

ANNALI DELLA  
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA  
*Classe di Scienze*

GEORGE D. BIRKHOFF

**Sur le problème restreint des trois corps (premier mémoire)**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2<sup>e</sup> série*, tome 4, n° 3  
(1935), p. 267-306

<[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1935\\_2\\_4\\_3\\_267\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1935_2_4_3_267_0)>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1935, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SUR LE PROBLÈME RESTREINT DES TROIS CORPS (1)

(PREMIER MÉMOIRE)

par GEORGE D. BIRKHOFF (Cambridge, Mass.).

## Introduction.

Le problème restreint des trois corps est d'une importance de tout premier ordre. En effet, pour le mathématicien il se présente comme l'exemple le plus caractéristique et le plus simple d'un système dynamique non intégrable, tandis que pour l'astronome il constitue la base la plus avantageuse pour suivre effectivement le mouvement de la Lune.

C'était l'astronome américain G. W. HILL qui a montré le premier non seulement son importance pour le calcul des éphémérides mais aussi son intérêt tout particulier au point de vue mathématique. Peu de temps après, le grand mathématicien HENRI POINCARÉ commençait à développer très largement les voies mathématiques à peine ouvertes par HILL. Dans son oeuvre magnifique *Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste*, publiée en 1891-1899, POINCARÉ s'adressait tout particulièrement à ce problème; il n'a jamais cessé de s'en occuper, comme le témoigne son dernier article *Sur un théorème de Géométrie*, publié dans les « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo » en 1912.

Parmi les travaux mathématiques plus récents dans le même domaine, il faut mentionner avant tout autre ceux de LEVI-CIVITA qui ont jeté beaucoup de lumière précieuse sur les questions difficiles de la régularisation et de la stabilité (2).

En 1915 il a paru dans les Rendiconti de Palermo un Mémoire dans lequel j'ai étudié ce problème (3). Beaucoup de mes recherches dynamiques ultérieures ont été vouées à l'étude des systèmes dynamiques plus généraux à deux degrés

---

(1) Deux conférences faites à la R. Scuola Normale Superiore di Pisa les 18 et 19 juin 1934.

(2) Voir ses Mémoires (I): *Sopra alcuni criteri di instabilità*, Annali di Matem., sér. III, t. 5, 1901, et (II): *Traiettorie singolari ed urti nel problema ristretto dei tre corpi*, Annali di Matem., sér. III, t. 9, 1903.

(3) Voir I de la liste ci-jointe:

(I): *The Restricted Problem of Three Bodies*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. 39 (1915); (II): *Dynamical Systems with Two Degrees of Freedom*, Transactions of the American Mathematical Society, t. 18 (1917); (III): *Surface Transformations and Their Dynamical Applications*, Acta Mathematica, t. 43 (1920); (IV): *Nouvelles recherches*

de liberté. La dernière de celles-ci intitulée *Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques* vient de paraître dans les « *Memorie della Pontificia Accademia delle Scienze Nuovi Lincei* ».

Mon but ici est de reprendre encore une fois l'étude du problème restreint des trois corps, en utilisant librement les résultats de mon Mémoire de 1915 aussi bien que tous mes résultats généraux, particulièrement ceux de mon Mémoire Pontifical. Néanmoins je chercherai autant que possible d'expliquer les résultats dont je fais emploi.

La première partie est consacrée à l'examen des propriétés analytiques de la surface de section  $S_2$ , et de la transformation fondamentale correspondante  $T$ , que j'avais employée en 1915. C'est POINCARÉ qui a fait le premier la réduction effective du problème restreint des trois corps au problème d'une transformation d'une surface de section en elle-même, mais sans la développer; ce type de réduction est d'une importance théorique tout à fait capitale. La réduction particulière dont je fais usage est d'une nature plus simple et plus intuitive que celle de POINCARÉ. J'avais signalé que la transformation correspondante est le produit de deux transformations involutives; ce fait joue un rôle important ici.

Les méthodes de la deuxième partie sont qualitatives plutôt qu'analytiques. En faisant usage de faits analytiques et de mes résultats généraux antérieurs j'obtiens beaucoup de nouveaux renseignements concernant les types de mouvement qui existent et leurs relations entre eux.

Dans la troisième partie je considère quelques questions générales d'un grand intérêt pour la dynamique théorique: le rôle du Calcul des Variations dans ce domaine, en particulier l'applicabilité des importants résultats de M. TONELLI et de M. MORSE, les résultats ergodiques récents, et le principe de termination naturelle des branches périodiques énoncé par M. E. STRÖMGREN et étudié par M. WINTNER.

Peut-être le but final de la Dynamique théorique est de faire « l'intégration logique ». À vrai dire, le développement caractéristique d'une théorie mathématique semble être achevé quand nous pouvons passer librement de la forme purement quantitative à la forme purement qualitative et inversement. En faisant ainsi, nous en obtenons toute la structure logique. Dans le cas des systèmes dynamiques, nous partons de la forme quantitative (le système donné des équations différentielles), et nous cherchons à déterminer les propriétés qualitatives des mouvements et leurs relations (les invariants du groupe topologique).

Jusqu'à quel point peut on regarder ce but final comme réalisé pour les systèmes dynamiques à deux degrés de liberté, par exemple celui du problème restreint des trois corps ?

---

*sur les systèmes dynamiques*, Memorie della Pontificia Accademia delle Scienze Nuovi Lincei, sér. III, t. 1 (1934); (V): *Dynamical Systems*, New York (1927).

Si je ne me trompe pas, ce but se trouve maintenant presque atteint. En effet, on peut opérer avec le symbolisme qualitatif de la « signature » d'un tel système que j'ai introduit dans mon Mémoire Pontifical, et on peut ainsi suivre indéfiniment tous les mouvements. Mais le plus intéressant est que le symbole employé est à deux dimensions, tandis que les symboles mathématiques ordinaires sont à une dimension seulement (4). C'est en admettant de tels symboles à deux dimensions comme satisfaisants à l'esprit mathématique, que l'on peut regarder « l'intégration logique » comme achevée pour les problèmes dynamiques tels que le problème restreint des trois corps.

I.

Partie analytique.

1. - Les équations du mouvement.

Soient *S* et *J* deux points de masses finies qui s'attirent l'un l'autre suivant la loi de NEWTON. Supposons qu'ils se meuvent suivant des orbites circulaires autour de leur centre de gravité, *O*. Alors, avec des unités convenables, on peut représenter leurs masses par  $\mu$  et  $1-\mu$  respectivement, et en même temps on peut prendre leur distance et leur vitesse angulaire autour de *O* comme égales à 1.

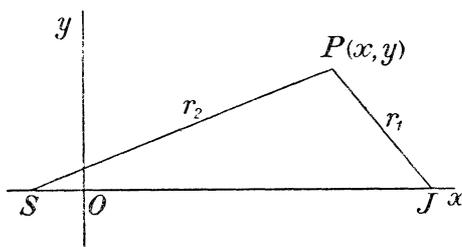


Fig. 1.

Soit maintenant *P* un corps infinitésimal qui se meut dans le plan du mouvement des deux corps *S* et *J* suivant cette loi; et soient *x*, *y* les coordonnées rectangulaires relatives de *P*, les axes des *x* et des *y* étant choisis de la manière indiquée dans la fig. 1. Les équations du mouvement s'écrivent alors

$$(1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} = \Omega_x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} = \Omega_y,$$

où *t* désigne le temps et où l'on a

$$(2) \quad \Omega(x, y, \mu) = \frac{1}{2} [(1-\mu)r_1^2 + \mu r_2^2] + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2},$$

$$(r_1 = \sqrt{(x-\mu)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-\mu+1)^2 + y^2}).$$

---

(4) Ce n'est pas toujours le cas; par exemple les surfaces de RIEMANN doivent être regardées comme une espèce de symbole à deux dimensions.

Ici nous avons posé

$$\partial\Omega/\partial x = \Omega_x, \quad \partial\Omega/\partial y = \Omega_y.$$

Ces équations (1) admettent l'intégrale évidente de JACOBI

$$(3) \quad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \equiv \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2\Omega - C.$$

En général nous supposons dans ce qui suit que la constante d'intégration  $C$  est donnée d'avance. Cela revient à dire que nous employons l'intégrale (3) pour abaisser effectivement l'ordre de (1) du quatrième au troisième. En particulier nous pouvons réaliser une telle réduction en introduisant la variable

$$(4) \quad \varphi = \arctan \frac{dy}{dx},$$

ce qui donne le système réduit suivant

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sqrt{2\Omega - C} \cos \varphi \equiv X(x, y, \varphi), \\ \frac{dy}{dt} = \sqrt{2\Omega - C} \sin \varphi \equiv Y(x, y, \varphi), \\ \frac{d\varphi}{dt} = -2 + \frac{-\Omega_x \cos \varphi + \Omega_y \sin \varphi}{\sqrt{2\Omega - C}} \equiv \Phi(x, y, \varphi). \end{cases}$$

Remarquons le fait évident que si nous regardons  $x, y, \varphi$  comme les coordonnées d'un « état de mouvement », les trajectoires réelles correspondantes rempliront la région

$$2\Omega - C > 0, \quad r_1 \neq 0, \quad r_2 \neq 0$$

d'un espace à trois dimensions avec coordonnées rectangulaires  $x, y, \varphi$ . Malheureusement les équations (5) deviennent singulières aux trois frontières de cette région puisque les fonctions  $X, Y$  et  $\Phi$  y deviennent singulières. Nous verrons dans les sections suivantes comment on peut obtenir une représentation géométrique qui soit partout sans singularité.

Quand le temps  $t$  croît, chaque point de cette région suivra la trajectoire correspondante. Donc nous pouvons associer la totalité des trajectoires avec le mouvement permanent d'un fluide défini par les équations (5). De plus, ce mouvement est celui d'un fluide incompressible puisque nous avons l'identité

$$(6) \quad X_x + Y_y + \Phi_\varphi \equiv 0.$$

Pour toute constante  $C > 3$  et pour  $\mu$  suffisamment petit, la « courbe de vitesse nulle »  $2\Omega - C = 0$  aura une branche analytique fermée autour de  $J$ , qui ne renferme pas le point  $S$ , et qui est symétrique par rapport à l'axe des  $x$ . Quand  $\mu$

tend vers zéro, cette branche tendra analytiquement vers le cercle  $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \bar{r}$  où  $\bar{r}$  désigne la racine  $< 1$  de l'équation cubique

$$r^2 + \frac{2}{r} - C = 0 \quad (5).$$

Le cas limite  $\mu = 0$  (ou  $\mu = 1$ ) est intégrable, parce que le problème se réduit alors à celui des deux corps, l'un ( $J$ ) de masse  $un$  situé à l'origine, et l'autre ( $P$ ) de masse infinitésimale situé au point  $(x, y)$ . Il ne faut pas oublier que le plan des axes  $x, y$  tourne dans le sens positif avec la vitesse angulaire 1 autour de l'origine par rapport aux axes fixes.

Nous allons étudier exclusivement le cas où  $C > \sqrt[3]{32} > 3$  et  $\mu$  petit, dans lequel le système ne diffère pas beaucoup du cas intégrable  $\mu = 0$ .

**2. - Représentation non singulière des mouvements dans  $S_3$ .**

Pour obtenir une représentation sans singularité des états de mouvement, revenons au système (1), (3) en faisant la transformation de THIELE et LEVI-CIVITA (6)

$$(7) \quad x - \mu = p^2 - q^2, \quad y = 2pq, \quad dt = 4(p^2 + q^2)d\tau,$$

Cette transformation peut s'écrire

$$z = f(w) \equiv \mu + w^2, \quad dt = |f'(w)|^2 d\tau$$

où  $z = x + \sqrt{-1}y$ ,  $w = p + \sqrt{-1}q$ . On trouve alors, soit par le calcul direct soit par l'emploi d'une théorie générale, que les équations transformées analogues sont

$$(1') \quad \frac{d^2p}{d\tau^2} - 8(p^2 + q^2) \frac{dq}{d\tau} = \Omega_p^*, \quad \frac{d^2q}{d\tau^2} + 8(p^2 + q^2) \frac{dp}{d\tau} = \Omega_q^*$$

$$(3') \quad \left(\frac{dp}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 = 2\Omega^*$$

où

$$(8) \quad \Omega^*(p, q, \mu, C) \equiv 2(2\Omega(p^2 - q^2, 2pq, \mu) - C)(p^2 + q^2).$$

Remarquons que  $\Omega^*$  comme fonction de  $p$  et  $q$  reste finie et analytique même pour  $p = q = 0$ .

Prenons maintenant les quatre variables  $p, q, p', q'$  comme coordonnées d'un « état de mouvement ». Ici nous pouvons considérer  $p, q, p', q'$ , comme les coordonnées rectangulaires d'un point de l'espace à quatre dimensions  $S_4$ . Pour

(5) Voir I, sections 6-8.

(6) T. N. THIELE: *Recherches numériques concernant les solutions périodiques d'un cas spécial du problème des trois corps*, Ast. Nachr., t. 138 (1895). Cette transformation a été découverte indépendamment par LEVI-CIVITA qui en a montré l'importance théorique fondamentale ((II), loc. cit.).

la valeur donnée de la constante  $C$  nous aurons l'équation (3') entre ces coordonnées, donc

$$(3'') \quad F(p, q, p', q', \mu, C) \equiv p'^2 + q'^2 - 2\Omega^*(p, q, \mu, C) = 0,$$

ce qui définit un espace fini correspondant  $S_3$ . Je dis que cet espace est partout régulier et analytique. En effet la fonction  $F$  est analytique partout pour  $(p, q)$  dans la région  $\Omega^* \geq 0$  autour du point  $S$ , et pour  $p', q'$  quelconques. Par conséquent nous n'avons qu'à démontrer que les quatre dérivées partielles  $F_p, F_q, F_{p'}, F_{q'}$  ne peuvent pas s'évanouir en même temps, c'est-à-dire que les quatre équations

$$\Omega_p^* = 0, \quad \Omega_q^* = 0, \quad p' = 0, \quad q' = 0,$$

ne sont pas compatibles. Mais, dans le cas contraire, en employant (3') nous aurions  $\Omega^* = 0$ . Cette équation n'a pas lieu à l'origine  $p = q = 0$  du plan des  $p, q$  puisque  $\Omega^*$  se réduit à  $4(1 - \mu)$  en ce point. Nous concluons que les équations

$$2\Omega(x, y, \mu) - C = 0, \quad \Omega_x = \Omega_y = 0$$

ont lieu au point correspondant  $(x, y) = (\mu, 0)$ , c'est-à-dire que la courbe de vitesse nulle autour de  $J$  aura au point  $(x, y)$  un point double, ce qui n'est pas vrai.

*Donc, pour  $C > 3$  et  $\mu$  petit, l'espace fini  $S_3$  défini par l'équation (3'') est partout régulier et analytique, et variera analytiquement avec  $\mu$  et  $C$ .*

**3. - Retour aux variables  $x, y, x', y'$ .**

Remarquons maintenant que pour chaque état de mouvement en les variables  $x, y, x', y'$  il correspondra sans exception un couple de deux points distincts  $(\pm p, \pm q, \pm p', \pm q')$  de  $S_3$ . Pour le montrer il faut considérer séparément le cas non singulier pour lequel  $(x, y)$  ne coïncide pas avec  $J$ , et le cas singulier de choc où  $(x, y) = (\mu, 0)$ . Dans le premier cas les équations (7) nous donnent précisément deux points correspondants  $(p_1, q_1)$  et  $(p_2, q_2)$  avec  $p_2 = -p_1, q_2 = -q_1$  et  $(p_2, q_2) \neq (p_1, q_1)$ . En différenciant ces équations (7) nous obtenons immédiatement les  $p_1', q_1', p_2', q_2'$  correspondants avec  $p_2' = -p_1', q_2' = -q_1'$ . Donc le résultat énoncé est vrai pour  $(x, y) \neq (\mu, 0)$ .

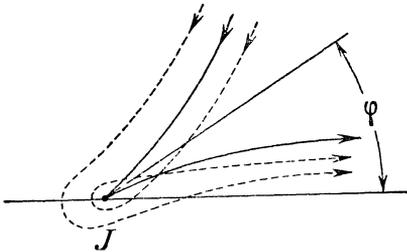


Fig. 2.

Dans le cas exclu il faut en premier lieu définir ce que sont les états de mouvement en les variables  $x, y, x', y'$ . Pour faire cela, observons que dans le plan  $p, q$  et avec le temps modifié  $\tau$ , les courbes du mouvement

sont tout à fait régulières et analytiques dans le voisinage de  $p = q = 0$  et que la vitesse est alors à peu près  $\sqrt[3]{8(1 - \mu)} \neq 0$ . Cela nous montre que les trajec-

toires correspondantes du plan  $x, y$  dans le voisinage de  $J$  sont à peu près de forme parabolique ou même possèdent en  $J$  un point de rebroussement (voir la fig. 2). Donc, les états singuliers qui correspondent à un état de choc de  $P$  avec  $J$  sont uniquement déterminés par la direction de la tangente en ce point. Il s'ensuit qu'il y a deux points  $(p, q, p', q')$  correspondant à un tel état, à savoir  $(0, 0, \pm\sqrt{8(1-\mu)} \cos \frac{\varphi}{2}, \pm\sqrt{8(1-\mu)} \sin \frac{\varphi}{2})$ , où  $\varphi$  désigne l'angle que la tangente au point de rebroussement fait avec l'axe des  $x$  dans le plan  $x, y$  (voir la même figure).

*Par conséquent il y a toujours un couple de deux points distincts de  $S_3$ ,  $(\pm p, \pm q, \pm p', \pm q')$ , qui correspondent à un état quelconque de mouvement de (1), (3).*

**4. - La nature topologique de  $S_3$ .**

Un examen de l'équation (3'') de  $S_3$  nous montre sans difficulté (voir mon Mémoire I, section 8) que cette correspondance entre les couples de points équivalents de  $S_3$  et les états individus de mouvement est telle que la région fondamentale des états différents est topologiquement équivalente à une sphère dont deux points diamétralement opposés de la surface sont regardés comme identiques. Plus exactement :

*Les points individus de  $S_3$  sont en correspondance biunivoque et continue avec les points de l'espace ordinaire à trois dimensions complété par un point idéal à l'infini, dont deux points  $(\xi, \eta, \zeta)$  et  $(\xi', \eta', \zeta')$  constituent un des couples des points équivalents pourvu que*

$$\xi\xi' = \eta\eta' = \zeta\zeta' = -\varrho^2.$$

En ce cas  $\varrho$  désigne le rayon de la sphère susdite.

**5. - Le mouvement permanent correspondant.**

À chaque point de l'espace représentatif  $S_3$ , les équations (1'), (3') définissent une direction déterminée par  $(dp, dq, dp', dq')$ , et cette direction varie analytiquement avec la position du point de  $S_3$ . Il est à remarquer que  $dp, dq, dp', dq'$  ne peuvent pas s'évanouir en même temps. Les trajectoires du mouvement en  $S_3$  sont les courbes régulières analytiques qui suivent partout cette direction.

En introduisant les coordonnées  $p, q$  et

$$(9) \quad \psi = \text{arc tang } \frac{dq}{dp},$$

analogues à  $x, y$  et  $\varphi$ , on voit immédiatement que l'intégrale  $\iiint dpdq d\psi$  restera invariante; il faut observer que cette intégrale de volume prise partout dans  $S_3$  a une valeur finie, à savoir  $2\pi A$  où  $A$  désigne l'aire à l'intérieur de la branche de  $\Omega^* = 0$  qui entoure  $J$ . Cette intégrale invariante peut être écrite sous la

forme  $\iiint m(Q)dQ$  où  $dQ$  désigne l'élément de volume à trois dimensions dans  $S_3$  et  $m(Q)$  désigne une fonction de position  $Q$  dans  $S_3$ .

Calculons cette fonction  $m(Q)$ . Pour cela, considérons la couche infinitésimale entre les surfaces  $F=0$  et  $F=dF$  de l'espace euclidien de  $p, q, p', q'$ . Le volume à quatre dimensions  $dV$  d'un élément cylindrique dont la base dans  $S_3$  (c'est-à-dire  $F=0$ ) est de volume à trois dimensions  $dv$ , et qui est situé entre ces deux surfaces, sera donné par la formule évidente

$$dV = dpdqdp'dq' = \frac{dF}{\sqrt{F_p^2 + F_q^2 + F_{p'}^2 + F_{q'}^2}} dv,$$

puisque le premier facteur dans le troisième membre représente la distance entre les deux surfaces.

Mais les équations (1') définissent le mouvement permanent d'un fluide de l'espace à quatre dimensions, avec volume incompressible et tel que chaque surface  $F=D$  ( $D$  étant une constante arbitraire) reste invariante; pour le voir il suffit de les écrire sous la forme

$$\frac{dp}{d\tau} = p', \quad \frac{dq}{d\tau} = q', \quad \frac{dp'}{d\tau} = 8(p^2 + q^2)q' + \Omega_p^*, \quad \frac{dq'}{d\tau} = -8(p^2 + q^2)p' + \Omega_q^*.$$

En ne considérant que la partie de cet espace entre  $F=0$  et  $F=dF$ , on en déduit que l'expression

$$dF \iiint \frac{dv}{\sqrt{F_p^2 + F_q^2 + F_{p'}^2 + F_{q'}^2}}$$

représente le volume invariant.

D'autre part, introduisons les quatre variables  $p, q, F$  et  $\psi$  au lieu de  $p, q, p', q'$ , où

$$(9') \quad \psi = \arctan \frac{q'}{p'}.$$

On trouve alors les équations

$$p' = \sqrt{F + 2\Omega^*} \cos \psi, \quad q' = \sqrt{F + 2\Omega^*} \sin \psi$$

d'où immédiatement

$$\frac{\partial(p, q, p', q')}{\partial(p, q, F, \psi)} = \frac{\partial(p', q')}{\partial(F, \psi)} = \frac{1}{2}.$$

Donc le même volume invariant peut être écrit

$$\frac{1}{2} dF \iiint dpdq d\psi.$$

Par conséquent on trouve, en comparant, que

$$(10) \quad m(Q) = \frac{1}{\sqrt{2\Omega^* + \Omega_p^{*2} + \Omega_q^{*2}}},$$

donc la fonction  $m(Q)$  est analytique et positive dans  $S_3$ , comme nous l'avons dit.

Par conséquent les équations (1'), (3') définissent un mouvement permanent d'un fluide dans  $S_3$  sans point d'équilibre, dont les composantes de vitesse  $dp/d\tau$ ,  $dq/d\tau$ ,  $dp'/d\tau$ ,  $dq'/d\tau$  sont analytiques. Ce mouvement laisse invariante une intégrale de volume de la forme  $\iiint m(Q)dQ$  où  $m(Q)$  est explicitement donnée par (10) et où  $dQ$  désigne le volume ordinaire. La fonction  $m(Q)$  est analytique et positive partout dans  $S_3$ .

Il est à remarquer que le mouvement d'un fluide défini par (1'), (3') n'est pas le même que celui défini par (1), (3) quoique les trajectoires se correspondent les unes les autres. En effet, le temps  $\tau$  qui entre dans (1'), (3') est tout à fait différent du temps  $t$  qui entre dans (1), (3).

6. - La surface de section  $S_3$  dans le cas intégrable  $\mu=0$ .

Nous allons considérer en premier lieu le cas limite très important  $\mu=0$ , tout en renvoyant le lecteur au Mémoire I (sections 9, 10) pour quelques détails simples, sans en donner les démonstrations ici.

Dans le plan des  $x, y$  le point  $P$  peut alors se mouvoir dans toute ellipse tournant autour du foyer  $O$  avec une vitesse angulaire  $-1$ , pourvu que les demi-axes  $a$  et  $b$  de cette ellipse ( $a > |b|$ ) satisfassent à l'équation

$$(11) \quad b = -\frac{1}{2\sqrt{a}} + \frac{c}{2}\sqrt{a},$$

où  $b$  doit être regardé comme positif ou négatif selon que le mouvement dans l'ellipse est direct ou rétrograde. Relativement aux axes de cette ellipse le point  $P$  se meut selon les lois bien connues de KEPLER, le point attirant  $J$  étant de masse 1 et situé au foyer  $O$ .

Il existe alors pour tout  $C > 3$  deux mouvements périodiques dont les courbes correspondantes dans le plan des  $x, y$  sont des cercles de rayons  $a_1$  et  $a_2$  ( $a_1 < a_2$ ) autour de  $O$ , tous les deux à l'intérieur du cercle de vitesse nulle autour de  $O$ . Ces quantités  $a_1, a_2$  sont les racines réelles de l'équation

$$(12) \quad \pm 2a^{\frac{3}{2}} = 1 - Ca$$

tirée de (11). Pour déduire cette relation il suffit de poser dans (11)  $b = \pm a$ . Le cercle de rayon  $a_1$  correspond à un mouvement rétrograde autour de  $J$ , l'autre de rayon  $a_2$  ( $> a_1$ ) correspond à un mouvement direct. Dans l'espace  $S_3$  les trajectoires  $L_1$  et  $L_2$  correspondantes sont représentées par deux trajectoires fermées.

Considérons maintenant la surface  $\Sigma_2$  dans  $S_3$  définie par l'équation suivante

$$(13) \quad G \equiv pp' + qq' = 0.$$

Celle-ci représente tous les états de mouvement de  $S_3$  pour lesquels la direction de projection est tangente en n'importe quel sens à un cercle du plan  $p, q$  ayant le centre au point  $O$ . Donc les courbes  $L_1$  et  $L_2$  sont des courbes situées dans  $\Sigma_2$ .

Pour  $\mu=0$  l'équation qui définit  $S_3$  se réduit à

$$(14) \quad F \equiv p'^2 + q'^2 - 2h(p^2 + q^2) = 0,$$

où

$$h(p^2 + q^2) = \Omega^*|_{\mu=0} = 2(p^2 + q^2)^3 + 4 - 2C(p^2 + q^2).$$

La surface  $\Sigma_2$  sera analytique partout si la matrice

$$\begin{vmatrix} F_p & F_q & F_{p'} & F_{q'} \\ G_p & G_q & G_{p'} & G_{q'} \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} -4ph' & -4qh' & 2p' & 2q' \\ p' & q' & p & q \end{vmatrix}$$

est de rang deux partout.

Mais dans le cas contraire le rang sera au plus 1 en un certain point  $(p, q, p', q')$  de  $S_3$ , ce qui nécessite en particulier

$$qp' - pq' = 0.$$

En employant (13) et cette dernière équation, nous concluons que  $p=q=0$  ou  $p'=q'=0$ . Dans le premier cas la matrice se réduit à

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2p' & 2q' \\ p' & q' & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

dans le second cas elle se réduit à

$$\begin{vmatrix} -4ph' & -4qh' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q \end{vmatrix}.$$

Il s'ensuit donc que nous avons ou  $p=q=p'=q'=0$  ou  $h'=p'=q'=0$ . Mais la première possibilité n'a pas lieu comme le montre (14). La deuxième possibilité doit aussi être exclue; en effet l'égalité  $h'=0$  se réduit à  $C=3(p^2+q^2)^2$ , ce qui contredirait notre hypothèse  $C>3$ .

Donc la surface fermée  $\Sigma_2$  est analytique partout.

Il est presque évident que  $\Sigma_2$  a la nature topologique d'un tore. En effet considérons les points de  $\Sigma_2$  correspondant aux états de mouvement pour lequel  $p^2+q^2=\varrho^2$  où  $\varrho$  a une valeur donnée. Nous considérons  $\varrho$  comme positif ou négatif selon que la tangente est directe ou rétrograde. Ainsi nous obtenons une suite de courbes fermées  $C_\varrho$  qui couvre  $\Sigma_2$  complètement. Pour  $\varrho=0$  et aussi pour  $\varrho$  égal numériquement au rayon du cercle de vitesse nulle, il n'y a qu'une seule courbe  $C_\varrho$ . Donc  $\Sigma_2$  est un tore.

De plus,  $\Sigma_2$  sera divisée en deux parties annulaires par  $L_1$  et  $L_2$  qui se trouvent parmi les courbes  $C_\varrho$ , à savoir  $C_{-\sqrt{a_1}}$  et  $C_{\sqrt{a_2}}$  respectivement. Désignons par  $S_2$  la partie annulaire pour laquelle  $-\sqrt{a_1} \leq \varrho \leq \sqrt{a_2}$  et par  $S_2'$  la partie complémentaire  $\varrho \leq -\sqrt{a_1}$ ,  $\varrho \geq \sqrt{a_2}$ . La partie  $S_2$  va jouer un rôle important dans ce qui suit.

Introduisons maintenant  $\varrho$  et  $\theta = 2 \tan^{-1} q/p = -2 \tan^{-1} p'/q'$  comme paramètres de surface dans  $\Sigma_2$ . Cette surface s'exprime en fonction de ces paramètres comme il suit

$$(15) \quad \begin{cases} p = \varrho \cos \frac{1}{2} \theta, & q = \varrho \sin \frac{1}{2} \theta, \\ p' = -\sqrt{2h(\varrho^2)} \sin \frac{1}{2} \theta, & q' = \sqrt{2h(\varrho^2)} \cos \frac{1}{2} \theta. \end{cases}$$

La variable angulaire  $\theta/2$  désigne l'angle formé par l'axe positif des  $q$  et la direction de projection. Donc  $\varrho$  et  $\theta$  sont des paramètres normaux analytiques sauf le long du cercle de vitesse nulle, où  $h(\varrho^2)$  s'évanouit tout en restant analytique.

La surface annulaire  $S_2$  dans  $S_3$  définie par (15) pour  $-\sqrt{a_1} \leq \varrho \leq \sqrt{a_2}$  est donc analytique partout, et admet  $\varrho = \pm \sqrt{x^2 + y^2} = \pm \sqrt{p^2 + q^2}$  et  $\theta = \tan^{-1} y/x = 2 \tan^{-1} q/p$  comme paramètres normaux de surface, même le long des bords  $\varrho = -\sqrt{a_1}$ ,  $\varrho = \sqrt{a_2}$ .

Une extension analytique convenable de  $S_2$  pour  $\mu \neq 0$  jouera le rôle d'une « surface de section » dans ce qui suit.

Remarquons, en concluant, que les deux points  $(\varrho, \theta)$  et  $(\varrho, \theta + 2\pi)$  sont des couples correspondants de  $S_2$  qui représentent le même état de mouvement en les variables  $x, y, x', y'$ .

Nous allons considérer en général ces deux points comme identiques, donc  $\theta$  comme une variable angulaire de période  $2\pi$ .

**7. - La période relative en  $\tau$  pour  $\mu = 0$ .**

Il est évident qu'en les variables régularisantes  $p, q, \tau$ , tout mouvement aura le caractère général suivant. Le rayon  $\varrho$  croîtra régulièrement de sa moindre valeur  $\varrho'$  jusqu'à sa valeur la plus grande  $\varrho''$  tandis que l'angle polaire correspondant  $\sigma = \tan^{-1} q/p$  croît d'un certain angle  $\alpha$ ; puis le rayon décroîtra d'une manière symétrique, tandis que  $\sigma$  croît encore du même angle  $\alpha$ . Donc on obtient un arc correspondant  $PQR$  dans le plan  $p, q$ , tel que  $\angle POQ = \angle QOR = \alpha$  et tel que les arcs  $PQ$  et  $QR$  sont symétriques par rapport à  $OQ$  (voir la fig. 3).

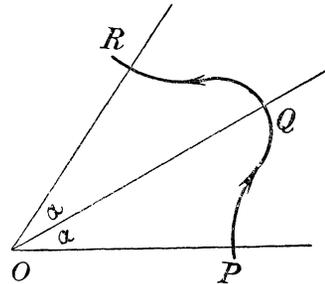


Fig. 3.

On peut alors continuer la courbe de mouvement indéfiniment en faisant des réflexions successives des arcs déjà obtenus autour de  $OR, OP$ , etc. Nous désignerons le temps  $\tau^*$  correspondant à un arc complet, tel que  $PQR$ , comme la période relative pour des raisons assez évidentes.

Remarquons que la période relative dans les variables régularisantes  $p, q, \tau$  a la valeur  $\pi \alpha^{3/2}/2$ .

En effet, suivant la loi des aires relative aux axes  $x, y$  nous avons (voir I, section 9)

$$r^2 \left( \frac{d\theta}{dt} + 1 \right) = \pm \sqrt{a(1-e^2)}$$

où  $a$  désigne le demi-grand axe et  $e$  désigne l'excentricité du mouvement. Si l'on introduit ici  $\theta=2\sigma$ ,  $r=\varrho^2$ ,  $dt=4\varrho^2 d\tau$ , il en résulte immédiatement

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = 2 \left( \frac{\pm a\sqrt{1-e^2} - \varrho^4}{\varrho^2} \right).$$

D'autre part l'intégrale (3') nous donne pour  $\mu=0$

$$\left( \frac{d\varrho}{d\tau} \right)^2 + \varrho^2 \left( \frac{d\sigma}{d\tau} \right)^2 = 2h(\varrho^2),$$

ce qui nous permet d'obtenir  $d\varrho/d\tau$  explicitement moyennant l'équation précédente. Ainsi nous obtenons  $d\tau/d\varrho$  en fonction de  $\varrho$ . En laissant  $\varrho$  croître de  $\varrho'$  à  $\varrho''$  il en résulte l'équation suivante pour la période relative  $\tau^*$

$$\begin{aligned} \tau^* &= 2 \int_{\varrho'}^{\varrho''} \frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{2\varrho^2 h(\varrho^2) - 4(\pm \sqrt{a(1-e^2)} - \varrho^4)^2}}, \\ &= \int_{r'}^{r''} \frac{dr}{\sqrt{2rh(r) - 4(\pm \sqrt{a(1-e^2)} - r^2)^2}}. \end{aligned}$$

Je dis que nous avons ici

$$P(r) \equiv 2rh(r) - 4(\pm a\sqrt{1-e^2} - r^2)^2 \equiv 4(r-r')(r''-r)/a^{\frac{3}{2}}.$$

En effet nous avons explicitement

$$h(r) = 2r^3 - 2Cr + 4,$$

ce qui nous montre que le polynôme en  $r$ ,  $P(r)$ , est du deuxième degré seulement. D'autre part  $dr/d\tau$  s'évanouit pour  $r=r'$  et  $r=r''$ , donc il faut conclure que  $r'$  et  $r''$  sont les deux racines de l'équation quadratique  $P(r)=0$ , ce qui détermine  $P(r)$  à un facteur près. En faisant  $r=0$ , l'on obtient par comparaison l'expression explicite que nous avons déjà écrite pour  $P(r)$ , puisqu'on a  $r' = a(1-e)$ ,  $r'' = a(1+e)$ .

En substituant cette valeur de  $P(r)$  et en intégrant on obtient  $\tau^* = \pi a^{\frac{3}{2}}/2$ .

### 8. - La transformation correspondante $T$ pour $\mu=0$ .

Toutes les trajectoires autre que  $L_1$  et  $L_2$  qui constituent les bords de  $S_2$  traversent  $S_2$  dans le même sens; cela revient à dire qu'aucune des autres trajectoire ne peut être tangente à  $S_2$  dans  $S_3$ . Autrement en un point où la trajectoire serait tangente à  $S_2$ , la dérivée

$$\frac{dG}{d\tau} = p' \frac{dp}{d\tau} + q' \frac{dq}{d\tau} + p \frac{dp'}{d\tau} + q \frac{dq'}{d\tau}$$

devrait s'évanouir. En employant (1'), (3') pour  $\mu=0$  avec  $\Omega^*=h(p^2+q^2)$ , et en employant les paramètres  $\varrho, \theta$  cette dérivée prend la forme suivante :

$$\frac{dG}{d\tau} = 2(h + 4\varrho^3\sqrt{2h} + \varrho^2h').$$

En écrivant  $A=1-C\varrho^2$ , nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \frac{dG}{d\tau} &= 8(2\varrho^6 + A + 2\varrho^3\sqrt{\varrho^6 + 1 + A}), \\ &= \frac{-8(2\varrho^3 - A)(2\varrho^3 + A)}{2\varrho^6 + A - 2\varrho^3\sqrt{\varrho^6 + 1 + A}}. \end{aligned}$$

Mais la comparaison avec (12) nous montre que les deux facteurs du numérateur s'annulent pour  $\varrho = -\sqrt{a_1}$  et  $\varrho = \sqrt{a_2}$  respectivement, donc que  $dG/d\tau$  est d'un même signe sauf le long de  $L_1$  et de  $L_2$  où cette fonction s'évanouit ; de plus,  $dG/d\tau$  doit être positive puisque elle est égale à 8 pour  $\varrho=0$ .

La dérivée  $dG/d\tau$  est infiniment petite seulement du premier ordre dans le voisinage des bords  $L_1$  et  $L_2$  par rapport aux infiniments petits  $\varrho + \sqrt{a_1}$  et  $\varrho - \sqrt{a_2}$  respectivement ; cette conclusion résulte du fait que  $-\sqrt{a_1}$  et  $+\sqrt{a_2}$  sont des racines simples de (12).

De la même manière on voit que toute trajectoire traverse  $S_2'$  dans un seul sens avec  $dG/d\tau < 0$  en tout point intérieur.

Jusqu'ici nous n'avons pas démontré que toute trajectoire autre que  $L_1$  et  $L_2$  doit traverser  $S_2$  (et  $S_2'$ ). Mais nous avons déjà remarqué que la fonction  $p^2 + q^2$  est périodique, de période  $\pi a^{\frac{1}{3}}/2$  en  $\tau$  le long de toute trajectoire dans ce cas intégrable, en croissant de  $\varrho'^2$  à  $\varrho''^2$  pendant la moitié de sa période et en décroissant de  $\varrho''^2$  à  $\varrho'^2$  pendant l'autre moitié. Par conséquent sa dérivée,  $2G$ , s'évanouit précisément deux fois dans une période, une fois avec  $dG/d\tau > 0$ , l'autre fois avec  $dG/d\tau < 0$ . Donc toute trajectoire autre que  $L_1$  et  $L_2$  traverse indéfiniment  $S_2$  et  $S_2'$  en des intervalles successifs  $\pi a^{\frac{1}{3}}/4$ .

Soit  $(\varrho, \theta) = P$  un point quelconque de  $S_2$  et soit  $(\varrho_1, \theta_1) = P_1$  le point de  $S_2$  qui suit  $P$  le long de la même trajectoire. Evidemment on a  $\varrho_1 = \varrho$ . De plus, la période d'un mouvement elliptique de demi-grand axe  $a$  est  $2\pi a^{\frac{3}{2}}$  ; donc, pendant cette période, le grand axe tourne dans le sens négatif d'un angle  $2\pi a^{\frac{3}{2}}$  compté à partir de l'axe des  $x$ . Il s'ensuit que  $\theta$  diminue de  $2\pi a^{\frac{3}{2}}$  dans une période, c'est-à-dire que  $\theta_1 = \theta - 2\pi a^{\frac{3}{2}}$ .

Donc l'espace  $S_3$  contient la surface analytique annulaire  $S_2$  définie par (15) où les paramètres  $\varrho, \theta$  sont des paramètres normaux avec  $\theta$  périodique de période  $2\pi$ , et  $-\sqrt{a_1} \leq \varrho \leq \sqrt{a_2}$ . Les deux bords  $\varrho = -\sqrt{a_1}$  et  $\varrho = \sqrt{a_2}$  de  $S_2$  sont les trajectoires circulaires rétrogrades et directes respectivement. Toutes les autres trajectoires traversent  $S_2$  dans chaque intervalle  $\pi a^{\frac{1}{3}}/2$  de temps  $\tau$  et dans le même sens. De plus, l'angle formé par  $S_2$  et une telle

trajectoire n'est jamais nul, et reste même du premier ordre par rapport à  $q + \sqrt{a_1}$  et  $q - \sqrt{a_2}$  dans le voisinage des bords. Si  $Q_1 \equiv (q_1, \theta_1)$  est le point qui suit  $Q \equiv (q, \theta)$  le long d'une trajectoire, on définit ainsi une transformation

$$(16) \quad T: \quad q_1 = q, \quad \theta_1 = \theta - 2\pi a^{\frac{3}{2}}(q)$$

de  $S_2$  en elle-même qui est partout biunivoque et analytique, même le long des bords. La fonction  $a(q)$  qui entre ici a l'expression analytique suivante:

$$a(q) = \frac{1}{C - 2q^4 + 2q\sqrt{q^6 - Cq^2 + 2}}$$

Cette transformation et son extension analytique convenable pour  $\mu \neq 0$  joue un rôle fondamental dans ce qui suit.

9. - Les mouvements périodiques  $L_1$  et  $L_2$  pour  $\mu \neq 0$ .

Les deux mouvements circulaires qui existent pour  $\mu = 0$ , à savoir le mouvement rétrograde  $L_1$  et le mouvement direct  $L_2$ , admettent, pour  $C > \sqrt[3]{32}$  et pour  $\mu$  assez petit, une extension analytique, symétrique par rapport à l'axe des  $x$  (ou des  $p$ ). On aurait pu prévoir une extension symétrique puisque (1), (3) et (1'), (3') ne sont pas modifiés quand on remplace  $x, y, t$  ou  $p, q, \tau$  par  $x, -y, -t$  ou  $p, -q, -\tau$  respectivement. L'existence d'une extension analytique a été pour la première fois démontrée par POINCARÉ (loc. cit.) et plus tard avec d'autres méthodes par M. LEVI-CIVITA (voir son Mémoire I), M. MOULTON<sup>(7)</sup> et moi-même (voir I, section 12). Donc pour de telles valeurs données de  $C$  ces mouvements périodiques  $L_1$  et  $L_2$  varieront analytiquement avec  $\mu$  pour  $\mu \leq \mu_0$  où  $\mu_0 > 0$ .

Faisons une remarque importante concernant le voisinage de  $L_1$  et de  $L_2$  pour  $\mu$  assez petit. Par un changement conforme de variables de la forme

$$x + \sqrt{-1}y = f(u + \sqrt{-1}v), \quad dt = |f'(w)|^2 d\tau$$

où  $f$  est une fonction analytique de  $w = u + \sqrt{-1}v$ ,  $C$  et  $\mu$  (voir I, sections 2, 3), on peut transformer la courbe du mouvement  $L_1$  par exemple en l'axe des  $u$  du plan des  $u, v$  avec  $u$  égal à l'arc et  $\tau = t$  le long de cet axe, de façon que les équations modifiées soient périodiques en  $u$ . De cette manière on obtient l'équation du déplacement normal le long de  $L_1$  qui se réduit pour  $\mu = 0$  à

$$\frac{d^2 \delta n}{dt^2} + a_1^{-3} \delta n = 0.$$

Pour  $\mu$  petit cette équation sera de la forme

$$\frac{d^2 \delta n}{dt^2} + I \delta n = 0$$

---

(<sup>7</sup>) Voir son livre: *Periodic Orbits*, Washington, 1920.

où  $I(t, \mu, C)$  est analytique en  $t, \mu$  et  $C$ , et périodique avec la période  $T$  du mouvement; de plus, on a  $I(t, 0, C) = a_1^{-3}$ . Mais par une transformation convenable de la forme

$$\delta n^* = l(t, \mu, C)\delta n, \quad t^* = \varphi(t, \mu, C),$$

où  $l(t, \mu, C)$  et  $\varphi(t, \mu, C)$  sont analytiques en  $t, \mu, C$  avec  $l \neq 0, d\varphi/dt > 0$  et où les fonctions  $l$  et  $d\varphi/dt$  sont périodiques en  $t$  avec la période  $T$ , on peut transformer l'équation écrite plus haut en une équation semblable

$$\frac{d^2 \delta n^*}{dt^{*2}} + \delta n^* = 0 \quad (8),$$

dont les solutions sont toutes périodiques de période  $2\pi$ , et telles que les zéros des solutions se suivent en des intervalles de valeur  $\pi$  exactement. Soit  $t_1^*(\mu, C)$  l'intervalle de l'axe de  $t^*$  qui correspond à la trajectoire périodique  $L_1$ ; cet intervalle dépendra analytiquement de  $\mu$  et de  $C$ . En considérant les zéros alternatifs de  $\delta n^*$  et de  $\delta n$ , il s'ensuit que le coefficient de rotation (9) correspondant est précisément  $k_1 = 4\pi^2/t_1^*(\mu, C)$ . Par conséquent les solutions  $\delta n$  dans le voisinage infinitésimal de  $L_1$  le croisent successivement, et ainsi définissent le coefficient analytique de rotation  $k_1(\mu, C)$  qui se réduit à  $2\pi(1 - a_1^{\frac{3}{2}})$  pour  $\mu = 0$ .

De cette manière on voit que le mouvement périodique  $L_1$  est de type formellement stable (elliptique (10)) pour  $\mu$  petit, si  $k_1/2\pi$  n'est pas un nombre rationnel. M. LEVI-CIVITA a montré (loc. cit., I) que dans le cas d'un rapport rationnel le mouvement peut être de type formellement instable (hyperbolique (11)). De la même manière,  $L_2$  sera du type stable si  $k_2/2\pi$  n'est pas égal à un nombre rationnel.

*En résumant, des continuations analytiques symétriques  $L_1$  et  $L_2$  existent pour  $\mu$  assez petit et définissent des coefficients de rotation  $k_1(\mu, C)$  et  $k_2(\mu, C)$  respectivement déterminés par l'ordre successif des croisements nécessairement simples de  $L_1$  et  $L_2$  dans le plan des  $x, y$  par une courbe de mouvement dans le voisinage infinitésimal. Les fonctions  $k_1(\mu, C)$  et  $k_2(\mu, C)$  sont analytiques en  $\mu$  et  $C$  et se réduisent à  $2\pi(1 - a_1^{\frac{3}{2}})$  et  $2\pi(1 - a_2^{\frac{3}{2}})$  respectivement pour  $\mu = 0$ . Le mouvement  $L_i$  ( $i = 1, 2$ ) sera formellement stable au moins si  $k_i(\mu, C)/2\pi$  n'est pas égal à un nombre rationnel.*

Voyons ce que signifie cela dans l'espace  $S_3$ . Un tel croisement au point  $(x, y)$

(8) Voir en cet égard E. SWIFT: *Canonical Forms for Ordinary Homogeneous Linear Differential Equations of the Second Order with Periodic Coefficients*, American Journal of Mathematics, t. 50 (1928).

(9) Pour la définition du coefficient de rotation, voir par exemple III, section 45.

(10) Voir III, sections 42-46.

(11) Voir III, sections 27-41.

de  $L_1$  par exemple est caractérisé par les équations  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$ , où  $t$  désigne le temps le long de  $L_1$ , et par l'équation (3'). En éliminant  $t$  ces équations nous donnent une surface  $\bar{S}_2^{(1)}$  à deux dimensions qui contient la trajectoire  $L_1$ .

De plus cette surface sera régulière et analytique le long de  $L_1$ . En effet, si  $x' \neq 0$  au point considéré on peut écrire ces conditions sous la forme

$$y - f(x) = 0; \quad \frac{1}{2} (x'^2 + y'^2) - \Omega + \frac{C}{2} = 0$$

où  $y - f(x) = 0$  est l'équation de la courbe  $L_1$ . La matrice correspondante est

$$\begin{vmatrix} -f' & 1 & 0 & 0 \\ -\Omega_x & -\Omega_y & x' & y' \end{vmatrix},$$

qui n'est pas de rang *un* à moins que  $x' = y' = 0$ , ce qui n'est pas possible. Le même raisonnement s'applique à tout point de  $L_1$  où  $y' \neq 0$ . Par conséquent la surface  $\bar{S}_2^{(1)}$  doit être régulière et analytique dans le voisinage de  $L_1$ .

Remarquons aussi que l'angle  $\gamma$  formé par la surface  $\bar{S}_2^{(1)}$  et une trajectoire devient nul seulement le long de  $L_1$ . En effet pour  $x' \neq 0$  cet angle a un sinus de l'ordre de grandeur de

$$\frac{d(y - f(x))}{ds} = (y' - f'(x)x') \frac{dt}{ds} = \left( \frac{y'}{x'} - f'(x) \right) x' \frac{dt}{ds},$$

où  $ds$  désigne l'élément d'arc de la trajectoire. Mais on a aussi

$$\frac{y'}{x'} - f'(x) = \tan \beta - \tan \alpha$$

où  $\alpha$  désigne l'angle compris entre la direction de la courbe de  $L_1$  et l'axe des  $x$  du plan des  $x, y$ , et où  $\beta$  désigne l'angle analogue pour la courbe de la trajectoire. Par conséquent l'angle  $\gamma$  est du premier ordre par rapport à  $\beta - \alpha$ , c'est-à-dire par rapport à la distance du point considéré à  $L_1$ . Si l'on a  $x' = 0$  il suffit d'échanger entre eux  $x$  et  $y$ .

*Donc les surfaces  $\bar{S}_2^{(1)}$  et  $\bar{S}_2^{(2)}$  qui correspondent aux deux ensembles des états de mouvement  $(x, y, x', y')$  pour lesquels  $(x, y)$  est situé respectivement sur les deux courbes de mouvement de  $L_1$  et de  $L_2$ , contiendront les respectives trajectoires  $L_1$  et  $L_2$ . Ces surfaces sont régulières et analytiques le long de ces trajectoires. De plus, l'angle de croisement de  $\bar{S}_2^{(1)}$  ou de  $\bar{S}_2^{(2)}$  avec une telle trajectoire est partout du premier ordre par rapport à la distance de  $L_1$  ou de  $L_2$  respectivement.*

Considérons maintenant une trajectoire voisine de  $L_1$ , par exemple, qui coupe  $\bar{S}_2^{(1)}$  au point  $P$  sur un côté de  $L_1$ . La même trajectoire coupera  $\bar{S}_2^{(1)}$  plus tard en un premier point  $Q$  sur l'autre côté de  $L_1$ , comme le montre les résultats ci-dessus. Puis elle coupera  $\bar{S}_2^{(1)}$  en un point  $P_1$  du même côté. Ecrivons  $P_1 = T(P)$ . La transformation  $\bar{T}_1$  d'un côté de  $\bar{S}_2^{(1)}$  en elle-même doit être analytique, sauf

peut-être le long de  $L_1$  où elle reste continue et définit le coefficient de rotation  $k_1(\mu, C)$ .

Donc les croisements successifs d'une trajectoire voisine avec la partie de  $\bar{S}_2^{(1)}$  d'un seul côté de  $L_1$  définissent une transformation  $\bar{T}_1$  de  $\bar{S}_2^{(1)}$  en elle-même, qui est biunivoque et continue, même sur le bord  $L_1$ , avec le coefficient de rotation  $k_1(\mu, C)$ . Sauf peut-être sur ce bord,  $\bar{T}_1$  sera analytique. Il y a une transformation  $\bar{T}_2$  complètement analogue par rapport à  $\bar{S}_2^{(2)}$  et  $L_2$ .

Évidemment le coefficient modifié  $k_1(\mu, C)/2\pi$ , par exemple, représente le nombre moyen de fois que la trajectoire voisine circule autour de  $L_1$  dans  $S_3$  tandis que la trajectoire voisine fait un tour complet de  $L_1$ .

Soit maintenant  $\bar{S}_2'$  une autre surface régulière et analytique le long de  $L_1$  telle que toute trajectoire voisine la coupe avec un angle du premier ordre par rapport à la distance de  $L_1$ . Supposons de plus que  $\bar{S}_2'$  n'ait pas de point en commun avec  $\bar{S}_2^{(1)}$  dans le voisinage de  $L_1$ . Il est alors géométriquement évident que la transformation de  $\bar{S}_2'$  analogue à  $\bar{T}_1$  aura le même coefficient que  $\bar{T}_1$  le long de  $L_1$ , à savoir  $k_1(\mu, C)$ . Une propriété analogue aura lieu le long de  $L_2$ .

Dans la section suivante nous allons étendre la définition de  $S_2$  au cas  $\mu \neq 0$  de façon que  $S_2$  satisfasse à ces conditions imposées sur  $\bar{S}_2'$  et  $\bar{S}_2''$  le long de  $L_1$  et  $L_2$  à la fois.

#### 10. - La surface de section $S_2$ pour $\mu \neq 0$ .

Les mêmes cercles  $p^2 + q^2 = \text{const.}$  dont les états tangents pour  $\mu = 0$  constituent  $S_2$  peuvent également être regardés comme les cercles de mouvement pour  $C^* \geq C$ ; ici  $C^*$  peut devenir infini, et en même temps le rayon du cercle correspondant se réduit à zéro (I, section 10). Cela nous suggère de définir  $S_2$  pour  $\mu \neq 0$  comme l'ensemble des états tangents aux extensions analytiques des mouvements circulaires directs et rétrogrades pour  $\mu \neq 0$ . J'ai donné cette définition autrefois (I, sections 10-14). Mais pour nos buts ici il faut aller plus loin encore.

Pour le faire, nous allons considérer en premier lieu l'intervalle  $C \leq C^* \leq \bar{C}$ , où  $\bar{C}$  est arbitrairement grande mais finie. L'abscisse  $\bar{x}$  du point de croisement d'une telle extension analytique directe ou rétrograde avec l'axe positif des  $x$  est une fonction analytique de  $\mu$  et de  $C^*$  (voir I, section 11). Par conséquent, l'abscisse  $\varrho$  de ce croisement en les coordonnées  $p, q$  est aussi une fonction analytique de  $\mu$  et  $C^*$ , et l'on peut écrire pour les courbes périodiques symétriques de mouvement direct ou rétrograde,

$$p = f(\theta, \mu, C^*), \quad q = g(\theta, \mu, C^*),$$

où  $\theta/2$  désigne l'anomalie moyenne mesurée du point de croisement de l'axe des  $p$  en le temps  $\tau$ . Ici  $f$  et  $g$  sont analytiques en  $\theta, \mu, C^*$  et périodiques de période  $4\pi$

en  $\theta$  pour  $C \leq C^* \leq \bar{C}$  et pour  $\mu$  suffisamment petit. De plus, nous avons

$$\varrho = \varphi(\mu, C^*) = \varphi_0(C^*) + \mu\varphi_1(C^*) + \dots,$$

où  $\varphi$  est analytique en  $C^*$  et  $\mu$ .

Mais pour le cas intégrable  $\mu=0$ , ceci se réduit à  $\varrho = \varphi_0(C^*)$ , et un calcul immédiat (voir I, les équations (36)) nous montre que la relation entre  $\varrho$  et  $C^*$  est définie par l'équation

$$C^* = 2\varrho + \frac{1}{\varrho^3}.$$

Par conséquent on obtient

$$\frac{dC^*}{d\varrho} = 2\left(1 - \frac{1}{\varrho^3}\right) \neq 0$$

puisque  $|\varrho| < 1$  partout. Il s'ensuit que la fonction  $\varphi_0(C^*)$  pour le cas direct ou rétrograde est analytique avec  $\varphi_0' \neq 0$ , et que nous pouvons remplacer la variable  $C^*$  par la variable  $\varrho$  dans les équations au-dessus, ce qui nous donne

$$p = \bar{f}(\varrho, \theta, \mu), \quad q = \bar{g}(\varrho, \theta, \mu),$$

où  $\bar{f}$  et  $\bar{g}$  sont analytiques par rapport aux variables indiquées et périodiques en  $\theta$ , de période  $4\pi$ .

Mais pour  $\mu=0$  les paramètres  $\varrho$  et  $\theta$  ainsi définis coïncident avec les paramètres normaux  $\varrho$  et  $\theta$  définis plus haut. Par conséquent la surface  $S_2$  variera analytiquement avec  $\mu$ , et  $\varrho$  et  $\theta$  seront encore des paramètres normaux pour  $\mu$  suffisamment petit, au moins en dehors d'un petit voisinage de la courbe fermée  $p=q=0$  de  $S_2$  ( $C^*$  grande).

Avant de passer au cas  $C^* \geq \bar{C}$ , remarquons qu'au moins pour les deux parties  $C \leq C^* \leq \bar{C}$  de  $S_2$ , c'est à dire quand  $\varrho$  n'est pas très petit, la surface  $S_2^*$  jouit de certaines autres propriétés importantes qui sont valables pour  $\mu=0$ . Elle est traversée par toutes les trajectoires dans le même sens, et l'angle avec une telle trajectoire devient petit seulement au voisinage des bords  $L_1$  et  $L_2$  où l'angle reste précisément du premier ordre. De plus, les coefficients de rotation le long de  $L_1$  et  $L_2$  doivent être précisément  $k_1(\mu, C)$  et  $k_2(\mu, C)$  puisque  $S_2$  n'aura pas de points en commun avec les surfaces  $\bar{S}_2^{(1)}$  et  $\bar{S}_2^{(2)}$  définies dans la section précédente. En effet les courbes des mouvements périodiques auxiliaires resteront complètement à l'intérieur de  $L_1$  et de  $L_2$  au moins pour  $\mu$  suffisamment petit. Tout cela résulte immédiatement de l'analyticité de la situation.

Il reste à considérer le cas  $C^* \geq \bar{C}$ . Pour étudier ce cas il est d'une grande utilité (voir I, section 12) d'employer la transformation suivante des variables

$$(17) \quad x - \mu = \lambda^2 \bar{x}, \quad y = \lambda^2 \bar{y}, \quad t = \lambda^3 \bar{t} \quad \left(\lambda^2 = \frac{1}{C^*}\right),$$

en remplaçant  $C^*$  par  $1/\lambda^2$  partout. Remarquons ici que pour  $C^* = \infty$  on aura  $\lambda=0$ , et qu'une courbe périodique, symétrique, rétrograde par rapport à l'axe des  $x$ ,

pour une valeur donnée de  $\lambda$ , correspondra à une courbe semblable, mais directe, pour la valeur  $-\lambda$  de  $\lambda$ .

Commençons par démontrer que les développements suivants ont lieu pour les mouvements périodiques symétriques :

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{1-\mu}{1-3\lambda^2\mu} \cos \left[ (1-\mu)^{-1} \left( 1 - \frac{9}{2} \lambda^2 \mu \right) \bar{t} \right] + \lambda^3 a_3(\mu, \bar{t}) + \dots, \\ \bar{y} = \frac{1-\mu}{1-3\lambda^2\mu} \sin \left[ (1-\mu)^{-1} \left( 1 - \frac{9}{2} \lambda^2 \mu \right) \bar{t} \right] + \lambda^3 b_3(\mu, \bar{t}) + \dots \end{cases}$$

Ici  $a_3, \dots, b_3, \dots$  sont analytiques en  $\mu, \bar{t}$ , et les membres à droite sont périodiques en  $\bar{t}$  pour  $\mu$  petit. Ces développements sont analogues à ceux que j'ai développés (I, section 12), mais sont un peu plus explicites.

Remarquons d'abord que les équations différentielles et l'intégrale de JACOBI ont les formes respectives :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\bar{x}}{d\bar{t}^2} - 2\lambda^3 \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} = \bar{\Omega}_x, \quad \frac{d^2\bar{y}}{d\bar{t}^2} + 2\lambda^3 \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \bar{\Omega}_y, \\ \left( \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} \right)^2 + \left( \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} \right)^2 = 2\bar{\Omega} - (1 - 3\lambda^2\mu) \end{aligned}$$

où

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{2} \lambda^6 (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) + \frac{1-\mu}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}}$$

si l'on néglige des termes en  $\lambda^5\mu, \lambda^8\mu, \dots$  dans les seconds membres de ces équations. Les équations ainsi obtenues sont rigoureusement celles qu'on obtient en partant d'un point de masse  $1-\mu$  à l'origine  $\bar{x}=\bar{y}=0$  et en employant des coordonnées  $\bar{x}, \bar{y}$  par rapport aux axes qui tournent dans le sens positif avec une vitesse angulaire  $\lambda^3$ .

Pour employer ces faits rappelons quelques résultats de mon Mémoire. Considérons le mouvement particulier pour lequel le point de masse nulle se trouve pour  $\bar{t}=0$  sur l'axe des  $\bar{x}$  en  $(\bar{x}, 0)$ , avec, dans la direction de l'axe des  $\bar{y}$ , la vitesse imposée par l'intégrale de JACOBI. Si  $\bar{x}$  ne diffère pas beaucoup de 1, la courbe de mouvement coupera l'axe des  $\bar{x}$  négatif près de  $\bar{x}=-1$ ; en effet pour  $\lambda=\mu=0$ , il y a un mouvement circulaire direct de rayon 1 autour de  $\bar{x}=\bar{y}=0$ . Désignons par  $\chi(\bar{x}, \lambda, \mu)$  la composante de vitesse dans la direction positive de l'axe des  $\bar{x}$  à ce deuxième croisement, qui s'évanouit pour un mouvement périodique symétrique. Cette fonction sera analytique en  $\bar{x}, \lambda$  et  $\mu$ , et sera divisible par  $\lambda^3$ , comme je l'ai démontré. En effet la fonction analogue  $\bar{\chi}(\bar{x}, \lambda, \mu)$  rattachée aux équations modifiées comme ci-dessus ne peut différer de  $\chi(\bar{x}, \lambda, \mu)$  que par des puissances  $\lambda^6, \lambda^8, \dots$  de  $\lambda$ , et admet aussi le facteur  $\lambda^3$ . De plus dans la série qui reste quand on enlève ce facteur il y a un terme  $a_3(\bar{x}-1)$  avec  $a_3 \neq 0$  qui se trouve aussi dans  $\chi(\bar{x}, \lambda, \mu)$ . Il s'ensuit que pour le mouvement périodique symétrique modifié, on aura pour  $\bar{x}-1$  la même série de puissances de  $\lambda$  et  $\mu$  que pour le

mouvement périodique symétrique, jusqu'aux termes en  $\lambda^3$  au moins. Par conséquent les séries pour  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  seront les mêmes jusqu'à ce point.

On peut obtenir les formes exactes de ces séries modifiées. En effet les équations différentielles modifiées admettent un mouvement périodique symétrique circulaire qui est le mouvement en question. On l'obtient par rapport aux axes fixes sous la forme

$$\bar{x} = a \cos a^{-\frac{3}{2}} \sqrt{1-\mu} \bar{t}, \quad \bar{y} = a \sin a^{-\frac{3}{2}} \sqrt{1-\mu} \bar{t}.$$

Mais la vitesse angulaire des axes relatifs est  $\lambda^3$ . Par conséquent les équations pour  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  tirées des équations modifiées sont

$$\bar{x} = a \cos [a^{-\frac{3}{2}} \sqrt{1-\mu} (1-\lambda^3) \bar{t}], \quad \bar{y} = a \sin [a^{-\frac{3}{2}} \sqrt{1-\mu} (1-\lambda^3) \bar{t}],$$

et l'intégrale de JACOBI nous sert à déterminer  $a$ ; jusqu'aux termes en  $\lambda^3$  on a

$$a = \frac{1-\mu}{1-3\lambda^2\mu}.$$

Ainsi les développements de  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  pour le mouvement périodique symétrique doivent avoir les formes énoncées jusqu'aux termes en  $\lambda^3$ .

Introduisons maintenant l'anomalie moyenne  $t^*$  définie par l'équation  $t^* = 2\pi \bar{t} / \bar{T}$ , où  $\bar{T}(\lambda, \mu)$  représente la période du mouvement.

Pour la demi-période on a  $\bar{y} = 0$ , et  $\bar{t}$  est près de  $\pi(1-\mu)$ . En employant l'équation qui donne  $\bar{y}$  nous concluons que

$$\bar{T} = 2\pi(1-\mu) \left[ 1 + \frac{9}{2} \lambda^2 \mu + \lambda^3 c_3(\mu) + \dots \right].$$

En substituant, nous trouvons l'équation

$$\bar{t} = (1-\mu) \left[ 1 + \frac{9}{2} \lambda^2 \mu + \lambda^3 c_3(\mu) + \dots \right] t^*,$$

et en employant cette équation nous trouvons de plus

$$\begin{cases} \bar{x} = (1-\mu) \cos t^* + 3\lambda^2 \mu (1-\mu) \cos t^* + \lambda^3 \bar{a}_3(\mu, t^*) + \dots \\ \bar{y} = (1-\mu) \sin t^* + 3\lambda^2 \mu (1-\mu) \sin t^* + \lambda^3 \bar{b}_3(\mu, t^*) + \dots \end{cases}$$

où  $\bar{a}_3, \dots, \bar{b}_3, \dots$  sont analytiques en  $\mu$  et en l'anomalie moyenne  $t^*$ , et périodiques de période  $2\pi$  en  $t^*$ .

Cherchons maintenant à passer des variables  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ , aux variables  $\bar{p}$ ,  $\bar{q}$ ,  $\tau^*$  où  $p = \lambda \bar{p}$ ,  $q = \lambda \bar{q}$  et où  $\tau^*$  est l'anomalie moyenne en  $\tau$  et aussi en  $\bar{\tau}$  où  $\tau = \lambda \bar{\tau}$ . Évidemment nous aurons

$$\bar{x} = \bar{p}^2 - \bar{q}^2, \quad \bar{y} = 2\bar{p}\bar{q}, \quad d\bar{t} = 4(\bar{p}^2 + \bar{q}^2) d\bar{\tau}.$$

Nous pouvons réunir les équations ci-dessus en une seule équation complexe:

$$\bar{x} + \sqrt{-1} \bar{y} = e^{\sqrt{-1} t^*} [(1-\mu)(1+3\lambda^2\mu) + \lambda^3 d_3(\mu, t^*) + \dots]$$

où  $d_3, d_4, \dots$  sont des fonctions complexes analogues à  $\bar{a}_3, \dots, \bar{b}_3, \dots$ . Donc on obtient immédiatement

$$\bar{p} + \sqrt{-1}\bar{q} = \sqrt{x + \sqrt{-1}y} = e^{\sqrt{-1}\frac{t^*}{2}} \left[ \sqrt{1-\mu} \left( 1 + \frac{3}{2} \lambda^2 \mu \right) + \lambda^3 h_3(\mu, t^*) + \dots \right],$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{p} = \sqrt{1-\mu} \cos \frac{t^*}{2} + \frac{3}{2} \lambda^2 \mu \sqrt{1-\mu} \cos \frac{t^*}{2} + \lambda^3 k_3(\mu, t^*) + \dots, \\ \bar{q} = \sqrt{1-\mu} \sin \frac{t^*}{2} + \frac{3}{2} \lambda^2 \mu \sqrt{1-\mu} \sin \frac{t^*}{2} + \lambda^3 l_3(\mu, t^*) + \dots \end{array} \right.$$

Les coefficients  $k_3, \dots, l_3, \dots$  sont ici analytiques et de période  $4\pi$  en  $t^*$ . Quand on fait croître  $t^*$  de  $2\pi$ , les variables  $\bar{p}$  et  $\bar{q}$  sont transformées en  $-\bar{p}, -\bar{q}$  respectivement. De plus ces fonctions sont l'une paire l'autre impaire en  $t^*$ .

Cherchons maintenant à introduire dans ces équations l'anomalie moyenne  $\tau^*$  relative au temps modifié  $\tau$  au lieu de  $t^*$ . Pour cela il faut étudier de plus près les relations entre  $\bar{t}, t^*, \bar{\tau}$  et  $\tau^*$ .

La période  $\bar{T}$  en le temps  $\bar{t}$  dépend analytiquement de  $\lambda$  et  $\mu$ , et se réduit à  $2\pi(1-\mu)$  jusqu'au second ordre en  $\lambda$ . Donc on a

$$\bar{t} = [(1-\mu) + \lambda^2 m_2(\lambda, \mu)] t^*.$$

De plus, on a  $\tau^* = 2\pi\bar{\tau}/\bar{T}'$  où  $\bar{T}'$  désigne la période en  $\bar{\tau}$ . Mais de l'équation  $d\bar{t} = 4(\bar{p}^2 + \bar{q}^2)d\bar{\tau}$  nous déduisons  $\lambda\bar{T}dt^*/2\pi = 4(\bar{p}^2 + \bar{q}^2)d\tau$ . Donc en employant la forme connue de  $\bar{T}, \bar{p}$  et  $\bar{q}$ , nous obtenons

$$d\tau = \frac{\lambda}{4} (1 + \lambda^2 n_2(\lambda, \mu, t^*)) dt^*$$

où  $n_2$  est analytique en  $\lambda, \mu, t^*$  et périodique de période  $2\pi$  en  $t^*$ . En intégrant de 0 à  $2\pi$  en  $t^*$ , il résulte pour la période en  $\tau$ :

$$T' = \frac{2\pi\lambda}{4} (1 + \lambda^2 p_2(\lambda, \mu)).$$

Par conséquent on aura

$$d\tau^* = \frac{2\pi d\tau}{T'} = (1 + \lambda^2 q_2(\lambda, \mu, t^*)) dt^*.$$

En intégrant à partir de  $t^* = 0$  nous obtenons une équation

$$\tau^* = t^* + \lambda^2 r_2(\lambda, \mu, t^*)$$

où la fonction analytique  $r_2$  doit être périodique de période  $2\pi$  en  $t^*$  et s'évanouir identiquement pour  $t^* = 0$ .

Donc si l'on exprime  $t^*$  en fonction de  $\tau^*$  dans les équations pour  $\bar{p}$  et  $\bar{q}$  il en résulte les équations analogues suivantes :

$$\bar{p} = \sqrt{1-\mu} \cos \frac{\tau^*}{2} + \lambda^2 f_2(\lambda, \mu, \tau^*), \quad \bar{q} = \sqrt{1-\mu} \sin \frac{\tau^*}{2} + \lambda^2 g_2(\lambda, \mu, \tau^*).$$

D'autre part pour  $\tau^*=0$  nous aurons  $\bar{q}=0$ , et  $\bar{p}$  se réduit à  $\bar{\varrho}$  où  $\bar{\varrho}$  est l'abscisse de croisement de l'axe des  $\bar{p}$  dans le plan des  $\bar{p}, \bar{q}$ . Donc on aura

$$\varrho = \lambda(\sqrt{1-\mu} + \lambda^2 f_2(\lambda, \mu, 0)).$$

L'abscisse  $\varrho$  joue le rôle d'une de nos variables normales de  $S_2$ , tandis que l'autre variable normale est l'anomalie moyenne  $\tau^*$  que nous désignerons aussi par  $\theta$ .

L'équation que nous venons d'écrire nous montre que nous pouvons remplacer  $\lambda$  par  $\varrho$ , même pour  $\lambda$  petit. En introduisant  $\varrho$  au lieu de  $\lambda$  nous obtenons

$$(18) \quad \begin{cases} p = \varrho \left[ \cos \frac{\theta}{2} + \varrho^2 f_2^*(\varrho, \theta, \mu) \right], \\ q = \varrho \left[ \sin \frac{\theta}{2} + \varrho^2 g_2^*(\varrho, \theta, \mu) \right], \end{cases}$$

où  $f_2^*, g_2^*$  sont analytiques en  $\varrho, \theta, \mu$  et périodiques, de période  $4\pi$ , en  $\theta$ .

Cherchons maintenant des équations analogues pour les composantes  $p', q'$  de vitesse pour la valeur choisie de  $C$ , c'est-à-dire pour  $\lambda=\lambda_0$  et  $\varrho=\varrho_0$ . Soient  $\tau_0$  et  $t_0$  les temps particuliers correspondants à cette valeur de  $C$ . Nous aurons

$$p' = \frac{dp}{d\tau_0} = \frac{dp}{d\theta} \frac{d\tau^*}{d\tau} \frac{d\tau}{d\tau_0} = \frac{dp}{d\theta} \frac{d\tau^*}{d\tau} \frac{dt}{dt_0}.$$

puisque  $\theta=\tau^*$ . Le premier facteur à droite peut être ici déterminé directement au moyen de la première équation (18). Pour obtenir le deuxième facteur nous n'avons qu'à remarquer que, selon les relations ci-dessus,

$$\frac{d\tau^*}{d\tau} = \frac{4\sqrt{1-\mu}}{\varrho} (1 + \varrho^2 r_2(\varrho, \theta, \mu)).$$

Quant au troisième facteur, nous avons

$$\frac{dt}{dt_0} = \sqrt{\frac{2\Omega(x, y, \mu) - C}{2\Omega(x, y, \mu) - C^*}}$$

où  $C=1/\lambda_0^2, C^*=1/\lambda^2$ . Écrivons maintenant

$$\begin{aligned} \varphi(\varrho) &= \frac{\lambda\sqrt{1-\mu}}{\varrho} = 1 + \varrho^2 \varphi_2(\varrho) + \dots, \\ b(\varrho, \theta, \mu) &= \frac{1}{2\lambda^2\Omega(x, y, \mu) - 1} = 1 + \varrho^2 b_2(\theta, \mu) + \dots \end{aligned}$$

En substituant, nous obtenons les expressions de  $p'$  et  $q'$ :

$$(19) \quad \begin{cases} p' = \left[ -2\sqrt{1-\mu} \sin \frac{\theta}{2} + \varrho^2 \bar{f}_2^*(\varrho, \theta, \mu) \right] / a(\varrho, \varrho_0, \theta, \mu), \\ q' = \left[ 2\sqrt{1-\mu} \cos \frac{\theta}{2} + \varrho^2 \bar{g}_2^*(\varrho, \theta, \mu) \right] / a(\varrho, \varrho_0, \theta, \mu), \\ a(\varrho, \varrho_0, \theta, \mu) = \sqrt{1 + b(\varrho, \theta, \mu) \left( 1 - \frac{\varrho^2 \varphi^2(\varrho)}{\varrho_0^2 \varphi^2(\varrho_0)} \right)} \end{cases}$$

où les  $\bar{f}_2^*, \bar{g}_2^*$ , sont analytiques en les variables indiquées, de période  $4\pi$  en  $\theta$ .

Mais pour  $\varrho=0$  la matrice caractéristique

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial \varrho} & \frac{\partial q}{\partial \varrho} & \frac{\partial p'}{\partial \varrho} & \frac{\partial q'}{\partial \varrho} \\ \frac{\partial p}{\partial \theta} & \frac{\partial q}{\partial \theta} & \frac{\partial p'}{\partial \theta} & \frac{\partial q'}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

est de la forme

$$\begin{vmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} & A & B \\ 0 & 0 & -\cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \end{vmatrix},$$

en négligeant un facteur  $\sqrt{1-\mu}$  dans la seconde ligne. Donc la matrice est toujours de rang deux. Par conséquent les paramètres  $\varrho, \theta$  sont normaux même dans le voisinage de  $\varrho=0$ .

En nous rappelant que  $(p, q, p', q')$  représente le même état du mouvement que  $(-p, -q, -p', -q')$  et la symétrie des équations, nous parvenons aux résultats suivants :

*La surface de section  $S_2$  constituée par l'ensemble des états tangents de  $L_1^*$  et  $L_2^*$  pour la constante  $C^* \geq C$  est analytique partout dans  $S_3$  et a pour paramètres normaux l'abscisse  $\varrho$  d'intersection avec l'axe positif de  $p$  et l'anomalie moyenne  $\theta$  en  $\tau$  mesurée à partir de cet axe. Cette abscisse est prise positive pour  $L_2^*$  (mouvement périodique symétrique direct) et négative pour  $L_1^*$  (mouvement rétrograde).*

*Les coordonnées  $p, q, p', q'$  de cette surface  $S_2$  s'expriment par les équations (18), (19) où  $f_2^*, g_2^*, \bar{f}_2^*, \bar{g}_2^*$  et  $a$  sont des fonctions analytiques de  $\varrho, \theta, \mu$  et de  $\varrho_0, \theta_0, \mu$  respectivement, et périodiques de période  $4\pi$  en  $\theta$ ,  $\varrho_0$  étant la valeur de  $\varrho$  pour le mouvement périodique symétrique direct  $L_2$ .*

*De plus les fonctions  $f_2^*, g_2^*, \bar{f}_2^*, \bar{g}_2^*$  sont changées en  $-f_2^*, -g_2^*, -\bar{f}_2^*, -\bar{g}_2^*$ , respectivement, quand on fait croître  $\theta$  d'une demi-période  $2\pi$ , tandis que  $f_2^*, \bar{g}_2^*, a$  sont paires et  $g_2^*, \bar{f}_2^*$  sont impaires en  $\theta$ .*

*Le domaine de  $S_2$  en  $(\varrho, \theta)$  est donné par les inégalités ;*

$$\varrho' = \varrho(-\lambda_0, \mu) \leq \varrho \leq \varrho_0 = \varrho(\lambda_0, \mu) = \varrho'' ; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

où  $\varrho(\lambda_0, \mu)$  est analytique en  $\lambda_0, \mu$  avec  $\lambda_0 = 1/\sqrt{C}$ . La ligne  $\varrho=0$  de  $S_2$  correspond aux états de choc.

*Toute trajectoire autre que  $L_1$  et  $L_2$  coupera  $S_2$  dans le même sens, et l'angle de croisement restera près de  $L_1$  et de  $L_2$  précisément du premier ordre par rapport à la distance de  $L_1$  et  $L_2$ .*

### 11. - La transformation correspondante $T$ .

Soit maintenant  $P \equiv (\varrho, \theta)$  un point quelconque de  $S_2$  et soit  $P_1 \equiv (\varrho_1, \theta_1)$  le point unique correspondant qu'on obtient en suivant la même trajectoire dans le sens positif de  $(\varrho, \theta)$  jusqu'au premier point de rencontre avec  $S_2$ . Évidemment

pour  $\mu$  suffisamment petit nous définissons ainsi une transformation biunivoque analytique  $T$  de  $S_2$  en elle-même :

$$(20) \quad T: \varrho_1 = f(\varrho, \theta); \quad \theta_1 = \theta + g(\varrho, \theta),$$

où  $f$  et  $g$  sont analytiques en  $\varrho, \theta$  et périodiques de période  $2\pi$  en  $\theta$ .

Nous pouvons représenter cette transformation géométriquement dans le plan des  $x, y$ , en construisant les courbes de mouvement auxiliaires  $L_1^*$  et  $L_2^*$ . Nous obtenons ainsi deux feuillettes de surfaces unis en un seul à l'origine (voir en particulier les sections 13, 14 de I) dont chaque point correspond à un seul état de mouvement de  $S_2$  <sup>(12)</sup>. Au moment où une trajectoire traverse  $S_2$ , la courbe de mouvement correspondante devient tangente à une courbe de mouvement  $L^*$  dans le sens positif, et inversement. Donc en partant d'un point  $P$  de  $S_2$  on obtient  $P_1 = T(P)$  de la manière indiquée.

D'autre part la symétrie en  $x, y, t$  nous montre que si  $P_1 = T(P)$ , nous avons nécessairement  $R(P) = T(R(P_1))$  où  $R(P_1)$  et  $R(P)$  désignent les images symétriques de  $P_1$  et de  $P$  respectivement par rapport à l'axe des  $x$ . Par conséquent si  $(\varrho_1, \theta_1) = T(\varrho, \theta)$  on aura nécessairement  $(\varrho, -\theta) = T(\varrho_1, -\theta_1)$ , donc l'équation symbolique

$$RTRT = I \quad (I = \text{l'identité}).$$

Cela nous montre que la transformation  $RT = U$  est involutive et que  $T = RU$ . Plus explicitement nous obtenons les identités analytiques correspondantes

$$(21) \quad \begin{cases} \varrho \equiv f(f(\varrho, \theta), -[\theta + g(\varrho, \theta)]), \\ -g(\varrho, \theta) \equiv g(f(\varrho, \theta), -[\theta + g(\varrho, \theta)]). \end{cases}$$

*La transformation fondamentale  $T$  d'un point de  $P$  de  $S_2$  en un point  $P_1 = T(P)$  de  $S_2$  qu'on obtient en suivant la trajectoire correspondante du point  $P \equiv (\varrho, \theta)$  jusqu'au point suivant  $P_1 \equiv (\varrho_1, \theta_1)$  transforme l'intérieur de  $S_2$  en lui-même d'une manière biunivoque et analytique, avec  $\varrho_1, \theta_1$  de la forme (20) où  $f, g$  sont analytiques sauf peut-être aux bords  $\varrho = \varrho', \varrho = \varrho''$ . De plus les équations (21) sont satisfaites, c'est-à-dire que  $T = RU$  où  $R$  est la réflexion  $R(\varrho, \theta) = (\varrho, -\theta)$ , et  $U$  est une autre transformation involutive. Le long des deux bords,  $f$  et  $g$  restent continues, et la transformation des deux bords  $L_1$  et  $L_2$  en eux-mêmes est analytique avec des coefficients analytiques de rotation  $k_1$  et  $k_2$  respectivement (voir section 9 ci-dessus).*

## 12. - L'analyticité de $T$ le long de $L_1$ et $L_2$ .

Nous voulons maintenant démontrer le fait important que la transformation  $T$  reste analytique, même le long de  $L_1$  et de  $L_2$ .

<sup>(12)</sup> À l'origine nous avons fait une convention spéciale.

Considérons par exemple le voisinage de  $L_1$ . Évidemment on peut faire un changement analytique des variables  $x, y, \varphi$  en  $u, v, w$ , valable le long de  $L_1$  tel que  $L_1$  soit représentée par l'axe  $u=v=0$  correspondant à une coordonnée périodique  $w$  de période  $2\pi$  et tel que la surface  $S_2$  soit représentée par la partie  $v \geq 0$  du plan  $u=0$  qui renferme l'axe des  $w$  comme bord. En de telles variables le système réduit des équations différentielles deviendra de la forme <sup>(13)</sup>

$$(22) \quad \frac{du}{dw} = f(u, v, w), \quad \frac{dv}{dw} = g(u, v, w),$$

où  $f$  et  $g$  sont périodiques de période  $2\pi$  en  $w$  et où  $f(0, 0, w) = g(0, 0, w) = 0$ .

Les équations de variation le long de  $u=v=0$  s'écrivent

$$(23) \quad \begin{cases} \frac{d\delta u}{dw} = f_u(0, 0, w)\delta u + f_v(0, 0, w)\delta v, \\ \frac{d\delta v}{dw} = g_u(0, 0, w)\delta u + g_v(0, 0, w)\delta v. \end{cases}$$

La propriété fondamentale des solutions des équations de variation est la suivante: si le couple  $u(w, p), v(w, p)$  forme une famille analytique de solutions  $u, v$  de (22) qui dépend du paramètre  $p$  et contient la solution  $(0, 0)$  pour  $p=0$ , le couple de fonctions de  $w, u_p(w, 0), v_p(w, 0)$  constituera une solution des équations de variation. En effet le couple  $u_p(w, 0)\delta p, v_p(w, 0)\delta p$  représente (à peu près) une solution dans le voisinage infinitésimal de la solution donnée.

Remarquons en premier lieu que la fonction périodique  $f_v(0, 0, w)$  est ici du même signe partout. En effet l'angle formé par la trajectoire qui passe par  $(0, v_0, w_0)$  du plan  $u=0$  (qui correspond à  $S_2$ , avec  $v_0 \geq 0$ ) et ce plan lui-même, a la valeur numérique  $\sin^{-1} f/\sqrt{1+f^2+g^2}$  en ce point. Dire que l'angle est du premier ordre par rapport à la distance de la trajectoire périodique  $u=v=0$  revient à dire que  $f_v(0, 0, w)$  ne s'évanouit pas. Cette inégalité nous permet d'éliminer  $\delta v$  dans les équations de variation, et ainsi d'obtenir l'équation linéaire ordinaire du deuxième ordre en  $\delta u$  suivante

$$(24) \quad \left( \frac{\delta u' - f_u \delta u}{f_v} \right)' - g_v \frac{\delta u' - f_u \delta u}{f_v} - g_u \delta u = 0,$$

où le coefficient de  $\delta u''$  est  $1/f_v$  qui reste fini et ne s'évanouit pas. Par conséquent l'élément  $\delta u$  et sa dérivée  $\delta u'$  ne peuvent pas s'évanouir à la fois sans s'évanouir identiquement.

Maintenant soit  $u(w; v_0, w_0), v(w; v_0, w_0)$  la solution des équations en  $u$  et  $v$  qui se réduit à  $0, v_0$  pour  $w=w_0$ ;

$$(25) \quad u(w_0; v_0, w_0) = 0, \quad v(w_0; v_0, w_0) = v_0.$$

---

<sup>(13)</sup> Les lettres  $f$  et  $g$  employées ici ne doivent pas être confondues avec les mêmes lettres du dessus, dont elles sont tout à fait indépendantes.

Évidemment cette solution dépendra analytiquement de  $w, v_0, w_0$  pour  $w$  et  $w_0$  quelconque et  $v_0$  petit. De plus, pour  $v_0=0$  le couple de fonctions  $u, v$  se réduit à  $0, 0$  quelque soit  $w_0$  puisque la trajectoire correspondante devient alors  $u=v=0$ . Donc nous pouvons développer  $u, v$  en des séries de puissances de  $v$  comme il suit:

$$(26) \quad \begin{cases} u(w; v_0, w_0) = v_0(\delta u(w; w_0) + v_0 \bar{u}(w; w_0) + \dots), \\ v(w; v_0, w_0) = v_0(\delta v(w; w_0) + v_0 \bar{v}(w; w_0) + \dots). \end{cases}$$

Ici  $\delta u, \delta v$  désigne la solution particulière des équations de variation pour laquelle on a

$$\delta u(w_0; w_0) = 0, \quad \delta v(w_0; w_0) = 1.$$

Pour le démontrer on n'a qu'employer la propriété fondamentale déjà mentionnée de ces solutions et les équations (25) du dessus.

Soient  $\delta u^*, \delta v^*$  et  $\delta u^{**}, \delta v^{**}$  les deux solutions particulières définies par

$$\delta u^*(0) = 1, \quad \delta v^* = 0; \quad \delta u^{**}(0) = 0, \quad \delta v^{**}(0) = 1.$$

Ces solutions sont linéairement indépendantes. Donc une solution quelconque en particulier  $\delta u, \delta v$  peut être exprimée moyennant ces deux solutions indépendantes. On trouve ainsi

$$(27) \quad \begin{cases} \delta u(w; w_0) = [\delta u^{**}(w_0)\delta u^*(w) - \delta u^*(w_0)\delta u^{**}(w)]/\Delta(w_0) \\ \delta v(w; w_0) = [\delta u^{**}(w_0)\delta v^*(w) - \delta u^*(w_0)\delta v^{**}(w)]/\Delta(w_0) \end{cases}$$

où

$$(28) \quad \Delta(w) = \delta u^{**}(w)\delta v^*(w) - \delta u^*(w)\delta v^{**}(w) = -e^{\int (f_u + g_v) dw}.$$

Avec ces préliminaires nous pouvons discuter l'équation en  $w, u(w; v_0, w_0) = 0$  qui donne les valeurs de  $w$  pour lesquelles une trajectoire voisine de  $u=v=0$  traverse le plan  $u=0$ . En faisant disparaître le facteur  $v_0$ , cette équation aura la forme

$$(29) \quad \Phi(w; v_0, w_0) \equiv \frac{\delta u^{**}(w_0)\delta u^*(w) - \delta u^*(w_0)\delta u^{**}(w)}{\Delta(w)} + v_0 \bar{u}(w; w_0) + \dots = 0,$$

où les coefficients des puissances de  $v_0$  sont analytiques en  $w$  et  $w_0$ .

Mais pour  $v_0=0$  cette équation se réduit à l'équation  $\delta u(w; w_0) = 0$ . Selon les résultats bien connus de STURM, cette équation aura une infinité de racines simples plus grandes que  $w_0$  aussi bien qu'une infinité de racines plus petites. En effet la définition même de la transformation  $T$  le long des bords dépend de ce fait (voir I, section 13) puisque le point  $(0, 0, w)$  de l'axe des  $w$  se trouve transformé précisément dans le point  $(0, 0, w_1(w))$  de cette axe, où  $w_1$  désigne la deuxième racine plus grande que  $\delta u=0$ ; le premier point de rencontre de

la trajectoire voisine et du plan  $u=0$  aura lieu pour  $w$  dans le voisinage de la première racine  $w^*$  pour  $v < 0$ . En effet nous avons

$$\delta v = (\delta u' - f_u \delta u) / f_v,$$

donc  $\delta v$  doit être positive pour  $w$ , puis négative pour la première racine plus grande de  $\delta u=0$ , puis positive pour  $w_1$ , et ainsi de suite.

Ainsi l'équation (29) pour  $v_0=0$  admet la solution analytique  $w=w_1(w_0)$  où  $w_1$  est analytique en  $w_0$  tandis que  $w_1(w_0)-w_0$  est périodique de période  $2\pi$  en  $w_0$ . Mais pour  $v_0=0$  la dérivée partielle de  $\Phi(w_1; w_0, v_0)$  par rapport à  $w_1$  se réduit précisément à  $\delta u'(w_1, w_0)$  qui est positive. Par conséquent la solution générale sera de la forme  $w_1=F(w_0, v_0)$  où  $F(w_0, v_0)$  est analytique en  $w_0, v_0$ , avec  $F(w_0, v_0)-w_0$  périodique, de période  $2\pi$ , en  $w_0$ , et telle que  $F(w_0, 0)$  croît avec  $w_0$  ( $F_{w_0}(w_0, 0) > 0$ ).

Pour obtenir la valeur correspondante  $v_1$  de  $v$ , il suffit de substituer cette valeur de  $w_1$  dans  $v_1=v(F(w_0, v_0); v_0, w_0)$ . Ainsi l'on obtient  $v_1=G(w_0, v_0)$ , où  $G$  est également analytique en  $v_0$  et  $w_0$ , périodique, de période  $2\pi$ , en  $w_0$  et s'évanouit pour  $v_0=0$ .

Donc  $T$  doit être analytique le long de  $L_1$  ou de  $L_2$ , ce que nous voulions démontrer.

Évidemment le même raisonnement nous montre que la transformation inverse  $T^{-1}$  est aussi analytique le long de ces bords.

*En ces paramètres normaux  $\varrho, \theta$  la transformation fondamentale  $T$  de la surface de section  $S_2$  en elle-même reste analytique même aux bords  $L_1$  et  $L_2$  c'est-à-dire les fonctions  $f$  et  $g$  qui entrent dans les équations (20) sont analytiques en  $\varrho, \theta, \mu$  pour les valeurs de  $\varrho$  correspondantes aux bords  $L_1$  et  $L_2$  de  $S_2$ , au moins pour  $\mu$  suffisamment petit.*

### 13. - Sur la forme de $T$ pour $\mu$ petit ou $C$ grand.

Nous voulons maintenant considérer de plus près la forme de la transformation  $T$  pour  $\mu$  petit ou pour  $C$  grand.

Puisque pour  $\mu=0$  nous obtenons le cas intégrable déjà discuté, nous pouvons écrire  $T$  sous la forme

$$\bar{\varrho}_1 = \bar{\varrho} + \mu r(\bar{\varrho}, \theta, \lambda, \mu), \quad \theta_1 = \theta - 2\pi\lambda^3 \bar{a}^{\frac{3}{2}} + \mu s(\bar{\varrho}, \theta, \lambda, \mu)$$

où nous avons écrit  $\lambda=1/\sqrt{C}$  et  $\bar{\varrho}=\varrho/\lambda$ ,  $\bar{a}=a/\lambda^2$ . Nous introduisons  $\bar{\varrho}$  au lieu de  $\varrho$  pour que les dimensions de  $L_1$  et  $L_2$  ne tendent pas vers zéro quand  $\lambda$  tend vers zéro et  $C$  tend vers l'infini. Les équations (18), (19) nous donnent alors des équations analogues en  $\bar{p}, \bar{q}, \bar{p}', \bar{q}'$  où  $p=\lambda\bar{p}$ ,  $q=\lambda\bar{q}$ ,  $\tau=\lambda\bar{\tau}$ ; et ces équations différentielles et l'intégrale de JACOBI correspondante, soit en les variables  $\bar{p}, \bar{q}, \bar{\tau}$  soit en  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}$ , nous montrent que pour  $\lambda=0$  il y a un problème dynamique limite (voir section 10 ci-dessus), une surface de section limite  $S_2$ , et une transformation limite  $\bar{T}$ .

En effet le problème dynamique en les variables  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}$  se réduit à un problème intégrable spécial de deux corps, à savoir celui d'un point, de masse infinitésimale,  $(\bar{x}, \bar{y})$ , relatif aux axes fixes des  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$ , attiré par un point de masse  $1 - \mu$  situé à l'origine. Par conséquent la transformation  $T$  se réduit ici à l'identité  $\varrho_1 = \varrho$ ,  $\theta_1 = \theta$ , toutes les courbes de mouvements étant des ellipses fermées. Donc  $r$  et  $s$  doivent contenir un facteur  $\lambda$ . Les cercles de rayon plus petit que  $(1 - \mu)$  sont les courbes limites de mouvement  $L_1^*$  et  $L_2^*$  avec les cercles rétrogrades et directs de rayon  $(1 - \mu)$  comme bords  $L_1$  et  $L_2$  respectivement (voir I, section 12).

Il est bien connu qu'il y a un autre problème même plus spécial que le problème restreint des trois corps dont il est un cas limite, à savoir le problème traité par HILL :

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} = \Omega x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} = \Omega y, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2\Omega - C,$$

$$\left(\Omega = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

En ce problème qui est très important pour la théorie du mouvement de la Lune il existe une symétrie par rapport à l'axe des  $y$  aussi bien que par rapport à l'axe des  $x$ . Ce cas est obtenu en négligeant la « parallaxe » du Soleil. Le résultat que je vais démontrer m'a été suggéré par cette double symétrie du cas limite de HILL.

Remarquons qu'en les variables  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}$  on aura pour la fonction  $\bar{\Omega} = \lambda^2 \Omega$  correspondante le développement en série :

$$(30) \quad \bar{\Omega}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda, \mu) = \frac{1 - \mu}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}} + \frac{3}{2} \lambda^2 \mu + \frac{1}{2} \lambda^6 [(1 + 2\mu)\bar{x}^2 + (1 - \mu)\bar{y}^2] + \lambda^8 \mu \Omega_8 + \dots$$

Par conséquent il y a une symétrie par rapport à l'axe des  $\bar{y}$  qui est valable jusqu'aux termes du 8<sup>e</sup> degré en  $\lambda$  et du premier degré en  $\mu$  <sup>(14)</sup>. Plus précisément en remplaçant  $\bar{x}$  et  $\bar{t}$  par  $-\bar{x}$  et  $-\bar{t}$  les équations différentielles et l'intégrale de JACOBI obtenues de (1) et (3) sont changées seulement en des termes contenant un facteur  $\lambda^8 \mu$ .

Supposons maintenant que nous écrivons la solution des équations différentielles sous la forme

$$\bar{x} = \Phi(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{x}'_0, \bar{y}'_0, \lambda, \mu, \bar{t} - \bar{t}_0), \quad \bar{y} = \Psi(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{x}'_0, \bar{y}'_0, \lambda, \mu, \bar{t} - \bar{t}_0)$$

où  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}', \bar{y}'$  se réduisent à  $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{x}'_0, \bar{y}'_0$  respectivement pour  $\bar{t} = \bar{t}_0$ . Les fonctions  $\Phi$  et  $\Psi$  seront analytiques en les variables indiquées (sauf pour le cas du choc). Considérons la solution particulière pour laquelle

$$\bar{y}_0 = 0, \quad \bar{x}'_0 = 0, \quad \bar{y}'_0 = \sqrt{2\bar{\Omega}(\bar{x}_0, 0, \lambda, \mu) - 1}$$

(14) Où  $\lambda$  est encore considéré comme le paramètre de  $S_2: \lambda = 1/\sqrt{C^*}$ .

à  $t_0=0$ . Cela veut dire que nous considérons la famille des solutions dont chaque membre correspond à une courbe de mouvement qui à  $\bar{t}=0$  traverse à angle droit l'axe de  $\bar{x}$  avec une abscisse  $\bar{x}_0$  et avec une vitesse satisfaisant à l'intégrale de JACOBI. Évidemment la courbe obtenue sera symétrique par rapport à l'axe des  $\bar{x}$ .

Mais pour  $\lambda=0$  il y a une courbe de mouvement circulaire de rayon  $1-\mu$  (direct ou rétrograde). Donc pour  $\mu$  et  $\bar{x}_0-1$  petits la courbe de mouvement coupera l'axe négatif des  $\bar{x}$  près de  $\bar{x}=-1$  avec une petite composante de vitesse  $V(\bar{x}_0, \lambda, \mu)$  dans la direction de l'axe positif des  $\bar{x}$ . Mais cette fonction  $V$  doit contenir un facteur  $\lambda^3$ . En effet si l'on supprime les termes en  $\lambda^3, \lambda^4, \dots$  dans les deux équations différentielles elles deviennent les équations d'un point  $(\bar{x}, \bar{y})$  de masse infinitésimale attiré vers l'origine de masse  $1-\mu$  suivant la loi de NEWTON dans un plan fixe; donc la fonction modifiée  $\bar{V}(\bar{x}_0, \lambda, \mu)$  ainsi obtenue s'évanouit identiquement, et nous devons avoir

$$V(\bar{x}_0, \lambda, \mu) \equiv \lambda^3(\alpha(\mu)(\bar{x}_0-1) + \beta(\mu)\lambda + \dots)$$

où nous aurons  $\alpha \neq 0$  (voir I, section 11). Par conséquent il y a une seule continuation analytique de mouvement circulaire qui coupe l'axe des  $\bar{x}$  deux fois à angle droit. De plus cette continuation doit être symétrique par rapport à l'axe des  $\bar{x}$  et constitue une courbe fermée de mouvement.

Mais si l'on omet les termes de  $\bar{Q}$  de la 8<sup>e</sup> puissance au moins en  $\lambda$  et de la 1<sup>re</sup> puissance au moins en  $\mu$ , cela ne changera  $V(\bar{x}_0, \lambda, \mu)$  qu'en des puissances semblables; et la série

$$\bar{x}_0 = 1 + S_1(\mu)\lambda + S_2(\mu)\lambda^2 + \dots$$

qui donne  $\bar{x}_0$  sera la même qu'auparavant jusqu'aux termes de degré 5 en  $\lambda$  et de degré 1 en  $\mu$  (un facteur en  $\lambda^3$  étant écarté). En substituant cette valeur modifiée pour  $\bar{x}_0$  dans les fonctions modifiées  $\Phi$  et  $\Psi$  on obtient une courbe symétrique par rapport à l'axe des  $\bar{x}$  et à l'axe des  $\bar{y}$ . En effet dans le cas contraire, puisque les équations et l'intégrale modifiées jouissent d'une double symétrie on obtiendrait une autre courbe par réflexion par rapport à l'axe des  $\bar{y}$ . Mais la continuation est unique.

Il s'ensuit que la famille des courbes fermées auxiliaires, qui définit  $S_2$  dans le problème restreint des trois corps, aussi bien que l'anomalie moyenne  $\theta$  jouissent d'une symétrie par rapport à l'axe des  $\bar{y}$  jusqu'aux termes qui contiennent un facteur  $\lambda^5\mu$ .

Choisissons maintenant la constante  $C$ . Les courbes  $\varrho = \text{const.}$  de  $S_2$  seront obtenues dans le plan des  $\bar{x}, \bar{y}$  en laissant  $\lambda$  croître de  $\lambda=1/\sqrt{C}$  à l'infini; elles deviendront de plus en plus symétriques par rapport à l'axe des  $\bar{y}$  quand  $\lambda$  tend vers zéro. Considérons deux points  $P$  et  $\bar{P}$  qui sont symétriques par rapport à  $\theta=\pi/2$  donc avec la même valeur de  $\varrho$  et avec  $\theta+\bar{\theta}=\pi$ . Ces points sont donc presque symétriques par rapport à l'axe des  $\bar{y}$  jusqu'aux termes d'ordre  $\lambda^5\mu$ ;

et les tangentes en ces points seront presque symétriques jusqu'au même degré. Par conséquent les deux courbes de mouvement tangentes seront presque symétriques dans ce sens.

Il est maintenant très simple de démontrer que les deux points transformés  $T(\varrho, \theta)$ ,  $T^{-1}(\varrho, \bar{\theta})$  auront des positions actuellement symétriques jusqu'au même degré; ce sont respectivement les points de tangence adjacents quand  $t$  croît et décroît à partir de  $\bar{t}=0$ . En effet si l'on modifie une famille analytique en  $\lambda, \mu$  seulement en des termes d'ordre  $\lambda^5\mu$  au plus, et en même temps une courbe tangente avec courbure différente de la même manière, la position du point où la courbe donnée est tangente à une courbe de la famille variera analytiquement par cet ordre de grandeur au plus, parmi les courbes de la famille.

D'où la conclusion concernant la forme de  $T$ :

*La transformation  $T$  est de la forme*

$$(31) \quad \bar{\varrho}_1 = \varrho + \lambda\mu r_1(\bar{\varrho}, \theta, \lambda, \mu), \quad \bar{\theta}_1 = \theta - 2\pi\lambda^3\bar{a}^3(\bar{\varrho}) + \lambda\mu s_1(\bar{\varrho}, \theta, \lambda, \mu),$$

$$\left( \bar{a}(\bar{\varrho}) = \frac{1}{1 - 2\lambda^6\bar{\varrho}^4 + 2\lambda^3\bar{\varrho}\sqrt{\lambda^6\bar{\varrho}^6 - \bar{\varrho}^2 + 2}} \right)$$

en les paramètres normaux  $\bar{\varrho}, \theta$  ( $\bar{\varrho} = \varrho/\lambda$ ), où  $r_1$  et  $s_1$  sont analytiques en les variables indiquées et de période  $2\pi$  en  $\theta$  pour  $\mu$  petit, et telles que la transformation  $RT=U$  ( $R$  étant une réflexion par rapport à  $\theta=0$ ) est involutive et que la transformation  $\bar{R}T=\bar{U}$  ( $\bar{R}$  étant une réflexion par rapport à l'axe  $\theta=\pi/2$ ) est involutive jusqu'aux termes en  $\lambda^5\mu$ .

#### 14. - Introduction des variables canoniques $\varrho^*, \theta^*$ .

Jusqu'ici nous n'avons pas utilisé le fait qu'il existe une intégrale invariante  $\iint I(\varrho, \theta)d\varrho d\theta$ . À cette intégrale invariante correspond le volume invariant  $\iiint dpdq d\psi$  (voir la section 5 plus haut et aussi I, section 14).

En effet l'élément de l'aire ordinaire de  $S_2$  aura la forme  $M(\varrho, \theta)d\varrho d\theta$  où la fonction  $M(\varrho, \theta)$  est analytique et positive partout. Pendant le temps  $d\tau$  cet élément traversera un élément cylindrique de volume  $M(\varrho, \theta)d\varrho d\theta v \sin \omega d\tau$  où  $v$  est la vitesse et  $\omega$  est l'angle formé par la surface  $S_2$  et la trajectoire qui passe par l'élément donné. Évidemment nous devons avoir

$$m(\varrho_1, \theta_1)M(\varrho_1, \theta_1)v_1 \sin \omega_1 d\varrho_1 d\theta_1 d\tau = m(\varrho, \theta)M(\varrho, \theta)v \sin \omega d\varrho d\theta d\tau$$

à cause de l'invariance de  $\int m(Q)dQ$  (voir l'équation (10)). Ceci nous donne la fonction quasi-invariante de l'intégrale invariante

$$(32) \quad I(\varrho, \theta) = m(\varrho, \theta)M(\varrho, \theta)v \sin \omega$$

et son équation fonctionnelle

$$(33) \quad I(\varrho, \theta) = I(\varrho_1, \theta_1) \frac{\partial(\varrho_1, \theta_1)}{\partial(\varrho, \theta)}.$$

Un calcul direct nous montre que pour  $\mu=0$  l'on a

$$(34) \quad I(\varrho, \theta) = I(\varrho) = \frac{d}{d\varrho} (\sqrt{2h(\varrho^2)} - \varrho^2).$$

Nous allons maintenant introduire d'autres variables « canoniques »  $\varrho^*, \theta^*$  de la manière suivante. Définissons la variable  $\varrho^*$  comme égale à  $\int_0^{2\pi} \int_{\varrho'}^{\varrho} I(\varrho, \theta) d\varrho d\theta / J$  où le domaine de l'intégration est une région annulaire et où  $J$  représente l'intégrale complète. Donc on aura toujours  $0 \leq \varrho^* \leq 1$ .

Maintenant, prenons  $\theta^*$  égale à  $2\pi \int_0^{\theta} I(\varrho, \theta) d\theta / K(\varrho)$  où  $K$  représente l'intégrale complète obtenue du numérateur en prenant  $\theta=2\pi$ . En ces variables l'intégrale invariante s'écrit tout simplement  $\iint d\varrho^* d\theta^*$ . De plus  $\varrho^*, \theta^*$  sera évidemment des variables normales pour  $S_2$ , au moins sauf le long des deux bords. Dans le voisinage de ces bords  $L_1$  et  $L_2$  nous voyons qu'on a

$$\varrho^* = a(\varrho - \varrho')^2 + \dots, \quad \theta^* = 1 + b(\varrho'' - \varrho)^2 + \dots$$

respectivement, ainsi les variables  $\sqrt{\varrho^*}, \theta^*$  et  $\sqrt{1-\varrho^*}, \theta^*$  seront ici normales.

Donc les variables canoniques  $\varrho^*, \theta^*$  définies par les équations

$$(35) \quad \begin{cases} \varrho^* = \chi(\varrho) \equiv \int_0^{2\pi} \int_{\varrho'}^{\varrho} I(\varrho, \theta) d\varrho d\theta / \int_0^{2\pi} \int_{\varrho'}^{\varrho''} I(\varrho, \theta) d\varrho d\theta \\ \theta^* = 2\pi \int_0^{\theta} I(\varrho, \theta) d\theta / \int_0^{2\pi} I(\varrho, \theta) d\theta \end{cases}$$

font correspondre à  $S_2$  le domaine  $0 \leq \varrho^* \leq 1, \theta \leq \theta^* \leq 2\pi$  avec  $\theta^*$  angulaire de période  $2\pi$ . Les variables  $\varrho^*, \theta^*$  sont normales à l'intérieur de  $S_2$ , tandis que  $\sqrt{\varrho^*}, \theta^*$  et  $\sqrt{1-\varrho^*}, \theta^*$  sont normales dans le voisinage des bords  $L_1$  et  $L_2$  respectivement.

Les équations de la transformation en ces variables s'écrivent

$$(36) \quad \begin{cases} \theta_1^* = \theta^* - 2\pi\lambda^3 a^{*3}(\varrho^*) + \lambda\mu s^*(\varrho^*, \theta^*, \lambda, \mu), & (a^*(\varrho^*) \equiv \bar{a}(\varrho/\lambda)) \\ \varrho_1^* = \varrho^* + \lambda\mu r^*(\varrho^*, \theta^*, \lambda\mu) \end{cases}$$

En ces variables nous aurons encore la propriété de symétrie par rapport  $\theta^*=0$  symbolisée par la formule  $T=RU$  ( $R$  étant une réflexion

par rapport à l'axe  $\theta^*=0$ ) et la propriété de symétrie approximative par rapport à  $\theta^*=\pi/2$  symbolisée par  $T \sim \overline{R} \overline{U}$ , valable jusqu'aux termes d'ordre  $\lambda^5 \mu$  au moins. De plus l'intégrale invariante se réduit à  $\iint d\varrho^* d\theta^*$  donc nous aurons l'identité

$$\frac{\partial \varrho_1^*}{\partial \varrho^*} \frac{\partial \theta_1^*}{\partial \theta^*} - \frac{\partial \varrho_1^*}{\partial \theta^*} \frac{\partial \theta_1^*}{\partial \varrho^*} \equiv 1.$$

**15. - Une autre forme de  $T$ ,  $T^2$ ,...**

Il y a des avantages formels qui résultent de l'emploi en Dynamique théorique des transformations de contact, en associant la moitié des variables dépendantes données avec les variables conjuguées transformées. Ce fait a été reconnu depuis HAMILTON et JACOBI. Pour notre problème cela signifie en particulier qu'on doit associer  $\varrho^*$  et  $\theta_1^*$  et en même temps  $\varrho_1^*$  et  $\theta^*$ . Par l'emploi d'une telle association POINCARÉ (loc. cit., t. 3) a réduit le problème des trajectoires fermées a un problème des points critiques, au moins pour  $\mu$  « infinitesimal » et dans le voisinage d'un mouvement périodique donné.

L'emploi de nos variables canoniques  $\varrho^*$ ,  $\theta^*$  nous permet d'aller plus loin dans cette voie, comme nous allons voir.

Considérons l'intégrale

$$\int (\varrho_1^* d\theta_1^* - \varrho^* d\theta^*)$$

prise le long d'une petite courbe fermée de  $S_2$ . À cause de l'invariance des aires, cette intégrale doit s'annuler toujours; donc on aura identiquement

$$(37) \quad \varrho_1^* d\theta_1^* - \varrho^* d\theta^* = dF(\varrho^*, \theta^*)$$

où la fonction  $F(\varrho^*, \theta^*)$  est analytique à l'intérieur de  $S_2$  et continue partout. De plus si  $F$  devient  $\overline{F}$  par continuation, après le tour de la surface annulaire  $S_2$ , nous aurons aussi  $\varrho_1^* d\theta_1^* - \varrho^* d\theta^* = d\overline{F}$ , donc  $d(F - \overline{F}) = 0$ . Par conséquent on a  $\overline{F} = F + \text{const.}$ , et la différence  $\overline{F} - F$  sera donnée par l'intégrale  $\int (\varrho_1^* d\theta_1^* - \varrho^* d\theta^*)$  prise autour de  $S_2$ . Mais le long de  $L_1$  on a  $\varrho_1^* = \varrho^* = 0$ , donc l'intégrale doit se réduire à zéro.

D'autre part si l'on a  $(\varrho_1^*, \theta_1^*) = T(\varrho^*, \theta^*)$  la propriété  $T = RU$  donne  $(\varrho^*, -\theta^*) = T(\varrho_1^*, -\theta_1^*)$ . Par conséquent selon l'identité (37) de dessus

$$-\varrho^* d\theta^* + \varrho_1^* d\theta_1^* = dF(\varrho_1^*, -\theta_1^*),$$

d'où il s'ensuit que  $F(\varrho_1^*, -\theta_1^*)$  ne diffère de  $F(\varrho^*, \theta^*)$  que par une constante. Mais quand  $(\varrho^*, \theta^*)$  parcourt  $L_1$  dans le sens positif,  $(\varrho_1^*, -\theta_1^*)$  le parcourt dans le sens négatif, et les deux points doivent se croiser au moins une fois. Donc ces deux fonctions sont égales identiquement. Nous concluons que l'équation fonctionnelle suivante a lieu

$$(38) \quad F(\varrho_1^*, -\theta_1^*) \equiv F(\varrho^*, \theta^*).$$

Mais pour  $\mu$  suffisamment petit ( $\leq \mu_1$ ) nous pouvons regarder  $\varrho^*$  et  $\theta_1^*$  comme des variables normales à l'intérieur de  $S_2$  aussi bien que  $\varrho^*$  et  $\theta^*$ , puisque nous avons  $\partial\theta_1^*/\partial\theta > 0$  pour  $\mu$  petit. Donc nous avons

$$\varrho_1^* d\theta_1^* - \varrho^* d\theta^* = d\bar{F}(\varrho^*, \theta_1^*)$$

où  $\bar{F}$  est analytique en  $\varrho^*$  et  $\theta_1^*$ , et périodique en  $\theta_1^*$ . Par conséquent nous avons aussi

$$(39) \quad \varrho_1^* d\theta_1^* + \theta^* d\varrho^* = d(\varrho^* \theta_1^*) + d\tilde{F}(\varrho^*, \theta_1^*)$$

où  $\tilde{F} = \bar{F} + \varrho^*(\theta^* - \theta_1^*)$ . Mais quand le point  $(\varrho^*, \theta_1^*)$  fait le tour de  $S_2$ , les variables  $\varrho^*$  et  $\theta^* - \theta_1^*$  reviennent à leurs valeurs initiales, donc  $\tilde{F}(\varrho^*, \theta_1^*)$  doit être analytique en  $\varrho^*$ ,  $\theta_1^*$  et périodique en  $\theta_1^*$ .

En utilisant encore une fois la symétrie déjà employée nous trouvons

$$-\varrho^* d\theta^* - \theta_1^* d\varrho_1^* = d(-\varrho_1^* \theta^*) + d\tilde{F}(\varrho_1^*, -\theta^*)$$

d'où, par soustraction, on obtient l'équation (41) en bas.

Ainsi, en comparant les deux côtés de (39) on obtient le résultat suivant:

Pour  $\mu \leq \mu_1$  suffisamment petit la transformation  $T$  peut s'écrire en les variables canoniques  $\varrho^*$ ,  $\theta^*$  de la manière suivante:

$$(40) \quad \varrho_1^* = \varrho^* + \tilde{F}_{\theta_1^*}(\varrho^*, \theta_1^*), \quad \theta^* = \theta_1^* + \tilde{F}_{\varrho^*}(\varrho^*, \theta_1^*)$$

où  $\tilde{F}$  est analytique en  $\varrho^*$  et  $\theta_1^*$  et périodique de période  $2\pi$  en  $\theta_1^*$  sauf sur les bords de  $L_1$  et  $L_2$  où l'on a

$$\tilde{F} \equiv c + \varrho^* F_1(\sqrt{\varrho^*}, \theta_1^*) \quad \text{et} \quad \tilde{F} \equiv d + (1 - \varrho^*) F_2(\sqrt{1 - \varrho^*}, \theta_1^*)$$

respectivement avec  $F_1$  et  $F_2$  analytiques en les variables indiquées. De plus  $\tilde{F}$  satisfait à l'équation de symétrie

$$(41) \quad \tilde{F}(\varrho^*, \theta_1^*) - \tilde{F}(\varrho_1^*, -\theta^*) = (\varrho^* - \varrho_1^*)(\theta^* - \theta_1^*)$$

aussi bien qu'à l'équation de symétrie approximative

$$(41') \quad \tilde{F}(\varrho^*, \theta_1^*) - \tilde{F}(\varrho_1^*, \pi - \theta^*) \sim (\varrho^* - \varrho_1^*)(\theta^* - \theta_1^*),$$

valable jusqu'aux termes de l'ordre  $\lambda^5 \mu$  au moins en  $\lambda$  et  $\mu$ . (Les variables  $\mu$  et  $\lambda = 1/\sqrt{C}$  sont supprimées ici).

Remarquons maintenant que la transformation  $T^k$  pour  $k$  quelconque ne change pas les aires  $\iint d\varrho^* d\theta^*$ , et que  $\varrho_k^*$  et  $\theta_k^*$  peuvent être employées comme des variables normales de  $S_2$  pour  $\mu \leq \mu_k$  (suffisamment petit). Remarquons aussi que  $RT^k = U^k$  est involutive. De cette manière nous concluons plus généralement:

Pour  $\mu \leq \mu_k$  suffisamment petit la transformation  $T^k$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) peut s'écrire

$$(42) \quad \varrho_k^* = \varrho^* + \widetilde{F}_{\theta_k^*}^{(k)}(\varrho^*, \theta_k^*), \quad \theta^* = \theta_k^* + \widetilde{F}_{\varrho^*}^{(k)}(\varrho^*, \theta_k^*)$$

où la fonction  $\widetilde{F}^{(k)}(\varrho^*, \theta_k^*)$  est du même caractère analytique que  $\widetilde{F}(\varrho^*, \theta^*)$  avec l'expression explicite,

$$(43) \quad \widetilde{F}^{(k)}(\varrho^*, \theta_k^*) \equiv \widetilde{F}(\varrho^*, \theta_1^*) + \widetilde{F}(\varrho_1^*, \theta_2^*) + \dots + \widetilde{F}(\varrho_{k-1}^*, \theta_k^*) + \\ + \varrho^*(\theta_1^* - \theta_k^*) + \varrho_1^*(\theta_2^* - \theta_1^*) + \dots + \varrho_{k-1}^*(\theta_k^* - \theta_{k-1}^*).$$

De plus on a  $T^k = RU^{(k)}$  où  $U^{(k)}$  est involutive et aussi  $T^k = \overline{R}\overline{U}^{(k)}$  où  $\overline{U}^{(k)}$  est involutive jusqu'aux termes d'ordre  $\lambda^3\mu$  au moins en  $\lambda$  et  $\mu$ . Par conséquent on a l'équation de symétrie

$$(44) \quad \widetilde{F}^{(k)}(\varrho^*, \theta_k^*) - \widetilde{F}^{(k)}(\varrho_k^*, -\theta^*) = (\varrho^* - \varrho_k^*)(\theta^* - \theta_k^*)$$

aussi bien que l'équation de symétrie approximative

$$(44') \quad \widetilde{F}^{(k)}(\varrho^*, \theta_k^*) - \widetilde{F}^{(k)}(\varrho_k^*, \pi - \theta_k^*) \simeq (\varrho^* - \varrho_k^*)(\theta^* - \theta_k^*),$$

valable jusqu'aux termes d'ordre  $\lambda^3\mu$  au moins en  $\lambda$  et  $\mu$ .

### 16. - Les points invariants de $T^k$ ( $k=1, 2, \dots$ ).

Les résultats de la section précédente nous permettent d'obtenir une forme élégante pour les points fixes de  $T^k$  pour  $\mu \leq \mu_k$ . Ces points correspondent aux trajectoires fermées qui traversent  $S_2$  précisément  $k$  fois en tournant  $l$  fois autour de  $L_1$  et  $L_2$ . Puisqu'on a en ce cas  $\varrho_k = \varrho$ ,  $\theta_k = \theta + 2l\pi$  on obtient des équations (42)

$$\widetilde{F}_{\theta}^{(k)}(\varrho^*, \theta^*) = 0, \quad \widetilde{F}_{\varrho}^{(k)}(\varrho^*, \theta^*) + 2l\pi = 0.$$

Inversement quand ces équations ont lieu en un point  $(\varrho^*, \theta_k^*)$  les mêmes équations nous montrent que  $\varrho_k^* = \varrho$ ,  $\theta_k^* = \theta + 2l\pi$ . Donc nous concluons :

*Les points fixes de  $T^k$  pour lesquels  $\theta$  croît de  $2l\pi$  sont (pour  $\mu \leq \mu_k$ ) précisément les points critiques de la fonction*

$$(45) \quad \widetilde{F}^{(k,l)}(\varrho^*, \theta^*) \equiv \widetilde{F}^{(k)}(\varrho^*, \theta^*) + 2l\pi\varrho^*.$$

Dans le cas où cette fonction  $\widetilde{F}^{(k,l)}$  ne possède aucun point critique, les lignes  $F^{(k,l)}(\varrho^*, \theta^*) = F_{kl}$  ne peuvent pas se croiser. De plus,  $L_1$  et  $L_2$  sont deux lignes fermées de cette espèce. Quand la constante  $F_{kl}$  à droite croît de la moindre valeur de  $F^{(k,l)}$  (disons le long de  $L_1$ ) à la plus grande (le long de  $L_2$ ), ces courbes doivent s'épanouir de  $L_1$  à  $L_2$ . D'autre part si ces lignes de niveau se croisent il y a au moins deux points critiques de cette fonction.



**17. - Continuation analytique des mouvements périodiques de  $\mu=0$ .**

Nous voulons maintenant employer ces instruments analytiques puissants pour étudier la question intéressante, non encore résolue, de la totalité des mouvements périodiques qui donnent des véritables continuations analytiques de certains mouvements périodiques pour  $\mu=0$ . Jusqu'ici l'on a toujours cru qu'il n'existe pas de tels mouvements autre que les mouvements symétriques par rapport à l'axe des  $x$ . Nous allons obtenir un critérium qui permettra de répondre définitivement à cette question aussitôt que le coefficient de  $\mu$  dans le développement de  $\tilde{F}(\varrho^*, \theta^*)$  en une série de puissances de  $\mu$  a été explicitement calculé. *Pour des raisons que j'expliquerai il me semble bien probable que de tels mouvements, périodiques non symétriques par rapport à l'axe des  $x$ , mais à peu près symétriques par rapport à l'axe des  $y$ , existent pour  $\lambda$  assez petit.*

Écrivons les équations qui définissent  $T$  de la manière suivante :

$$(48) \quad \begin{cases} \varrho_1^* = \varrho^* + \mu\varphi_1(\varrho^*, \theta^*, \lambda) + \mu^2\varphi_2(\varrho^*, \theta^*, \lambda) + \dots, \\ \theta_1^* = \theta^* - 2\pi\lambda^3 a^{*\frac{3}{2}}(\varrho^*, \lambda) + \mu\psi_1(\varrho^*, \theta^*, \lambda) + \dots \end{cases}$$

Si nous exprimons  $\varrho_1^*$  et  $\theta^*$  en fonctions de  $\varrho^*$  et  $\theta_1^*$  nous obtenons les séries

$$(48') \quad \begin{cases} \varrho_1^* = \varrho^* + \mu\varphi_1(\varrho^*, \theta_1^* + 2\pi\lambda^3 a^{*\frac{3}{2}}(\varrho^*, \lambda)) + \dots, \\ \theta^* = \theta_1^* + 2\pi\lambda^3 a^{*\frac{3}{2}}(\varrho^*, \lambda) - \mu\psi_1(\varrho^*, \theta_1^* + 2\pi\lambda^3 a^{*\frac{3}{2}}(\varrho^*, \lambda)) + \dots \end{cases}$$

Rappelons maintenant les équations (40). Nous en concluons immédiatement qu'il existe une fonction  $\tilde{F}_1$  définie par le développement en série

$$\tilde{F}(\varrho^*, \theta_1^*, \lambda, \mu) \equiv 2\pi\lambda^3 \int_{\varrho^*}^{\varrho^*} a^{*\frac{3}{2}}(\varrho^*, \lambda) d\varrho^* + \mu\tilde{F}_1^*(\varrho^*, \theta_1^*, \lambda) + \dots$$

telle que

$$\begin{cases} \varphi_1(\varrho^*, \theta_1^* + 2\pi\lambda^3 a^{*\frac{3}{2}}(\varrho^*, \lambda)) \equiv \tilde{F}_{1\theta^*}(\varrho^*, \theta_1^*, \lambda) \dots, \\ \psi_1(\varrho_1^*, \theta_1^* + 2\pi\lambda^3 a^{*\frac{3}{2}}(\varrho^*, \lambda)) \equiv -\tilde{F}_{1\varrho^*}(\varrho^*, \theta_1^*, \lambda) \dots \end{cases}$$

La condition précise pour que l'on ait  $\varrho_1^* = \varrho^*$ ,  $\theta_1^* = \theta^* + 2l\pi$  est que la fonction  $\tilde{F} + 2l\pi\varrho^*$  ait un point critique en  $(\varrho^*, \theta^*)$ . Cela donne deux conditions

$$\begin{cases} \tilde{F}_{1\theta^*}(\varrho^*, \theta^*, \lambda) + \mu\tilde{F}_{2\theta^*}(\varrho^*, \theta^*, \lambda) + \dots = 0 \\ 2\pi\lambda^3 a^{*\frac{3}{2}}(\varrho^*, \lambda) + 2l\pi + \mu\tilde{F}_{1\varrho^*}(\varrho^*, \theta^*, \lambda) + \dots = 0. \end{cases}$$

Donc il peut exister une continuation analytique de  $\mu=0$  au point  $(\varrho^*, \theta^*)$  si la valeur de  $\varrho^*$  satisfait à l'équation indépendante de  $\theta^*$

$$\varrho^* = a^{*(-1)}\left(\left(-\frac{l}{\lambda^3}\right)^{\frac{2}{3}}, \lambda\right)$$

(où  $a^{*(-1)}$  est la fonction inverse de  $a^*$ ) et si, pour cette  $\varrho^*$ ,  $\theta^*$  est une racine de l'équation  $\tilde{F}_{1\theta^*}(\varrho^*, \theta^*, \lambda) = 0$ . Il suffit pour l'existence d'une telle continuation unique que cette racine soit simple. Par conséquent nous n'avons qu'à examiner les racines de cette équation pour trouver de tels points fixes de  $T$ .

Considérons d'une façon analogue les points fixes de la transformation itérée  $T^k$  ( $k=1, 2, \dots$ ). Ici il faut remplacer  $a^{*\frac{2}{3}}$  par  $ka^{*\frac{2}{3}}$ . Nous trouvons que les conditions nécessaires pour que  $\varrho^*$ ,  $\theta^*$  puisse donner lieu à une telle continuation analytique, sont les suivantes :

$$(a) \quad \varrho^* = a^{*(-1)}\left(\left(-\frac{l}{k\lambda^3}\right)^{\frac{2}{3}}, \lambda\right); \quad (b) \quad \tilde{F}_{1\theta^*}^{(k)}(\varrho^*, \theta^*, \lambda) = 0.$$

En même temps une telle continuation unique existera si  $\tilde{F}_{1\theta^*} \neq 0$ , c'est-à-dire si  $\theta^*$  est une racine simple de l'équation (b) en  $\theta^*$ . Ici  $\tilde{F}_1^{(k)}$  désigne le premier terme du développement de  $\tilde{F}^{(k)}$  en série de puissances de  $\mu$ .

Mais selon la définition (43) nous avons explicitement

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1^{(k)} = & \tilde{F}_1(\varrho^*, \theta - 2\pi\lambda^3 a^{*\frac{2}{3}}(\varrho^*, \lambda), \lambda) + \tilde{F}_1(\varrho^*, \theta^* - 4\pi\lambda^3 a^{*\frac{2}{3}}(\varrho^*, \lambda), \lambda) + \dots + \\ & + \tilde{F}_1(\varrho^*, \theta^* - 2k\pi\lambda^3 a^{*\frac{2}{3}}(\varrho^*, \lambda), \lambda). \end{aligned}$$

Cela nous permet de donner les conditions de dessus sous une forme plus explicite.

Pour que  $(\varrho^*, \theta^*)$  soit un point fixe de  $T^k$  avec  $\theta_k^* = \theta^* + 2l\pi$ , qui permette une continuation analytique de  $\mu=0$ , il faut que

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \varrho^* = a^{*(-1)}\left(\left(-\frac{l}{k\lambda^3}\right)^{\frac{2}{3}}, \lambda\right), \\ (b) \quad \tilde{F}_{1\theta^*}(\varrho^*, \theta^* + \frac{2l\pi}{k}, \lambda) + \tilde{F}_{1\theta^*}(\varrho^*, \theta^* + \frac{4l\pi}{k}, \lambda) + \dots + \\ \quad \quad \quad + \tilde{F}_{1\theta^*}(\varrho^*, \theta^* + 2l\pi, \lambda) = 0, \end{array} \right.$$

où  $\tilde{F}_1(\varrho^*, \theta^*, \lambda)$  désigne le coefficient de  $\mu$  dans la série qui donne  $\tilde{F}(\varrho^*, \theta^*, \lambda, \mu)$  en puissances de  $\mu$ . Il suffit pour l'existence d'une continuation unique que la fonction à la gauche dans l'équation (49), (b) ait une dérivée non nulle par rapport à  $\theta^*$  pour cette même valeur de  $\theta^*$ .

Remarquons que si  $\theta^*$  est une racine de (b),  $\theta^* + 2i\pi/k$  le sera aussi pour

$i=1, 2, \dots, k-1$ . Donc les valeurs de  $\theta^*$  sont distribuées uniformément dans un sens angulaire.

Jusqu'ici nous n'avons pas employé la symétrie de  $F_1$  qui résulte par comparaison de (41), à savoir

$$(41') \quad \widetilde{F}_1(\varrho^*, -\theta^*, \lambda) = F_1(\varrho^*, \theta^* - 2\pi\lambda^3\alpha^{*\frac{3}{2}}(\varrho^*, \lambda), \lambda).$$

Cette équation nous montre que la fonction  $F_1$  jouit d'une espèce de symétrie angulaire par rapport à la courbe radiale

$$\theta^* + \pi\lambda^3\alpha^{*\frac{3}{2}}(\varrho^*, \lambda) = 0,$$

qui nous permet de la développer en une série de cosinus de la forme suivante

$$\begin{aligned} \widetilde{F}_1(\varrho^*, \theta^*, \lambda) \equiv & \widetilde{F}_{10}(\varrho^*, \lambda) + \widetilde{F}_{11}(\varrho^*, \lambda) \cos(\theta^* + \pi\lambda^3\alpha^{*\frac{3}{2}}(\varrho^*, \lambda)) + \\ & + \widetilde{F}_{12}(\varrho^*, \lambda) \cos 2(\theta^* + \pi\lambda^3\alpha^{*\frac{3}{2}}(\varrho^*, \lambda)) + \dots \end{aligned}$$

De plus, pour une valeur de  $\varrho^*$  qui satisfait à (a), cette condition prend la forme

$$\widetilde{F}_1(\varrho^*, -\theta^*, \lambda) = \widetilde{F}_1\left(\varrho^*, \theta^* + \frac{2l\pi}{k}\right)$$

et le point de symétrie est donné par  $\theta^* = -l\pi/k$ . Par conséquent la fonction de  $\theta^*$  de période  $2\pi/k$  à la gauche dans (b) doit être une fonction impaire de  $\theta^*$ .

Donc pour toute valeur de  $\varrho^*$  qui satisfait à (49), (a), et qui se trouve entre  $\varrho^{*'}$  et  $\varrho^{*''}$ ,  $k$  et  $l$  n'ayant aucun facteur commun, il y a nécessairement au moins  $2k$  valeurs de  $\theta^*$  qui satisfont à (b); ils forment deux séries,

$$\theta^* = 0, \quad \frac{2l\pi}{k}, \dots, \quad \frac{2(k-1)l\pi}{k} \quad \text{et} \quad \theta^* = \frac{l\pi}{k}, \dots, \quad \frac{(2k-1)l\pi}{k},$$

uniformément distribuées en sens angulaire.

Mais il est bien connu qu'il existe deux mouvements périodiques symétriques simples correspondants qu'on puisse continuer de  $\mu=0$ , et que tout mouvement périodique symétrique aura seulement un représentant dans le voisinage de ces mêmes valeurs de  $\theta$ .

*Donc l'application des équations (49) donnent immédiatement les mouvements périodiques symétriques bien connus. Elle montre aussi que si la fonction à la gauche dans (49), (b) s'évanouit pour d'autres valeurs de  $\theta^*$ , il correspondra à chacune des deux séries de telles racines une continuation analytique unique (au moins si ces racines ne sont pas doubles), et aussi que les deux mouvements périodiques correspondants doivent être non symétriques par rapport à l'axe des  $x$ .*

Suivons un peu plus loin la possibilité de l'existence de telles valeurs de  $\theta^*$ .

Si l'on développe la fonction  $\tilde{F}_1^{(k)}$  en une série analogue de cosinus, on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1^{(k)}(\varrho^*, \theta^*, \lambda) \equiv & k[\tilde{F}_{10}(\varrho^*, \lambda) + \tilde{F}_{1k}(\varrho^*, \lambda) \cos k(\theta^* - \pi\lambda^3 a^{*3}(\varrho^*, \lambda)) + \\ & + \tilde{F}_{12k}(\varrho^*, \lambda) \cos 2k(\theta^* - \pi\lambda^3 a^{*3}(\varrho^*, \lambda)) + \dots]. \end{aligned}$$

L'équation (49), (b) s'écrit ainsi dans la forme analogue :

$$\tilde{F}_{1k}(\varrho^*, \lambda) \sin(k\theta^* + l\pi) + 2\tilde{F}_{2k}(\varrho^*, \lambda) \sin 2k(\theta^* + l\pi) + 3\tilde{F}_{3k} \sin 3k(\theta^* + l\pi) + \dots = 0,$$

où les racines qui nous intéressent sont celles pour lesquelles  $\sin k\theta^* \neq 0$ . Remarquons en particulier que  $\theta^* = \pi/2$  n'est pas une racine de  $\sin k\theta^* = 0$  pour  $k$  impair.

Mais selon nos résultats de plus haut la fonction  $\tilde{F}_1^{(k)}$  doit être à *peu près* symétrique par rapport à  $\theta^* = \frac{\pi}{2} + \pi\lambda^3 a^{*3}(\varrho^*, \lambda)$ ; et par conséquent la fonction à gauche dans notre dernière équation doit être à *peu près* impaire par rapport à  $\theta^* = \frac{\pi}{2}$ . Plus précisément, les coefficients  $\tilde{F}_{1k}, \tilde{F}_{3k}, \dots$  doivent avoir des développements en puissances de  $\lambda$  qui commencent avec des termes du cinquième ordre, au moins, en  $\lambda$ . D'autre part il semble bien probable que les autres coefficients  $\tilde{F}_{2k}, \tilde{F}_{4k}, \dots$  contiendront en général des termes du premier ordre en  $\lambda$ .

De plus, la fonction  $\tilde{F}_1(\varrho^*, \theta^*, \lambda)$  est périodique et analytique en  $\theta$ . Par conséquent les coefficients  $\tilde{F}_{10}, \tilde{F}_{11}, \dots, \tilde{F}_{1l}, \dots$ , de sa série en cosinus doivent décroître rapidement, de façon que

$$|\tilde{F}_{1l}| < M\sigma^l \qquad |\sigma| < 1.$$

La dépendance asymptotique de  $\tilde{F}_{1l}$  sur l'indice  $l$  dépendra de la distribution et du caractère des singularités de la fonction  $\tilde{F}_1(\varrho^*, \theta^*, \lambda)$ .

Donc, si les coefficients du développement en puissance de  $\lambda$  de  $F_{1l}$  décroissent géométriquement quand  $l$  croît, il paraît bien probable en vertu de l'équation de dessus, qu'il doit exister d'autres racines réelles près de  $\theta^* = \pi/2$  pour  $k$  impair.

Néanmoins pour résoudre définitivement la question d'une extension analytique des mouvements périodiques non symétriques de cette espèce il semble être nécessaire d'étudier d'une façon plus détaillée la fonction  $F_1(\varrho^*, \theta^*, \lambda)$  et en particulier de déterminer les coefficients de son développement en puissances de  $\lambda$ .

Il est facile de construire dans le plan des  $x, y$  la figure limite d'une telle famille périodique non symétrique. En effet pour  $\mu = 0$  le mouvement général est celui d'un point qui se meut dans une certaine ellipse avec un foyer au point  $x = y = 0$  suivant la loi des aires, tandis que l'ellipse tourne avec une

vitesse angulaire  $-1$  par rapport aux axes. Dans le cas que nous considérons, l'axe initial se trouve très près de l'axe des  $y$  et l'ellipse fait  $l$  révolutions complètes pendant une période tandis que le point circule  $k$  fois ( $k$  impair) autour de l'ellipse. De plus, puisque  $\lambda$  est très petit et  $k$  est grand et d'ordre  $\lambda^{-3}$  au moins, l'ellipse sera très petite et sera parcourue beaucoup de fois pendant une période. Évidemment une telle figure périodique limite n'est pas symétrique par rapport à l'axe des  $x$ .