ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

JAN ARNOLDUS SCHOUTEN
JOHANNES HAANTJES

Konforme Feldtheorie II; R_6 und Spinraum

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 4, no 2 (1935), p. 175-189
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1935_2_4_2_175_0>

KONFORME FELDTHEORIE II; R_6 UND SPINRAUM

von JAN ARNOLDUS SCHOUTEN und JOHANNES HAANTJES (Delft).

Zusammenfassung.

Ist $\mathfrak{R}_6'$ die 15-gliedrige und ∞^{15} Transformationen enthaltende Gruppe der reellen Drehungen in einer R_6 mit beliebiger Signatur, die sich innerhalb der Gruppe stetig in die identische Transformation überführen lassen, und ist $\mathfrak{U}_4$ die 15-gliedrige und ∞^{30} Transformationen enthaltende Gruppe der unimodularen komplexen linearen homogenen Transformationen in einer E_4 (Gruppe der Spinvektoren), so lautet das Problem: diejenige Untergruppe $\mathfrak{U}_4'$ von $\mathfrak{U}_4$ zu bestimmen, die mit $\mathfrak{R}_6'$ meroedrisch (2.1) isomorph ist (*). Es zeigt sich, dass für geraden bzw. ungeraden Index von R_6, $\mathfrak{U}_4'$ diejenige Untergruppe von $\mathfrak{U}_4$ ist, die eine hermitisch symmetrische Grösse $\omega_{\bar{A}B}$ bzw. eine hermitisch umkehrbaren Grösse $\Omega^{A}_{\cdot\bar{B}}$ invariant lässt. Durch Spezialisierung lassen sich ähnliche Sätze für R_5 und R_4 ableiten. Im letzten Abschnitt wird auf die Konsequenzen für die Physik hingewiesen.

Einleitung.

Wir betrachten eine E_4 (1) mit den kartesischen Koordinaten X^A (A,...., $G=1$,...., 4), die der Gruppe aller reellen und komplexen linearen Transformationen unterworfen sind. Diese Gruppe ist 20-gliedrig und enthält ∞^{40} Transformationen. Die 4 Bestimmungszahlen der kontravarianten Vektoren dieser E_4 unterliegen der Gruppe aller linearen homogenen Transformationen, die 16-gliedrig ist und ∞^{32}

(*) Wir verdanken Herrn W. v. d. WOUDE, dessen Arbeit unmittelbar vor dieser abgedruckt ist, die Idee, die beiden Scharen von E_3 zur Bestimmung der isomorphen Gruppe heranzuziehen. Unsere Behandlung ist von der seinigen unabhängig und weicht wesentlich davon ab. Schon die Formulierung des Problems ist eine andere, da wir für physikalische Anwendungen nicht einen 3- bzw. 5-dimensionalen projektiven Raum brauchen sondern den vierdimensionalen Spinraum und eine R_6. Sodann gehen wir von den infinitesimalen statt von den endlichen Transformationen aus und wählen die Beziehung zwischen dem Spinvektor $v^{\varkappa}$ und der korrespondierenden Bivektordichte $\mathfrak{v}^{AB}$ ganz allgemein um eine von jedem Bezugssystem freie Gleichung für die invarianten hermitischen Grössen $\omega_{\bar{A}B}$ bzw. $\Omega^{A}_{\cdot\bar{B}}$ aufstellen und die Beziehungen der $\chi^{\varkappa}_{\cdot AB}$ zu den Diracschen $\alpha^{\varkappa}$ ableiten zu können.

(1) Eine E_n ist ein n-dimensionaler Raum mit einer gewöhnlichen affinen Geometrie.

Transformationen enthält. Die Bestimmungszahlen der kontravarianten Vektordichten vom Gewicht $+{}^1/_4$ unterliegen der Gruppe $\mathfrak{A}_4$ aller unimodularen linearen homogenen Transformationen, die 15-gliedrig ist und ∞^{30} Transformationen enthält. Die 6 Bestimmungszahlen der kontravarianten Bivektordichten vom Gewicht ${}^1/_2$ unterliegen einer Gruppe $\mathfrak{R}_6$, die mit der letzt genannten isomorph ist und zwar in dem Sinne, dass zwei Transformationen der Gruppe in 4 Variablen, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, einer einzigen Transformation der Gruppe in 6 Variablen entsprechen. In der E_4 betrachten wir nur Affinordichten mit einem Gewicht, das gleich ${}^1/_4$ mal der Differenz zwischen kontra- und kovarianter Valenz ist. Diese Affinoren, die sich alle mit der Transformationsdeterminante $+1$ transformieren, nennen wir *Spinoren*, insbesondere auch *Spinvektoren* u. s. w., und die E_4 *Spinraum.*

Die kontravarianten Spinbivektoren bilden eine E_6. In dieser E_6 ist der Spinquadrivektor, definiert durch die für alle Bezugssysteme gültige Gleichung

(1) $$g^{1234} = \frac{1}{2},$$

ein Tensor von Range 6. Seine Umkehrung ist

(2) $$g_{1234} = \frac{1}{2},$$

da

(3) $$g_{ABCD}\, g^{CDEF} = a_{[AB]}^{EF},$$

wo a_B^A der *Einheitsspinor* ist. Wird dieser Tensor als Fundamentaltensor eingeführt, so wird die E_6 zu einer R_6 ([2]). g^{ABCD} und g_{ABCD} können verwendet werden zum Herauf- und Herunterziehen von zwei alternierenden Indizes *zugleicherzeit.* Offenbar sind die Determinanten der Matrizen der Bivektoren p_{AB} und p^{AB} gleich. Die 15-gliedrige Gruppe ist dann die Gruppe $\mathfrak{R}_6$ aller ∞^{30} reellen und komplexen *Drehungen* (d. s. orthogonale Transformationen mit Determinante $+1$) in dieser R_6. Da komplexe Koordinatentransformationen zugelassen sind, hat es noch keinen Sinn von der Signatur des Fundamentaltensors zu sprechen. In der R_6 führen wir jetzt beliebige nicht notwendig orthogonale kartesische Koordinaten $x^\varkappa$ ($\varkappa, \ldots, \tau = 1, \ldots, 6$) ein. Die neuen Bestimmungszahlen $v^\varkappa$ einer Bivektordichte sind dann irgendwelche lineare homogene Funktionen der alten v^{AB}:

(4) $$v^\varkappa = \frac{1}{2}\,\chi^{\varkappa}_{\cdot\cdot AB}\, v^{AB}.$$

Für den Fundamentaltensor gilt dann

(5) $$g^{\varkappa\lambda} = \frac{1}{4}\,\chi^{\varkappa}_{\cdot\cdot AB}\,\chi^{\lambda}_{\cdot\cdot CD}\, g^{ABCD} = \frac{1}{4}\,\chi^{\varkappa}_{\cdot\cdot AB}\,\chi^{\lambda AB}.$$

([2]) Eine R_n ist eine E_n mit einer krümmungslosen metrischen Geometrie.

Aus dieser Gleichung folgt aber

$$\chi^{\varkappa}{}_{\cdot CD} = \frac{1}{4}\,\chi^{\varkappa}{}_{\cdot AB}\,\chi_{\lambda}{}^{\cdot AB}\,\chi^{\lambda}{}_{\cdot CD}, \tag{6}$$

woraus hervorgeht dass

$$\chi_{\lambda}{}^{\cdot AB}\,\chi^{\lambda}{}_{\cdot CD} = 4\alpha^{AB}_{[CD]}. \tag{7}$$

Die Umkehrung von (4) lautet also

$$v^{AB} = \frac{1}{2}\,\chi_{\varkappa}{}^{\cdot AB}\,v^{\varkappa}. \tag{8}$$

Die Gleichung (5) lässt sich auch schreiben

$$\begin{aligned} g^{\varkappa\lambda} g_{ABCD} &= \frac{3}{2}\,\chi^{\varkappa}{}_{\cdot [AB}\,\chi^{\lambda}{}_{\cdot CD]} = \frac{3}{2}\,\chi^{(\varkappa}{}_{\cdot [AB}\,\chi^{\lambda)}{}_{\cdot CD]} \\ &= \frac{1}{2}\,\chi^{(\varkappa}{}_{\cdot AB}\,\chi^{\lambda)}{}_{\cdot CD} + \frac{1}{2}\,\chi^{(\varkappa}{}_{\cdot BC}\,\chi^{\lambda)}{}_{\cdot AD} + \frac{1}{2}\,\chi^{(\varkappa}{}_{\cdot CA}\,\chi^{\lambda)}{}_{\cdot BD}. \end{aligned} \tag{9}$$

Überschiebung mit g^{EBCD} erzeugt

$$\chi^{(\varkappa}{}_{\cdot AB}\,\chi^{\lambda)EB} = g^{\varkappa\lambda}\alpha^{E}_{A}. \tag{10}$$

Jeder Vektor $v^{\varkappa}$ in R_6 hat eine *Norm*, definiert durch die Gleichung

$$v^{\lambda} v^{\varkappa} g_{\lambda\varkappa} = v^{AB} v^{CD} g_{ABCD}. \tag{11}$$

Wir wählen jetzt 6 gegenseitig senkrechte Einheitsvektoren, d. s. Vektoren mit Norm ± 1. In bezug auf das durch diese Einheitsvektoren bestimmte orthogonale Koordinatensystem verschwinden alle Bestimmungszahlen von $g_{\lambda\varkappa}$ und $g^{\lambda\varkappa}$ mit ungleichen Indizes und die anderen haben einen Wert ± 1. Die Gruppe der in bezug auf *dieses* Koordinatensystem *reellen* Drehungen, die sich innerhalb der Gruppe stetig in die identische Transformation überführen lassen, bilden eine 15-gliedrige Untergruppe $\mathfrak{R}_6'$ von $\mathfrak{R}_6$, die ∞^{15} Transformationen enthält. Es gibt für jeden Index $i \neq 6$ reelle Transformationen mit Determinante $+1$ in $\mathfrak{R}_6$, die nicht in $\mathfrak{R}_6'$ enthalten sind [3]. Ist der Index 1 oder 5 (im allgemeinen 1 oder $n-1$), so sind die reellen Transformationen von $\mathfrak{R}_6$, die in $\mathfrak{R}_6'$ enthalten sind, bekanntlich gerade diejenigen, welche die beiden inneren Teile des Nullkegels nicht vertauschen. Bei der Gruppe $\mathfrak{R}_6'$ ist die Signatur von $g_{\lambda\varkappa}$, wie sie auch gewählt sein mag, invariant. Das Problem ist die Untergruppe $\mathfrak{A}_4'$ von $\mathfrak{A}_4$ zu bestimmen, die dieser Untergruppe $\mathfrak{R}_6'$ entspricht. Die Lösung dieses Problems rührt für den Index (=Anzahl der + -Zeichen) 6, 4 und 3 von CARTAN [4] her. Wir geben hier eine elementare ohne gruppentheoretische Vorkenntnisse verständliche Ableitung, die auch den Fall umfasst, wo der Index gleich 5 ist.

---

[3] Wir verdanken diese Bemerkung Herrn B. L. VAN DER WAERDEN.

[4] E. CARTAN: *Les groupes simples, finis et continus*, Ann. de l'école norm. sup., 31 (1914), S. 263-355, S. 354.

Vorbereitende Betrachtungen.

Ausgangspunkt ist ein geometrisches Theorem. Bekanntlich liegen auf dem Nullkegel in einer R_{2p} zwei verschiedene Scharen von E_p. Das Theorem ist nun folgendes:

Eine E_p der einen Schaar ist für geraden Index komplex konjugiert zu einer E_p der anderen Schaar, für ungeraden Index dagegen zu einer E_p derselben Schaar.

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion. Man bringt eine Tangentialhyperebene an und beweist, dass das Theorem für $p=q$ gilt, wenn es für $p=q-1$ gilt. Für $p=1$ ist es aber trivial.

Es seien x_{AB} die Spinbivektor-koordinaten eines Vektors der R_6. Jedes der beiden Gleichungssysteme

$$v^A x_{AB}=0, \qquad w_B x^{BA}=0, \tag{12}$$

wo v_A und w^B irgendwelche fest gewählte Spinvektoren sind, besteht aus 4 Gleichungen, von denen grade 3 linear unabhängig sind. Jedes System bestimmt also eine E_3 und da aus jedem der Systeme hervorgeht, dass

$$x_{[AB} x_{CD]}=0, \tag{13}$$

liegen beide E_3 auf dem Nullkegel. In nicht notwendig orthogonalen kartesischen Koordinaten der R_6 lauten die Gleichungen

$$v^A \chi_{\varkappa AB} x^\varkappa=0, \qquad w_B \chi_\varkappa^{\cdot\, BA} x^\varkappa=0. \tag{14}$$

Man beweist leicht, dass die beiden E_3 zu verschiedenen Scharen gehören, dass sie stets einen Punkt ($x^\varkappa=0$) gemeinsam haben niemals nur eine E_1, und dann und nur dann eine E_2, wenn $v^A w_A=0$ ist, und dass zwei aus $\underset{1}{v}^A$ und $\underset{2}{v}^A$ bzw. $\overset{1}{w}^B$ und $\overset{2}{w}_B$ abgeleitete E_3, die nicht zusammenfallen, die Gerade des Vektors mit den Spinbivektorkoordinaten $\underset{1}{v}^{[A}\underset{2}{v}^{B]}$ bzw. $\overset{1}{w}_{[A}\overset{2}{w}_{B]}$ gemeinsam haben.

In der E_4 führen wir nun neben den gewöhnlichen Grössen auch Grössen *zweiter Gattung* ein, die in bezug auf die komplexkonjugierten Koordinatentransformationen definiert sind und gestrichene Indizes bekommen ([5]). Zu jedem Spinvektor erster Gattung v^A, w_B gehört dann ein Spinvektor zweiter Gattung mit den komplexkonjugierten Bestimmungszahlen, den wir mit $\bar{v}^{\bar{A}}$, $\bar{w}_{\bar{B}}$ bezeichnen. Allgemeiner gehört zu jedem Spinor erster Gattung, z. B. $P^{A}_{\cdot BC}$ ein Spinor zweiter

([5]) J. A. SCHOUTEN und D. VAN DANTZIG: *Über die Differentialgeometrie einer hermiteschen Differentialform und ihre Beziehungen zu den Feldgleichungen der Physik*, Proc. Kon. Akad. Amsterdam, 32 (1929), 60-64.

Gattung $\bar{P}^{A}{}_{\cdot \bar{B}\bar{C}}$. Daneben gibt es *hermitesche Spinoren*, die beide Arten von Indizes tragen, z. B. $Q^{A}{}_{\cdot \bar{B}C}$. Sein komplexkonjugierter sei mit $\bar{Q}^{\bar{A}}{}_{\cdot B\bar{C}}$ bezeichnet. *Hermitisch symmetrisch* bzw. *alternierend* heisst eine hermitesche Grösse $R_{A\bar{B}}$, wenn

(15) $$R_{A\bar{B}} = +\bar{R}_{\bar{B}A} \quad \text{bzw.} \quad R_{A\bar{B}} = -\bar{R}_{\bar{B}A}\,.$$

Hermitisch positiv bzw. *negativ umkehrbar* heisst eine hermitesche Grösse $S^{A}{}_{\cdot \bar{B}}$ vom Range n, wenn

(16) $$\overset{-1}{S}{}^{\bar{A}}{}_{\cdot B} = \pm \bar{S}^{\bar{A}}{}_{\cdot B}\,.$$

Durch Multiplikation mit $\sqrt{-1}$ geht eine hermitisch symmetrische Grösse in eine hermitisch alternierende über und umgekehrt. Ein hermitisch $+$ oder $-$ umkehrbare Grösse bleibt $+$ bzw. $-$ umkehrbar bei Multiplikation mit $e^{i\varphi}$.

In der R_6 beziehen wir uns von jetzt an nur auf die oben gewählten orthogonalen Koordinaten und lassen nur *reelle* Koordinatentransformationen zu. Die Indizes in bezug auf dieses System seien mit $p, \ldots, w$ bezeichnet, sie durchlaufen die Werte $0, \ldots, 5$. Dieses Koordinatensystem sei mit (p) bezeichnet. *In der R_6 gibt es also keinen Unterschied zwischen Grössen erster und zweiter Gattung.* Aus der Gleichung (10), geschrieben in bezug auf (p):

(17) $$\chi^{(p}{}_{\cdot AB}\,\chi^{q)EB}_{\cdot} = g^{pq} a_A^E$$

folgt, dass die Matrizen der Bivektoren $\chi^{(p)}_{\cdot AB}$ und $\chi^{(p)AB}$ die Determinante ± 1 haben [6].

Der Fall des ungeraden Index.

Nehmen wir zuerst an, der Index von g_{qp} sei *ungerade*. Sodann muss wegen des obengenannten Theorems

(18) $$\bar{v}^{\bar{A}} \bar{\chi}_{p\bar{A}\bar{B}}\, x^p = 0$$

gleichwertig sein mit einer Gleichung von der Form

(19) $$w^{A} \chi_{pAB}\, x^p = 0$$

und es existiert infolgedessen [7] eine bei $\mathfrak{A}_4'$ invariante Grösse $\Omega^{A}{}_{\cdot \bar{B}}$, sodass stets

(20) $$w^{A} \chi_{pAB}\, \Omega^{B}{}_{\cdot \bar{C}} = \bar{v}^{\bar{A}} \bar{\chi}_{p\bar{A}\bar{C}}\,.$$

---

[6] $\chi_{(p)BC}$ steht für die 6 Spinoren $\chi_{0BC}, \ldots, \chi_{5BC}$. Dieser Prozess heisst *abdrosseln* des Index p und wird durch einklammern des abgedrosselten Index angegeben.

[7] Dies ist noch nicht unmittelbar evident. Gehören aber v^A und w^A zu konjugiert komplexen E_3 und ist das gleiche der Fall bei p_B und q_B, so sind w^A und q_B rationale Funktionen der $\bar{v}^{\bar{A}}$ bzw. $\bar{p}_{\bar{B}}$. Die Zuordnung von w^A zu v^A und q_B zu p_B ist also eineindeutig und anti-analytisch. Ausserdem lässt sie die Gleichung $v^A p_A$ invariant. Eine eineindeutige anti-analytische Zuordnung der Punkte und Ebenen eines projektiven dreidimensionalen Raumes, die die Inzidenzrelation invariant lässt, ist aber eine Antikollineation und

Durch Überschiebung mit $\bar{v}^{\bar{C}}$ folgt

(21) $$w^A \chi_{pAB} \Omega^B_{\cdot\,\bar{C}} \bar{v}^{\bar{C}} = 0$$

oder

(22) $$\Omega^A_{\cdot\,\bar{B}} \bar{v}^{\bar{B}} = c w^A.$$

Substitution in (20) ergibt:

(23) $$\frac{1}{c}\, \Omega^C_{\cdot\,\bar{A}} \Omega^D_{\cdot\,\bar{B}} \chi_{pCD} = \bar{\chi}_{p\bar{A}\bar{B}}$$

oder

(24) $$\frac{1}{c}\, \chi_{pBC} \Omega^C_{\cdot\,\bar{A}} = \bar{\chi}_{p\bar{C}\bar{A}} \overset{-1}{\Omega}{}^{\bar{C}}_{\cdot\,B}$$

welche Gleichung als Definitionsgleichung von $\Omega^A_{\cdot\,\bar{B}}$ aufgefasst werden kann, die $\Omega^A_{\cdot\,\bar{B}}$ bei festgewähltem c bis auf das Vorzeichen festlegt. Aus (23) folgt:

(25) $$\overset{-1}{\bar{c}}\, \overset{-1}{\bar{\Omega}}{}^C_{\cdot\,\bar{A}} \overset{-1}{\bar{\Omega}}{}^D_{\cdot\,\bar{B}} \chi^p_{\cdot\,CD} = \bar{\chi}^p_{\cdot\,\bar{A}\bar{B}}$$

und daraus geht hervor, dass

(26) $$\Omega^C_{\cdot\,\bar{A}} = \gamma \overset{-1}{\bar{\Omega}}{}^C_{\cdot\,\bar{A}}; \qquad \gamma^2 = c\bar{c} = \text{positiv reell.}$$

Bekommt c einen Faktor $\varrho e^{2i\varphi}$, so bekommt $\Omega^A_{\cdot\,\bar{B}}$ einen Faktor $\pm e^{i\varphi}\sqrt{\varrho}$ und γ^2 demzufolge einen Faktor ϱ. Es ist also stets möglich c so zu wählen, das $\Omega^C_{\cdot\,\bar{A}}$ hermitisch umkehrbar wird

(27) $$\Omega^C_{\cdot\,\bar{A}} = \pm \overset{-1}{\bar{\Omega}}{}^C_{\cdot\,\bar{A}}$$

c ist dann nur noch bis auf einen Faktor $e^{2i\varphi}$ bestimmt. Da die Determinante der Matrix von $\Omega^C_{\cdot\,\bar{A}}$ infolge (27) von der Form $e^{i\psi}$ ist, kann man diesen Faktor stets so wählen, dass diese Determinante gleich $+1$ wird. Wir wollen voraussetzen, dass $\Omega^A_{\cdot\,\bar{B}}$ in dieser Weise festgelegt ist. Aus (23) ergibt sich dann

(28) $$\frac{1}{c}\,(\mathrm{Det}\ \Omega^C_{\cdot\,\bar{A}}) \cdot (\mathrm{Det}\ \Omega^D_{\cdot\,\bar{B}}) \cdot (\mathrm{Det}\ \chi_{(p)CD}) = \mathrm{Det}\ \bar{\chi}_{(p)\bar{A}\bar{B}}$$

und daraus geht hervor, da die Determinante von $\chi_{(p)AB}$ gleich ± 1 ist, dass

(29) $$c = 1,$$

und $\chi_{pBA} \Omega^A_{\cdot\,\bar{A}}$ also infolge (24) und (27) hermitisch symmetrisch oder alternierend ist.

Die Gruppe $\mathfrak{L}_4'$ lässt $\Omega^A_{\cdot\,\bar{B}}$ invariant, d. h., ist $T^A_{\cdot\,B}$ eine Transformation von $\mathfrak{L}_4'$, so ist

(30) $$T^A_{\cdot\,C} \Omega^C_{\cdot\,\bar{D}} \overset{-1}{\bar{T}}{}^{\bar{D}}_{\cdot\,\bar{B}} = \Omega^A_{\cdot\,\bar{B}}.$$

---

daraus folgen die Existenz und die Invarianz von $\Omega^A_{\cdot\,\bar{B}}$. Wir verdanken diese ergänzende Bemerkung Herrn B. L. v. d. WAERDEN.

Dies sind scheinbar 32 Gleichungen für $T^{A}_{\cdot B}$, in Wirklichkeit aber nur 16, da die komplexkonjugierte von (30) mit (30) identisch ist. Die Gruppe $\mathfrak{A}_4'$ ist also durch die Bedingung der Invarianz von $\Omega^{A}_{\cdot \bar B}$ und die Forderung, dass die Determinante der Matrix jeder Transformation gleich $+1$ sein soll, vollständig festgelegt. Ist $\alpha^{A}_{B}+\beta^{A}_{\cdot B}dt$ eine infinitesimale Transformation von $\mathfrak{A}_4'$, so folgt aus (30)

$$\beta^{A}_{\cdot C}\Omega^{C}_{\cdot \bar B}-\Omega^{A}_{\cdot \bar C}\bar\beta^{\bar C}_{\cdot \bar B}=0. \tag{31}$$

Nun ist infolge (24)

$$\chi_{[\dot p}{}^{AB}\chi_{q]BC}\Omega^{C}_{\cdot \bar B}-\Omega^{A}_{\cdot \bar C}\bar\chi_{[\dot p}{}^{\bar C\bar D}\bar\chi_{q]\bar D\bar B}=\chi_{[\dot p}{}^{AB}\bar\chi_{q]\bar C\bar B}\overset{-1}{\Omega}{}^{\bar C}_{\cdot B}+\overset{-1}{\Omega}{}^{\bar D}_{\cdot C}\chi_{[\dot p}{}^{CA}\bar\chi_{q]\bar D\bar B}=0. \tag{32}$$

Schreiben wir also

$$a_{\dot p\dot q}{}^{A}_{\cdot B}=\chi_{[\dot p}{}^{AC}\chi_{q]CB}, \tag{33}$$

so bilden die 15 Spinoren $a_{(\dot p)(\dot q)}{}^{A}_{\cdot B}$, von denen man leicht beweist, dass sie linear unabhängig sind, gerade 15 unabhängige infinitesimale Transformationen, die $\Omega^{A}_{\cdot \bar B}$ invariant lassen.

Wir haben also den Satz erhalten:

Für ungeraden Index in R_6 ist die Gruppe $\mathfrak{A}_4'$ im Spinraum, die mit der Gruppe der reellen von der Identität aus stetig erreichbaren Drehungen in R_6 korrespondiert, die Gruppe, die eine bis auf das Vorzeichen bestimmte hermitisch umkehrbare Grösse $\Omega^{A}_{\cdot \bar B}$ invariant lässt. Die allgemeine infinitesimale Transformation von $\mathfrak{A}_4'$ hat die Form:

$$T^{A}_{\cdot B}=\alpha^{A}_{B}+\beta^{pq}\chi_{[\dot p}{}^{AC}\chi_{q]CB}\,dt. \tag{34}$$

Bekanntlich fehlt bis jetzt in der Algebra eine Klassifizierung der Grössen der Form $P^{A}_{\cdot \bar B}$. Für $\Omega^{A}_{\cdot \bar B}$ lässt sich aber leicht eine Normalform ableiten. Für den Index 3 in R_6 lässt sich bekanntlich im Spinraum ein Koordinatensystem finden, so dass $\mathfrak{A}_4'$ gerade aus allen in bezug auf dieses System *reellen* linearen homogenen Transformationen mit Determinante $+1$ besteht. (Cayley-Kleinsche Korrespondenz). In bezug auf dieses Koordinatensystem ist also

$$\Omega^{A}_{\cdot \bar B}\overset{*}{=}\delta^{A}_{\bar B}\quad ([8]), \tag{35}$$

sodass sich die Matrix von $\Omega^{A}_{\cdot \bar B}$ auf die Diagonalform mit lauter Zahlen $+1$ bringen lässt.

Für den Index 5 kann man zeigen, dass sich u. a. eine Form mit $+1$, $+1$, -1, -1 in der *Nebendiagonale* mit lauter Nullen an den anderen Stellen erreichen lässt.

([8]) $\overset{*}{=}$ bedeutet, dass das Bestehen der Gleichheit nur behauptet wird in bezug auf die Koordinatensysteme, die in der Gleichung selbst verwendet werden.

Der Fall des geraden Index.

Es sei nun der Index von g_{qp} *gerade.* In diesem Falle bestimmen die zwei Gleichungen

$$v^A \chi_{pAB} x^p = 0, \qquad \bar{v}^{\bar{A}} \bar{\chi}_{p\bar{A}\bar{B}} x^p = 0 \tag{36}$$

zwei E_3, die verschiedenen Systemen angehören. Es gibt also einen kovarianten Spinvektor w_A, sodass sich die Gleichung der zweiten E_3 auch schreiben lässt

$$w_A \chi_{\dot{p}}{}^{AB} x^p = 0. \tag{37}$$

Infolgedessen existiert eine Grösse $\omega_{\bar{A}B}$, so dass

$$\omega_{\bar{B}A} w_B \chi_{\dot{p}}{}^{AB} = \bar{v}^{\bar{A}} \bar{\chi}_{p\bar{A}\bar{B}}. \tag{38}$$

Überschiebung mit $\bar{v}^{\bar{B}}$ ergibt:

$$\bar{v}^{\bar{B}} \omega_{\bar{B}A} w_B \chi_{\dot{p}}{}^{AB} = 0. \tag{39}$$

Da aber die sechs Bivektoren $\chi_{(\dot{p})}{}^{AB}$ linear unabhängig sind, ist diese Gleichung gleichbedeutend mit

$$\omega_{\bar{A}B} \bar{v}^{\bar{A}} = c w_B \tag{40}$$

wo c eine beliebige Konstante ist. Sodann ergibt Substitution in (38)

$$\omega_{\bar{B}A} \chi_{\dot{p}}{}^{AB} \omega_{\bar{A}B} = c \bar{\chi}_{p\bar{A}\bar{B}} \tag{41}$$

oder

$$\omega_{\bar{B}A} \chi_{\dot{p}}{}^{AB} = c \bar{\chi}_{p\bar{A}\bar{B}} \overset{-1}{\omega}{}^{B\bar{A}}, \tag{42}$$

welche Gleichung man als Definitionsgleichung von $\omega_{\bar{A}B}$ auffassen kann, die $\omega_{\bar{A}B}$ bei fest gewähltem c bis auf das Vorzeichen festlegt. Sind nun $'\bar{v}^{\bar{A}}$ und $'w_B$ zwei andere einander zugeordnete Vektoren:

$$'\bar{v}^{\bar{B}} \omega_{\bar{B}A} = c\, 'w_B \tag{43}$$

so ist diese Gleichung gleichbedeutend mit

$$'v^A = \bar{c}\, '\bar{w}_{\bar{B}} \overset{-1}{\bar{\omega}}{}^{\bar{B}A}. \tag{44}$$

Wird (40) mit $'v^A$ überschoben, so ergibt sich

$$\bar{c} \bar{v}^{\bar{B}} \omega_{\bar{B}A} \overset{-1}{\bar{\omega}}{}^{\bar{C}A}\, 'w_{\bar{C}} = \bar{c}\, 'v^A w_A. \tag{45}$$

Da aber $'v^A w_A$ gleichzeitig mit $\bar{v}^{\bar{A}}\, 'w_{\bar{A}}$ verschwindet, muss

$$\omega_{\bar{B}A} \overset{-1}{\bar{\omega}}{}^{\bar{C}A} = \gamma \bar{a}_{\bar{B}}^{\bar{C}} \tag{46}$$

sein, wo $a^{\bar{A}}_{\bar{B}}$ der Einheitsspinor zweiter Gattung ist, oder anders geschrieben

$$\omega_{\bar{A}B} = \gamma \bar{\omega}_{B\bar{A}} \tag{47}$$

woraus folgt $\gamma\bar{\gamma} = 1$. Die zu (42) konjugierte Gleichung lautet

$$\bar{\omega}_{B\bar{A}} \bar{\chi}^{p\bar{A}\bar{C}} = \bar{c}\chi^{p}{}_{\cdot AB} \overset{-1}{\bar{\omega}}{}^{\bar{C}A}. \tag{48}$$

Überschiebt man diese Gleichung über die Indizes p und B mit (42), so folgt unter Berücksichtigung von (47)

$$\bar{c}\gamma^2 = c. \tag{49}$$

Bekommt nun c in (41) einen Faktor $\varrho e^{2i\varphi}$, so bekommt $\omega_{\bar{A}B}$ einen Faktor $\pm\varrho^{\frac{1}{2}} e^{i\varphi}$ und γ also einen Faktor $e^{2i\varphi}$. Es ist also möglich c so zu wählen, dass $\omega_{\bar{A}B}$ hermitisch symmetrisch wird

$$\omega_{\bar{A}B} = \bar{\omega}_{B\bar{A}} \tag{50}$$

und gleichzeitig die Determinante der Matrix von $\omega_{\bar{A}B}$ gleich $+1$ wird. $\omega_{\bar{A}B}$ ist dann bis auf das Vorzeichen bestimmt und aus (49) folgt $c = \pm 1$ (9). Wir wollen diese Wahl von $\omega_{\bar{A}B}$ voraussetzen. Infolge (10) ist $\chi^{(p)}{}_{\cdot BC} \overset{-1}{\omega}{}^{C\bar{A}}$ die Umkehrung von $\chi_{(\dot{p})}{}^{AC} \omega_{\bar{B}C}$ und aus (42) geht hervor, dass

$$\chi^{(p)}{}_{\cdot BC} \overset{-1}{\omega}{}^{C\bar{A}} = \chi^{(p)}{}_{\cdot BC} \overset{-1}{\bar{\omega}}{}^{\bar{A}C} = -\frac{1}{c}\, \bar{\omega}_{B\bar{C}} \bar{\chi}^{(p)\bar{C}\bar{A}} = \pm\, \bar{\omega}_{B\bar{C}} \bar{\chi}_{(\dot{p})}{}^{\bar{C}\bar{A}} \tag{51}$$

und jeder der 6 Spinoren $\chi_{(\dot{p})}{}^{AC} \omega_{\bar{B}C}$ ist also hermitisch umkehrbar.

Die Gruppe $\mathfrak{A}_4'$ lässt $\omega_{\bar{A}B}$ invariant, d. h. ist $T^{A}{}_{\cdot B}$ eine Transformation von $\mathfrak{A}_4'$, so ist

$$T^{\bar{C}}{}_{\cdot\bar{A}} T^{D}{}_{\cdot B}\, \omega_{\bar{C}D} = \omega_{\bar{A}B}. \tag{52}$$

Da die Matrix von $\omega_{\bar{A}B}$ die Determinante $+1$ hat, lasst sich $\omega_{\bar{A}B}$ durch 15 reelle Zahlen festlegen und es bleiben also ∞^{15} Transformationen, sodass $\mathfrak{A}_4'$ durch die Forderung der Invarianz von $\omega_{\bar{A}B}$ vollständig festgelegt ist. Ist $a^{A}_{B} + \beta^{A}{}_{\cdot B}\, dt$ eine infinitesimale Transformation von $\mathfrak{A}_4'$, so folgt aus (52)

$$\bar{\beta}^{\bar{C}}{}_{\cdot\bar{A}}\, \omega_{\bar{C}B} + \beta^{C}{}_{\cdot B}\, \omega_{\bar{A}C} = 0. \tag{53}$$

Nun ist

$$\bar{\chi}_{[\dot{p}}{}^{\bar{C}\bar{D}} \bar{\chi}_{q]\bar{D}\bar{A}}\, \omega_{\bar{C}B} + \chi_{[\dot{p}}{}^{CD} \chi_{q]DB}\, \omega_{\bar{A}C} = c\chi_{[p|CB|} \bar{\chi}_{q]\bar{D}\bar{A}} \overset{-1}{\omega}{}^{C\bar{D}} + c\bar{\chi}_{[p|\bar{E}\bar{A}|} \chi_{q]DB} \overset{-1}{\omega}{}^{D\bar{E}} = 0 \tag{54}$$

wegen (42) und (50). Die 15 Spinoren, die man aus

$$a_{\dot{p}\dot{q}}{}^{A}{}_{\cdot B} = \chi_{[\dot{p}}{}^{AC} \chi_{q]CB} \tag{55}$$

---

(9) Es ist z. B. $c = +1$ für die Signatur $+ + + + - -$ und $c = -1$ für die Signatur $- - - - + +$.

erhält, indem man für p und q die Zahlen 0, 1,...., 5 einsetzt, bilden also 15 linear unabhängige infinitesimale Transformationen von $\mathfrak{A}_4'$. Wir haben also den Satz bewiesen:

Für geraden Index in R_6 ist die Gruppe $\mathfrak{A}_4'$ im Spinraum, die mit der Gruppe der reellen von der Identität aus stetig erreichbaren Drehungen in R_6 korrespondiert, die Gruppe, die einen bis auf das Vorzeichen bestimmten hermitisch symmetrischen Spinor $\omega_{\bar{A}B}$ invariant lässt. Die allgemeine infinitesimale Transformationen von $\mathfrak{A}_4'$ hat die Form:

$$T^{A}_{\cdot B} = \alpha^{A}_{B} + \beta^{pq} \chi_{[\dot{p}}{}^{AC} \chi_{q]CB}\, dt. \tag{56}$$

Mann zeigt leicht, dass der Index von $\omega_{\bar{A}B}$ 4 bzw. 2 ist, wenn der Index in R_6 den Wert 6 bzw. 4 hat.

Mit Hilfe von $\overset{-1}{\omega}{}^{A\bar{B}}$ und $\omega_{\bar{B}A}$ lassen sich Indizes herauf- und herunterziehen, Gestrichene Indizes gehen dabei über in ungestrichene und umgekehrt. Statt $\overset{-1}{\omega}$ kann dann ω geschrieben werden. Die Gleichung (42) geht dann über in

$$\chi_{\dot{p}}{}^{A}{}_{\cdot\bar{B}} = c\bar{\chi}_{\dot{p}\bar{B}}{}^{\dot{}A} = -c\bar{\chi}_{\dot{p}}{}^{A}{}_{\cdot\bar{B}} \tag{57}$$

und die Gleichung (10) lässt sich jetzt schreiben

$$\chi^{(p|A|}_{\cdot\ \ \cdot\ \ \bar{C}} \bar{\chi}^{q)\bar{C}}_{\cdot\ \ \cdot B} = c g^{pq} \alpha^{A}_{B}. \tag{58}$$

Es ist bekanntlich bewiesen, dass es keine 6 vierreihigen Matrizen χ^p geben kann, die die Gleichung

$$\chi^{(p}\chi^{q)} = g^{pq} \tag{59}$$

erfüllen. *Jetzt hat sich aber gezeigt dass es dagegen 6 vierreihige Matrizen gibt, die die Gleichung*

$$\chi^{(p}\bar{\chi}^{q)} = c g^{pq}, \qquad c = \pm 1 \tag{60}$$

erfüllen. Die zugehörigen Grössen sind nicht mehr erster Gattung, sondern hermitisch. Durchlaufen die Indizes a,...., g die Werte 0,...., 4 und schreiben wir

$$\alpha^{a}_{\cdot}{}^{A}_{\cdot B} = \chi^{a}_{\cdot}{}^{A}_{\cdot\bar{C}} \chi^{5}_{\cdot}{}^{\bar{C}}_{\cdot B} \sqrt{-g_{55}}, \tag{61}$$

so folgt dass

$$\alpha^{(a}\alpha^{b)} = g^{ab}. \tag{62}$$

Es sind dies die Grössen (Diracschen Zahlen) α^a, die in der projektiven Spintheorie auftreten.

R_5 und Spinraum.

Die Gruppe $\mathfrak{R}_5'$ der reellen und von der Identität aus stetig erreichbaren Drehungen in R_5 ist 10-gliedrig und enthält ∞^{10} Transformationen. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man die R_5 in R_6 durch den Ursprung senkrecht zum Einheitsvektor $\underset{5}{i}^p$ wählen dessen einzige nichtverschwindende Bestimmungszahl $\underset{5}{i}^5 = 1$ ist. $\mathfrak{R}_5'$ besteht dann aus den Transformationen von $\mathfrak{R}_6'$ die $\underset{5}{i}^p$ invariant lassen, und die Untergruppe $\overset{5}{\mathfrak{A}}_4'$ von $\mathfrak{A}_4'$, die mit $\mathfrak{R}_5'$ korrespondiert, besteht also aus allen Transformationen von $\mathfrak{A}_4'$, die den Bivektor $\underset{5}{i}^p \chi_p^{\cdot AB}$ invariant lassen. Ist die Signatur in R_6 also gerade, so lässt $\overset{5}{\mathfrak{A}}_4'$ einen Bivektor und einen hermitisch symmetrischen Spinor $\omega_{\bar{A}B}$ invariant, ist die Signatur dagegen ungerade, so bleibt ein Bivektor und ein hermitisch umkehrbarer Spinor $\Omega^{A}_{\cdot\bar{B}}$ invariant. In beiden Fällen legt diese Invarianz die Gruppe $\overset{5}{\mathfrak{A}}_4'$ vollständig fest. Die zwei Fälle sind nur scheinbar verschieden, da im ersten Falle $\chi^{pAC}\omega_{C\bar{B}}$ hermitisch umkehrbar, im zweiten Falle aber $\Omega^{C}_{\cdot\bar{A}}\chi_{pBC}$ hermitisch symmetrisch oder alternierend ist. Die infinitesimalen Transformationen von $\overset{5}{\mathfrak{A}}_4'$ reduzieren sich auf die, welche sich aus den 10 Spinoren $\chi_{[a}^{\cdot AC}\chi_{b]CB}$; $a, b = 0, \ldots, 4$, ableiten lassen.

Wir haben also den Satz bewiesen:

Die Gruppe $\overset{5}{\mathfrak{A}}_4'$ im Spinraum, die mit der Gruppe der reellen von der Identität aus stetig erreichbaren Drehungen in R_5 korrespondiert, ist, ungeachtet der Signatur in R_5, stets die Gruppe, die einen Bivektor, einen hermitisch symmetrischen und einen hermitisch umkehrbaren Spinor invariant lässt. Diese drei Grössen sind bis auf das Vorzeichen bestimmt, irgend zwei derselben bestimmen die dritte bis auf das Vorzeichen ([10]).

Die allgemeine infinitesimale Transformation von $\overset{5}{\mathfrak{A}}_4'$ hat bei geeigneter Wahl des Bezugssystems die Form

$$T^{A}_{\cdot B} = a^{A}_{B} + \beta^{ab}\chi_{[a}^{\cdot AC}\chi_{b]CB}\,dt. \qquad (a, b = 0, 1, 2, 3, 4). \tag{63}$$

R_4 und Spinraum.

Die Gruppe $\mathfrak{R}_4'$ der reellen von der Identität aus stetig erreichbaren Drehungen in R_4 ist 6-gliedrig und enthält ∞^6 Transformationen. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man die R_4 in R_6 durch den Ursprung senkrecht zu $\underset{5}{i}^p$ und zu dem Einheitsvektor $\underset{0}{i}^p$ wählen, dessen einzige nichtverschwindende Bestimmungszahl $\underset{0}{i}^0 = 1$ ist. $\mathfrak{R}_4'$ besteht dann aus den Transformationen von $\mathfrak{R}_6'$, die $\underset{0}{i}^p$

([10]) Bei CARTAN (l. c., 1914, S. 354) findet sich für den Index 4 und 5 die Zurückführung auf die Gruppe, die einen Bivektor und $\omega_{\bar{A}B}$ invariant lässt. Für den Index 3 gibt er die Zurückführung an auf die reelle Gruppe die einen reellen Bivektor invariant lässt. Beschränkung auf reelle Transformationen ist aber gleichbedeutend mit Invarianz eines geeignet gewählten hermitisch umkehrbaren Spinors (vgl. S. 181).

und $\underset{5}{i^p}$ invariant lassen und die Untergruppe $\overset{4}{\mathfrak{A}}_4'$, die mit $\mathbf{R}_4'$ korrespondiert, besteht also aus allen Transformationen von $\mathfrak{A}_4'$, die die Bivektoren $\underset{0}{i^p}\chi_{\dot{p}}{}^{AB}$ und $\underset{5}{i^p}\chi_{\dot{p}}{}^{AB}$ invariant lassen. Unabhängig von der Signatur kann man also $\overset{4}{\mathfrak{A}}_4'$ festlegen durch zwei Bivektoren und einen hermitisch symmetrischen oder auch (nach freier Wahl) einen hermitisch umkehrbaren Spinor. Die infinitesimalen Transformationen von $\overset{4}{\mathfrak{A}}_4'$ reduzieren sich auf die, welche sich aus den 6 Spinoren

$$\chi_{[\dot{h}}{}^{AC}\chi_{i]CB} \qquad (h, i = 1, 2, 3, 4) \tag{64}$$

ableiten lassen.

Wir haben also den Satz bewiesen:

Die Gruppe $\overset{4}{\mathfrak{A}}_4'$ in Spinraum, die mit der Gruppe der reellen von der Identität aus stetig erreichbaren Drehungen in R_4 korrespondiert, ist, ungeachtet der Signatur in R_4, stets die Gruppe, die zwei Bivektoren, einen hermitisch symmetrischen und einen hermitisch umkehrbaren Spinor invariant lässt. Diese vier Grössen sind bis auf das Vorzeichen bestimmt, die ersten zwei bestimmen mit der dritten (vierten) die vierte (dritte) bis auf das Vorzeichen ([11]). *Die allgemeinste infinitesimale Transformation von $\overset{4}{\mathfrak{A}}_4'$ hat bei geeigneter Wahl des Bezugssystems die Form:*

$$T^A_{\cdot B} = \overset{A}{a}_B + \beta^{hi}\chi_{[\dot{h}}{}^{AC}\chi_{i]CB}\, dt \qquad (h, i = 1, 2, 3, 4). \tag{65}$$

Die beiden invarianten Bivektoren liegen involutorisch und legen also zwei Ebenen im Spinraum fest.

Konsequenzen für die Physik.

In der Physik fangen wir mit der lokalen Raumzeitwelt an, also mit einer R_4 mit der Signatur $---+$. Im Spinraum gibt es zwei invariante Ebenen und die Forderung der Invarianz eines $\omega_{\bar{A}B}$ oder $\Omega^A_{\cdot \bar{B}}$ lässt sich so formulieren, dass es ein Koordinatensystem gibt, in bezug auf welches diese beiden Ebenen komplex konjugiert sind, und dass $\overset{4}{\mathfrak{A}}_4'$ nur die in bezug auf dieses System reellen Transformationen von $\mathfrak{A}_4$ enthält, die beide Ebenen invariant lassen und in beiden eine lineare homogene Transformation mit Determinante $+1$ induzieren. Nimmt man ein (nicht reelles) Koordinatensystem mit zwei Achsen in der einen Ebene und die komplexkonjugierten Achsen in der anderen, so besteht $\overset{4}{\mathfrak{A}}_4'$ aus den Transformationen der komplexen linearen homogenen Gruppe mit Determinante $+1$ in der einen Ebene kombiniert mit den komplex konjugierten Transformationen in der

([11]) Man vergleiche hierzu die Resultate von E. CARTAN (l. c., 1914, S. 353).

anderen Ebene. Identifiziert man dann die gewöhnlichen Spinvektoren der einen Ebene mit den Spinvektoren zweiter Gattung der anderen und umgekehrt, so gibt es nur noch eine einzige E_2. Dies ist der tiefere Grund der Tatsache, dass man urprünglígh mit Spinvektoren in einem (komplexen) zweidimensionalen Raum, eben eine dieser E_2, auskommen könnte.

Sobald man Unifizierungstheorie treibt, kommt man nicht mehr mit der R_4 aus und muss zu der R_5 schreiten. Man kann die R_5 entweder in gewöhnlichem Sinne deuten (KALUZA, KLEIN, MANDEL, EINSTEIN, MAYER) oder projektiv (VEBLEN, HOFFMANN, SCHOUTEN, VAN DANTZIG, PAULI). Im ersten Falle ist die lokale Raumzeitwelt in R_5 eingebettet, im zweiten hier weiter erörtertem Falle entsteht sie aus der R_5 durch den Prozess der « Zusammenlegung » wobei jeder Strahl durch den Ursprung als Punkt aufgefasst wird. Die Koordinaten der R_5 werden homogene Koordinaten und die lokale Raumzeitwelt wird eine P_4 ([12]) mit einer quadratischen Hyperfläche. Die zugrundeliegende Gruppe ist nicht mehr die Lorentzgruppe, sondern die 10-gliedrige Gruppe aller reellen projektiven Transformationen in P_4, die diese Hyperfläche invariant lassen. Für diese R_5 hat man dann die Wahl zwischen dem Index 1 und dem Index 2. In der R_5 bleiben in jedem Falle ein Bivektor, ein hermitisch symmetrischer und ein hermitisch umkehrbarer Spinor invariant. Es hat sich aber gezeigt ([13]), dass der Index 2 zu Unzuträglichkeiten führt bei der Durchführung des Variationsprinzips und wir wählen also die Signatur $- - - - +$.

Nun ist zu beachten, dass, sogar in dem Falle, wo man mit einer R_4 arbeitet, der ganze Spinraum als etwas tatsächlich vorhandenes angesehen werden muss. Jeder Punkt des Spinraumes ist nicht anderes als ein gebundener Vektor auf einer der Geraden der Einheitskugel der R_4 ([14]). Es gibt ∞^8 (komplexe) Vektoren dieser Art und der Spinraum ist nichts anderes als die Gesamtheit dieser ∞^8 Vektoren. Alle Gebilde des Spinraumes sind also auch Gebilde der R_4 und namentlich gilt dies von den ∞^{12} Bivektoren des Spinraumes, die eine komplexe R_6 bilden.

Im Spinraum liegen, so lange wir uns auf die gewöhnliche Relativitätstheorie der ∞^6 Lorentz-Transformationen beschränken, zwei invariante Bivektoren und ein invariantes $\omega_{\bar{A}B}$ und infolgedessen auch ein invariantes $\Omega^{A}_{\cdot\bar{B}}$. Von den ∞^{12} Bivektoren sind ∞^6 ausgezeichnet durch die Forderung, dass sie der Gleichung (42) genügen und ∞^6 andere durch die Forderung, dass die Gleichung (24) besteht. Unter diesen gibt es ∞^4 Bivektoren die in bezug auf die beiden invarianten Bi-

([12]) Eine P_n ist ein n-dimensionaler Raum mit einer gewöhnlichen projektiven Geometrie.

([13]) G. F., VI: J. A. SCHOUTEN und D. v. DANTZIG: *On projective connexions ant their application to the general field-theory.* Ann. of Math., 34 (1933), 271-312. — G. F., VIII: J. A. SCHOUTEN und J. HAANTJES: *Autogeod. Linien und Weltlinien.* Zs. f. Phys., 89 (1934). 357-369.

([14]) G. F., V: J. A. SCHOUTEN: *Raumzeit und Spinraum.* Zs. f. Phys., 81 (1933), 405-417, S. 412.

vektoren involutorisch sind und auf die Menge dieser Bivektoren bildet sich die lokale Raumzeitwelt eineindeutig ab. Die lokale Raumzeitwelt ist also ein Gebilde in einer R_6, deren Punkte selbst wieder als Gebilde der lokalen Raumzeitwelt aufgefasst werden können. Man kann nun die Gruppe erweitern, indem man die Invarianz des einen Bivektors fallen lässt. Die ∞^5 Bivektoren, die der Gleichung (24) (oder (42)) genügen und involutorisch in bezug auf den anderen Bivektor sind, bilden dann eine R_5. Einerseits sind die Punkte dieser R_5 Gebilde der lokalen Raumzeitwelt, anderseits ist die lokale Raumzeitwelt in dieser R_5 entweder eingebettet oder sie entsteht aus ihr durch Zusammenlegung. Es entsteht so eine der oben erwähnten Relativitätstheorien, die auf der Gruppe der ∞^{10} reellen Drehungen in R_5 aufgebaut ist. Unabhängig von der Signatur bleibt im Spinraum ein Bivektor und ein $\omega_{\bar{A}B}$ und infolgedessen auch ein $\Omega^{A}_{\cdot\bar{B}}$ invariant.

Man kann nun eine nochmalige Erweiterung der Gruppe vornehmen, indem man auch die Invarianz des zweiten Bivektors fallen lässt. Dann muss man sich aber auf eine bestimmte Signatur festlegen, bei $- - - - + +$ bleibt im Spinraum ein $\omega_{\bar{A}B}$ invariant, bei $- - - - + -$ dagegen ein $\Omega^{A}_{\cdot\bar{B}}$. Die Quantentheorie verlangt natürlich Invarianz einer hermitisch symmetrischen Grösse und die zweite Möglichkeit scheidet also aus. Wir gelangen also zu einer Relativitätstheorie, die auf der Gruppe der ∞^{15} reellen Drehungen in einer R_6 mit Signatur $- - - - + +$ aufgebaut ist.

Wie sich die lokale Raumzeitwelt aus dieser R_6 zurückbilden lässt, hängt natürlich (wie im Falle der R_5) von dem Aufbau der Theorie ab. Werden die Koordinaten der R_6 projektiv gedeutet, so geht die R_6 über in eine P_5 mit einer festen reellen quadratischen vierdimensionalen Hyperfläche. Die Gruppe aller reellen projektiven Transformationen, die diese Hyperfläche invariant lassen ist 20-gliedrig. Sie induziert in dieser Hyperfläche eine 15-gliedrige Gruppe und diese Gruppe ist bei der Signatur $- - - - + +$ gerade die Gruppe aller *konformen Transformationen* in vier Dimensionen. Wird also die lokale Raumzeitwelt mit der Hyperfläche identifiziert, so ergibt sich eine lokale konforme Geometrie. Wir treiben also dann Relativitätstheorie auf Grundlage der konformen Gruppe, d. i. aber gerade die Gruppe, die tatsächlich die Maxwellschen Gleichung invariant lässt. Diese, zuerst von BATEMAN und CUNNINGHAM ([15]) entdeckte Invarianz, tritt hier in ein ganz neues Licht. Hat uns doch die Betrachtung des Spinraums und die für die Quantentheorie notwendige Forderung der Invarianz eines hermitisch symmetrischen Spinors gerade auf diese konforme Invarianz geführt.

Zur Relativitätstheorie auf konformer Grundlage machen wir noch folgende vorläufige Bemerkungen.

1). In der projektiven Theorie bleiben die beiden Weltfunktionen M und N

([15]) E. CUNNINGHAM, Proc. Lond. Math. Soc., 8 (1910), S. 77-98. — H. BATEMAN, ebenda, S. 223-264, 469-488.

ohne logische Verknüpfung nebeneinander stehen ([16]). Einige vorläufige Rechnungen, auf die wir in einer späteren Arbeit zurückkommen werden, macht es wahrscheinlich, dass die einfachste Weltfunktion der konformen Theorie automatisch M und N zusammenfassen wird. Damit wäre einer der grössten Übelstände der projektiven Theorie beseitigt.

2). Der Fundamentalprojektor $G_{\lambda\varkappa}$, der in der projektiven Theorie auftritt, ist eigentlich ein Fremdkörper, von dem man nicht versteht, wie er in eine projektive Theorie hinreinkommt. Ist aber diese projektive Theorie nichts anderes als eine Vorstufe zur konformen Theorie, so erklärt sich diese merkwürdige Vermisslung von projektiven und metrischen Gesichtspunkten ganz von selbst, das metrische Element ist ja einer konformen Geometrie wesentlich und das projektive kommt hinein durch die Verwendung homogener Koordinaten.

3). Wie wir auf S. 177 erwähnten, enthält die Gruppe der reellen Drehungen in R_n für den Index 1 und $n-1$ eine Untergruppe mit derselben Parameterzahl, die die beiden inneren Teile des Nullkegels nicht vertauscht. In der gewöhnlichen Relativitätstheorie bedeutet Beschränkung auf diese Gruppe in R_4, dass Vergangenheit und Zukunft nicht vertauscht werden dürfen. Beim Übergang zu R_5 ändert sich daran nichts, wir haben ja gesehen, dass die Signatur $- - - - +$ vorzuziehen ist. Beim Übergang zur R_6 mit der Signatur $- - - - + +$ liegt der Fall aber anders, die Gleichungen von Naturerscheinungen, die bei der konformen Gruppe invariant sind müssen auch bei Vertauschung von Vergangenheit und Zukunft und gleichzeitigem Vorzeichenwechsel der sechsten Koordinate invariant sein und sogar bei Drehungen in der Ebene der beiden letzten Koordinaten. (In der Tat lassen sich z. B. die retardierten Potentiale ohne weiteres durch voraus-eilende Potentiale ersetzen). In einer rein elektromagnetischen Welt ohne Materie gibt es also erstens nur eine konforme Metrik und zweitens keine bevorzugte Zeitrichtung. Nun fordert die physikalische Erfahrung mit Sicherheit, dass es in einer von Materie erfüllten Welt erstens eine feste Metrik und zweitens eine bevorzugte Zeitrichtung gibt. Wie man sieht, sind nun diese beiden Forderungen logisch verknüpft. Die Materie muss die konforme Metrik in eine feste Metrik verwandlen, d. h. im Spinraum einen bestimmten Bivektor fest legen und damit ist dann gleichzeitig eine R_5 mit Signatur $- - - - +$ festgelegt, wodurch die beiden Zeitrichtungen wesentlich verschieden werden. Es ist Aufgabe der konformen Theorie, zu erklaren wie die Materie dies fertig bringt. Wahrscheinlich wird das Massenglied der Diracschen gleichung hier eine Rolle spielen.

([16]) G. F., IV, S. 135. Vgl. auch W. PAULI: *Über die Formulierung der Naturgesetze mit fünf homogenen Koordinaten.* Ann. d. Phys., 18 (1933), 305-372. Selbstverständlich müssen sich die Maxwellschen Gleichung konforminvariant mit 6 Koordinaten schreiben lassen. Eine konforminvariante Schreibweise mit 4 Koordinaten findet sich in unserer Arbeit, K. F., I: *Über die konforminvariante Gestalt der Maxwellschen Gleichungen und der elektromagnetischen Impuls Energiegleichungen.* Physica, 1 (1934), 869-872.