Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Guido Fubini

Dimostrazione elementare della sviluppabilità in serie di Fourier di alcune funzioni

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 4, nº 1 (1935), p. 47-50
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1935_2_4_1_47_0>

DIMOSTRAZIONE ELEMENTARE DELLA SVILUPPABILITÀ IN SERIE DI FOURIER DI ALCUNE FUNZIONI

di GUIDO FUBINI (Torino).

La presente nota ha soltanto scopi didattici, e si propone di dimostrare nel modo più semplice la sviluppabilità in serie di FOURIER di quelle sole funzioni che si incontrano nelle applicazioni tecniche.

Per una funzione $f(x)$ periodica col periodo 2π e con derivate prima e seconda finite e continue, i coefficienti dello sviluppo di FOURIER

$$a_0+\sum_1^\infty (a_n \cos nx+b_n \operatorname{sen} nx) \tag{1}$$

sono dati, per $n>1$, da:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx=-\frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos nxdx$$

(e analoga per b_n) come si vede integrando due volte per parti. Se ne deduce tosto la convergenza della (1); e che questa serie valga proprio $f(x)$ si dimostra facilmente provando che, se $a_0=a_n=b_n=1$, allora $f(x)=0$.

Ma questo metodo tanto semplice è insufficiente nelle applicazioni più comuni: in queste si presentano funzioni periodiche che in ogni intervallo finito hanno un numero finito di discontinuità tutte di prima specie e che nei punti di continuità posseggono derivata prima continua tranne che in certi punti (in numero finito per ogni intervallo finito), ove esistono solo una derivata destra e una sinistra, o, come diremo brevemente, ove la derivata prima può avere una discontinuità di prima specie (punti angolari). Di tali funzioni vogliamo qui occuparci.

Come primo esempio studiamo la funzione (dispari) periodica $y(x)$ che nell'intervallo $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ vale $(\pi-x):2$.

Il suo sviluppo di FOURIER è

$$\varphi(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{1}+\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}+\frac{\operatorname{sen} 3x}{3}+\dots. \tag{2}$$

Sommiamo direttamente la (2). Detta

$$s_n(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{1}+\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}+\dots.+\frac{\operatorname{sen} nx}{n}$$

la somma dei suoi primi n termini, dalla $|\operatorname{sen} nx| \leqslant |nx|$ deduciamo che

$$|s_n(x)| \leqslant n\,|x|. \tag{3}$$

Posto

$$\varphi_n(\varrho) = \varrho\,\frac{\operatorname{sen} x}{1} + \varrho^2\,\frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \ldots + \varrho^n\,\frac{\operatorname{sen} nx}{n},$$

in cui per un momento consideriamo x costante, e ϱ variabile, troviamo:

$$\varphi_n(0) = 0\,; \qquad \varphi_n(1) = s_n(x)$$

$$s_n(x) = \varphi_n(1) - \varphi_n(0) = \int_0^1 \varphi_n'(\varrho)\,d\varrho \tag{4}$$

ove:

$$\varphi_n'(\varrho) = \operatorname{sen} x + \varrho \operatorname{sen} 2x + \ldots + \varrho^{n-1} \operatorname{sen} nx,$$

o, come dimostra un facile calcolo elementarissimo,

$$\varphi_n'(\varrho) = \frac{\operatorname{sen} x}{D} + \varrho^n\,\frac{(\varrho - \cos x)\operatorname{sen} nx - \operatorname{sen} x \cos nx}{D}, \tag{5}$$

quando sia posto

$$D = 1 - 2\varrho \cos x + \varrho^2 = (\varrho - \cos x)^2 + \operatorname{sen}^2 x, \tag{6}$$

almeno se il denominatore $D \neq 0$. Ora, se ε è un angolo acuto compreso tra 0 e mezzo angolo retto e se $\varepsilon \leqslant x \leqslant 2\pi - \varepsilon$, allora:

$$D \geqslant \operatorname{sen}^2 \varepsilon \quad \text{e quindi} \quad D > 0. \tag{7}$$

(Infatti, se x non è compreso tra $\pi - \varepsilon$ e $\pi + \varepsilon$, allora $\operatorname{sen}^2 x > \operatorname{sen}^2 \varepsilon$, e la (7) è immediata conseguenza di (6); se x è compreso tra $\pi - \varepsilon$ e $\pi - \varepsilon$, allora $\cos x < 0$, e da (6) segue $D \geqslant \cos^2 x \geqslant \cos^2 \varepsilon \geqslant \operatorname{sen}^2 \varepsilon$, perchè ε non supera mezzo angolo retto).

D'altra parte la frazione che moltiplica ϱ^n nel secondo membro di (5) non supera $1 : \sqrt{D}$ (¹), cioè non supera $1 : \operatorname{sen} \varepsilon$ in valore assoluto. Quindi per la (4)

$$s_n(x) = \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{(\varrho - \cos x)^2 + \operatorname{sen}^2 x}\,d\varrho + R_n$$

ossia:

$$s_n(x) = \frac{\pi - x}{2} + R_n, \tag{8}$$

(¹) Tale funzione ha infatti per denominatore il quadrato della lunghezza di un segmento le cui componenti cartesiane in un piano X, Y valgono $\varrho - \cos x$ e $\operatorname{sen} x$, e per numeratore la proiezione di tale segmento sulla retta, la cui anomalia è $nx - \frac{\pi}{2}$.

ove si è posto

$$R_n = \int_0^1 \varrho^n \frac{(\varrho - \cos x) \operatorname{sen} nx - \operatorname{sen} x \cos nx}{D} d\varrho$$

e quindi

(9) $$| R_n | \leq \int_0^1 \frac{\varrho^n}{\operatorname{sen} \varepsilon} d\varrho = \frac{1}{(n+1) \operatorname{sen} \varepsilon}.$$

Le (8), (9) provano che *per* $\varepsilon \leq x \leq 2\pi - \varepsilon$ *la serie* (2) *converge uniformemente verso* $(\pi - x) : 2$. E, poichè ε è arbitrariamente piccolo, *il valore di questa serie è* $(\pi - x) : 2$ *se* $0 < x < 2\pi$. Negli estremi $x = 0$, $x = 2\pi$ essa invece ha per valore lo zero, cioè la semisomma dei valori limiti della funzione data.

Ponendo in (8) e (9) $\varepsilon = \pi : 2n$, si trova che, per

$$\frac{\pi}{2n} \leq x \leq 2\pi - \frac{\pi}{2n}$$

si ha:

$$| R_n | = \left| \frac{\pi - x}{2} - s_n(x) \right| \leq \frac{1}{(n+1) \operatorname{sen} \frac{\pi}{2n}} < 1 \; .$$

e quindi

(10) $$| s_n(x) | < \frac{\pi}{2} + 1 < 3.$$

Altrettanto avviene per la (3) se $0 < x < \frac{\pi}{2n}$, e, come si riconosce scambiando x in $2\pi - x$ [col che $s_n(x)$ cambia solo di segno], anche se $2\pi - \frac{\pi}{2n} < x \leq 2\pi$. La (10) è vera dappertutto; e perciò le *somme parziali* $s_n(x)$ *sono equilimitate.* Se ne deduce facilmente che per ogni funzione continua $F(x)$ appartenente alla classe qui considerata vale anche *un teorema di integrazione per serie*

$$\int_0^{2\pi} F(x) \frac{\pi - x}{2} dx = \sum \int_0^{2\pi} F(x) \frac{\operatorname{sen} \nu x}{\nu} dx.$$

La funzione $\varphi(x)$ definita da (2) è periodica, discontinua solo nei punti che sono multipli di 2π; la $\varphi(x - a)$ dedottane scrivendo $x - a$ al posto di x sarà pure definita da uno sviluppo di FOURIER, sarà periodica e discontinua solo nei punti che differiscono da a per un multiplo di 2π.

Se una funzione $f(x)$ appartiene alla classe da noi considerata, noi potremo evidentemente dedurne una funzione *continua* $F(x)$ sottraendone una espressione del tipo

$$\sum_1^m k_i \varphi(x - a_i),$$

se $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sono i suoi punti di discontinuità compresi nell'intervallo $0 \leq x < 2\pi$, e se k_i è il quoziente ottenuto dividendo per π il salto di $f(x)$ nel punto a_i.

Ci siamo così ridotti allo studio di funzioni continue e periodiche che in $(0, 2\pi)$ hanno un numero finito di punti angolari. La somma dei primi $2n+1$ termini del corrispondente sviluppo di FOURIER si trova (integrando per parti) uguale a

$$\frac{1}{2\pi}\int_x^{x+2\pi} F(\xi)d\xi + \frac{1}{\pi}\sum_1^n \int_x^{x+2\pi} F(\xi)\cos\nu(\xi-x)d\xi =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_x^{x+2\pi} F(\xi)d\xi - \frac{1}{\pi}\sum_1^n \int_x^{x+2\pi} F'(\xi)\frac{\operatorname{sen}\nu(\xi-x)}{\nu}d\xi.$$

Il suo limite, per $n=\infty$, in conseguenza del precedente teorema di integrazione per serie, vale dunque

$$\frac{1}{2\pi}\int_x^{x+2\pi} F(\xi)d\xi - \frac{1}{\pi}\int_x^{x+2\pi} F'(\xi)\frac{\pi-\xi+x}{2}d\xi;$$

come si riconosce integrando di nuovo per parti, questo limite è proprio $F(x)$.

c. d. d.