimenti d'integrazione in un iperstrato.*

1. Posizione del problema generale Pag. 219
2. Ipotesi fondamentale e proprietà integrali delle soluzioni » 221
3. Condizioni necessarie d'esistenza e calcolo delle soluzioni. Funzione di GREEN » 222
4. Ricerca e calcolo degli autovalori » 225
5. Condizioni sufficienti d'esistenza » 226
6. Un teorema concernente l'ipotesi fondamentale » 229

§ 2. - *Esempi di problemi per i quali si applica il procedimento generale d'integrazione.*

7. Problemi in due variabili indipendenti Pag. 230
8. Proprietà integrali per le funzioni armoniche e iperarmoniche in due variabili » 234
9. Problemi in tre variabili indipendenti » 236
10. Proprietà integrali per le funzioni armoniche e iperarmoniche in tre variabili » 239

PARTE SECONDA: *Teoria e problemi delle funzioni iperarmoniche.*§ 3. - *Sulle funzioni iperarmoniche in due variabili indipendenti.*

11. Analiticità delle funzioni iperarmoniche Pag. 239
12. Sulla rappresentazione delle funzioni iperarmoniche a mezzo delle armoniche » 244
13. Decomposizione al modo di POINCARÉ delle funzioni iperarmoniche . . . » 251
14. Sui problemi di determinazione delle funzioni iperarmoniche nell'interno di un cerchio e di un generale dominio regolare » 255
15. Un teorema concernente la convergenza delle successioni di funzioni iperarmoniche » 264
16. Sui problemi regolari di determinazione delle funzioni iperarmoniche all'esterno di un cerchio o di un dominio regolare » 265
17. Sul problema classico di determinazione di una funzione iperarmonica in una corona circolare » 268
18. Sul comportamento di una funzione iperarmonica all'infinito o nell'intorno di un punto singolare isolato » 271

§ 4. - *Sulle funzioni iperarmoniche in tre variabili indipendenti.*

19. Analiticità » 274
20. Sulla rappresentazione delle funzioni iperarmoniche a mezzo delle armoniche » 276
21. Decomposizione al modo di POINCARÉ » 277
22. Sui problemi di determinazione delle funzioni iperarmoniche nell'interno di una sfera o di un generale dominio regolare » 277
23. Un teorema di convergenza » 283
24. Problemi regolari di determinazione all'esterno di una sfera » 284
25. Sul problema classico di determinazione di una funzione iperarmonica in uno strato sferico » 285
26. Sul comportamento di una funzione iperarmonica all'infinito o nell'intorno di un punto singolare isolato » 286