Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Silvio Cinquini

Sul problema dell'approssimazione delle funzioni

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 4, nº 1 (1935), p. 85-103

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1935_2_4_1_85_0>

SUL PROBLEMA DELL'APPROSSIMAZIONE DELLE FUNZIONI (*)

di SILVIO CINQUINI (Pisa).

In un mio recente lavoro [1] mi sono occupato della seguente questione: *Dato un campo D aperto limitato del piano (x, y) e una funzione $f(x, y, z, p, q)$ finita e continua in tutti i punti (x, y) del campo chiuso $\overline{D}$, corrispondente a D, (cioè costituito di tutti i punti di D e della sua frontiera), e per tutti i valori finiti di z, p, q, e considerata una funzione $z_0(x, y)$ continua in $\overline{D}$, assolutamente continua* (nel senso del TONELLI [2]) *in D e tale che esista finito l'integrale* (del LEBESGUE)

$$I_D[z_0] = \iint\limits_D f(x, y, z_0(x, y), p_0(x, y), q_0(x, y))dxdy,$$

$\left(\text{ove è } p_0 = \frac{\partial z_0}{\partial x},\ q_0 = \frac{\partial z_0}{\partial y}\right)$, *approssimare, a meno di un $\varepsilon > 0$ prefissato, la funzione $z_0(x, y)$, mediante una funzione $z(x, y)$, la quale sia, in ogni punto di $\overline{D}$, finita e continua con le sue derivate parziali del primo ordine, e tale inoltre che l'integrale $I_D[z]$ approssimi l'integrale $I_D[z_0]$ a meno dell'ε prefissato.*

Tale problema, che il TONELLI aveva precedentemente risolto, sotto opportune condizioni, in due importanti casi particolari ($f \equiv \sqrt{1+p^2+q^2}$, $f \equiv p^2 + q^2$ [3]), mediante la nota successione dei polinomi di STIELTJES, è stato da me risolto, nel citato lavoro, estendendo in vari modi i procedimenti del TONELLI, soltanto

---

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

(1) S. CINQUINI: *Sull'approssimazione delle funzioni di due variabili* (Annali di Matematica, S. IV, T. XI (1932-1933), pp. 295-323). Tale lavoro verrà indicato nel seguito con Memoria (I).

(2) L. TONELLI: *Sur la semi-continuité des intégrales doubles du Calcul des Variations* (Acta Mathematica, T. 53 (1929), p. 325 e segg.), n.° 2.

(3) L. TONELLI: *Sopra alcune proprietà di un polinomio d'approssimazione* (Rend. R. Accademia dei Lincei, vol. III (1926), p. 714 e segg.).

L. TONELLI: *Su l'integrale di Dirichlet* (Mem. R. Accademia delle Scienze di Bologna, S. 8, T. VII (1929-1930)).

sotto opportune condizioni per la funzione f (4), relative al suo comportamento quando p e q tendano all'infinito, o mediante i polinomi di STIELTJES (§ I), o ricorrendo (§ II) ad un'altra successione di funzioni altrove già considerate dal TONELLI (5).

Nel presente lavoro, giovandomi ancora di quest'ultima successione di funzioni ed estendendo ulteriormente il procedimento del § II della mia Memoria (I), mi propongo di risolvere il problema in questione in condizioni più generali per la funzione f.

Il lavoro è diviso in due paragrafi.

Nel § I si dimostra un primo teorema di cui sono particolarmente utili i casi particolari, e i corollari che facilmente si deducono. Si danno poi altre proposizioni ed un teorema generale.

La classe di funzioni f, per le quali viene, in tal modo, ad essere risolto il problema in questione, è molto vasta, come mettono in luce gli esempi dati nel § II, all'inizio del quale vengono dati alcuni esempi di funzioni che rientrano anche in qualche teorema della Memoria (I).

Osserviamo che i risultati ottenuti nel presente lavoro e nel precedente si possono estendere al caso in cui la funzione z_0 da approssimare dipenda, anzichè da due, da m (>2) variabili e il relativo integrale $I_D[z_0]$ sia m-plo, invece che doppio.

Il problema analogo per le funzioni di una sola variabile è stato ampiamente trattato e risolto in modo molto più soddisfacente quasi esclusivamente da parte del TONELLI (6); tuttavia, anche nel campo delle funzioni di una sola variabile, il procedimento qui seguito fornisce qualche nuovo risultato, che viene segnalato alla fine del § I. Queste ultime considerazioni mettono anche in luce quanto maggiori siano le difficoltà che presenta il problema dell'approssimazione delle funzioni di due variabili, in confronto a quelle dell'analoga questione per le funzioni di una variabile.

§ I.

1. - Teorema I.

Sia D un campo aperto limitato del piano (x, y), e sia $z_0(x, y)$ una funzione assolutamente continua (nel senso del TONELLI) *in D, e si supponga che la funzione $z_0(x, y)$ si possa continuare fuori di D, in tutto un campo*

---

(4) Nel caso che $z_0(x, y)$ fosse lipschitziana il problema è stato invece risolto molto rapidamente nel n.° 2 del luogo cit. in (1).

(5) L. TONELLI: *Sulla definizione di funzione di due variabili a variazione limitata* (Rend. R. Accademia dei Lincei, vol. VI (1928), p. 357 e segg.); n.° 5. Si veda anche T. RADÒ: *Sur le calcul de l'aire des surfaces courbes* (Fundamenta Mathematicae, T. X (1927), p. 197 e segg.), n.° 6.

(6) Vedi luoghi citati nel (2) della mia Memoria (I).

aperto limitato D', contenente il campo chiuso $\overline{D}$, corrispondente a D, in modo che sia assolutamente continua anche in D' e continua nel corrispondente campo chiuso $\overline{D'}$, e che esista finito l'integrale (del LEBESGUE)

$$I_{D'}[z_0]=\iint_{D'} \Phi(x, y, z_0(x, y), p_0(x, y), q_0(x, y))dxdy,$$

$\left(con\ p_0=\frac{\partial z_0}{\partial x},\ q_0=\frac{\partial z_0}{\partial y}\right)$, *ove $\Phi(x, y, z, p, q)$ è una funzione finita e continua e convessa secondo* JENSEN ([7]) *in tutto il campo A costituito da quelle quintuple (x, y, z, p, q), per le quali (x, y) è un punto qualunque di D'; p, q è una coppia qualunque di numeri finiti ed è $m' \leqslant z \leqslant M'$, ove m' e M' sono rispettivamente il minimo e il massimo di $z_0(x, y)$ in $\overline{D'}$. Sotto queste ipotesi è possibile determinare una successione di funzioni $z_n(x, y)$, $(n=1, 2, ...)$ finite e continue, insieme con le loro derivate parziali del primo ordine, in tutto un campo aperto limitato D_1, opportunamente scelto e contenente il campo chiuso $\overline{D}$, in modo che risulti, per $n \to \infty$,*

$$z_n(x, y) \to z_0(x, y),\ \textit{uniformemente in } \overline{D},$$
$$I_D[z_n] \to I_D[z_0].$$

a). Si proceda come nell'*a*) del n.° 8 della Memoria (I) ([8]) e, indicata ancora con λ (>0) la minima distanza fra la frontiera di D e quella di D', si consideri il campo aperto D_1, costituito da tutti i punti di D' che distano da almeno un punto di D di non più di $\frac{\lambda}{2}$.

La funzione $z_0(x, y)$ è continua in tutto il campo chiuso $\overline{D}_1$, assolutamente continua in D_1, e l'integrale $I_{D_1}[z_0]$ esiste finito.

Scelto un numero $\delta > 0$ e $< \frac{\lambda}{4}$, si considerino, in D_1, le funzioni

$$z_n(x, y)=\frac{1}{4h_n^2}\int_{-h_n}^{h_n}\int_{-h_n}^{h_n} z_0(x+\xi, y+\eta)d\xi d\eta, \qquad (n=1, 2, ...), \tag{1}$$

con $h_n=\frac{\delta}{n}$.

([7]) Una funzione $\Phi(u_1, ..., u_s)$, definita in un campo A, ad s dimensioni, semplicemente connesso e convesso, dicesi *convessa secondo Jensen* se, per ogni coppia di punti $u_i^{(1)}$, $u_i^{(2)}$ $(i=1, 2, ..., s)$, appartenenti ad A, è sempre verificata la disuguaglianza

$$\Phi\left(\frac{u_1^{(1)}+u_1^{(2)}}{2}, ..., \frac{u_s^{(1)}+u_s^{(2)}}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left[\Phi(u_1^{(1)}, ..., u_s^{(1)}) + \Phi(u_1^{(2)}, ..., u_s^{(2)})\right].$$

Se poi il campo A non è semplicemente connesso e convesso, diremo ancora, in tutto il presente lavoro, che Φ è convessa secondo JENSEN nel campo A, ogniqualvolta essa sia convessa secondo JENSEN in ogni campo semplicemente connesso e convesso, tutto costituito di punti di A.

([8]) Non c'è bisogno di supporre che il campo D' sia tutto contenuto nell'interno del quadrato del piano (x, y) di vertici opposti $(0, 0)$ e $(1, 1)$.

Le funzioni $z_n(x, y)$ sono continue in tutto D_1, insieme con le loro derivate parziali del primo ordine $p_n(x, y)$, $q_n(x, y)$. Per $n \to \infty$ è $z_n(x, y) \to z_0(x, y)$, uniformemente in $\overline{D}$, e, quasi dappertutto in D, è $p_n(x,y) \to p_0(x,y)$, $q_n(x,y) \to q_0(x,y)$ [9]. Pertanto, quasi dappertutto in D, è

$$(2) \qquad \Phi(x, y, z_n(x, y), p_n(x, y), q_n(x, y)) \to \Phi(x, y, z_0(x, y), p_0(x, y), q_0(x, y))$$

Inoltre si osservi che, per la (1), in tutto D_1, e per qualunque n, si ha sempre: $m' \leq z_n(x, y) \leq M'$.

b). Si tratta ora di provare che gli integrali

$$\iint \Phi(x, y, z_n(x, y), p_n(x, y), q_n(x, y))dxdy, \qquad (n=1, 2,....)$$

sono, nel campo D, funzioni equidoppiamente assolutamente continue.

Fino a tutto il *d*) del presente numero si supponga in più che sia sempre $\Phi \geqslant 0$.

Si consideri un rettangolo R del piano (x, y) a lati paralleli agli assi coordinati e tutto contenuto nel campo aperto D, e, procedendo come nel *b*) del n.° 8 della Memoria (I), si suddivida R in m^2 rettangoli uguali

$$R_{s,t}=[x_{s-1} \leq x \leq x_s \,;\; y_{t-1} \leq y \leq y_t], \qquad (s, t=1, 2,...., m).$$

Si indichi con $R_{s,t}$ anche l'area del rettangolo $R_{s,t}$ e si ponga

$$(3) \qquad X_{s,t}=\iint_{R_{s,t}} x\,dxdy, \qquad Y_{s,t}=\iint_{R_{s,t}} y\,dxdy, \qquad Z_{s,t}=\iint_{R_{s,t}} z_0(x, y)dxdy,$$

$$P_{s,t}=\int_{y_{t-1}}^{y_t} [z_0(x_s, y)-z_0(x_{s-1}, y)]dy, \qquad Q_{s,t}=\int_{x_{s-1}}^{x_s} [z_0(x, y_t)-z_0(x, y_{t-1})]dx, \quad [10]$$

e si consideri l'espressione

$$(4) \qquad \varphi_{s,t}=R_{s,t}\Phi\left(\frac{X_{s,t}}{R_{s,t}}, \frac{Y_{s,t}}{R_{s,t}}, \frac{Z_{s,t}}{R_{s,t}}, \frac{P_{s,t}}{R_{s,t}}, \frac{Q_{s,t}}{R_{s,t}}\right),$$

e la somma $\sum \varphi_{s,t}$ estesa a tutti i rettangoli $R_{s,t}$.

Siccome $z_0(x, y)$ è assolutamente continua in D si ha

$$(5) \qquad P_{s,t}=\iint_{R_{s,t}} p_0(x, y)dxdy, \qquad Q_{s,t}=\iint_{R_{s,t}} q_0(x, y)dxdy.$$

Osservando che è $R_{s,t}=\iint_{R_{s,t}} dxdy$, tenendo presente le (3) e (5), e applicando poi

---

[9] Vedi luogo cit. in [1], n.° 8 *a*).

[10] È da rilevare che è $|P_{s,t}|=b_{s,t}$, $|Q_{s,t}|=a_{s,t}$, ove le espressioni $b_{s,t}$ e $a_{s,t}$, di cui ho fatto uso al n.° 8 della Memoria (I), e di cui mi gioverò ancora al n.° 5 del presente lavoro, erano state usate dal TONELLI nel luogo citato per secondo in [3].

al secondo membro della (4) l'estensione della disuguaglianza di JENSEN che ho dato in altro mio lavoro ([11]) risulta, poichè l'integrale $I_{R_{s,t}}[z_0]$ esiste finito,

$$\varphi_{s,t} \leq \iint_{R_{s,t}} \Phi(x, y, z_0(x, y), p_0(x, y), q_0(x, y))dxdy,$$

ed anche

$$\sum_{s,t} \varphi_{s,t} \leq \iint_{R} \Phi(x, y, z_0(x, y), p_0(x, y), q_0(x, y))dxdy. \tag{6}$$

c). Siano ora $Z_{s,t}^{(n)}$, $P_{s,t}^{(n)}$, $Q_{s,t}^{(n)}$ e $\varphi_{s,t}^{(n)}$ le espressioni analoghe alle $Z_{s,t}$, $P_{s,t}$, $Q_{s,t}$ e $\varphi_{s,t}$, relative alla funzione $z_n(x, y)$.

Per la (1) si ha

$$Z_{s,t}^{(n)} = \iint_{R_{s,t}} z_n(x, y)dxdy = \frac{1}{4h_n^2} \int_{-h_n}^{h_n} \int_{-h_n}^{h_n} \left[\iint_{R_{s,t}} z_0(x+\xi, y+\eta)dxdy \right] d\xi d\eta =$$
$$= \frac{1}{4h_n^2} \int_{-h_n}^{h_n} \int_{-h_n}^{h_n} Z_{s,t}(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

dove con $Z_{s,t}(\xi, \eta)$ si è indicata l'espressione $Z_{s,t}$ relativa, non al rettangolo $R_{s,t}$, ma al rettangolo $R_{s,t}(\xi, \eta)$, che si ottiene dal precedente con la traslazione $x' = x + \xi$, $y' = y + \eta$. Attribuendo analogo significato alle espressioni $P_{s,t}(\xi, \eta)$, $Q_{s,t}(\xi, \eta)$, $X_{s,t}(\xi, \eta)$, $Y_{s,t}(\xi, \eta)$, risulta

$$P_{s,t}^{(n)} = \int_{y_{t-1}}^{y_t} [z_n(x_s, y) - z_n(x_{s-1}, y)]dy =$$
$$= \frac{1}{4h_n^2} \int_{-h_n}^{h_n} \int_{-h_n}^{h_n} \left(\int_{y_{t-1}}^{y_t} [z_0(x_s+\xi, y+\eta) - z_0(x_{s-1}+\xi, y+\eta)]dy \right) d\xi d\eta =$$
$$= \frac{1}{4h_n^2} \int_{-h_n}^{h_n} \int_{-h_n}^{h_n} \left(\iint_{R_{s,t}} p_0(x+\xi, y+\eta)dxdy \right) d\xi d\eta =$$
$$= \frac{1}{4h_n^2} \int_{-h_n}^{h_n} \int_{-h_n}^{h_n} P_{s,t}(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

$$Q_{s,t}^{(n)} = \frac{1}{4h_n^2} \int_{-h_n}^{h_n} \int_{-h_n}^{h_n} Q_{s,t}(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

([11]) Vedi S. CINQUINI: *Sopra una disuguaglianza di Jensen.* [In corso di stampa nei Rend. del Circolo Matematico di Palermo, t. LIX (1935)]; n.° 6, *a*).

Si tenga anche presente quanto si è detto nella nota ([7]) del presente lavoro, osservando che gli integrali che figurano al secondo membro della (4) sono estesi al rettangolo $R_{s,t}$.

ed anche

$$X_{s,t}=\iint\limits_{R_{s,t}} x\,dx\,dy=\left(\frac{1}{4h_n^2}\int\limits_{-h_n}^{h_n}\int\limits_{-h_n}^{h_n} d\xi\,d\eta\right)\left(\iint\limits_{R_{s,t}} x\,dx\,dy\right)=$$

$$=\frac{1}{4h_n^2}\int\limits_{-h_n}^{h_n}\int\limits_{-h_n}^{h_n} d\xi\,d\eta\iint\limits_{R_{s,t}}(x+\xi)\,dx\,dy=\frac{1}{4h_n^2}\int\limits_{-h_n}^{h_n}\int\limits_{-h_n}^{h_n} X_{s,t}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

$$Y_{s,t}=\frac{1}{4h_n^2}\int\limits_{-h_n}^{h_n}\int\limits_{-h_n}^{h_n} Y_{s,t}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Considerata ora l'espressione

$$\varphi_{s,t}^{(n)}=R_{s,t}\Phi\left(\frac{X_{s,t}}{R_{s,t}},\ \frac{Y_{s,t}}{R_{s,t}},\ \frac{Z_{s,t}^{(n)}}{R_{s,t}},\ \frac{P_{s,t}^{(n)}}{R_{s,t}},\ \frac{Q_{s,t}^{(n)}}{R_{s,t}}\right), \tag{7}$$

tenendo presenti le ultime cinque uguaglianze, e applicando la già usata estensione della disuguaglianza di JENSEN risulta,

$$\varphi_{s,t}^{(n)}\leq\frac{R_{s,t}}{4h_n^2}\int\limits_{-h_n}^{h_n}\int\limits_{-h_n}^{h_n}\Phi\left(\frac{X_{s,t}(\xi,\eta)}{R_{s,t}},\ \frac{Y_{s,t}(\xi,\eta)}{R_{s,t}},\ \frac{Z_{s,t}(\xi,\eta)}{R_{s,t}},\ \frac{P_{s,t}(\xi,\eta)}{R_{s,t}},\ \frac{Q_{s,t}(\xi,\eta)}{R_{s,t}}\right)d\xi\,d\eta,$$

ed anche, tenendo conto della (4),

$$\varphi_{s,t}^{(n)}\leq\frac{1}{4h_n^2}\int\limits_{-h_n}^{h_n}\int\limits_{-h_n}^{h_n}\varphi_{s,t}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Sommando da 1 ad m rispetto ad ambedue gli indici s e t, e tenendo poi presente la (6) si ottiene

$$\sum_{s,t}\varphi_{s,t}^{(n)}\leq\frac{1}{4h_n^2}\int\limits_{-h_n}^{h_n}\int\limits_{-h_n}^{h_n}\left[\iint\limits_{R(\xi,\eta)}\Phi(x,y,z_0(x,y),p_0(x,y),q_0(x,y))\,dx\,dy\right]d\xi\,d\eta. \tag{8}$$

d) Tenendo presenti le prime due delle (3), l'espressione di $Z_{s,t}^{(n)}$ e le analoghe delle (5), abbiamo dalla (7)

$$\varphi_{s,t}^{(n)}=R_{s,t}\Phi(\bar{x},\bar{y},z_n',p_n'',q_n'''),$$

ove è $\bar{x}=\frac{x_{s-1}+x_s}{2}$, $\bar{y}=\frac{y_{t-1}+y_t}{2}$, e z_n', p_n'', q_n''', sono rispettivamente i valori di $z_n(x,y)$, $p_n(x,y)$, $q_n(x,y)$ in tre punti convenientemente scelti nel rettangolo $R_{s,t}\equiv[x_{s-1}\leq x\leq x_s;\ y_{t-1}\leq y\leq y_t]$.

Siccome z_n, p_n, q_n e Φ sono funzioni continue, si ha

$$\sum_{s,t}\varphi_{s,t}^{(n)}=\sum_{s,t}R_{s,t}\Phi(\bar{x},\bar{y},z_n(\bar{x},\bar{y}),p_n(\bar{x},\bar{y}),q_n(\bar{x},\bar{y})+\varepsilon_1,$$

ed è $\varepsilon_1 \to 0$, per $m \to \infty$, cioè al tendere a zero di tutte le differenze $x_s - x_{s-1}$, $y_t - y_{t-1}$. Facendo tale passaggio al limite risulta

$$\sum_{s,t} \varphi_{s,t}^{(n)} \to \iint_R \Phi(x, y, z_n(x, y), p_n(x, y), q_n(x, y))dxdy,$$

e quindi dalla (8) si ha

$$(9) \quad \iint_R \Phi(x, y, z_n, p_n, q_n)dxdy \leq \frac{1}{4h_n^2} \int_{-h_n}^{h_n} \int_{-h_n}^{h_n} \left[\iint_{R(\xi,\eta)} \Phi(x, y, z_0, p_0, q_0)dxdy\right] d\xi d\eta.$$

Siccome l'integrale $I_{D'}[z_0]$ esiste finito, preso un $\varepsilon_2 > 0$, ad arbitrio, è possibile determinare un $\delta_2 > 0$ tale che, per ogni gruppo di rettangoli R_1', R_2',...., R_μ', in numero finito, appartenenti a D', senza punti interni a comune, a lati paralleli agli assi coordinati e di area complessiva $< \delta_2$, risulti

$$\sum_{i=1}^{\mu} \iint_{R_i'} \Phi(x, y, z_0, p_0, q_0)dxdy < \varepsilon_2.$$

Allora per ogni gruppo di rettangoli R_1, R_2,...., R_μ, in numero finito, appartenenti a D, senza punti interni a comune, a lati paralleli agli assi coordinati e di area complessiva $< \delta_2$, risulta dalla (9), in virtù di quest'ultima,

$$\sum_{i=1}^{\mu} \iint_{R_i} \Phi(x, y, z_n, p_n, q_n)dxdy < \varepsilon_2,$$

per qualunque valore di n. Pertanto, nell'ipotesi che sia $\Phi \geqq 0$, gli integrali $\iint \Phi(x, y, z_n, p_n, q_n)dxdy$, $(n = 1, 2,....)$ sono, in D, funzioni equidoppiamente assolutamente continue.

e). Si tratta ora di eliminare l'ipotesi, aggiunta all'inizio del *b*) del presente numero, che sia sempre $\Phi \geqq 0$.

Siccome Φ è convessa secondo JENSEN si possono determinare 6 numeri finiti A_i, $(i = 1,...., 6)$, tali che per ogni (x, y) di D', per ogni $m' \leq z \leq M'$ e per tutte le coppie p, q si abbia sempre

$$\Phi(x, y, z, p, q) - (A_1 x + A_2 y + A_3 z + A_4 p + A_5 q + A_6) \geqq 0.$$

Allora, posto

$$(10) \quad \Phi_1(x, y, z, p, q) \equiv \Phi(x, y, z, p, q) - (A_1 x + A_2 y + A_3 z + A_4 p + A_5 q + A_6),$$

la funzione Φ_1 è non negativa, è convessa secondo JENSEN ed esiste finito l'integrale $\iint_{D'} \Phi_1(x, y, z_0, p_0, q_0)dxdy$.

Quindi, siccome le funzioni $z_n(x, y)$ non dipendono dalla funzione Φ, per quanto si è concluso alla fine di d), gli integrali $\iint \Phi_1(x, y, z_n, p_n, q_n)dxdy$, $(n=1, 2,....)$ sono, in D, funzioni equidoppiamente assolutamente continue.

Ma per la (10) è possibile determinare un numero $\Lambda > 0$ tale che per ogni (x, y) di D', per ogni $m' \leq z \leq M'$, e per tutte le coppie p, q si abbia sempre

$$|\Phi(x, y, z, p, q)| \leq \Phi_1(x, y, z, p, q) + |\Lambda_4|\,|p| + |\Lambda_5|\,|q| + \Lambda. \tag{11}$$

D'altra parte siccome è

$$p_n(x, y) = \frac{1}{4h_n^2}\int_{-h_n}^{h_n}\int_{-h_n}^{h_n} p_0(x+\xi, y+\eta)d\xi d\eta,$$

$$q_n(x, y) = \frac{1}{4h_n^2}\int_{-h_n}^{h_n}\int_{-h_n}^{h_n} q_0(x+\xi, y+\eta)d\xi d\eta,$$

gli integrali $\iint p_n(x, y)dxdy$, $\iint q_n(x, y)dxdy$, $(n=1, 2,....)$ sono, in D, funzioni equidoppiamente assolutamente continue e quindi anche gli integrali $\iint |\Phi(x, y, z_n, p_n, q_n)|\,dxdy$, risultano, per la (11) e per quanto si è osservato sopra, funzioni equidoppiamente assolutamente continue.

Allora per la (2) e per il noto teorema d'integrazione per serie di VITALI, il teorema enunciato è completamente provato.

2. - Teorema I generalizzato.

Il teorema I è valido anche se, più generalmente, Φ è una funzione continua e convessa secondo Jensen nel complesso delle sei seguenti variabili: x, y, il prodotto xy, z, p, q.

Basta ripetere la dimostrazione del numero precedente, introducendo oltre alle espressioni $X_{s,t}$, $Y_{s,t}$, ecc., anche

$$W_{s,t} = \iint_{R_{s,t}} xy\,dxdy$$

ed osservando poi che, indicata con $W_{s,t}(\xi, \eta)$ l'espressione di $W_{s,t}$ relativa al rettangolo $R_{s,t}(\xi, \eta)$ che si ottiene da $R_{s,t}$ mediante la traslazione $x' = x + \xi$, $y' = y + \eta$, è

$$W_{s,t} = \frac{1}{4h_n^2}\int_{-h_n}^{h_n}\int_{-h_n}^{h_n} W_{s,t}(\xi, \eta)d\xi d\eta,$$

ed inoltre si ha

$$W_{s,t} = R_{s,t}\cdot \bar{x}\bar{y}$$

con $\bar{x} = \frac{x_{s-1} + x_s}{2}$, $\bar{y} = \frac{y_{t-1} + y_t}{2}$.

3. - Corollario.

Il teorema I (ed anche il teorema I generalizzato) è ancora valido se la funzione Φ non è convessa secondo Jensen per tutti i valori delle variabili x, y, z, p, q, che in essa compaiono, purchè si possa determinare un numero $N_0>0$, e una funzione Φ_0, la quale soddisfi alle ipotesi del teorema I (o del teorema I generalizzato), per quegli stessi valori delle variabili x, y, z, p, q che compaiono nella Φ, e verifichi la disuguaglianza

$$|\Phi-\Phi_0|<N_0.$$

Ciò si prova immediatamente con considerazioni analoghe a quelle svolte nell'*e*) del n.° 1.

4. - Un caso particolare.

Sia $\Phi(p, q)$ una funzione continua e concava verso l'alto (cioè convessa secondo Jensen) per $-\infty<p<+\infty$, $-\infty<q<+\infty$. Sia poi $z_0(x, y)$ una funzione assolutamente continua nel campo aperto limitato D, continua in tutto il campo chiuso $\bar{D}$ ad esso corrispondente, costante sulla frontiera di $\bar{D}$ e tale che esista finito l'integrale

$$I_D[z_0]=\iint_D \Phi(p_0(x, y), q_0(x, y))dxdy.$$

Sotto queste ipotesi è possibile determinare una successione di funzioni $z_n(x, y)$, $(n=1, 2,....)$, finite e continue insieme con le loro derivate parziali del primo ordine in tutto un campo aperto limitato D_1, contenente $\bar{D}$, in modo che risulti, per $n\to\infty$,

$$z_n(x, y)\to z_0(x, y), \textit{ uniformemente in } \bar{D},$$
$$I_D[z_n]\to I_D[z_0] \quad (^{12}).$$

Basta ripetere le considerazioni fatte al n.° 9 del mio precedente lavoro per ricondursi ad un caso particolare del teorema del n.° 1 della presente Memoria.

([12]) Se, come capita per solito nelle applicazioni, la funzione $\Phi(p, q)$ è finita e continua insieme con le sue derivate parziali dei primi due ordini, alla condizione che Φ sia convessa secondo JENSEN, può sostituirsi quella che si abbia per ogni coppia di valori finiti di p, q:

$$\Phi_{pp}\Phi_{qq}-\Phi_{pq}^2\geqslant 0, \qquad \Phi_{pp}\geqslant 0, \qquad \Phi_{qq}\geqslant 0,$$

che può esprimersi dicendo che l'integrale $\iint_D \Phi(p(x, y), q(x, y))dxdy$, sia quasi-regolare positivo.

5. - Teorema II.

Sia $\Phi(p, q)$ una funzione definita per ogni coppia $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, continua, concava verso l'alto (cioè convessa secondo Jensen) e non decrescente rispetto a ciascuna delle sue variabili. Sia poi $z_0(x, y)$ una funzione assolutamente continua nel campo aperto limitato D, e si supponga che essa si possa continuare fuori di D in un campo aperto e limitato D', contenente il campo chiuso $\overline{D}$, corrispondente a D, in modo che sia assolutamente continua anche in D' e che esista finito l'integrale

$$I_{D'}[z_0] = \iint_{D'} \Phi(|p_0(x, y)|, |q_0(x, y)|)dxdy.$$

Allora è possibile determinare una successione di funzioni $z_n(x,y)$, $(n=1,2,....)$ finite e continue, insieme con le loro derivate parziali del primo ordine, in tutto un nuovo campo aperto limitato D_1, opportunamente scelto e contenente $\overline{D}$, in modo che risulti, per $n \to \infty$,

$$z_n(x, y) \to z_0(x, y), \text{ uniformemente in } \overline{D},$$
$$I_D[z_n] \to I_D[z_0] \quad (^{13}).$$

La dimostrazione si ottiene modificando quella del n.° 8 della Memoria (I) nel seguente modo:

Alla fine dell'$a)$ si osservi che, quasi dappertutto in D, è

$$\Phi(|p_n|, |q_n|) \to \Phi(|p_0|, |q_0|). \tag{12}$$

Si tratta poi di provare che gli integrali

$$\iint \Phi(|p_n|, |q_n|)dxdy, \qquad (n=1, 2,....) \tag{13}$$

sono, in D, funzioni equidoppiamente assolutamente continue.

A tal uopo si supponga dapprima che sia $\Phi \geqslant 0$.

Si proceda poi come nel $b)$ del luogo citato, considerando, in luogo dell'espressione (26), la seguente

$$\varphi_{s,t} = A_{s,t}\Phi\left(\frac{b_{s,t}}{A_{s,t}}, \frac{a_{s,t}}{A_{s,t}}\right),$$

ed alla fine del $b)$ si applichi, invece dell'ordinaria disuguaglianza di JENSEN, l'estensione già usata al n.° 1 del presente lavoro, dopo aver osservato che,

---

([13]) Se, per ogni coppia $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, $\Phi(p, q)$ è finita e continua insieme con le sue derivate parziali dei primi due ordini, alle condizioni che Φ sia convessa secondo JENSEN e non decrescente rispetto a ciascuna delle sue variabili può sostituirsi quella che si abbia, per ogni coppia di valori finiti e non negativi di p, q:

$$\Phi_p \geqslant 0, \qquad \Phi_q \geqslant 0, \qquad \Phi_{pp}\Phi_{qq} - \Phi_{pq}^2 \geqslant 0, \qquad \Phi_{pp} \geqslant 0, \qquad \Phi_{qq} \geqslant 0.$$

siccome Φ è non decrescente rispetto a ciascuna delle sue variabili, risulta

$$\Phi\left(\frac{1}{A_{s,t}}\left|\iint\limits_{R_{s,t}} p_0(x,y)dxdy\right|, \frac{1}{A_{s,t}}\left|\iint\limits_{R_{s,t}} q_0(x,y)dxdy\right|\right) \leqslant$$
$$\leqslant \Phi\left(\frac{1}{A_{s,t}}\iint\limits_{R_{s,t}} |p_0|\, dxdy, \frac{1}{A_{s,t}}\iint\limits_{R_{s,t}} |q_0|\, dxdy\right).$$

Sempre procedendo come nel luogo citato, ed applicando in c), in luogo della ordinaria disuguaglianza di JENSEN, l'estensione sopra ricordata, risulta che gli integrali (13) sono, in D, funzioni equidoppiamente assolutamente continue, nell'ipotesi $\Phi \geqslant 0$.

Per eliminare tale restrizione basta osservare che siccome $\Phi(p, q)$ è non decrescente rispetto a ciascuna delle sue variabili, si ha, per ogni coppia $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$,

$$\Phi(p, q) \geqslant \Phi(0, 0).$$

Allora, posto

$$\Phi_1(p, q) \equiv \Phi(p, q) - \Phi(0, 0), \tag{14}$$

Φ_1 è non negativa, è convessa secondo JENSEN e non decrescente rispetto a ciascuna delle sue variabili ed esiste finito l'integrale $\iint\limits_{D'} \Phi_1(|p_0|, |q_0|)\, dxdy$.

Pertanto, siccome le funzioni $z_n(x, y)$ non dipendono dalla Φ, per quanto si è già provato gli integrali $\iint \Phi_1(|p_0|, |q_0|)dxdy$, $(n=1, 2,....)$ sono, in D, funzioni equidoppiamente assolutamente continue.

Ne segue immediatamente che della stessa proprietà godono anche gli integrali (13), poichè dalla (14) risulta, per ogni coppia $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$,

$$|\Phi(p, q)| \leqslant |\Phi_1(p, q)| + |\Phi(0, 0)|.$$

Quindi per la (12) e per il teorema d'integrazione per serie di VITALI, il teorema enunciato è completamente provato.

Osservazione I. - Il teorema del presente numero contiene come casi particolari quelli dei n.^{i} 8 e 10 della Memoria (I).

Osservazione II. - Anche dal teorema del presente numero può dedursi un corollario analogo, *mutatis mutandis*, a quello dedotto al n.° 3 del presente lavoro dal teorema I.

Osservazione III. - È da rilevare che se la funzione $z_0(x, y)$ è costante sulla frontiera del campo D, anche l'enunciato del teorema del presente numero assume una forma più semplice, completamente analoga a quella del n.° 5.

6. - Teorema generale.

Sia D un campo aperto limitato del piano (x, y) e D' un altro campo aperto limitato contenente il campo chiuso $\overline{D}$, corrispondente a D. Sia $f(x, y, z, p, q)$ una funzione finita e continua in tutti i punti (x, y) del *campo chiuso $\overline{D}'$, corrispondente a D', e per tutti i valori finiti di z, p, q e sia $z_0(x, y)$ una funzione assolutamente continua in D', continua in tutto $\overline{D}'$ e tale che esista finito l'integrale*

$$I_{D'}[z_0]=\iint_{D'} f(x, y, z_0(x, y), p_0(x, y), q_0(x, y))dxdy,$$

con $p_0=\frac{\partial z_0}{\partial x}$, $q_0=\frac{\partial z_0}{\partial y}$.

Inoltre si supponga che si possa determinare: 1°) *una funzione $\Phi(x, y, xy, z, p, q)$, continua e convessa secondo Jensen nel campo A costituito da quelle sestuple x, y, xy, z, p, q, per le quali (x, y) è un punto qualunque di $\overline{D}'$, è $m' \leq z \leq M'$, ove con m' e M' si sono indicati rispettivamente il minimo e il massimo di $z_0(x, y)$ in $\overline{D}'$, e p, q è una coppia qualunque di numeri finiti;* 2°) *quattro numeri $\Lambda_1>0$, $\Lambda_2>0$, $\Lambda_1'>0$, Λ_2' in modo che risulti*

$$(15)\quad \Lambda_1'\,|\Phi(x, y, xy, z, p, q)|+\Lambda_2' \leq |f(x, y, z, p, q)| \leq \Lambda_1\,|\Phi(x, y, xy, z, p, q)|+\Lambda_2,$$

per ogni (x, y) di $\overline{D}'$, per ogni $m' \leq z \leq M'$, e per ogni coppia p, q.

Sotto queste ipotesi è possibile determinare una successione di funzioni $z_n(x, y)$, $(n=1, 2, \ldots)$, finite e continue insieme con le loro derivate parziali del primo ordine in tutto un campo aperto limitato D_1, contenente $\overline{D}$, tutto contenuto, insieme con la sua frontiera, in D', e opportunamente scelto, in modo che risulti, per $n \to \infty$,

$$z_n(x, y) \to z_0(x, y), \text{ uniformemente in } \overline{D},$$
$$I_D[z_n] \to I_D[z_0].$$

Per la (15) l'integrale $\iint_{D'} \Phi(x, y, xy, z_0, p_0, q_0)dxdy$ esiste finito.

In base alla dimostrazione del teorema I generalizzato (la quale, come si è indicato al n.° 2, è analoga a quello del teorema I), è possibile determinare una successione di funzioni $z_n(x, y)$, continue, insieme con le loro derivate parziali del primo ordine, in tutto un nuovo campo aperto limitato D_1, definito all'inizio della dimostrazione del teorema I, in modo che, in tutto $\overline{D}_1$, sia sempre $m' \leq z_n(x, y) \leq M'$, e inoltre

I) per $n \to \infty$, sia

$z_n(x, y) \to z_0(x, y)$, uniformemente in tutto $\overline{D}$,
$p_n(x, y) \to p_0(x, y)$, $\quad q_n(x, y) \to q_0(x, y)$, quasi dappertutto in D,

II) gli integrali

$$\iint \Phi(x, y, xy, z_n, p_n, q_n)dxdy, \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

siano, in D, funzioni equidoppiamente assolutamente continue.

Per la proprietà I) è, quasi dappertutto in D, per $n \to \infty$,

$$f(x, y, z_n, p_n, q_n) \to f(x, y, z_0, p_0, q_0);$$

e per la proprietà II) dalla (15) risulta che gli integrali $\iint f(x, y, z_n, p_n, q_n)dxdy$, $(n=1, 2,....)$ sono, in D, funzioni equidoppiamente assolutamente continue, e quindi, in virtù del noto teorema d'integrazione per serie di VITALI, l'asserto è provato.

Osservazione. - È da rilevare che *se si possono determinare quattro numeri $\Gamma_1>0$, $\Gamma_2>0$, $\Gamma_1'>0$, Γ_2', in modo che per ogni (x, y) di $\overline{D}'$, per ogni $m' \leq z \leq M'$, e per ogni coppia p, q sia soddisfatta almeno una delle tre seguenti condizioni*

$$\Gamma_1' \,|\Phi| + \Gamma_2' \leq f \leq \Gamma_1 \,|\Phi| + \Gamma_2,$$
$$\Gamma_1'\Phi + \Gamma_2' \leq |f| \leq \Gamma_1\Phi + \Gamma_2,$$
$$\Gamma_1'\Phi + \Gamma_2' \leq f \leq \Gamma_1\Phi + \Gamma_2,$$

si può anche soddisfare alla (15).

7. - Complementi al teorema generale.

α). Il teorema generale è ancora valido anche quando, in luogo della condizione (15), sia verificata la seguente condizione: *Si possano determinare: 1°) s funzioni $\Phi_i(x, y, xy, z, p, q)$, $(i=1, 2,...., s)$, ognuna delle quali sia continua e convessa secondo Jensen nel campo A (indicato al n.° 6); 2°) $2s+2$ numeri A_i, A_i', $(i=1, 2,...., s+1)$, tutti maggiori di zero, eccezion fatta per A'_{s+1}, in modo che si abbia*

$$\sum_{i=1}^{s} A_i' \,|\Phi_i| + A'_{s+1} \leq |f(x, y, z, p, q)| \leq \sum_{i=1}^{s} A_i \,|\Phi_i| + A_{s+1}, \tag{16}$$

per ogni (x, y) di $\overline{D}'$, per ogni $m' \leq z \leq M'$, e per ogni coppia di valori finiti di p, q.

β). *Il teorema generale è pure valido anche quando, in luogo della* (16), *sia verificata almeno una delle seguenti condizioni:*

$$\sum_{i=1}^{s} A_i' \,|\Phi_i| + A'_{s+1} \leq f(x, y, z, p, q) \leq \sum_{i=1}^{s} A_i \,|\Phi_i| + A_{s+1}, \tag{17}$$

$$\sum_{i=1}^{s} A_i'\Phi_i + A'_{s+1} \leq |f(x, y, z, p, q)| \leq \sum_{i=1}^{s} A_i\Phi_i + A_{s+1}, \tag{18}$$

$$\sum_{i=1}^{s} A_i'\Phi_i + A'_{s+1} \leq f(x, y, z, p, q) \leq \sum_{i=1}^{s} A_i\Phi_i + A_{s+1}. \tag{19}$$

Infatti se è verificata la (17), si può soddisfare anche alla (16); cioè la (17) è un caso particolare della (16).

Se poi è verificata la (18) o la (19), si può soddisfare anche alla seconda parte della (16) .Inoltre, tenendo conto che ognuna delle funzioni Φ_i, $(i=1, 2,...., s)$ è convessa secondo JENSEN, e tenendo presente la (18) [o rispettivamente la (19)] risulta che si possono determinare $3s$ numeri non negativi $\lambda_{i,j}$ $(i=1, 2,...., s;$ $j=1, 2, 3)$, in modo che per ogni (x, y) di $\overline{D}'$, per ogni $m' \leqslant z \leqslant M'$ e per ogni coppia di valori finiti di p, q risulti

$$|\Phi_i| \leqslant \frac{1}{A_i'} |f| + \lambda_{i,1} |p| + \lambda_{i,2} |q| + \lambda_{i,3}, \qquad (i=1, 2,...., s).$$

Quindi dall'esistenza dell'integrale $\iint\limits_{D'} f(x, y, z_0, p_0, q_0)dxdy$, e dall'assoluta continuità, in D', della funzione $z_0(x, y)$, si deduce che esistono finiti anche gli integrali $\iint\limits_{D'} \Phi_i(x, y, xy, z_0, p_0, q_0)dxdy$, $(i=1, 2,...., s)$. Basta poi procedere come al n.° 6.

γ). *È da rilevare che quando si sappia a priori che esiste finito almeno uno degli integrali*

$$\iint\limits_{D'} \Phi_i(x, y, xy, z_0, p_0, q_0)dxdy, \qquad (i=1, 2,...., s),$$

nella (16) (*o rispettivamente nella* (17), (18) *o* (19)), *può farsi uguale a zero il corrispondente numero* A_i'.

δ). *Si può osservare che se ognuna delle funzioni* Φ_i, $(i=1, 2,...., s)$, *soddisfa a tutte le ipotesi del teorema I generalizzato, si può senz'altro concludere che il teorema generale è valido per ogni integrale*

$$I_D[z_0] = \iint\limits_{D} f(x, y, z_0, p_0, q_0)dxdy,$$

f essendo una funzione tale che si possano determinare $s+1$ *numeri non negativi* A_i $(i=1, 2,...., s+1)$, *in modo che si abbia*

$$|f(x, y, z, p, q)| \leqslant \sum_{i=1}^{s} A_i |\Phi_i| + A_{s+1},$$

per ogni (x, y) *di* $\overline{D}'$, *per ogni coppia di valori finiti di* p, q, *e per ogni* $m' \leqslant z \leqslant M'$, m' *e* M' *essendo rispettivamente il minimo e il massimo di* $z_0(x, y)$ *in* $\overline{D}'$.

8. - Qualche nuovo risultato sull'approssimazione delle funzioni di una sola variabile.

Come caso particolare dei risultati ottenuti nel presente lavoro si ottiene anche qualche nuovo risultato per l'analogo problema per le funzioni di una variabile.

α). L'enunciato del teorema analogo a quello del n.° 1 è il seguente:

Sia $\Phi(x, y, y')$ *una funzione finita, continua e convessa secondo Jensen nel complesso delle sue tre variabili per ogni* $a' \leq x \leq b'$, *per ogni* $m \leq y \leq M$, *e per ogni valore finito di* y', *e sia* $y_0(x)$ *una funzione assolutamente continua nell'intervallo* (a, b), *con* $a' < a$, $b < b'$, *tale che sia* $m \leq y_0(x) \leq M$, *e che esista finito l'integrale (del Lebesgue)*

$$I_C = \int_a^b \Phi(x, y_0(x), y_0'(x))dx.$$

Sotto queste ipotesi è possibile determinare una successione di funzioni $y_n(x)$, $(n=1, 2,....)$, *finite e continue insieme con le loro derivate del primo ordine in tutti i punti di* (a, b), *in modo che risulti, per* $n \to \infty$,

$$y_n(x) \to y_0(x), \quad \textit{uniformemente in } (a, b),$$
$$\int_a^b \Phi(x, y_n, y_n')dx \to \int_a^b \Phi(x, y_0, y_0')dx.$$

Infatti, continuata la funzione $y_0(x)$ in tutto (a', b') ponendo

$$y_0(x) = y_0(a), \quad \text{per} \quad a' \leq x < a,$$
$$y_0(x) = y_0(b), \quad \text{per} \quad b < x \leq b',$$

in (a', a) e in (b, b') è sempre $y_0'(x) = 0$, e pertanto $y_0(x)$ risulta assolutamente continua in tutto (a', b'), e l'integrale

$$\int_{a'}^{b'} \Phi(x, y_0, y_0')dx$$

esiste finito.

Si indichi con λ il minore dei due numeri $a - a'$, e $b' - b$ e, scelto un numero $\delta > 0$ e $< \frac{\lambda}{4}$, si consideri la classe di funzioni

$$y_n(x) = \frac{1}{2h_n} \int_{-h_n}^{h_n} y_0(x+\xi)d\xi, \qquad (n=1, 2,....)$$

con $h_n = \frac{\delta}{n}$.

Queste funzioni sono finite e continue insieme con le loro derivate del primo ordine, e, per $n \to \infty$, è:

$$y_n(x) \to y_0(x), \quad \text{uniformemente in } (a, b),$$
$$y_n'(x) \to y_0'(x), \quad \text{quasi-dappertutto in } (a, b).$$

Pertanto, quasi-dappertutto in (a, b), è

$$\Phi(x, y_n, y_n') \to \Phi(x, y_0, y_0'),$$

e tutto il resto della dimostrazione del presente teorema può dedursi da quella del n°. 1.

β). Dal teorema dato in a) può dedursi, come al n.° 6, un teorema generale, i cui casi particolari possono essere assai utili.

γ). Tuttavia è da osservare che, a differenza dai risultati ottenuti dal TONELLI, le funzioni $y_n(x)$ non assumono per $x = a$, b gli stessi valori della $y_0(x)$ (14).

§ II.

9. - Esempi relativi alla Memoria (I).

Nel presente numero si danno alcuni esempi di funzioni che soddisfano ai teoremi della Memoria (I) (15).

a). Soddisfano alle condizioni del n.° 2 le seguenti funzioni:

$\sqrt{1+p^2+q^2}$; $\sqrt{p^2+q^2}$; $p\varphi_1(x, y, z) + q\varphi_2(x, y, z) + \varphi_3(x, y, z)$; $\sqrt[3]{p+q}$;

$\varphi_1(x, y, z)\sqrt{1+p^2} + \varphi_2(x, y, z)\sqrt[4]{1+q^4} + \varphi_3(x, y, z)\sqrt[6]{p^6+q^6} + \varphi_4(x, y, z)$;

$\sqrt[n]{p^n+q^n}$ (n numero intero positivo); $\dfrac{1+p^2+q^2}{\sqrt{2(1+p^2+q^2)}-1}$; $\lg(1+\sqrt{p^2+q^2})$; ecc.

β). Soddisfano alle condizioni del n.° 6 le seguenti funzioni:

p^2+q^2; $p^{2m}+q^{2n}$ (m, n numeri interi positivi); $(1+x^2+y^2)(p^2+q^2)\sqrt{p^4+q^4}$; $(1+x^2)p^6+(1+y^2)q^4+\varphi_1(x, y, z)$; $e^{\varphi_1(x,y,z)}(p^2+q^2)+\varphi_2(x, y, z)\sqrt{1+p^2+q^2}$; $(p^2+q^2)^n$ (n numero intero positivo); $e^{\varphi_1(x,y,z)}p^{2m}+e^{\varphi_2(x,y,z)}q^{2n}+\varphi_3(x, y, z)p^{\mu}+\varphi_4(x, y, z)q^{\nu}$ (m, n numeri interi positivi, e $0 \leq \mu < 2m$, $0 \leq \nu < 2n$); ecc.

γ). Soddisfano alle condizioni del n.° 7 le seguenti funzioni:

$\varphi_1(x, y, z)p + (1+z^2)p^{2m}$ (m numero intero positivo);

$[(x-y)^2 - z^2]p + \sqrt{1+(x-y)^2}q^{2n}$ (n numero intero positivo);

$\varphi_1(x, y, z)\sqrt{1+p^2+q^2} + e^{\varphi_2(x,y,z)}p^4$; ecc.

---

(14) È da rilevare che fra i metodi usati per l'approssimazione delle funzioni di una sola variabile e del relativo integrale I_C, quello che ha dato i migliori risultati, [Vedi L. TONELLI: *Sur une question du Calcul des Variations*, Rec. Math. Moscou, T. XXXIII, 1 (1926)], non sembra possa essere esteso alle funzioni di più variabili.

(15) In tutto il presente numero e nel seguente, $\varphi_i(x, y, z)$, $(i = 1, 2, ...)$ sono funzioni finite e continue delle tre variabili x, y, z.

δ). Soddisfano alle condizioni del n.° 8 le seguenti funzioni:

$(\sqrt{p^2+q^2})^{\mu}$ $(\mu \geqslant 1)$; $e^{\sqrt{p^2+q^2}}$; $e^{p^2+q^2}$; $e^{(\sqrt{p^2+q^2})^{\mu}}$ $(\mu \geqslant 1)$; $\sqrt{p^2+q^2}+e^{\sqrt{p^2+q^2}}$;

$(\sqrt{p^2+q^2})^{\mu}+e^{(\sqrt{p^2+q^2})^{\nu}}$ $(\mu \geqslant 1,\ \nu \geqslant 1)$; $(\sqrt{p^2+q^2})^{\frac{3}{2}} e^{(\sqrt{p^2+q^2})^{\frac{4}{3}}}$;

$(\sqrt{p^2+q^2})^{\lambda} e^{(\sqrt{p^2+q^2})^{\mu}+(\sqrt{p^2+q^2})^{\nu}}$ $(\lambda \geqslant 1,\ \mu \geqslant 1,\ \nu \geqslant 1)$; $\sqrt{p^2+q^2}\,\lg(1+\sqrt{p^2+q^2})$.

ε). Soddisfano alle condizioni del n.° 10 le seguenti funzioni: e^{p^2}; $e^{p^{2m}}$ (m numero intero positivo); $p^{2m}+e^{p^{2n}}$ (m, n numeri interi positivi); $p^{2l}e^{p^{2m}+p^{2n}}$ (l, m, n numeri interi positivi); ecc., nonchè le funzioni che si ottengono da queste ultime cambiando p in q.

ζ). Soddisfano alle condizioni del n.° 11 le seguenti funzioni

$e^{p^2+q^2}+e^{p^{2m}}+e^{q^{2n}}$ (m, n numeri interi positivi);

$e^{\varphi_1(x,y,z)}p^{2m_1}+e^{\varphi_2(x,y,z)}q^{2m_2}+e^{\varphi_3(x,y,z)}(\sqrt{p^2+q^2})^{m_3}$ (m_1, m_2, m_3 numeri interi positivi);

$e^{\varphi_1(x,y,z)+p^{2m_1}}+(1+z^2)q^{2m_2}+[1+(x-y)^2]e^{(\sqrt{p^2+q^2})^{m_3}}$ (m_1, m_2, m_3 numeri interi positivi); $\varphi_1(x,y,z)\sqrt{1+p^2+q^2}+e^{\varphi_2(x,y,z)+(\sqrt{p^2+q^2})^{m_1}}+e^{\varphi_3(y,x,z)+p^{2m_2}}+$ $+e^{\varphi_4(x,y,z)+q^{2m_3}}+\varphi_5(x,y,z)$ (m_1, m_2, m_3 numeri interi positivi); ecc.

10. - Esempi relativi al presente lavoro.

Nel presente numero si danno alcuni esempi di funzioni che soddisfano a qualche teorema del presente lavoro ([16]).

a). Soddisfano alle condizioni dei n.i 1 e 2 le seguenti funzioni:

$e^{(x+y+z+p+q)^2}$; $(x+y+z+p+q)^{2m}e^{(x+y+z+p+q)^{2n}}$ (m, n numeri interi positivi);

$e^{[(xy)^{2m_1}+z^{2m_2}+p^{2n_1}+q^{2n_2}]^{\mu}}$ (m_1, m_2, n_1, n_2 numeri interi positivi, e μ numero reale $\geqslant 1$);

$e^{[x^2+y^4+(xy)^8+z^6+p^4+q^{10}]^5}$; $e^{(x^2+z^4+p^2)^3}$; $e^{\sqrt{(p^4+q^2)^3}}$;

$(y^2+p^6+q^4)^{\mu}e^{(y^2+p^6+q^4)^{\nu}}$ $(\mu \geqslant 1,\ \nu \geqslant 1)$; $e^{a^2p^2+bq}$;

$e^{ap+b^2q^{2m}}$ (m numero intero positivo); $e^{a^2p^{2m}+b^2q^{2n}}$ (m, n numeri interi positivi);

$e^{(ap+bq+c)^{2m}}$; $e^{a^2p^2+2bpq+c^2q^2}$ (con $b^2 \leqslant a^2c^2$); $(ap+bq)^{2m}$ (m numero intero positivo); $e^{\sqrt{p^2+q^4}}$; $e^{\sqrt[2m]{p^{2m}+q^{2m}}}$ (m numero intero positivo);

$e^{\sqrt[4]{(xy)^4+p^4+q^4}}$; $e^{ap+bq+c\sqrt{p^2+q^2}}$; $e^{\sqrt[3]{p^4+q^4}}$; ecc., ove a, b, c sono delle costanti.

([16]) Si tenga presente che se $\Phi(u_1, \ldots, u_s)$ è una funzione convessa secondo JENSEN, e se $f(v)$ è una funzione convessa secondo JENSEN e non decrescente, anche la funzione $f(\Phi(u_1, \ldots, u_s))$ è convessa secondo JENSEN.

β). Soddisfano alle condizioni del n.° 3 le seguenti funzioni:

$\Phi(p) \equiv e^{p^3}$ (Si definisca $\Phi_0(p) \equiv \Phi(p)$, per $p \geqslant 0$; $\Phi_0(p) \equiv 1$, per $p \leqslant 0$. $\Phi_0(p)$ è convessa secondo JENSEN ed è $|\Phi - \Phi_0| \leqslant 1$);

$\Phi(p) \equiv e^{p^{2n+1}}$ (con n numero intero positivo). (Si definisca Φ_0 nel modo indicato nel precedente esempio);

$\Phi(p) = e^{4p^3+p^2+p}$ (Si definisca $\Phi_0(p) \equiv \Phi(p)$, per $p \geqslant 0$; $\Phi_0(p) \equiv 1$ per $p \leqslant 0$. $\Phi_0(p)$ è convessa secondo JENSEN ed è $|\Phi - \Phi_0| \leqslant 1$);

$\Phi(p) = e^{-p^3}$ (Si definisca $\Phi_0(p) \equiv \Phi(p)$, per $p \leqslant 0$; $\Phi_0(p) \equiv 1$, per $p \geqslant 0$. $\Phi_0(p)$ è convessa secondo JENSEN ed $|\Phi - \Phi_0| \leqslant 1$);

$\Phi(p) \equiv e^{p^5-p^3}$ (Si definisca $\Phi_0(p) \equiv \Phi(p)$ per $p \geqslant 1$; $\Phi_0(p) \equiv 1$, per $p \leqslant 1$. $\Phi_0(p)$ è convessa secondo JENSEN ed è $|\Phi - \Phi_0| < e$);

$\Phi(p) \equiv e^{\sqrt[3]{p^2}}$ (Si definisca $\Phi_0(p) \equiv \Phi(p)$, per $|p| \geqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}$; e $\Phi_0(p) \equiv e^{\frac{1}{2}}$, per $|p| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}$. $\Phi_0(p)$ è convessa secondo JENSEN ed è $|\Phi - \Phi_0| \leqslant e^{\frac{1}{2}} - 1$);

$\Phi(p, q) \equiv e^{(p+q)^3}$ (Si definisca $\Phi_0(p, q) \equiv \Phi(p, q)$, per $p + q \geqslant 0$; $\Phi_0(p, q) \equiv 1$, per $p + q \leqslant 0$. $\Phi_0(p, q)$ è convessa secondo JENSEN ed è $|\Phi - \Phi_0| \leqslant 1$);

$\Phi(p, q) \equiv e^{(ap+bq+c)^{2n+1}}$ (con n numero intero positivo). (Si definisca $\Phi_0(p, q) \equiv \equiv \Phi(p, q)$, per $ap + bq + c \geqslant 0$; $\Phi_0(p, q) \equiv 1$, per $ap + bq + c \leqslant 0$. $\Phi_0(p, q)$ è convessa secondo JENSEN ed è $|\Phi - \Phi_0| \leqslant 1$);

$\Phi(p, q) \equiv e^{\sqrt[3]{p+q}}$ (Si definisca $\Phi_0(p, q) \equiv \Phi(p, q)$, per $p + q \geqslant 8$; $\Phi_0(p, q) \equiv e^2$, per $p + q \leqslant 8$. $\Phi_0(p, q)$ è convessa secondo JENSEN ed è $|\Phi - \Phi_0| \leqslant e^2$);

ecc.

γ). Soddisfano alle condizioni dei n.$^{\text{i}}$ 6 e 7 le seguenti funzioni:

$e^{\varphi_1(x,y,z)+(xy+p+q)^2}$; $(1 + x^2 + y^2) e^{(x^2+y^4+q^6)^\mu}$ $(\mu \geqslant 1)$; $e^{\varphi_1(x,y,z)+(x+p)^{2m}} + e^{\varphi_2(x,y,z)+(y+q)^{2n}} + e^{\varphi_3(x,y,z)+[(xy)^2+p^4]^\mu} + e^{\varphi_4(x,y,z)+(z^8+q^6)^\nu} + \varphi_5(x, y, z)$ (m, n numeri interi positivi, e μ, ν numeri reali $\geqslant 1$); $(1 + \mathrm{tg}^2\, xyz) e^{(p+q)^4} + (x - y)\sqrt{1 + p^2 + q^2}$; $[2 + \mathrm{sen}\,(x + y)] e^{p^2+q^4} + [\lg\,(2 + z^2)] e^{p+q}$; $e^{z^3+(y^2+q^4)^3}$; $e^{\varphi_1(x,y,z)}(ap + bq + c)^{2m}$ (m numero intero positivo); $(x + y - z)^3 \sqrt{p^2 + q^2} + e^{\sqrt{p^2+q^6}}$; $xy\, \mathrm{sen}^2\,(p + q) + z\sqrt{z^2 + q^2} + e^{x+y}(p + q) \lg\,[1 + (p + q)^2]$; ecc.

δ). Dagli esempi dati nel presente n.° si possono dedurre facilmente esempi relativi ai risultati, indicati al n.° 8 del presente lavoro, relativamente al problema dell'approssimazione delle funzioni di una sola variabile.

È da rilevare che il procedimento indicato al n.° 8 permette di ottenere l'approssimazione di qualche integrale I_C che sfugge alle ipotesi anche dei più generali teoremi dati dal TONELLI; diamo qualche esempio:

$f(x, y, y') \equiv e^{y^4+y^2y'^2+y'^4}$. Questo integrale soddisfa alle condizioni del teorema del n.° 8 a), ma non soddisfa alla condizione [17]:

$$\left|\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y}\right| < \lambda + \Lambda M(x, y'), \tag{20}$$

ove λ e Λ sono due costanti e $M(x, y')$ è il minimo valore assoluto della funzione $f(x, y, y')$ per tutti i valori di y appartenenti al campo considerato;

$f(x, y, y') \equiv e^{(y^2+y'^2)^\mu}$ (con μ numero reale $\geqq 1$). Per $\mu = 1$ soddisfa alla (20), ma non vi soddisfa per $\mu > 1$, mentre, in entrambi i casi, rientra nel teorema del n.° 8 a);

$f(x, y, y') \equiv e^{(x^2+y^6+y'^4)^2}$, non soddisfa alla (20), ma rientra nel teorema del n.° 8 a) [18].

---

[17] Vedi L. TONELLI, luogo citato in [14].

[18] È da rilevare che, come dei risultati della Memoria (I) si è fatto uso [in S. CINQUINI: *Condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali doppi del Calcolo delle Variazioni su una data superficie*, Mem. R. Accademia d'Italia, V. IV, Estratto 10, pp. 271-337] per dare, sotto opportune ipotesi per la funzione f, le condizioni necessarie per la semicontinuità su una data superficie degli integrali $\iint_D f\left(x, y, z_0(x, y), \frac{\partial z_0}{\partial x}, \frac{\partial z_0}{\partial y}\right) dxdy$, i risultati del presente lavoro permettono di stabilire le condizioni stesse sotto ipotesi più generali per la funzione f.