ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GIOVANNI SANSONE

Sulla convergenza delle serie di Legendre

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 4, nº 4 (1935), p. 307-326
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1935_2_4_4_307_0>

SULLA CONVERGENZA DELLE SERIE DI LEGENDRE

di GIOVANNI SANSONE (Firenze).

Le serie trigonometriche $\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n \operatorname{sen} nx)$ di funzioni sommabili i cui coefficienti soddisfano una condizione unilaterale di LANDAU

$$a_n>-k/n, \qquad b_n>-k/n, \qquad k>0, \qquad n=1,2,....,$$

sono state investigate da FEJÉR, HARDY e LITTLEWOOD, PALEY, SZÁSZ; noi vogliamo qui studiare le serie di LEGENDRE

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n(x), \qquad a_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx$$

di funzioni $f(x)$ sommabili in $(-1,1)$ i cui coefficienti a_n soddisfano la condizione

$$a_n>-k/n \qquad (n=1,2,....)$$

oppure l'altra

$$|a_n|<k/\sqrt{n} \qquad (n=1,2,....)$$

nei casi iu cui $f(x)$ sia limitata [§ 1], continua [§ 2], sommabile [§ 3].

§ 1.

1. - Lemma 1. - *Sia r intero positivo e la serie*

$$S\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n$$

sia limitata $(C, r>0)$, cioè

$$\left|s_n^{(r)}\Big/\binom{n+r}{r}\right|<L \qquad (n=0,1,2,....) \tag{1.1}$$

dove

$$s_n=s_n^{(0)}=a_0+a_1+....+a_n$$
$$s_n^{(r)}=s_0^{(r-1)}+s_1^{(r-1)}+....+s_n^{(r-1)};$$

se è anche

(1.2) $$a_n > -k/n, \qquad n=1, 2,...., \qquad k>0,$$

allora la serie S è limitata $(C, 0)$, *esiste cioè una costante A tale che*

$$|s_n| < A \qquad\qquad (n=0, 1, 2,....).$$

Questo lemma è un'immediata conseguenza del seguente teorema di SHIN-ICHI IZUMI (1):

Se $|s_n^{(r)}| < \Phi(n)$, $a_n > -\psi(n)$ dove $\Phi(n)$ e $\psi(n)$ sono funzioni positive di n tali che

$$[2 \cdot s!]^{1/s}[\Phi(n)/\psi(n)]^{1/s} \leqslant n, \qquad s=r+1, \qquad n \geqslant n_0$$

e se ancora

(1.3) $$\Phi(n+\gamma) \leqslant c\Phi(n), \qquad \psi(n+\gamma) \leqslant c\psi(n), \qquad c \geqslant 1$$

per tutti gli interi γ compresi tra $-(m-n)$, $(m-n)$ tali che

$$0 \leqslant m-n \leqslant [2 \cdot s!]^{1/s}[\Phi(n)/\psi(n)]^{1/s},$$

allora abbiamo

(1.4) $$|s_n| < L_1 \Phi(n)^{1/s}\psi(n)^{1/s'}$$

dove L_1 è indipendente da n e $1/s + 1/s' = 1$.

Nel nostro caso dalle (1.1), (1.2) si ha

$$|s_n^{(r)}| < \Phi(n), \qquad a_n > -\psi(n)$$

con

$$\Phi(n) = Mn^r, \qquad \psi(n) = kn^{-1}, \qquad M = 2^r L.$$

Aumentiamo se occorre k in guisa che

$$B = [2 \cdot s!]^{1/s}[M/k]^{1/s} < 1/2, \qquad s=r+1,$$

abbiamo allora

$$[2 \cdot s!]^{1/s}[\Phi(n)/\psi(n)]^{1/s} = Bn < n/2$$

e se m è il massimo intero tale che

$$0 \leqslant m-n \leqslant [2 \cdot s!]^{1/s}[\Phi(n)/\psi(n)]^{1/s} < n/2$$

per tutti gli interi γ tali che $|\gamma| \leqslant m-n$ si ha $|\gamma/n| \leqslant 1/2$ e perciò

$$\Phi(n+\gamma) = Mn^r(1+\gamma/n)^r \leqslant \Phi(n)(3/2)^r$$
$$\psi(n+\gamma) = k/n(1+\gamma/n) \leqslant 2k/n = 2\psi(n)$$

---

(1) SHIN-ICHI IZUMI: *On the Condition for the Convergency of the series Summable* (C, r), The Tôhoku Math. Journ., 33 (1930), pp. 117-126, teor. I. Il teorema, come avverte l'A., è una estensione di un precedente teorema di L. J. MORDELL contenuto nella nota: *A Summability Convergence Theorem*, The Journ. of the London Math. Soc., 3 (1928), pp. 86-89.

e se scegliamo c maggiore di $(3/2)^r$ e di 2 valgono le (1.3) e perciò per la (1.4)

$$|s_n| < L_1 M^{1/s} n^{r/s} k^{1/s'} n^{-1/s'} = L_1 M^{1/s} k^{1/s'} = A$$

con A indipendente da n.

2. - Nel caso $r=2$ seguendo i procedimenti dimostrativi di MORDELL e SHIN-ICHI IZUMI preciseremo il valore della costante A ([2]). Sussiste il seguente

Lemma 2. - *Se la serie*

$$S \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{1.5}$$

è limitata $(C, 2)$, *cioè*

$$\left| s_n^{(2)} \Big/ \binom{n+2}{2} \right| < L \qquad (n=0, 1, 2, ...) \tag{1.6}$$

e se è anche

$$a_n > -k/n, \qquad n=1, 2, ..., \qquad k>0 \tag{1.7}$$

si ha allora

$$k\left[\lg 2 + \frac{2081}{2680}\right] + \frac{55}{4} L > s_n, \tag{1.8}$$

$$s_n > -k\left[\lg \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{299}{990}\right] - 9L. \tag{1.9}$$

a). Dalla (1.6) per $n=0$ si ha $|s_0| < L$.

Dalla (1.6) per $n=1$ si ha $3a_0 + a_1 < 3L$, ma è $-2a_0 < 2L$ e sommando $s_1 < 5L$. Ancora dalla (1.6) per $n=2$ si ha $6a_0 + 3a_1 + a_2 < 6L$, ma è $-6a_0 - 2a_1 < 6L$, $a_0 < L$ e sommando $s_2 < 13L$. Segue che la (1.8) è vera per $n=0, 1, 2$; noi la dimostreremo in *b*) per $n \geqslant 3$.

Abbiamo pure

$$(n+1)s_n = s_n^{(2)} - s_{n-1}^{(2)} + (a_1 + 2a_2 + ... + na_n)$$

quindi per la (1.6) e (1.7)

$$(n+1)s_n > -L\left[\binom{n+2}{2} + \binom{n+1}{2}\right] - nk = -(n+1)^2 L - nk$$

$$s_n > -(n+1)L - \frac{n}{n+1} k$$

e perciò la (1.9) è vera per $n=0, 1, ..., 8$; noi la dimostreremo in *c*) per $n > 8$.

b). Vogliamo dimostrare la (1.8). Posto

$$v_l = s_{n+l}^{(2)} - s_n^{(2)} - l s_n^{(1)} - \binom{l+1}{2} s_n, \qquad l=0, 1, 2, ...; \qquad v_{-2}=0, \qquad v_{-1}=0 \tag{1.10}$$

([2]) La determinazione della costante A per $r=1$ è stata ottenuta da O. SZÁSZ: *Zur Konvergenz theorie der Fourierschen Reihen*, Acta Math., 61 (1933) (pp. 185-201), pp. 186-187.

si ha

$$\Delta v_l = v_l - v_{l-1} = s_{n+l}^{(1)} - s_n^{(1)} - l s_n$$
$$\Delta^2 v_l = \Delta v_l - \Delta v_{l-1} = s_{n+l} - s_n$$
$$\Delta^3 v_l = a_{n+l} > -k/(n+l) \geqslant -k/n, \qquad l \geqslant 0,$$

abbiamo quindi

$$\Delta^2 v_l = \Delta^2 v_0 + (\Delta^2 v_1 - \Delta^2 v_0) + ... + (\Delta^2 v_l - \Delta^2 v_{l-1}) = \Delta^3 v_1 + ... + \Delta^3 v_l > -kl/n$$
$$\Delta v_l = \Delta^2 v_1 + \Delta^2 v_2 + ... + \Delta^2 v_l > -\frac{k}{n}\binom{l+1}{2}$$
$$v_l > -\frac{k}{n}\binom{l+2}{3}$$

e dalla (1.10), cambiando gli indici n ed l in n_1 e l_1, si ottiene

$$(1.11) \qquad s_{n_1} + \frac{2}{l_1+1} s_{n_1}^{(1)} < \frac{k}{n_1}\frac{l_1+2}{3} + \frac{2}{l_1(l_1+1)}[s_{n_1+l_1}^{(2)} - s_{n_1}^{(2)}], \qquad (l_1 = 1, 2, ...).$$

Così pure posto

$$(1.12) \qquad w_l = s_{n+l}^{(2)} - s_n^{(2)} - l s_{n+l}^{(1)} + \binom{l}{2} s_n, \qquad l = 1, 2, ..., \qquad [w_1 = 0]$$

si ha

$$\Delta w_l = w_l - w_{l-1} = -[a_{n+1} + ... + a_{n+l}](l-1) < k(l-1)\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+l}\right]$$
$$(l = 1, 2, ...)$$

quindi per $l \geqslant 2$

$$w_l = \Delta w_2 + ... + \Delta w_l < k\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right] + 2k\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right] + ... +$$
$$+ (l-1)k\left[\frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{n+l}\right]$$
$$w_l < k\binom{l}{2}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+l}\right] \qquad [\text{per } l = 1 \text{ vale il segno } =]$$

e dalla (1.12) si ottiene allora

$$(1.13) \qquad s_n - \frac{2}{l-1} s_{n+l}^{(1)} < k\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+l}\right] - \frac{2}{l(l-1)}[s_{n+l}^{(2)} - s_n^{(2)}].$$

Facendo nella (1.11) $l_1 + 1 = l - 1$, $n_1 = n + l$ e sommando con la (1.13) si ha

$$s_{n+l} + s_n < \frac{k}{n+l}\frac{l}{3} + \frac{2}{(l-2)(l-1)}[s_{n+2l-2}^{(2)} - s_{n+l}^{(2)}] - \frac{2}{l(l-1)}[s_{n+l}^{(2)} - s_n^{(2)}] +$$
$$+ k\left[\frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{n+l}\right], \qquad l > 2$$

e perciò per $l = n \geqslant 3$, tenuto conto che

$$s_{2n} = s_n + (a_{n+1} + ... + a_{2n}) > s_n - k\left[\frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n}\right]$$

otteniamo

$$s_n < \frac{k}{12} + k\left[\frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n}\right] + B_n$$

con

$$B_n = \frac{1}{(n-2)(n-1)} s_{3n-2}^{(2)} - \frac{2}{n(n-2)} s_{2n}^{(2)} + \frac{1}{n(n-1)} s_n^{(2)}.$$

Ma si ha
$$\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n}<\lg 2n-\lg n+\frac{1}{2n}=\lg 2+\frac{1}{2n}$$

e per la (1.6), per $n\geqslant 8$,

$$|B_n|<\frac{L}{2n(n-1)(n-2)}[n\cdot 3n(3n-1)+2(n-1)(2n+2)(2n+1)+(n-2)(n+2)(n+1)]=$$
$$=L\left[9+4\,\frac{7+1/n}{n-2}\right]\leqslant L\left[9+4\,\frac{7+1/8}{6}\right],$$

abbiamo perciò

$$s_n<k\left[\lg 2+\frac{7}{48}\right]+\left[13+\frac{3}{4}\right]L. \tag{1.14}$$

Si ha pure $\qquad -a_3<k/3,\quad -a_4<k/4,\dots,\quad -a_7<k/7$

e siccome $\frac{7}{48}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{7}=\frac{2081}{1680}$, sommando con la (1.14) si ottiene per $n\geqslant 3$ la (1.8) che è così dimostrata.

c). Vogliamo ora dimostrare la (1.9).

Posto

$$w_l'=s_n^{(2)}-s_{n-l}^{(2)}-ls_{n-l}^{(1)}-\binom{l+1}{2}s_n,\qquad n>l\geqslant 1,\qquad n\geqslant 2,\qquad [w_1'=0] \tag{1.15}$$

abbiamo
$$\Delta w_l'=-l[a_{n-l+2}+\dots+a_n]<kl\left[\frac{1}{n-l+2}+\dots+\frac{1}{n}\right].$$

quindi per $l>1$

$$w_l'=w_1'+\Delta w_2'+\dots+\Delta w_l'<k\left[\frac{2}{n}+3\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)+\dots+l\left(\frac{1}{n-l+2}+\dots+\frac{1}{n}\right)\right]$$
$$w_l'<\left[\binom{l+1}{2}-1\right]k\left[\frac{1}{n-l+2}+\dots+\frac{1}{n}\right]$$

e dalla (1.15) abbiamo allora per $l>1$

$$s_n+\frac{2}{l+1}\,s_{n-l}^{(1)}>\frac{2}{l(l+1)}\,[s_n^{(2)}-s_{n-l}^{(2)}]-\left[1-\frac{2}{l(l+1)}\right]k\left[\frac{1}{n-l+2}+\dots+\frac{1}{n}\right]. \tag{1.16}$$

Analogamente da

$$v_l'=-s_n^{(2)}+s_{n-l}^{(2)}+ls_n^{(1)}-\binom{l}{2}s_n,\qquad n>l\geqslant 0\qquad [v_0'=v_1'=v_2'=0] \tag{1.17}$$

abbiamo per $l\geqslant 1$

$$\Delta v_l'=s_n^{(1)}-s_{n-l+1}^{(1)}-(l-1)s_n,$$
$$\Delta^2 v_l'=-(a_{n-l+3}+\dots+a_n)<k\left(\frac{1}{n-l+3}+\dots+\frac{1}{n}\right)\qquad [\Delta^2 v_2'=0]$$

perciò per $n > l \geqq 3$

$$\Delta v_l' = \Delta^2 v_3' + \ldots + \Delta^2 v_l' < k\left[\frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-l+3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\right] <$$
$$< k(l-2)\left[\frac{1}{n-l+3} + \ldots + \frac{1}{n}\right]$$
$$v_l' = \Delta v_3' + \ldots + \Delta v_l' < k\left[\frac{1}{n} + 2\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) + \ldots + (l-2)\left(\frac{1}{n-l+3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\right]$$
$$v_l' < k\binom{l-1}{2}\left[\frac{1}{n-l+3} + \ldots + \frac{1}{n}\right], \qquad l \geqq 3$$

e dalla (1.17) si ha allora, cambiando n ed l in n_1 e l_1,

$$s_{n_1} - \frac{2}{l_1-1} s_{n_1}^{(1)} > \frac{2}{l_1(l_1-1)}[s_{n_1-l_1}^{(2)} - s_{n_1}^{(2)}] - k\frac{l_1-2}{l_1}\left[\frac{1}{n_1-l_1+3} + \ldots + \frac{1}{n_1}\right], \qquad l_1 \geqq 3.$$

Posto in questa $l_1 = l+2$, $n_1 = n-l$ e sommando con la (1.16) abbiamo

$$(1.18) \quad s_n + s_{n-l} > \frac{2}{l(l+1)}[s_n^{(2)} - s_{n-l}^{(2)}] + \frac{2}{(l+2)(l+1)}[s_{n-2l-2}^{(2)} - s_{n-l}^{(2)}] -$$
$$-\left[1 - \frac{2}{l(l+1)}\right] k\left[\frac{1}{n-l+2} + \ldots + \frac{1}{n}\right] - k\frac{l}{l+2}\left[\frac{1}{n-2l+1} + \ldots + \frac{1}{n-l}\right]$$

ma

$$s_{n-l} = s_n - (a_{n-l+1} + \ldots + a_n) < s_n + k\left(\frac{1}{n-l+1} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$$

otteniamo quindi

$$(1.19) \qquad s_n > C_n - \frac{k}{2}\left[\frac{1}{n-2l+1} + \ldots + \frac{1}{n}\right] - \frac{k}{2}\left[\frac{1}{n-l+2} + \ldots + \frac{1}{n}\right]$$
$$C_n = \frac{1}{l(l+1)} s_n^{(2)} - \frac{2}{l(l+2)} s_{n-l}^{(2)} + \frac{1}{(l+1)(l+2)} s_{n-2l-2}^{(2)}.$$

Supposto $n \geqq 6$, n multiplo di 3, e facendo $l = n/3$ otteniamo

$$\frac{k}{2}\left[\frac{1}{n-2l+1} + \ldots + \frac{1}{n}\right] + \frac{k}{2}\left[\frac{1}{n-l+2} + \ldots + \frac{1}{n}\right] < k\left[\lg\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{n}\right],$$
$$|C_n| < \frac{L}{2n(n+3)(n+6)}[9(n+6)(n+2)(n+1) + 2(n+3)(2n+6)(2n+3) + n^2(n-3)]$$
$$< L\left[9 - \frac{12(n-3)}{n(n+6)}\right] \leqq 9L$$

e la (1.19) diventa quindi

$$s_n > -k\left[\lg\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{n}\right] - 9L, \qquad n \geqq 6, \quad n \text{ multiplo di } 3.$$

Si ha $a_{n+1} > -k/(n+1)$, $a_{n+2} > -k/(n+2)$ e per $n \geqq 9$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \leqq \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} = \frac{299}{990}$$

quindi per $n \geqq 9$, multiplo o no di 3, vale la (1.9).

Osservazione 1. - È $\lg 2 = 0.6931471....$, $\lg 3 = 1.0986122....$, perciò le (1.8), (1.9) diventano:

$$\boxed{-1.05405....\, k - 9L < s_n < 1.93183....\, k + 13.75L}. \tag{1.20}$$

Osservazione 2. - Quando nel lemma 2 in luogo della (1.7) si verifica la condizione

$$|a_n| < k/n \qquad (n = 1, 2, ...) \tag{1.7$_1$}$$

ragionando come in *a*) e *c*) si ricava (scrivendo le disuguaglianze nei due sensi),

$$|s_n| < k\left[\lg \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{299}{990}\right] + 9L \tag{1.20$_1$}$$

od anche

$$\boxed{|s_n| < 1.05405....\, k + 9L}. \tag{1.20$_2$}$$

3. - TEOREMA I$_1$. - *Sia $f(x)$ misurabile in $(-1, 1)$ e si abbia*

$$|f(x)| \leq L; \tag{1.21}$$

e posto

$$a_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\, dx, \qquad P_n(x) = \frac{1}{n!\, 2^n} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} \qquad (n = 0, 1, 2, ...) \tag{1.22}$$

risulti anche

$$a_n > -k/n \qquad (n = 1, 2, ...); \tag{1.23}$$

vogliamo allora dimostrare che qualunque sia il punto x di $(-1, 1)$ le somme parziali delle serie di Legendre di $f(x)$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$ sono limitate e vale la limitazione

$$-3k\left[\lg \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{299}{990}\right] - 27L < \sum_{r=0}^{n} a_r P_r(x) < 3k\left[\lg 2 + \frac{2081}{1680}\right] + \frac{165}{4} L, \tag{1.24}$$

$$n = 0, 1, 2, ..., \qquad -1 \leq x \leq 1 \quad (^3).$$

---

(3) Per le serie trigonometriche nelle sola ipotesi (1.21) cfr. L. TONELLI: *Serie Trigonometriche* [Bologna, 1928], pp. 319-330; quando si aggiunga l'ipotesi (1.23) cfr. *a*) R. E. A. C. PALEY: *On Fourier series with positive coefficients*, The Journ. of the London Math. Soc., 7 (1932), pp. 205-208; *b*) L. FEJÉR: *On a theorem of Paley*, Bulletin of the American Math. Soc., XL (1934), pp. 469-475; *c*) O. SZÁSZ, loc. cit. (2), pp. 188-189. Per le serie di LEGENDRE, nella sola ipotesi che $f(x)$ sia limitata in $(-1, 1)$ si possiede il teorema: *se $f(x)$ è limitata e misurabile in $(-1, 1)$; $|f(x)| < L$ si ha*

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x)\right| \leq GL \log n,$$

per $-1 + \eta \leq x \leq 1 - \eta$, $0 < \eta < 1$, con G indipendente da x, da n, e dalla funzione f, ma dipendente soltanto da η. [Cfr. D. JACKSON: *The Theory of Approximation*, Amer. Math. Colloquium Pubblications (1930), p. 28].

Poniamo

$$\frac{1}{2}[1-P_n(x)]a_n=a_n^*, \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k^*=s_n^*; \tag{1.25}$$

e se $s_n^{(2)}$, $s_n^{(2)}(x)$, $s_n^{*(2)}(x)$ indicano le somme del secondo ordine relative alle serie $\sum a_n$, $\sum a_n P_n(x)$, $\sum a_n^*$ abbiamo

$$s_n^{(2)}(x)=s_n^{(2)}-2s_n^{*(2)}, \tag{1.26}$$

ma per un teorema di FEJÉR ([4]) abbiamo

$$\left|s_n^{(2)}\Big/\binom{n+2}{2}\right|<L, \qquad \left|s_n^{(2)}(x)\Big/\binom{n+2}{2}\right|<L$$

quindi

$$\left|s_n^{*(2)}\Big/\binom{n+2}{2}\right|<L. \tag{1.27}$$

Si ha $1\geqslant[1-P_n(x)]/2\geqslant 0$, quindi dalla (1.25)

$$a_n^*>-k/n, \tag{1.28}$$

e allora per il lemma 2 valgono per le $s_n^{(2)}$, $s_n^{*(2)}$ le limitazioni (1.8), (1.9) e dalla (1.26) segue appunto la (1.24) che può anche scriversi

$$\boxed{-3.16217....\,k-27L<\sum_{r=0}^{n} a_r P_r(x)<5.79551....\,k+41.25L}. \tag{1.29}$$

4. - TEOREMA I_2. - *Sia* $f(x)$ *misurabile in* $(-1,1)$ *e si abbia*

$$|f(x)|\leqslant L,$$

e poste le (1.22) *risulti*

$$|a_n|<k/\sqrt{n}. \tag{1.30}$$

Qualunque sia il punto x *interno a* $(-1,1)$ *sussiste allora per le somme parziali della serie di Legendre di* $f(x)$ *la limitazione*

$$\left|\sum_{r=0}^{n} a_r P_r(x)\right|<\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{k}{\sqrt[4]{1-x^2}}\left[\lg\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{299}{990}\right]+9L \qquad (n=0,1,2,....). \tag{1.31}$$

Si ha infatti dalla formula di STIELTJES ([5])

$$|P_n(x)|<\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt[4]{1-x^2}}$$

([4]) L. FEJÉR: *Ueber die Laplacesche Reihe*, Math. Annalen, 67 [1909, pp. 76-109], p. 92; cfr. anche E. KOGBETLIANTZ: *Recherches sur la sommabilité des séries ultrasphériques par la méthode des moyennes arithmétiques*, Journ. de Mathém. pures et appl., III (9) [1924; pp. 107-187], p. 179 (59).

([5]) Cfr. L. FEJÉR: *Abschätzungen für die Legendreschen und verwandte Polynome*, Math.

e perciò dalla (1.30)

$$|a_n P_n(x)| < \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{k}{\sqrt[4]{1-x^2}} \frac{1}{n},$$

e per l'osservazione 2 ne consegue la (1.31).

§ 2.

5. - **Lemma 3.** - *Se la serie*

$$a_0(t)+a_1(t)+ \dots + a_n(t)+ \dots \tag{2.1}$$

è uniformemente sommabile $(C, 2)$ *in* (α, β) *e se*

$$a_n(t) > -k/n, \qquad n=1, 2, \dots, \qquad k>0, \qquad \alpha \leq t \leq \beta; \tag{2.2}$$

allora la serie (2.1) *è uniformemente convergente in* (α, β) (6).

a). Senza alterare le generalità possiamo supporre che la somma $(C, 2)$ della serie (2.1) converga uniformemente a 0 in (α, β).

b). Sia $\varepsilon > 0$ e arbitrario e siano ϱ e ϱ_1 due numeri positivi minori di 1 tali che

$$0<\varrho_1<\frac{\varrho}{1+\varrho}, \qquad \frac{k}{3}\varrho<\varepsilon, \qquad \lg(\varrho+1)<\frac{\varepsilon}{2k} \tag{2.3}$$

ed n_0 un intero positivo tale che

$$\frac{1}{n_0(1+\varrho_1)}<\frac{\varepsilon}{2k}, \qquad \frac{3}{n_0}<\varrho-\varrho_1. \tag{2.4}$$

Per ogni $n \geq n_0$ consideriamo tutti gli interi positivi l tali che

$$\varrho_1 n<l<\varrho n-2 \tag{2.5}$$

[esistenti per la seconda delle (2.4)], abbiamo

$$\frac{k}{3}\frac{l+2}{n}<\frac{k}{3}\varrho<\varepsilon, \qquad \left|\frac{2}{l(l+1)}(s_{n+l}^{(2)}-s_n^{(2)})\right|<\frac{2}{\varrho_1^2 n^2}\,|s_{n+l}^{(2)}-s_n^{(2)}|$$

e la (1.11) del § 1 dà

$$s_n+\frac{2}{l+1}s_n^{(1)}<\varepsilon+\frac{2}{\varrho_1^2 n^2}\,|s_{n+l}^{(2)}-s_n^{(2)}|. \tag{2.6}$$

Sia d un numero positivo tale che

$$\varrho_1 d>1 \tag{2.7}$$

Zeitsch., 24 (1925), pp. 285-298; cfr. anhe E. W. HOBSON: *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics* [Cambridge, 1931], p. 299.

(6) Quando sia $|a_n|<k/n$ si ottiene rapidamente la dimostrazione del lemma seguendo L. J. MORDELL: *The convergence of series summable* (C, r), The Journ. of the London Math. Soc., 3 (1928), pp. 170-172. Per le medie $(C, 1)$ cfr. O. SZÁSZ, loc. cit. (2), p. 190.

e si prenda il numero positivo η in modo che

$$\frac{3(2+2\varrho+\varrho^2)}{\varrho_1\left(\varrho_1-\dfrac{1}{d}\right)}\eta<\frac{\varepsilon}{2};$$

si determini poi un intero positivo $N_0 \geqslant n_0$, $N_0 \geqslant d$ tale che per $n \geqslant N_0$ risulti

$$\left|s_n^{(2)}(t)\Big/\binom{n+2}{2}\right|<\eta, \qquad \alpha\leqslant t\leqslant\beta$$

si ha anche

$$|s_n^{(2)}(t)|<\eta\frac{(n+2)(n+1)}{2}=\eta n^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)<3\eta n^2$$

$$|s_{n+l}^{(2)}(t)|<3\eta(n+l)^2=3\eta n^2\left(1+\frac{l}{n}\right)^2<3\eta n^2(1+\varrho)^2$$

quindi

$$\frac{2}{\varrho_1^2 n^2}\,|s_{n+l}^{(2)}-s_n^{(2)}|<\frac{6\eta}{\varrho_1^2}[2+2\varrho+\varrho^2]<\varepsilon$$

e perciò dalla (2.6)

$$s_{n_1}(t)+\frac{2}{l_1+1}s_{n_1}^{(1)}(t)<2\varepsilon \tag{2.8}$$

per tutti gli interi $n_1 \geqslant N_0$ e gli interi l_1 che verificano la limitazione

$$\varrho_1 n_1<l_1<\varrho n_1-2. \tag{2.9}$$

Dalla (1.13) del § 1 si ha

$$s_n(t)-\frac{2}{l-1}s_{n+l}^{(1)}(t)<k\left[\lg\frac{n+l}{n}+\frac{1}{n+l}\right]+\frac{2}{l(l-1)}\,|s_n^{(2)}(t)-s_{n+l}^{(2)}(t)|. \tag{2.10}$$

Dalle (2.4), (2.5) per tutti gli $n \geqslant N_0$ e per tutti gli l che soddisfano le (2.5) si ha

$$k\left[\lg\frac{n+l}{n}+\frac{1}{n+l}\right]<k\left[\lg(\varrho+1)+\frac{1}{n(1+\varrho_1)}\right]<k\left[\frac{\varepsilon}{2k}+\frac{\varepsilon}{2k}\right]=\varepsilon; \tag{2.11}$$

si ha pure per tutti gli $n \geqslant N_0$

$$\left|\frac{2}{l(l-1)}(s_n^{(2)}-s_{n+l}^{(2)})\right|<\frac{2}{\varrho_1 n(\varrho_1 n-1)}3\eta n^2(2+2\varrho+\varrho^2)=$$
$$=\frac{6\eta(\varrho^2+2\varrho+2)}{\varrho_1(\varrho_1-1/n)}<\frac{6\eta(\varrho^2+2\varrho+2)}{\varrho_1(\varrho_1-1/d)}<\varepsilon$$

e dalla (2.10) segue

$$s_n(t)-\frac{2}{l-1}s_{n+l}^{(1)}(t)<2\varepsilon, \tag{2.12}$$

$n \geqslant N_0$ ed l soddisfacente la (2.5).

Nella (2.8) si faccia $n_1=n+l$, $l_1=l-2$, essa diventa

$$s_{n+l}(t)+\frac{2}{l-1}s_{n+l}^{(1)}(t)<2\varepsilon, \tag{2.13}$$

e la (2.9) dà

$$\varrho_1 n/(1-\varrho_1)+2/(1-\varrho_1)<l<\varrho n/(1-\varrho)$$

e perciò i numeri l verificheranno simultaneamente quest'ultima e la (2.5) ove si abbia

$$\frac{\varrho_1}{1-\varrho_1}n+\frac{2}{1-\varrho_1}<l<\varrho n-2. \tag{2.14}$$

Crescendo se occorre N_0 in modo che esistano numeri interi l che verifichino la (2.14) abbiamo che per $n \geqslant N_0$ e per tutti gli interi l che verificano la (2.14) coesistono le (2.12) e (2.13) e perciò

$$s_n(t) + s_{n+l}(t) < 4\varepsilon,$$

ma abbiamo

$$s_{n+l}(t) = s_n(t) + a_{n+1}(t) + \dots + a_{n+l}(t) > s_n(t) - k\left[\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+l}\right]$$

e tenuto conto della (2.11) otteniamo

$$s_n(t) < \frac{5}{2}\varepsilon, \qquad n \geqslant N_0, \qquad \alpha \leqslant t \leqslant \beta. \tag{2.15}$$

c). Dalla (1.18) del § 1 si ha

$$s_n(t) > \frac{1}{l(l+1)}\left[s_n^{(2)} - s_{n-l}^{(2)}\right] + \frac{1}{(l+2)(l+1)}\left[s_{n-2l-2}^{(2)} - s_{n-l}^{(2)}\right] - \\ - \frac{k}{2}\left[\frac{1}{n-l+2} + \dots + \frac{1}{n}\right] - \frac{k}{2}\left[\frac{1}{n-2l+1} + \dots + \frac{1}{n}\right], \qquad l > 2. \tag{2.16}$$

Sia ancora $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ tale che $\lg(1+\delta) < \varepsilon/k$, e si ponga $\varrho = \delta/2(1+\delta)$; se $0 < \varrho_1 < \varrho$, per tutti gli interi l tali che

$$\varrho_1 n < l < \varrho n, \qquad [\varrho < 1/2]$$

si ha

$$\frac{k}{2}\left[\frac{1}{n-l+2} + \dots + \frac{1}{n}\right] < \frac{k}{2}\left[\lg\frac{n}{n-l+1} + \frac{1}{n}\right] < \frac{k}{2}\left[\lg\frac{1}{1-\varrho} + \frac{1}{n}\right] < \\ < \frac{k}{2}\left[\lg(1+\delta) + \frac{1}{n}\right] < \frac{k}{2}\left[\frac{\varepsilon}{k} + \frac{1}{n}\right],$$

$$\frac{k}{2}\left[\frac{1}{n-2l+1} + \dots + \frac{1}{n}\right] < \frac{k}{2}\left[\lg\frac{n}{n-2l} + \frac{1}{n}\right] < \frac{k}{2}\left[\frac{\varepsilon}{k} + \frac{1}{n}\right];$$

per $n > 2/(1-2\varrho)$ si ha anche

$$\left|\frac{1}{l(l+1)}\left[s_n^{(2)} - s_{n-l}^{(2)}\right]\right| < \frac{1}{\frac{l}{n}\,\frac{l+1}{n}}\left[\left|\frac{s_n^{(2)}}{n^2}\right| + \left|\frac{s_{n-l}^{(2)}}{(n-l)^2}\right|\left(1-\frac{l}{n}\right)^2\right] < \frac{4}{3}\left[\left|\frac{s_n^{(2)}}{n^2}\right| + \left|\frac{s_{n-l}^{(2)}}{(n-l)^2}\right|\right]$$

$$\left|\frac{1}{(l+1)(l+2)}\left[s_{n-2l-2}^{(2)} - s_{n-l}^{(2)}\right]\right| < \frac{4}{15}\left[\left|\frac{s_{n-2l-2}^{(2)}}{(n-2l-2)^2}\right| + \left|\frac{s_{n-l}^{(2)}}{(n-l)^2}\right|\right]$$

abbiamo quindi dalla (2.16) per t in (α, β)

$$s_n(t) > -\varepsilon - \frac{k}{n} - \frac{4}{3}\left|\frac{s_n^{(2)}}{n^2}\right| - \frac{8}{5}\left|\frac{s_{n-l}^{(2)}}{(n-l)^2}\right| - \frac{4}{15}\left|\frac{s_{n-2l-2}^{(2)}}{(n-2l-2)^2}\right|.$$

Si ha ora $n-l > n(1-\varrho)$, $n-2l-2 > n(1-2\varrho)-2$ perciò per $n \to \infty$ anche $n-l \to \infty$, $n-2l-2 \to \infty$ e per la uniforme convergenza a zero delle medie del secondo ordine della serie (2.1) abbiamo che si può trovare un N_0 tale che per $n \geqslant N_0$ e qualunque sia t in (α, β) risulti

$$s_n(t) > -2\varepsilon$$

e questa e la (2.15) provano il lemma enunciato.

6. - TEOREMA II_1. - *Sia $f(x)$ continua in $(-1, 1)$,*

$$a_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx, \qquad P_n = \frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

e

$$a_n > -k/n, \qquad n = 1, 2, \ldots, \qquad k > 0; \tag{2.17}$$

vogliamo dimostrare che la serie di Legendre di $f(x)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) \tag{2.18}$$

converge uniformemente verso $f(x)$ in $(-1, 1)$ (7).

La supposta continuità della $f(x)$ in $(-1, 1)$ porta che la (2.18) è uniformemente sommabile $(C, 2)$ in $(-1, 1)$ [ed ha per somma $f(x)$] (8), tale è quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n[1-P_n(x)]/2$, ma si ha $a_n[1-P_n(x)]/2 > -k/n$, perciò in virtù del lemma dimostrato questa serie e anche la (2.18) è uniformemente convergente verso $f(x)$ in $(-1, 1)$.

7. - TEOREMA II_2. - *Sia $f(x)$ continua in $(-1, 1)$ e i suoi coefficienti di Legendre soddisfino la condizione*

$$|a_n| < k/\sqrt{n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

allora la serie di Legendre di $f(x)$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$, è uniformemente convergente verso $f(x)$ in qualunque intervallo interno a $(-1, 1)$.

Se (α, β) è interno a $(-1, 1)$ esiste una costante k tale che

$$|P_n(x)| < kn^{-1/2}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \qquad -1 < \alpha \leq x \leq \beta < 1 \quad (9),$$

si ha quindi

$$|a_n P_n(x)| < k/n$$

e siccome per il citato resultato di FEJÉR-CHAPMAN (10) la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$ è uniformemente sommabile $(C, 2)$ in (α, β) ed ha per somma $f(x)$, dal lemma 3 segue il teorema enunciato.

---

(7) Per le serie trigonometriche cfr. O. SZÁSZ, loc. cit. (2), p. 193.

(8) Per le medie $(H, 2)$ cfr. L. FEJÉR, loc. cit. (4), p. 98; per le medie $(C, k > 1)$ S. CHAPMAN: *On the Summability of Series of Legendre's functions*, Math. Annalen, 72 (1912) pp. 211-227), p. 219.

(9) Cfr. (5).

(10) Cfr. (8).

§ 3.

8. - Lemma 4. - *La serie* $\sum_1^\infty a_n$ *sia convergente ed abbia per somma zero, e sia*

$$na_n > -k, \qquad n=1, 2, \ldots, \qquad k>0; \tag{3.1}$$

sussistono allora le limitazioni

$$\sigma_n = \sum_{\nu=1}^{n} \nu\, |a_\nu| < Bn, \tag{3.2}$$

$$\sum_n^\infty \frac{|a_\nu|}{\nu^\alpha} < \frac{C}{n^\alpha} \qquad (\alpha \geqslant 0) \tag{3.3}$$

con le costanti B e C indipendenti da n.

Le (3.2) e la (3.3) per $\alpha=1$ sono di G. H. HARDY e J. E. LITTLEWOOD ([11]); stabilita la (3.2) seguendo lo stesso procedimento dei due autori si ottiene la (3.3). Si ha infatti

$$\sum_n^N \frac{|a_\nu|}{\nu^\alpha} = \tau_{n,N} = \sum_n^N \frac{\sigma_\nu - \sigma_{\nu-1}}{\nu^{\alpha+1}}$$

$$= \sigma_n\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}}\right) + \ldots + \sigma_{N-1}\left(\frac{1}{(N-1)^{\alpha+1}} - \frac{1}{N^\alpha}\right) + \frac{\sigma_N}{N^{\alpha+1}} - \frac{\sigma_{n-1}}{n^{\alpha+1}},$$

$$0 \leqslant \tau_{n,N} < B\sum_n^{N-1} \nu\left(\frac{1}{\nu^{\alpha+1}} - \frac{1}{(\nu+1)^{\alpha+1}}\right) + \frac{B}{N^\alpha},$$

ma è

$$\frac{1}{\nu^{\alpha+1}} - \frac{1}{(\nu+1)^{\alpha+1}} = (\alpha+1)\int_\nu^{\nu+1} t^{-(\alpha+2)}dt < \frac{\alpha+1}{\nu^{\alpha+2}}$$

quindi

$$\tau_{n,N} < B(\alpha+1)\sum_n^{N-1} \frac{1}{\nu^{\alpha+1}} + \frac{B}{N^\alpha} < B(\alpha+1)\sum_n^\infty \frac{1}{\nu^{\alpha+1}} + \frac{B}{n^\alpha}.$$

Osservando ora che $\sum_n^\infty \nu^{-(\alpha+1)} < H/n^\alpha$ con H indipendente da n ([12]), segue la (3.3).

Si ha in particolare

$$\sum_n^\infty \frac{|a_\nu|}{\nu^{1/2}} < \frac{C}{\sqrt{n}}. \tag{3.4}$$

([11]) Cfr. G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD: *Two theorems concerning Fourier Series*, The Journ. of the London Math. Soc., 1 (1926), pp. 19-24.

([12]) Per $n \geqslant 2$ si ha

$$\sum_n^\infty \nu^{-(\alpha+1)} < \int_{n-1}^\infty t^{(-\alpha-1)}dt = \frac{1}{\alpha(n-1)^\alpha} = \frac{1}{\alpha n^\alpha}\,\frac{1}{(1-1/n)^\alpha} \leqslant \frac{2^\alpha}{\alpha n^\alpha}.$$

9. - TEOREMA III_1. - *Sia $f(x)$ sommabile in $(-1, 1)$ e sia*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x), \qquad a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx \tag{3.5}$$

la sua serie di Legendre. Se i coefficienti a_n soddisfano la limitazione

$$a_n > -k/n, \qquad n = 1, 2, \ldots, \qquad k > 0, \tag{3.6}$$

allora condizione necessaria e sufficiente perchè la serie (3.5) converga nel punto $x = 1$ ed abbia per somma s è che

$$\lim_{x \to 1-} \frac{1}{1-x} \int_{x}^{1} f(t) dt = s \quad (^{13}). \tag{3.7}$$

a). La sufficienza della condizione risulta da noti teoremi ([14]), ne proveremo perciò la necessità, cioè supposto sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ dobbiamo dedurre la (3.7).

Se in luogo di $f(x)$ consideriamo la funzione $F(x) = f(x) - a_0 - (s - a_0) P_1(x)$, posto

$$\alpha_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} F(x) P_n(x) dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

troviamo $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = a_0 + a_1 - s$, $\alpha_n = a_n$ per $n \geqslant 2$ e la serie di LEGENDRE di $F(x)$ è quindi $(a_0 + a_1 - s) P_1(x) + a_2 P_2(x) + \ldots$ la quale è convergente nel punto 1 ed ha per somma 0. Senza alterare le generalità supponiamo quindi che sia

$$a_0 = 0, \tag{3.8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0, \tag{3.9}$$

$$a_n > -k/n \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3.6}$$

e dobbiamo dedurre la (3.7).

Per un noto teorema di DINI-PLANCHEREL ([15]) si ha [uniformemente per x in $(-1, 1)$]

$$\int_{x}^{1} f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{x}^{1} P_n(t) dt$$

e dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{x \to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1-x} \int_{x}^{1} P_n(t) dt = 0. \tag{3.10}$$

([13]) Per le serie trigonometriche cfr. G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD, loc. cit. ([11]).

([14]) Cfr., ad esempio, M. PICONE: *Appunti di Analisi Superiore* [in corso di pubblicazione], p. 256.

([15]) U. DINI: *a*) *Sopra le serie di funzioni sferiche*, Annali di Mat. Pura e Appl. (2), VI (1874) [pp. 112-140, 208-215], p. 195; *b*) *Lezioni sulla teoria delle funzioni sferiche e* *b*). Per dimostrare la (3.10) proviamo preliminarmente che per $0 \leqslant x \leqslant 1$ valgono le limitazioni

$$\left|\sum_1^M a_n P_n(x)\right| \leqslant \left|\sum_1^M a_n\right| + B(1-x)\frac{M(M+1)}{2}, \tag{3.11}$$

$$\left|\sum_N^\infty a_n P_n(x)\right| \leqslant \frac{4\sqrt{2}C}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}} \frac{1}{\sqrt{N}}, \tag{3.12}$$

dove le costanti B e C sono quelle che figurano nelle (3.2), (3.4).

Si ha infatti $[P_n(1)=1]$

$$\sum_1^M a_n P_n(x) = \sum_1^M a_n - \sum_1^M a_n[P_n(1)-P_n(x)] = \sum_1^M a_n - (1-x)\sum_1^M a_n P_n'(\bar{x})$$

ma dalla nota formula

$$P_n'(x) = (2n-1)P_{n-1}(x) + (2n-5)P_{n-3}(x) + \ldots. \quad (^{16})$$

si ha

$$|P_n'(x)| \leqslant (2n-1) + (2n-5) + \ldots. = P_n'(1) = n(n+1)/2$$

e perciò tenuto conto della (3.2) troviamo appunto la (3.11).

Ricordando che per $-1 < x < 1$ vale la formula di STIELTJES

$$|P_n(x)| \leqslant \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (^{17})$$

abbiamo

$$\left|\sum_N^\infty a_n P_n(x)\right| \leqslant \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}} \sum_N^\infty \frac{|a_n|}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}} \sum_N^\infty \frac{|a_n|}{\sqrt{n}},$$

e per la (3.4) ritroviamo la (3.12).

Dalle (3.11), (3.12) integrando tra x ed 1 troviamo

$$\left|\frac{1}{1-x}\sum_{n=1}^M \int_x^1 a_n P_n(t)dt\right| \leqslant \left|\sum_1^M a_n\right| + B\frac{M(M+1)}{4}(1-x) \tag{3.13}$$

$$\left|\frac{1}{1-x}\sum_N^\infty \int_x^1 a_n P_n(t)dt\right| \leqslant \frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}} C \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}} \frac{1}{\sqrt{N}}. \tag{3.14}$$

Se $M(x)$ ed $N(x)$ indicano rispettivamente i massimi interi di $h(1-x)^{-1/2}$, $k(1-x)^{-1/2}$, $0 < h < k$,

$$M(x) = [h/\sqrt{1-x}], \qquad N(x) = [k/\sqrt{1-x}], \qquad 0 < h < k,$$

---

delle funzioni di Bessel (Pisa, 1912), p. 123; M. PLANCHEREL: *Les problèmes de Cantor et de Du Boys-Reymond dans la théorie des séries des polynomes de Legendre*, Ann. Sc. de l'Éc. Norm. Sup. (3), 31 (1914) [pp. 223-264], p. 234.

(16) U. DINI, loc. cit. (15), *b*), p. 145.

(17) Cfr. L. FEJÉR, loc. cit. (5).

tenuto conto delle (3.13) e (3.14) otteniamo

$$(3.15)\qquad \left|\frac{1}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty}\int_x^1 a_nP_n(t)dt\right|\leqslant\left|\sum_1^{M(x)}a_n\right|+\frac{B}{4}h(h+1)+\frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}}\frac{C}{\sqrt{k}}+$$
$$+\left|\frac{1}{1-x}\sum_{M(x)+1}^{N(x)}a_n\int_x^1 P_n(t)dt\right|.$$

Fissato σ determiniamo h così piccolo che $Bh(h+1)/4<\sigma/4$ e determiniamo k così grande che $16\sqrt{2}C/3\sqrt{\pi}\sqrt{k}<\sigma/4$, si scelga poi $x_0>0$ in modo che per $x\geqslant x_0$ risulti $\left|\sum_1^{M(x)}a_n\right|<\sigma/4$ [e ciò è possibile per la (3.9)] e si ha allora per $x_0\leqslant x<1$

$$\left|\frac{1}{1-x}\sum_1^{\infty}\int_x^1 a_nP(t)dt\right|<\frac{3}{4}\sigma+\left|\frac{1}{1-x}\sum_{M(x)+1}^{N(x)}a_n\int_x^1 P_n(t)dt\right|$$

e sarà dimostrata la (3.10) ove si provi che

$$(3.16)\qquad \lim_{x\to 1-}\frac{1}{1-x}\int_x^1\left[\sum_{M(x)+1}^{N(x)}a_nP_n(t)\right]dt=0.$$

c). Cominciamo con l'osservare che fissati h, k nel modo dichiarato esiste un numero intero L indipendente da x tale che il numero degli zeri di ciascuno dei polinomi

$$(3.17)\qquad P_0(t),\ldots,\quad P_{M(x)}(t),\ldots,\quad P_{N(x)}(t),\qquad 0<x<1$$

appartenenti al tratto $(x, 1)$ non supera L.

Infatti il numero degli zeri di $P_n(t)$ compresi in $(x, 1)$ vale quanto il numero degli interi positivi i tali che

$$x\leqslant\cos\frac{i\pi}{n+1}$$

o supera questo numero di una unità ([18]). Dovrà aversi $\arccos x\geqslant i\pi/(n+1)$ $(n+1)\arccos x\geqslant i\pi$ e perciò $i\leqslant\frac{1}{\pi}\left[\frac{k}{\sqrt{1-x}}+2\right]\arccos x\leqslant\frac{k}{\pi}\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}+1$, ma si ha $\lim_{x\to 1-}\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}=\sqrt{2}$, quindi $\arccos x/\sqrt{1-x}$ è limitato in $(0, 1)$ e ne segue la nostra affermazione.

Fissato x, per ogni t di $(x, 1)$ raggruppiamo i termini consecutivi della (3.17) ponendo in un medesimo gruppo quei termini i quali formano una successione monotona e in guisa che i gruppi risultanti siano alternativamente non crescenti

---

([18]) Cfr. H. BRUNS: *Zur Theorie der Kugelfunctionen*, Journ. v. Crelle, 90 (1881), pp. 322-328; T. J. STIELTJES: *Sur les racines de l'équation* $X_n=0$, Acta Math., 9 (1886), pp. 385-400 [oppure *Oeuvres Complètes*, II (Groningen, 1918), p. 81].

o non decrescenti e dimostriamo che il numero di tali gruppi $V(t)$ non supera L. Manifestamente il numero $V(t)$ indica il numero delle variazioni della successione

$$(3.18) \qquad P_0(t)-P_1(t)=1-t, \quad P_1(t)-P_2(t), \ldots, \quad P_{N(x)-1}(t)-P_{N(x)}(t)$$

e noi faremo vedere che questa successione per ogni t di $(x, 1)$ ha un numero di variazioni $V(t) \leqslant L$.

Siccome gli zeri di $P_n(t)$ [reali, in numero di n, compresi tra -1 e 1] e quelli di $P_n'(t)$ si separano ne viene che se con a_n indichiamo il massimo zero di $P_n(x)$ per $t \geqslant a_n$ è $P_n'(t)>0$ e per $t>a_n$ è $P_n(t)>0$. Si ha subito $a_n<a_{n+1}$; infatti è noto che $P_n(t)$ e $P_{n+1}(t)$ non hanno zeri comuni e se $a_{n+1}<a_n$ si avrebbe $P_n'(a_n)>0$, $P_n(a_n)=0$, $P'_{n+1}(a_n)>0$, $P_{n+1}(a_n)>0$ e la formula

$$(n+1)\frac{P_n(t)-P_{n+1}(t)}{1-t}=P_n'(t)+P'_{n+1}(t)$$

dà

$$-(n+1)P_{n+1}(a_n)>0$$

e ciò non è. Si ha inoltre che per $t \geqslant a_{N(x)}$ è $P_0(t)>P_1(t)> \ldots >P_{N(x)}(t)$ o ciò che è lo stesso la (3.18) per $t \geqslant a_{N(x)}$ presenta tutte permanenze od anche che per $t \geqslant a_{N(x)}$ è $V(t)=0$.

Il primo termine della successione (3.18) per t variabile in $(x, a_{N(x)})$ è positivo.

Osserviamo ancora che se t è un valore che annulla un termine intermedio della (3.18) supposto cioè

$$(3.19) \qquad P_{n-1}(t)=P_n(t)$$

per questo valore di t le due differenze $P_{n-2}(t)-P_{n-1}(t)$, $P_n(t)-P_{n+1}(t)$ hanno segno contrario ([19]) e perciò quando t passa per uno zero di una delle funzioni intermedie della (3.18) questa successione non acquista nè perde variazioni.

Osserviamo infine che il numero degli zeri di $P_{N(x)-1}(t)-P_{N(x)}(t)$ e più in generale di qualunque differenza $P_{n-1}(t)-P_n(t)$ compresi in $(x, 1)$ non supera L. Si ha infatti

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_{n-1}}{dx}\right]+(n-1)nP_{n-1}=0, \qquad \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\right]+n(n+1)P_n=0$$

e dal noto teorema del confronto di STURM ([20]) sulle equazioni differenziali del secondo ordine abbiamo che gli zeri di $P_{n-1}(t)$ e quelli di $P_n(t)$ a coppie si separano, e a motivo della continuità di $P_{n-1}(t)$, $P_n(t)$ le intersezioni delle due curve $y=P_{n-1}(t)$, $y=P_n(t)$ le cui ascisse t cadono nel tratto $(x, 1)$ non superano gli zeri di $P_{n-1}(t)$ in questo tratto, cioè L.

([19]) La formula ricorrente tra i polinomi di LEGENDRE e la (3.19) dànno

$$(n+1)[P_n(t)-P_{n+1}(t)]=(2n+1)(1-t)P_{n-1}(t);$$
$$(n-1)[P_{n-2}(t)-P_{n-1}(t)]=(2n-1)(t-1)P_{n-1}(t).$$

([20]) Cfr., ad esempio, M. PICONE: *Corso di Analisi Superiore* (Catania, 1923), p. 89.

Tutte queste premesse sono sufficienti per dimostrare che è $V(t) \leqslant L$.

Se è $t \geqslant a_{N(x)}$, come abbiamo osservato è $V(t)=0$, possiamo quindi supporre $x \leqslant t < a_{N(x)}$. Facciamo variare con continuità t dal valore assegnato ad $a_{N(x)}$ la successione (3.18) quando t passa attraverso uno zero delle funzioni intermedie non perde nè acquista variazioni e supponiamo che passando t attraverso gli zeri di $P_{N(x)-1}(t)-P_{N(x)}(t)$ essa acquisti per r zeri rispettivamente una variazione e per altri s ne perda rispettivamente una; abbiamo $0 \leqslant r \leqslant L$, $0 \leqslant s \leqslant L$, $V(t)+r-s=0$, quindi $V(t)=s-r$ e perciò $V(t) \leqslant L$.

Applicando ora la trasformazione di BRUNACCI-ABEL e tenuto conto che $|P_n(t)| \leqslant 1$, abbiamo per $x \leqslant t \leqslant 1$

$$\left|\sum_{M(x)+1}^{N(x)} a_n P_n(t)\right| < 2L \max_{1+M \leqslant \mu \leqslant \nu \leqslant N} \left|\sum_{\mu}^{\nu} a_n\right|, \tag{3.20}$$

e a motivo dell'ipotesi (3.9) fissato $\sigma > 0$ si può trovare un x_0 tale che per $x_0 \leqslant x \leqslant 1$ risulti

$$\left|\sum_{M(x)+1}^{N(x)} a_n P_n(t)\right| < 2L\sigma, \qquad x_0 \leqslant x \leqslant t \leqslant 1$$

quindi

$$\left|\frac{1}{1-x}\int_x^1 \left[\sum_{M(x)+1}^{N(x)} a_n P_n(t)\right] dt\right| < 2L\sigma, \qquad x_0 \leqslant x < 1$$

e ne risulta la (3.16).

10. - TEOREMA III_2. - *Se $f(x)$ è sommabile in $(-1, 1)$*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)\,; \qquad a_n > -k/n \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

e se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$ è convergente nel punto 1, *allora condizione necessaria e sufficiente perchè la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$ sia convergente anche in un punto x' di $(-1, 1)$ ed ivi abbia la somma s' è che*

$$\lim_{x \to 1-} \frac{1}{2\pi(1-x)} \int_x^1 dt \int_0^{2\pi} f[tx' + \sqrt{1-t^2}\sqrt{1-x'^2}\cos\theta]d\theta = s'. \tag{3.21}$$

Consideriamo la funzione

$$F(x, x') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f[xx' + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x'^2}\cos\theta]d\theta, \qquad -1 \leqslant x,\ x' \leqslant 1$$

dove dei radicali consideriamo i valori aritmetici e sia

$$F(x, x') \sim \sum_0^{\infty} A_n P_n(x).$$

Abbiamo

$$A_n=\frac{2n+1}{4\pi}\int_{-1}^{1}P_n(x)dx\int_{0}^{2\pi}f[xx'+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x'^2}\cos\theta]d\theta$$

e posto

$$x=\cos\varphi,\qquad x'=\cos\varphi',\qquad \cos\varphi\cos\varphi'+\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\varphi'\cos\theta=\cos\gamma$$
$$0\leqslant\varphi,\qquad \varphi',\qquad \gamma\leqslant\pi$$

otteniamo

$$A_n=\frac{2n+1}{4\pi}\int_{0}^{2\pi}d\theta\int_{0}^{\pi}f(\cos\gamma)P_n(\cos\varphi)\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi.$$

L'integrale del secondo membro è un integrale esteso alla sfera unitaria ove θ rappresenta la longitudine e φ la colatitudine polare; assumendo come polo il punto della sfera $(\theta=0,\ \varphi')$ si ha

$$A_n=\frac{2n+1}{4\pi}\int_{0}^{2\pi}d\theta'\int_{0}^{\pi}f(\cos\gamma)P_n(\cos\gamma\cos\varphi'+\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\varphi'\cos\theta')\operatorname{sen}\gamma\,d\gamma,$$

ma per note proprietà delle funzioni sferiche è

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}P_n(\cos\gamma\cos\varphi'+\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\varphi'\cos\theta')d\theta'=P_n(\cos\gamma)P_n(\cos\varphi')$$

abbiamo quindi

$$A_n=\frac{2n+1}{2}P_n(\cos\varphi')\int_{0}^{\pi}f(\cos\gamma)P_n(\cos\gamma)\operatorname{sen}\gamma\,d\gamma=a_nP_n(x')$$

e perciò

$$F(x,x')\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n(x')P_n(x).$$

Si ha ora

$$\frac{1}{2}[f(x)-F(x,x')]\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n^*P_n(x)$$

con

$$a_n^*=[1-P_n(x')]a_n/2>-k/n\qquad\qquad (n=1,2,....)$$

e la convergenza delle serie $\sum_0^\infty a_n$, $\sum_0^\infty a_nP_n(x')$ porta la convergenza della serie $\sum_0^\infty a_n^*$. Ma per il teorema III_1 per la convergenza di quest'ultima serie è necessario e basta che

$$\lim_{x\to1-}\frac{1}{1-x}\int_{x}^{1}[f(t)-F(t,x')]dt$$

esista; la supposta convergenza della serie $\sum_0^\infty a_n$ porta l'esistenza del limite

$$\lim_{x\to 1-} \frac{1}{1-x}\int_x^1 f(t)dt,$$

dovrà esistere quindi il limite (3.21) e come sappiamo questo limite quando esiste rappresenta appunto $\sum_0^\infty a_n P_n(x)$ ([21]).

11. - TEOREMA III$_3$. - *Sia* $f(x)$ *sommabile in* $(-1, 1)$

$$f(x') \sim \sum_{n=0}^\infty a_n P_n(x'),$$

$$a_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^1 f_n(x) P_n(x) dx \qquad (n=0, 1, 2, ...)$$

e si abbia

$$|\, a_n \,| < k/\sqrt{n} \qquad (n=1, 2, ...);$$

in queste ipotesi condizione necessaria e sufficiente perchè la serie $\sum_{n=0}^\infty a_n P_n(x')$ *converga in un punto* x' *interno a* $(-1, 1)$ *ed abbia per somma* s *è che*

$$\lim_{x\to 1-} \frac{1}{2\pi(1-x)}\int_x^1 dt \int_0^{2\pi} f[tx' + \sqrt{1-t^2}\sqrt{1-x'^2}\cos\theta]d\theta = s. \tag{3.22}$$

Si ha infatti

$$|\, a_n P_n(x') \,| < \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{k}{\sqrt[4]{1-x'^2}} \frac{1}{n}$$

e la convergenza della serie $\sum_{n=0}^\infty a_n P_n(x')$ ad s o ciò che è lo stesso la convergenza della serie $\sum_{n=0}^\infty a_n P_n(x') P_n(x)$ per $x=1$ porta per le cose dette la (3.22).

([21]) Cfr., ad esempio, M. PICONE, loc. cit. ([14]), p. 255.